Универсально-экзистенциальная эквивалентность линейных групп

П. ПРИТУП
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ppritup2002@mail.ru

УДК 510.67+512.54.0+512.743

Ключевые слова: $(\forall\,\exists)$-эквивалентность, элементарная эквивалентность, линейные группы над полями.

Аннотация

В работе доказано, что группы GL и SL над бесконечными полями характеристики, не равной двум, $(\forall\,\exists)$-эквивалентны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают и соответствующие поля $(\forall\,\exists)$-эквивалентны.

Abstract

P. Pritup, Universal-existential equivalence of linear groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 1, pp. 205—212.

In this paper, we prove that the groups GL and SL over infinite fields of characteristics not equal to 2 are $(\forall\,\exists)$-equivalent if and only if their dimensions coincide and the corresponding fields are $(\forall\,\exists)$-equivalent.

1. Введение

Данная работа посвящена исследованию универсально-экзистенциальной эквивалентности ($(\forall\,\exists)$-эквивалентности) полных линейных групп над полями.

Первый результат, связанный с элементарной эквивалентностью, был получен А. И. Мальцевым [2] в 1961 году. Главным результатом стала следующая теорема.

Теорема 1.1 (А. И. Мальцев). *Группа $\mathcal{G}_m(\mathbb{K}_1)$ элементарно эквивалентна группе $\mathcal{G}_n(\mathbb{K}_2)$ ($\mathcal{G} = \mathrm{GL}, \mathrm{PGL}, \mathrm{SL}, \mathrm{PSL}$, $m, n \geqslant 3$, $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$ — бесконечные поля) тогда и только тогда, когда $m = n$ и $\mathbb{K}_1 \equiv \mathbb{K}_2$.*

Дальнейшие исследования в этой области не только улучшили результаты А. И. Мальцева (аналогичные теоремы были доказаны для $n = 2$, а также для линейных групп над различными широкими классами колец [6, 7], для групп Шевалле над кольцами [8]), но и затронули другие виды логических эквивалентностей.

Фундаментальная и прикладная математика, 2024, том 25, № 1, с. 205—212.

Можно также проверить, чему равносильно равенство более ограниченных теорий. Например, естественным аналогом является теорема Мальцева для универсальных (или, что равносильно, экзистенциальных) формул. Такая эквивалентность (совпадение теорий, состоящих только из универсальных предложений), называется *универсальной эквивалентностью*.

Одним из самых первых и завершённых результатов по универсальной эквивалентности был критерий универсальной эквивалентности упорядоченных абелевых групп, установленный Ю. Ш. Гуревичем и А. И. Кокориным в [3] в 1963 году. Затем Н. Г. Хисамиевым в [5] были получены результаты для структурно упорядоченных абелевых групп и, наконец, П. С. Эклофом в [9] — для произвольных абелевых групп.

Аналогом теорем Мальцева для универсальной эквивалентности являются критерии универсальной эквивалентности линейных групп над полями и локальными кольцами для случаев $\mathcal{G} = \mathrm{GL}, \mathrm{SL}$, полученные Е. И. Буниной и Г. А. Калеевой в [1].

В данной работе мы исследуем логическую эквивалентность, лежащую между элементарной и универсальной эквивалентностями по выразительности соответствующих теорий.

Универсально-экзистенциальной эквивалентностью называется эквивалентность, при которой совпадают теории, состоящие из предложений с не более чем одной переменой кванторов.

В случае произвольных абелевых групп П. С. Эклоф в [9] показал, что такая эквивалентность совпадает с элементарной эквивалентностью.

Мы докажем критерий $(\forall\,\exists)$-эквивалентности и аналог теоремы Мальцева для GL и SL над бесконечными полями характеристики, не равной двум.

2. Предварительные сведения

Будем говорить, что формула φ *имеет не более одной перемены кванторов*, если φ имеет вид

$$\forall\, x_1 \ldots \forall\, x_n \,\exists\, y_1 \ldots \exists\, y_m \;\psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m),$$

где ψ — бескванторная формула, причём n и m могут равняться нулю. Порядок кванторов может быть и иным, но $(\exists\,\forall)$-формулы получаются из $(\forall\,\exists)$-формул навешиванием отрицания:

$$\neg(\exists\,\bar{v}\,\forall\,\bar{w}\;\psi) \Longleftrightarrow \forall\,\bar{v}\,\exists\,\bar{w}\;\neg\psi.$$

В дальнейшем будем рассматривать $(\forall\,\exists)$-формулы.

Определение 2.1. Две алгебраические системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ сигнатуры Σ $(\forall\,\exists)$-*эквивалентны*, если для любого предложения φ, имеющего не более одной перемены кванторов, верно

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Множество $(\forall\,\exists)$-предложений $\{\varphi \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$ сигнатуры Σ образует $(\forall\,\exists)$-теорию системы $\mathfrak{A}$ и обозначается $\mathrm{Th}_{\forall\,\exists}(\mathfrak{A})$. Тогда

$$\mathfrak{A} \equiv_{\forall\,\exists} \mathfrak{B} \Longleftrightarrow \mathrm{Th}_{\forall\,\exists}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}_{\forall\,\exists}(\mathfrak{B}).$$

Определение 2.2. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — алгебраические системы сигнатуры Σ с носителями A и B и f — отображение $A \to B$. Отображение f называется *частичным изоморфизмом* $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если выполнены следующие условия:

1) $\mathrm{dom}(f) \subset A$, $\mathrm{Im}(f) \subset B$;
2) f инъективен;
3) f сохраняет предикаты, функции и константы:
   а) для $P^n \in \Sigma$ и $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathrm{dom}(f)$
   $$P_{\mathfrak{A}} a_0 \ldots a_{n-1} \Longleftrightarrow P_{\mathfrak{B}} f(a_0) \ldots f(a_{n-1});$$
   б) для $F^n \in \Sigma$ и $a_0, \ldots, a_{n-1}, a \in \mathrm{dom}(f)$
   $$F_{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = a \Longleftrightarrow F_{\mathfrak{B}}\big(f(a_0), \ldots, f(a_{n-1})\big) = f(a);$$
   в) для $c \in \Sigma$ и $a \in \mathrm{dom}(f)$
   $$c_{\mathfrak{A}} = a \Longleftrightarrow c_{\mathfrak{B}} = f(a).$$

Частичный изоморфизм с конечной областью определения будем называть *конечным частичным изоморфизмом*.

Для доказательства критерия $(\forall\,\exists)$-эквивалентности нам потребуется воспользоваться аналогичным критерием для $\forall$-эквивалентности.

Теорема 2.1 (критерий универсальной эквивалентности [4]). *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — системы сигнатуры Σ. Для того чтобы системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ были универсально эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы для любой конечной подсигнатуры $\Sigma_1 \subset \Sigma$ любая конечная подсистема системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ_1 была частично изоморфна некоторой подсистеме системы $\mathfrak{B}$ той же сигнатуры и наоборот.*

Сформулируем и докажем критерий $(\forall\,\exists)$-эквивалентности.

Теорема 2.2 (критерий $(\forall\,\exists)$-эквивалентности). *Две системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ сигнатуры Σ $(\forall\,\exists)$-эквивалентны тогда и только тогда, когда для любой конечной подсигнатуры $\Sigma_1 \subset \Sigma$ и для любой конечной подсистемы в $\mathfrak{A}$ существует конечный частичный изоморфизм* **f** *с подсистемой в $\mathfrak{B}$ той же сигнатуры и для любой конечной подсистемы в $\mathfrak{B}$ существует конечный частичный изоморфизм **g**, такой что ограничение **g** на область значений* **f** *совпадает с* **f**, *с подсистемой в $\mathfrak{A}$ и наоборот.*

Доказательство. Докажем достаточность, а именно что из существования изоморфизмов f и g следует совпадение $(\forall\,\exists)$-теорий.

Пусть

$$\mathfrak{A} \models \forall\, x_1 \ldots \forall\, x_n\, \exists\, y_1 \ldots \exists\, y_m\ \psi(\bar{x}, \bar{y}),$$

где ψ — бескванторная формула. Покажем, что

$$\mathfrak{B} \models \forall\, z_1 \ldots \forall\, z_n\, \exists\, w_1 \ldots \exists\, w_m\ \psi(\bar{z}, \bar{w}).$$

Для любого вектора $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in B^n$ построим вектор

$$\bar{w} = (w_1, \ldots, w_m) \in B^m \colon \mathfrak{B} \models \forall\, z_1 \ldots \forall\, z_n \,\exists\, w_1 \ldots \exists\, w_m \;\psi(\bar{z}, \bar{w}).$$

Компоненты вектора $\bar{z}$ образуют конечную подсистему в $\mathfrak{B}$, $\{z_1, \ldots, z_n\} = Z_0$. Тогда по условию существует конечный частичный изоморфизм

$$f \colon Z_0 \to A, \quad f(z_i) = x_i.$$

Раз в $\mathfrak{A}$ выполняется наше предложение, то для $(x_1, \ldots, x_n)$ существует вектор $(y_1, \ldots, y_m)$: $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{x}, \bar{y})$. По условию существует конечный частичный изоморфизм

$$g \colon \{y_1, \ldots, y_m\} = Y_0 \to B, \quad g(y_i) = w_i.$$

Нетрудно заметить, что $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{z}, \bar{w})$, что и требовалось.

Докажем необходимость. Пусть $\mathfrak{A} \equiv_{\forall\,\exists} \mathfrak{B}$. Тогда для любой формулы φ, которая имеет не более одной перемены кванторов, верно

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Наша цель — построить изоморфизмы f и g из условия теоремы.

Воспользуемся критерием $\forall$-эквивалентности. Мы можем это сделать, так как $\mathrm{Th}_\forall(\mathfrak{A}) \subset \mathrm{Th}_{\forall\,\exists}(\mathfrak{A})$. Для любой конечной системы $A_0 = \{a_1, \ldots, a_n\}$ существует частичный изоморфизм $f \colon A_0 \to B_0$, где $B_0 = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Запишем также всевозможные соотношения на элементы A_0. Важно отметить, что их количество конечно, так как само множество A_0 есть конечная система и подсигнатура Σ_1 конечна. Назовём конъюнкцию этих соотношений $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$. Очевидно, что $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_n)$; так как f — изоморфизм, то верно, что $\mathfrak{B} \models \Phi(b_1, \ldots, b_n)$.

Построим частичный изоморфизм g из произвольной подсистемы $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$. Выберем произвольную систему $C_0 = \{c_1, \ldots, c_m\} \subset \mathfrak{B}$. Запишем все соотношения сигнатуры Σ_1, верные для элементов системы $B_0 \cup C_0$; назовём их конъюнкцию $\Psi(b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m)$, $\mathfrak{B} \models \Psi(b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m)$. Понятно, что если мы построим изоморфизм $g \colon C_0 \to D_0 = \{d_1, \ldots, d_m\}$, то $\mathfrak{A} \models \Psi(a_1, \ldots, a_n, d_1, \ldots, d_m)$ по свойствам изоморфизмов f и g. Важно помнить, что они согласованные, т. е. если какой-то элемент a_i равен $g(c_j)$, то $c_j = f(a_i) = b_k$ для каких-то i, j, k. Верно и обратное: если существует такая подмодель $T = \{t_1, \ldots, t_m\}$, что $\mathfrak{A} \models \Psi(a_1, \ldots, a_n, t_1, \ldots, t_m)$, то можно построить частичный изоморфизм $h \colon C_0 \to T$. Запишем предложение

$$\forall\, x_1, \ldots \forall\, x_n \;\big(\Phi(x_1, \ldots, x_n) \to \exists\, y_1, \ldots, \exists\, y_m \;\Psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)\big),$$

оно эквивалентно

$$\forall\, x_1, \ldots \forall\, x_n \exists\, y_1, \ldots, \exists\, y_m \big(\neg\Phi(x_1, \ldots, x_n) \vee \Psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)\big).$$

Назовём это предложение Θ. Из того, что мы отмечали выше, получаем $\mathfrak{B} \models \Theta$. Θ — это предложение с одной переменой кванторов. $\mathfrak{A} \equiv_{\forall\,\exists} \mathfrak{B}$, следовательно, $\mathfrak{A} \models \Theta$. Возьмём в качестве системы $x_1, \ldots, x_n$ подсистему A_0. Имеем, что

$\Phi(a_1, \ldots, a_n)$ верно в $\mathfrak{A}$. Тогда из Θ следует, что существует система, которая вместе с A_0 удовлетворяет предложению Ψ. Пусть это система D_0. Как описывалось ранее, если система $\{a_1, \ldots, a_n, d_1, \ldots, d_m\}$ удовлетворяет Ψ, то существует изоморфизм между $A_0 \cup D_0$ и $B_0 \cup C_0$. Учитывая, что изоморфизм между A_0 и B_0 — это f, получаем, что изоморфизм, дополняющий его до изоморфизма между $A_0 \cup D_0$ и $B_0 \cup C_0$, и будет искомый изоморфизм g. □

Теперь перейдём к основной теореме данной работы.

Теорема 2.3. *Пусть K_1 и K_2 — бесконечные поля,* $\operatorname{char} K_1, \operatorname{char} K_2 \neq 2$. *Группа $\mathbf{G}_n(K_1)$ $(\forall\,\exists)$-эквивалентна $\mathbf{G}_m(K_2)$ $(\mathbf{G} = \mathrm{GL}, \mathrm{SL})$, $n, m \geqslant 3$, тогда и только тогда, когда $n = m$ и $K_1 \equiv_{\forall\,\exists} K_2$.*

Докажем для начала достаточность.

Предложение 2.1. *Пусть K_1 и K_2 — бесконечные поля, $K_1 \equiv_{\forall\,\exists} K_2$. Тогда для любого натурального n верно, что $\mathbf{G}_n(K_1) \equiv_{\forall\,\exists} \mathbf{G}_n(K_2)$, где $\mathbf{G} = \mathrm{GL}, \mathrm{SL}$.*

Доказательство. Начнём со случая $\mathbf{G} = \mathrm{GL}$. Воспользуемся стандартным вложением групп матриц в поле:

$$\mathrm{GL}_n(K_1) = \left\{(a_1, \ldots, a_{n^2}) \in K_1^{n^2} \mid \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} (-1)^\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{(i-1)n+\sigma(i)} \neq 0\right\}.$$

Умножение в $\mathrm{GL}_n(K_1)$ задаётся формулой

$$(a_1, \ldots, a_{n^2}) \cdot (b_1, \ldots, b_{n^2}) = (c_1, \ldots, c_{n^2}),$$

где

$$c_k = c_{i(n-1)+j} = \sum_{l=1}^{n} a_{i(n-1)+l} \cdot b_{(l-1)n+j}, \quad k = 1, \ldots, n^2, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Мы задали группу матриц как подсистему в $K_1^{n^2}$, т. е. любую конечную подсистему в $\mathrm{GL}_n(K_1)$ мы можем задать как конечную подсистему в $K_1^{n^2}$ (аналогично с $\mathrm{GL}_n(K_2)$ и K_2). Поля K_1 и K_2 $(\forall\,\exists)$-эквивалентны, тогда для них выполняется критерий $(\forall\,\exists)$-эквивалентности и для любой конечной подсистемы в $K_1^{n^2}$ существует частичный изоморфизм с подсистемой в $K_2^{n^2}$ и для любой конечной системы в $K_2^{n^2}$ существует изоморфизм, согласованный с первым, с подсистемой в $K_1^{n^2}$. Остаётся заметить, что изоморфизм сохраняет групповые свойства, т. е. если мы будем рассматривать изоморфизм для конечной подсистемы в $\mathrm{GL}_n(K_1)$, то он будет переводить её в конечную подсистему в $\mathrm{GL}_n(K_2)$. Таким образом, выполняется критерий $(\forall\,\exists)$-эквивалентности для групп.

Случай $\mathbf{G} = \mathrm{SL}$ доказывается аналогично, нужно лишь потребовать, чтобы определитель равнялся единице. □

3. $(\forall\,\exists)$-эквивалентность групп над полями характеристики, отличной от 2

В этой части мы докажем оставшуюся часть теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть K и L — бесконечные поля,* $\operatorname{char} K, \operatorname{char} L \neq 2$, *группы* $\mathbf{G}_n(K)$ *и* $\mathbf{G}_m(L)$ ($\mathbf{G} = \mathrm{GL}, \mathrm{SL}$, $n, m \geqslant 3$) $(\forall\,\exists)$*-эквивалентны. Тогда $m = n$ и поля K и L $(\forall\,\exists)$-эквивалентны.*

Для начала из $(\forall\,\exists)$-эквивалентности групп выведем совпадение их размерностей.

Лемма 3.1. *Пусть K — поле,* $\operatorname{char} K \neq 2$, *$n$ — натуральное число. В группе* $\mathrm{GL}_n(K)$ *существует подмножество максимум из $2^n - 1$ попарно коммутирующих матриц порядка 2. В случае* $\mathrm{SL}_n(K)$ *таких матриц $2^{n-1} - 1$.*

Доказательство. Существует базис, в котором все попарно коммутирующие матрицы порядка 2 диагонализируемы и имеют вид $\operatorname{diag}[\pm 1, \ldots, \pm 1]$. Тогда в $\mathrm{GL}_n(K)$ $2^n - 1$ попарно коммутирующих матриц порядка 2.

В случае $\mathrm{SL}_n(K)$ нужно исключить из диагональных матриц те, у которых определитель отрицательный. Таких ровно половина. □

Предложение 3.1. *Пусть бесконечные поля K и L имеют характеристику, отличную от 2, и* $\mathbf{G}_n(K) \equiv_\forall \mathbf{G}_m(L)$ ($\mathbf{G} = \mathrm{GL}, \mathrm{SL}$). *Тогда $n = m$.*

Доказательство. Выпишем формулу

$$\exists A_1 \ldots \exists A_{2^N-1} \Bigg(\bigwedge_{i=1}^{2^N-1} \neg(A_i = E) \wedge \bigwedge_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{2^N-1} \neg(A_i = A_j) \wedge \\ \wedge \bigwedge_{i,j=1}^{2^N-1} (A_i A_j = A_j A_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^{2^N-1} (A_i^2 = E) \Bigg). \quad (1)$$

Так как группы $(\forall\,\exists)$-эквивалентны, то наибольшее N, такое что формула (1) (она, очевидно, имеет не более одной перемены кванторов) истинна в группах, одинаково для обеих групп. В случае GL $n = m = N$, а в случае SL $n = m = N + 1$. □

Определение 3.1. Для данного элемента α поля K назовём *матрицей сложения* матрицу $E + \alpha E_{12}$, а *матрицей умножения* — $\operatorname{diag}[\alpha, 1/\alpha, \ldots, 1]$.

Лемма 3.2. *При умножении матриц сложения, соответствующих элементам α, β, получается матрица сложения элемента $\alpha + \beta$, при умножении соответствующих матриц умножения — матрица умножения $\alpha\beta$.*

Доказательство. Непосредственная проверка. □

Для доказательства теоремы 3.1 нам потребуется техническое предложение.

Предложение 3.2 [1]. *Пусть K, L — бесконечные поля, $\operatorname{char} K, \operatorname{char} L \neq 2$. При любом конечном частичном изоморфизме между группами $\mathbf{G}_n(K)$ и $\mathbf{G}_n(L)$ ($\mathbf{G} = \mathrm{GL}, \mathrm{SL}$), область определения которого содержит конечный набор матриц, использованных для доказательства предыдущих лемм, матрицы сложения переходят в матрицы сложения, а матрицы умножения переходят в матрицы умножения, причём если две матрицы соответствовали одному элементу поля K, то и их образы будут соответствовать одному элементу поля L.*

Доказательство теоремы 3.1. Совпадение порядков групп доказано в предложении 3.1. Используя критерий $(\forall\exists)$-эквивалентности, покажем, что $K \equiv_{\forall\exists} L$.

Пусть $K_0 \subset K$ — конечная подмодель поля K. Найдём конечно частично изоморфную ей подмодель $L_0 \subset L$. Пусть $G_0 \subset \mathbf{G}_n(K)$ содержит все матрицы сложения $E + \alpha E_{12}$ и умножения $\operatorname{diag}[\alpha, 1/\alpha, \ldots, 1]$ элементов K_0 и все вспомогательные матрицы, с помощью которых выделялись матрицы сложения и умножения и доказывалось, что подобные матрицы переходят в подобные. Тогда из первого условия критерия $(\forall\exists)$-эквивалентности для групп $\mathbf{G}_n(K)$ и $\mathbf{G}_n(L)$ следует, что существует множество $G_1 \subset \mathbf{G}_n(L)$, частично изоморфное G_0, причём такой изоморфизм сохраняет вид матриц сложения и умножения, так как мы потребовали присутствия вспомогательных матриц в G_0. Тогда матрицы умножения и сложения перешли в подобные матрицы, причём если матрицы сложения S и P соответствовали одному α, то их образы соответствуют одному β в L. Тогда L_0 — множество всех элементов поля L, которые соответствуют парам образов матриц сложения и умножения для всех элементов из K_0. Понятно, что для любой подсистемы L_1 в L будет существовать аналогичный изоморфизм с подсистемой K_1 в K; для применения критерия нам нужно, чтобы он был согласован с предыдущим. Это так, потому что сами группы универсально-экзистенциально эквивалентны, т. е. обратный изоморфизм подмоделей групп будет согласован с изначальным, а также потому, что у нас есть явное соответствие: элемент поля — пара матриц сложения и умножения. Применяем критерий, теорема доказана. □

Автор выражает искреннюю благодарность Елене Буниной за постановку задачи и постоянное внимание к данной работе.

Литература

[1] Бунина Е. И., Калеева Г. А. Универсальная эквивалентность общих и специальных линейных групп над полями // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 3. — С. 73—106.

[2] Бунина Е. И., Михалёв А. В., Пинус А. Г. Элементарная и близкие к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр. — М.: МЦНМО, 2015.

[3] Гуревич Ю. Ш., Кокорин А. И. Универсальная эквивалентность упорядоченных абелевых групп // Алгебра и логика. — 1963. — Т. 2, № 1. — С. 37—39.

[4] Тайманов А. Д. Характеристики аксиоматизируемых классов моделей // Алгебра и логика. — 1962. — Т. 1, № 4. — С. 5—31.

[5] Хисамиев Н. Г. Универсальная теория структурно упорядоченных абелевых групп // Алгебра и логика. — 1966. — Т. 5, № 3. — С. 71—76.

[6] Beidar C. I., Mikhalev A. V. On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups // Contemp. Math. — 1992. — Vol. 131. — P. 29—35.

[7] Bragin V. A., Bunina E. I. Elementary equivalence of linear groups over rings with a finite number of central idempotents and over Boolean rings // J. Math. Sci. — 2014. — Vol. 201. — P. 438—445.

[8] Bunina E. I. Isomorphisms and elementary equivalence of Chevalley groups over commutative rings // Sb. Math. — 2019. — Vol. 210, No. 8. — P. 1067—1091.

[9] Eklof P. C. Some model theory for Abelian groups // J. Symb. Logic. — 1972. — Vol. 37. — P. 335—342.