Структура топологически артиновых слева колец, в которых все строго главные левые идеалы замкнуты

В. В. ТЕНЗИНА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: viktoria.tenzina@math.msu.ru

УДК 512.556+512.552.12+512.552.13+512.552.2

Ключевые слова: топологические кольца, топологически примитивные кольца, топологически артиновы кольца.

Аннотация

В данной статье изучается структура топологически артиновых слева колец, у которых все строго главные левые идеалы замкнуты. Под строго главными левыми идеалами кольца R подразумеваются левые идеалы вида Rx для некоторого элемента кольца x. Доказывается, что любое топологически артиново кольцо, у которого все строго главные левые идеалы замкнуты, можно представить как фактор-кольцо топологически прямой суммы колец, изоморфных некоторым кольцам всех матриц фиксированного конечного порядка над некоторым телом, причём фактор-кольцо берётся по нильпотентному идеалу.

Abstract

V. V. Tenzina, The structure of topologically left Artinian rings in which all strictly principal left ideals are closed, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 1, pp. 213—217.

This paper studies the structure of topologically left Artinian rings in which all strictly principal left ideals are closed. By a strictly principal left ideal of some ring R we mean a left ideal of the form Rx for some element x of the ring. It is proved that any topologically Artinian ring in which all strictly principal left ideals are closed can be represented as a factor ring of a topologically direct sum of rings isomorphic to some rings of all matrices of a fixed finite order over some skew field, where the factor ring is taken over the maximal nilpotent ideal.

Понятие топологически артиновых колец, т. е. колец, удовлетворяющих условию обрыва убывающей цепочки замкнутых левых идеалов, было введено в статье автора [3]. Для произвольного топологического кольца R топологический радикал Джекобсона был определён в [1] как множество всех элементов кольца, аннулирующих всякий топологически неприводимый R-модуль. В [2, теорема 2] доказано, что топологический радикал Джекобсона топологически артинова слева кольца нильпотентен. Более того, для топологически артиновых слева ограниченных слева колец в той же статье доказана следующая структурная теорема.

Теорема 1 [2, теорема 5]. *Пусть R — ограниченное справа топологически артиново слева кольцо. Тогда идеал $\operatorname{top} J(R)$ нильпотентен, а кольцо $R/\operatorname{top} J(R)$ является дискретным артиновым слева полупростым кольцом.*

Топологически простое топологически артиново слева кольцо может быть устроено неочевидным образом. Ясно, что всякое топологически простое коммутативное кольцо топологически артиново. А такие кольца бывают разными. Например, любое всюду плотное подкольцо топологического поля будет топологически простым. Поэтому при изучении топологически артиновых колец приходится накладывать дополнительные условия. В данной работе рассматриваются топологически артиновы кольца, у которых все строго главные левые идеалы замкнуты. Под строго главными левыми идеалами некоторого кольца R подразумеваются левые идеалы вида Rx для некоторого элемента кольца x.

Лемма 1. *Пусть R — топологическое кольцо без нильпотентных идеалов, такое что для всякого $x \in R$ левый идеал Rx замкнут, а ρ — минимально замкнутый левый идеал кольца R. Тогда $\rho = Re$ для некоторого идемпотента $e \in R$, при этом сам идеал ρ минимален.*

Доказательство. Так как $\rho^3 \neq \{0\}$, то существуют элементы $x, y \in \rho$, такие что $Ryx \neq \{0\}$. Замкнутый ненулевой левый идеал Rxy лежит в ρ, а следовательно, $Ryx = \rho$. Таким же образом $Ry = \rho$. В таком случае найдётся элемент $e \in Ry = \rho$, такой что $ex = x$. Заметим, что $(e^2 - e)x = 0$. Рассмотрим замкнутый левый идеал $\rho_0 = \{a \in \rho \mid ax = 0\}$. Этот идеал, лежащий в ρ, не совпадает с ρ, так как $\rho x \neq \{0\}$. Но тогда $\rho_0 = \{0\}$. Поэтому $e^2 - e = 0$. $e = e^2 \in Re \subseteq \rho$. Ненулевой левый идеал Re замкнут. Таким образом, $\rho = Re$. □

Лемма 2. *Пусть R — топологически артиново слева кольцо без нильпотентных идеалов, такое что для всякого $x \in R$ левый идеал Rx замкнут, а ρ — ненулевой замкнутый левый идеал в R. Тогда идеал ρ содержит ненулевой идемпотент.*

Доказательство. Существует минимально замкнутый левый идеал ρ_0, лежащий в ρ. По лемме 1 существует идемпотент $e \in \rho_0$, такой что $\rho_0 = eR$. □

Лемма 3. *Пусть R — топологически артиново слева кольцо без нильпотентных идеалов, такое что для всякого $x \in R$ левый идеал Rx замкнут, а ρ — замкнутый левый идеал. Тогда $\rho = Re$ для некоторого идемпотента $e \in R$.*

Доказательство. По лемме 2 в ρ существует ненулевой идемпотент. Каждому идемпотенту e поставим в соответствие замкнутый левый идеал

$$A(e) = \{x \in \rho \mid xe = 0\}.$$

Множество всех таких левых идеалов $A(e)$ не пусто. Следовательно, существует минимальный элемент $A(e_0)$.

Пусть $A(e_0) \neq \{0\}$. Следовательно, по лемме 2 левый идеал $A(e_0)$ содержит идемпотент e_1. Тогда $e_1 e_0 = 0$. Так как

$$\begin{aligned}(e_0 + e_1 - e_0e_1)(e_0 + e_1 - e_0e_1) =\\ = e_0^2 + e_1e_0 - e_0e_1e_0 + e_0e_1 + e_1^2 - e_0e_1e_1 - e_0e_0e_1 - e_1e_0e_1 + e_0e_1e_0e_1 =\\ = e_0 + e_0e_1 + e_1 - e_0e_1 - e_0e_1 = e_0 + e_1 - e_0e_1,\end{aligned}$$

элемент $e = e_0 + e_1 - e_0e_1 \in \rho$ является идемпотентом. Пусть $xe = 0$ для некоторого $x \in \rho$. Тогда $xee_0 = 0$. Учитывая, что $ee_0 = (e_0 + e_1 - e_0e_1)e_0 = e_0$, получаем $xe_0 = 0$. Таким образом, $A(e) \subseteq A(e_0)$. С другой стороны, $e_1 e = = e_1(e_0 + e_1 - e_0e_1) = e_1 \neq 0$, т. е. $e_1 \notin A(e)$, в то время как $e_1 \in A(e_0)$. Получили противоречие.

Итак, $A(e_0) = \{0\}$. Так как $(x - xe_0)e_0 = 0$ для любого $x \in \rho$, то $x = xe_0$. Но тогда $\rho = Re_0$. □

Следствие 1. *Пусть R — топологически артиново слева кольцо без нильпотентных идеалов, такое что для всякого $x \in R$ левый идеал Rx замкнут, а A — замкнутый идеал в R. Тогда $A = eR = Re$ для некоторого идемпотента e из центра кольца R.*

Доказательство. По предыдущей теореме существует идемпотент e, такой что $A = Re$. Пусть $x \in R$.

Докажем, что $a = ea$ для любого элемента $a \in A$. Определим замкнутый правый идеал $B = \{a - ea \mid x \in A\}$. Заметим, что $eB = \{0\}$. Тогда $B^2 \subseteq \subseteq AB \subseteq ReB = \{0\}$. Итак, $B = \{0\}$. Поэтому для всякого $a \in A$ справедливо $a = ea$.

Из того, что $xe \in A$, получаем $xe = e(xe) = exe$.

Таким образом, $ex = exe = xe$. □

Следствие 2. *Топологически артиново слева кольцо без нильпотентных идеалов, такое что для всякого $x \in R$ левый идеал Rx замкнут, содержит единицу.*

Лемма 4. *Пусть R — топологическое кольцо без нильпотентных идеалов, а A — минимально замкнутый двусторонний идеал. Тогда A либо является топологически простым кольцом в индуцированной топологии, либо содержит нильпотентные идеалы.*

Доказательство. Докажем от противного. Предположим, что в A существует собственный ненильпотентный идеал B, замкнутый в топологии кольца A. Тогда $ABA \neq \{0\}$. Поэтому $[ABA]_R = A$. Таким образом, для любой окрестности нуля V из R выполняется $A \subseteq ABA + V$. Следовательно, $A \subseteq ABA + A \cap V$, т. е. $A \subseteq [ABA]_A$. Получаем $B \supseteq [ABA]_A \supseteq A$. Итак, $A = B$. □

Теорема 2. *Полупростое топологически артиново слева кольцо R, такое что для любого $x \in R$ левый идеал Rx замкнут, является топологической прямой суммой конечного числа топологически простых топологически артиновых слева колец с единицей, таких что для любого элемента x из кольца A левый идеал Ax замкнут в A.*

Утверждение теоремы очевидно следует из предыдущей и из нижеприведённой лемм.

Лемма 5. *Пусть R — топологически артиново слева кольцо без нильпотентных идеалов, такое что для всякого $x \in R$ левый идеал Rx замкнут, а A — замкнутый идеал в R. Тогда A не содержит ненулевых нильпотентных идеалов. В кольце R существует замкнутый идеал B, такой что $R = A \oplus B$. При этом в A существует кольцевая топология τ_A, а в B существует кольцевая топология τ_B, такие что кольца A и B топологически артиновы слева, для $x \in A$ левый идеал Ax замкнут в A, для $y \in B$ левый идеал By замкнут в B, кольцо R является топологической прямой суммой топологических колец (A, τ_A) и (B, τ_B).*

Доказательство. По лемме 3 существует идемпотент $e \in A$, такой что $A = Re$. Сначала докажем, что в A не существует ненулевых нильпотентных идеалов. Предположим противное, тогда существует ненулевой идеал I в A, такой что $I^2 = \{0\}$. Тогда $IAIA = \{0\}$, а следовательно, $IA = \{0\}$. Но тогда $\{0\} = IA \supseteq Ie = I$. Получили противоречие.

Пусть $B = R(1-e)$. Тогда $A \cap B = \{0\}$, так как если $z \in A \cap B$, то $ze = z$ и $z(1-e) = z$, т. е. $z = 0$.

Обозначим через $\mathcal{B}_R$ базис окрестностей нуля в топологическом кольце R. В кольце A для топологии τ_A базис окрестностей нуля $\mathcal{B}_A$ определим как множества вида Ve, где $V \in \mathcal{B}_R$. То, что мы действительно получаем кольцевую топологию, легко проверяется; нужно учесть, что идемпотент e коммутирует со всеми элементами кольца R. Например, если $V \in \mathcal{B}_R$, то существует окрестность $U \in \mathcal{B}_R$, такая что $V \cdot V \subset U$. Тогда $(Ue) \cdot (Ue) = U \cdot Ue \subset Ve$. В B для кольцевой топологии τ_B базис окрестностей нуля $\mathcal{B}_B$ определим как множества вида $V(1-e)$, где $V \in \mathcal{B}_R$.

Пусть $V_1 e \in \mathcal{B}_A$, $V_2(1-e) \in \mathcal{B}_B$. Возьмём $x \in V_1 \cap V_2$. Тогда $x = xe + x(1-e) \in V_1 e + V_2(1-e)$. Таким образом, окрестность $V_1 \cap V_2$ из $\mathcal{B}_R$ лежит в $V_1 e + V_2(1-e)$. Пусть теперь $U \in \mathcal{B}_R$. Тогда найдётся окрестность $U_1 \in \mathcal{B}_R$, такая что $U_1 e + U_1(1-e) \subseteq U$. При этом $U_1 e \in \mathcal{B}_A$, $U_1(1-e) \in \mathcal{B}_B$. Итак, кольцо (R, τ_R) является топологической прямой суммой колец (A, τ_A) и (B, τ_B).

Докажем, что кольцо (A, τ_A) топологически артиново слева. Заметим, что если I — левый идеал в A, то I — идеал в R, так как $RI = R(eI) = (Re)I = AI \subseteq I$. Пусть $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ — убывающая цепочка замкнутых левых идеалов в A. Тогда найдётся такое натуральное число n, что $[I_n]_R = [I_{n+1}]_R = [I_{n+2}]_R = \ldots$. Для любого натурального k, используя замкнутость I_k в A, получаем

$$I_k = \bigcap_{V \in \mathcal{B}_R} (I_k + Ve) = \Bigg(\bigcap_{V \in \mathcal{B}_R} (I_k + V) \Bigg) e = [I_k]_R e.$$

Следовательно, если $m > n$, то $I_m = [I_m]_R e = [I_n]_R e = I_n$. Итак, цепочка из убывающих замкнутых левых идеалов в A стабилизируется. Поэтому кольцо (A, τ_A) топологически артиново слева.

Пусть $x \in A$. Тогда левый идеал $Ax = Rex = Rxe$ замкнут в R, т. е. $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{B}_R} (Rxe + V) = Rxe$. Умножим это равенство с обеих сторон на e. Получаем $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{B}_R} (Rxe + Ve) = Rxe$, т. е. $[Rxe]_A = Rxe$. Итак, $[Ax]_A = Ax$.

Соответствующие утверждения для идеала B доказывается аналогичным образом с заменой идемпотента e на $1 - e$. □

Следующая теорема является обобщением теоремы Веддербёрна—Артина.

Теорема 3. *Пусть R — топологически простое топологически артиново слева кольцо, такое что для любого $x \in R$ левый идеал Rx замкнут. Тогда кольцо R изоморфно кольцу всех матриц порядка n над некоторым телом. При этом n определяется однозначно, а тело — с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Докажем, что кольцо R топологически примитивно. Пусть ρ — минимально замкнутый левый идеал. Тогда по лемме 1 существует идемпотент e из ρ, такой что $\rho = Re$. Заметим, что $R\rho = RRe \supseteq e^3 = e \neq 0$. Пусть $r \in \rho$. Тогда Rr — замкнутый ненулевой левый идеал, а следовательно, $Rr = \rho$. Итак, ρ — неприводимый топологический R-модуль, являющийся к тому же точным модулем.

Пусть Δ — множество модульных эндоморфизмов R-модуля $\rho = Re$. По лемме Шура множество Δ является телом. Тогда Re — пространство над телом. Предположим, что существует счётное число элементов $v_1, v_2, \ldots$ из Re, линейно независимых над Δ. Для каждого натурального числа m определим следующий замкнутый левый идеал $I_m = \{x \in R\colon xv_1 = 0,\ xv_2 = 0, \ldots,\ xv_m = 0\}$. Тогда $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq$. По теореме плотности все включения в этой убывающей цепочке строгие. Получили противоречие с топологической артиновостью слева кольца. Но тогда в R не существует подкольца S_{m+1}, которое гомоморфно отображается в Δ'_{m+1}, где Δ' — тело, антисимметричное телу Δ. Следовательно, по [4, теорема 2.1.4] кольцо R изоморфно кольцу матриц Δ'_n для некоторого натурального n.

Единственность тела и числа n доказывается совершенно так же, как в доказательстве теоремы 2.1.6 из [4]. □

Литература

[1] Главацкий С. Т., Михалёв А. В., Тензина В. В. Топологический радикал Джекобсона колец. I // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 8. — С. 49—68.

[2] Главацкий С. Т., Михалёв А. В., Тензина В. В. Топологический радикал Джекобсона колец. II // Фундамент. и прикл. матем. — 2011. — Т. 17, вып. 1. — С. 53—64.

[3] Тензина В. В. Топологические кольца и модули с топологической размерностью Крулля // Фундамент. и прикл. матем. — 2004. — Т. 10, вып. 3. — С. 215—230.

[4] Херстейн И. Некоммутативные кольца. — М.: Мир, 1972.