Конгруэнц-алгебры Риса
в классах унаров и алгебр с операторами

В. Л. УСОЛЬЦЕВ
Волгоградский государственный
социально-педагогический университет
e-mail: usl2004@mail.ru

УДК 512.577

Ключевые слова: конгруэнция Риса, конгруэнц-алгебра Риса, рисовски простая алгебра, унар, алгебра с операторами.

Аннотация

В работе рассматриваются некоторые виды алгебр, связанные с понятием конгруэнции Риса. Конгруэнция θ универсальной алгебры A называется конгруэнцией Риса, если найдётся такая подалгебра B алгебры A, что θ есть объединение B^2 и отношения равенства на A. Конгруэнц-алгеброй Риса называется алгебра, в которой любая конгруэнция является конгруэнцией Риса. Неодноэлементная алгебра называется рисовски простой, если любая её конгруэнция Риса является тривиальной. Унаром называется алгебра с одной унарной операцией. Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций. Получено описание конгруэнц-алгебр Риса и рисовски простых алгебр в классе унаров. Найдено необходимое условие конгруэнц-рисовости для алгебр $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ с оператором f и произвольной основной сигнатурой Ω. Показано, что это условие в общем случае не является достаточным. Получено описание конгруэнц-алгебр Риса в некоторых подклассах класса алгебр с одним оператором и одной тернарной основной операцией.

Abstract

V. L. Usoltsev, Rees congruence algebras in classes of unars and algebras with operators, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 1, pp. 219—235.

In the paper, some kinds of algebras associated with the concept of a Rees congruence is considered. A congruence θ of a universal algebra A is called a Rees congruence if there exists a subalgebra B of the algebra A such that θ is the set-theoretical union of B^2 and the identity relation on A. An algebra A is called a Rees congruence algebra if any congruence of the algebra A is a Rees congruence. A non-one-element algebra is called a Rees simple algebra if all its Rees congruences are trivial. An algebra with one unary operation is called a unar. An algebra with operators is a universal algebra with an additional system of operators, i.e., of unary operations acting as endomorphisms relative to operations from the basic signature. The description of Rees congruence algebras and of Rees simple algebras in the class of unars is obtained. A necessary condition to be a Rees congruence algebra for algebras $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ with operator f and arbitrary basic signature Ω is found. It is shown that this necessary condition is not a sufficient condition in the general case. The description of Rees congruence algebras in some subclasses of the class of algebras with one operator and with a ternary basic operation is obtained.

Фундаментальная и прикладная математика, 2024, том 25, № 1, с. 219—235.

В работе рассматриваются некоторые виды алгебр, связанные с понятием конгруэнции Риса [20], первоначально возникшим в теории полугрупп. В [23] это понятие обобщается на произвольные универсальные алгебры. Возникающие при этом определения, приведённые ниже, даны в формулировках монографии [16]. Обозначим через $\triangle_A$ нулевую конгруэнцию алгебры A. Конгруэнция θ алгебры A называется *конгруэнцией Риса*, если $\theta = B^2 \cup \triangle_A$ для некоторой подалгебры B алгебры A. Подалгебра B алгебры A называется *подалгеброй Риса*, если $B^2 \cup \triangle_A$ есть конгруэнция алгебры A. Алгебра A называется *алгеброй Риса*, если любая её подалгебра является подалгеброй Риса. Алгебры Риса были охарактеризованы в [15, 16, 22].

Обозначим через $\operatorname{Sub} A$ решётку подалгебр универсальной алгебры A, а через $\operatorname{Con} A$ — решётку её конгруэнций. Положим $\varnothing \in \operatorname{Sub} A$. Известно [23], что при этом условии совокупность всех подалгебр Риса алгебры A образует решётку $\operatorname{Sub}_R A$ относительно включения. Легко видеть, что при этом же условии совокупность всех конгруэнций Риса алгебры A также образует решётку $\operatorname{Con}_R A$ относительно включения, единицей и нулём которой являются тривиальные конгруэнции $\bigtriangledown_A = A^2 \cup \triangle_A$ и $\triangle_A = \varnothing^2 \cup \triangle_A$.

Естественный интерес вызывают условия, при которых решётки $\operatorname{Con} A$ и $\operatorname{Con}_R A$ совпадают. В связи с этим в [10] было введено понятие *конгруэнц-алгебры Риса* как алгебры, в которой любая конгруэнция является конгруэнцией Риса. Сходное понятие возникает в теории полугрупп: *конгруэнц-полугруппой Риса* [19] называется такая полугруппа, в которой любая ненулевая конгруэнция является конгруэнцией Риса. Также в [10] было введено понятие, в некотором смысле противоположное конгруэнц-рисовости: неодноэлементная алгебра называется *рисовски простой*, если любая её конгруэнция Риса является тривиальной. Другими словами, алгебра A рисовски проста, если решётка $\operatorname{Con}_R A$ является двухэлементной цепью.

В настоящей работе даётся описание конгруэнц-алгебр Риса и рисовски простых алгебр в классе унаров, а также изучаются конгруэнц-алгебры Риса в классе алгебр с операторами.

Унаром называется алгебра с одной унарной операцией. Изучению унаров уделяется значительное внимание (см., например, [1, 2, 14, 17, 18, 21, 25]).

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ сигнатуры $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$, состоящей из двух непересекающихся непустых частей: произвольной Ω', называемой *основной*, и дополнительной Ω'', состоящей только из унарных операций, причём для любой n-арной операции $\varphi \in \Omega'$, где $n > 0$, любой операции $f \in \Omega''$ и любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ выполнено условие $f\big(\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big) = \varphi\big(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\big)$. Кроме того, $f(e) = e$ для любой 0-арной операции $e \in \Omega'$. При выполнении указанных выше условий говорят, что операции из Ω' и Ω'' *перестановочны*. Операции из Ω'' называются *операторами*, а операции из Ω' — *основными операциями* алгебры $\langle A, \Omega\rangle$.

В работе получено необходимое условие конгруэнц-рисовости для алгебр $\langle A, \Omega\rangle$ с оператором $f \in \Omega$ и произвольной основной сигнатурой. Найденное условие затем используется для описания конгруэнц-алгебр Риса в классах алгебр $\langle A, p, f\rangle$ и $\langle A, s, f\rangle$ с оператором f и тернарными основными операциями $p(x, y, z)$ или $s(x, y, z)$, определёнными ниже.

В [3] на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ задаётся тернарная операция $p(x, y, z)$, перестановочная с операцией f. Эта операция определяется следующим образом. Через $f^n(z)$ обозначим результат n-кратного применения операции f к элементу z; положим также $f^0(z) = z$. Пусть $x, y \in A$. Положим

$$M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\},$$

а также $k(x, y) = \min M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \varnothing$, и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \varnothing$. Положим

$$p(x, y, z) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \leqslant k(y, z), \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \tag{1}$$

Из определения (1) следует, что операция p удовлетворяет тождествам Пиксли $p(y, y, x) = p(x, y, y) = p(x, y, x) = x$ и, следовательно, является мальцевской. Основные результаты, полученные при изучении свойств конгруэнций алгебр $\langle A, p, f\rangle$, можно найти в [5, 6, 8, 9, 11, 24].

На основе подхода, предложенного в [3], в [7] на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ определяется тернарная операция $s(x, y, z)$, перестановочная с операцией f:

$$s(x, y, z) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) < k(y, z), \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z), \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \tag{2}$$

Из (2) вытекает, что операция s удовлетворяет тождествам

$$s(y, y, x) = s(x, y, y) = s(y, x, y) = x.$$

Как следствие, она также является мальцевской операцией и, кроме того, операцией меньшинства. В [8] были описаны простые, абелевы и полиномиально полные алгебры в классе алгебр $\langle A, s, f\rangle$; в [12] — подпрямо неразложимые алгебры данного класса; в [11] — рисовски простые алгебры в классах $\langle A, p, f\rangle$, $\langle A, s, f\rangle$.

Отметим также, что в [10] были описаны алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия, заданной специальным образом. *Операцией почти единогласия* (см., например, [13]) называется n-арная операция φ, удовлетворяющая тождествам

$$\varphi(x, \ldots, x, y) = \varphi(x, \ldots, x, y, x) = \ldots = \varphi(y, x, \ldots, x) = x \quad (n \geqslant 3).$$

В тернарном случае φ называют *операцией большинства*.

Дадим теперь необходимые определения и приведём основные обозначения.

Через $\triangledown_A$ и $\triangle_A$ обозначаются соответственно единичная и нулевая конгруэнции алгебры A. Конгруэнции $\triangledown_A$ и $\triangle_A$ называются *тривиальными*. Неодноэлементная алгебра называется *простой*, если она имеет только тривиальные конгруэнции.

Класс конгруэнции θ, порождённый элементом x, обозначается через $[x]\theta$. Конгруэнция $\bar{\alpha}$ произвольной алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ называется *расширением* конгруэнции α подалгебры $B \in \mathrm{Sub}\langle A, \Omega\rangle$, если условие $x\ \bar{\alpha}\ y$ для $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x\ \alpha\ y$, либо $x = y$. Назовём пару элементов x, y алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ *нетривиальной парой конгруэнции* $\theta \in \mathrm{Con}\langle A, \Omega\rangle$, если $x\ \theta\ y$ и $x \neq y$.

Пусть $\langle A, f\rangle$ — унар. Через C_n^t, где $n > 0$, $t \geqslant 0$, обозначается унар

$$\langle a \mid f^t(a) = f^{t+n}(a)\rangle.$$

Унар C_n^0 называется *циклом длины* n. Элемент a унара называется *циклическим*, если подунар, порождённый элементом a, является циклом, и *нециклическим* в противном случае. Через C_n^∞ обозначается объединение возрастающей последовательности унаров $C_n^{t_1} \subseteq C_n^{t_2} \subseteq \ldots$, где $n > 0$ и $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots$. Через F_1 обозначается свободный однопорождённый унар.

Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется *периодическим*, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geqslant 0$ и $n > 0$, и *непериодическим* в противном случае. Через $T(A)$ и $D(A)$ обозначаются соответственно множества периодических и непериодических элементов унара A. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t, для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некотором $n \geqslant 1$, называется *глубиной элемента* a и обозначается через $t(a)$. *Глубиной* $t(A)$ *унара* A называется наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \varnothing$ и множество $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$ ограниченно. Если же множество $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$ не ограниченно, то говорят, что унар A имеет бесконечную глубину. Унар $\langle A, f\rangle$ называется *периодическим*, если $A = T(A)$, и *унаром без кручения*, если $A = D(A)$.

Унар $\langle A, f\rangle$ называется *связным*, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ при некоторых $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется *компонентой связности* унара A. Объединение непересекающихся унаров называется их *суммой*. Через $\langle a\rangle$ обозначается подунар данного унара, порождённый элементом a.

Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется *узловым*, если найдутся такие элементы $b, c \in A$, что $f(b) = a = f(c)$ и $|\{a, b, c\}| = 3$. Назовём элемент $a \in A$ *обобщённо узловым*, если a — узловой или $f(a) = a = f(b)$ для некоторого $b \in A$, где $b \neq a$. Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется *неподвижным*, если $f(a) = a$.

Связный унар с неподвижным элементом, следуя [18], назовём *корнем*. Корень с неподвижным элементом a, не содержащий узловых элементов, кроме, может быть, элемента a, назовём *корнем без нетривиальных узлов*. Если $\langle A, f\rangle$ — корень, то через D_k обозначается его подунар, состоящий из всех элементов с глубиной, не превосходящей $k \leqslant t(A)$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Через σ_k обозначается конгруэнция $\mathrm{Ker}\, f^k$ унара $\langle A, f\rangle$ либо конгруэнция алгебры $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ с оператором f и произвольной основной сигнатурой Ω, определённая аналогичным образом. Положим также $\sigma_0 = \triangle_A$.

Пусть B — подунар произвольного унара $\langle A, f\rangle$. Через θ_B обозначается конгруэнция унара $\langle A, f\rangle$, определённая по следующему правилу [25]: $x\ \theta_B\ y$ для $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in B$.

Пусть v — узловой элемент унара $\langle A, f\rangle$. Через θ_v обозначается конгруэнция на A, определённая по следующему правилу [5]: $x\ \theta_v\ y$ для $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in f^{-1}(v)$.

Лемма 1. *Пусть B — произвольный подунар унара $\langle A, f\rangle$. Тогда конгруэнция $\theta_B \in \mathrm{Con}\langle A, f\rangle$ является конгруэнцией Риса.*

Утверждение следует из определения конгруэнции θ_B.

Следствие 1. *Произвольный унар является алгеброй Риса.*

Следующее замечание очевидно.

Замечание 1. Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная универсальная алгебра. Если $\langle A, \Omega\rangle$ проста, то она является конгруэнц-алгеброй Риса.

Опишем теперь унары, которые являются конгруэнц-алгебрами Риса.

Лемма 2. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ содержит узловой элемент v, не являющийся неподвижным. Тогда $\langle A, f\rangle$ не является конгруэнц-алгеброй Риса.*

Доказательство. По условию найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $|\{a, b, v\}| = 3$ и $f(a) = v = f(b)$. Предположим, что конгруэнция $\theta_v \in \mathrm{Con}\langle A, f\rangle$ является конгруэнцией Риса на $\langle A, f\rangle$. Тогда $\theta_v = B^2 \cup \triangle_A$ для некоторого подунара B унара $\langle A, f\rangle$. Поскольку $a \neq b$ и $a\ \theta_v\ b$, то $a, b \in B$, откуда следует, что $v = f(a) \in B$. Так как $a, v \in B$ и $a \neq v$, то $a\ \theta_v\ v$. Тогда по определению конгруэнции θ_v имеем $f(a) = v = f(v)$, и следовательно, элемент v неподвижный, что противоречит условию. □

Следствие 2. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ содержит подунар B, изоморфный C_n^1, для некоторого $n > 1$. Тогда $\langle A, f\rangle$ не является конгруэнц-алгеброй Риса.*

Доказательство. По условию подунар B содержит такой нециклический элемент b, что элемент $d = f(b)$ является циклическим. Поскольку $n > 1$, то найдётся такой отличный от d циклический элемент $c \in B$, что $f(c) = d$. Так как b нециклический, то $b \neq c$. Тогда d — узловой элемент унара $\langle A, f\rangle$, причём $f(d) \neq d$, поскольку $n > 1$. Отсюда по лемме 2 получаем, что $\langle A, f\rangle$ не является конгруэнц-алгеброй Риса. □

Лемма 3. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ содержит подунар B, изоморфный F_1. Тогда $\langle A, f\rangle$ не является конгруэнц-алгеброй Риса.*

Доказательство. Пусть b — порождающий элемент подунара B. Тогда для любых $x, y \in B$ найдутся такие целые числа $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, что $x = f^s(b)$ и $y = f^t(b)$. Известно [1], что любая ненулевая конгруэнция θ на унаре F_1 определяется парой целых чисел (k, d), где $k \geqslant 0$, $d > 0$. Она задаётся следующим образом: для $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ положим по определению

$$f^s(b)\ \theta\ f^t(b) \Longleftrightarrow \text{либо } s = t, \text{ либо } s \geqslant k,\ t \geqslant k \text{ и } d \mid (s - t).$$

Обозначим такую конгруэнцию через $\theta(k, d)$ и зафиксируем натуральное число $n > 1$. Тогда конгруэнция $\theta(0, n)$ унара B имеет n неодноэлементных классов.

Обозначим $\varphi = \theta(0,n) \cup \triangle_A$. Очевидно, $\varphi \in \mathrm{Con}\langle A, f\rangle$, однако φ не является конгруэнцией Риса, так как имеет более одного неодноэлементного класса. $\square$

Лемма 4. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса. Тогда $\langle A, f\rangle$ содержит не более одной неодноэлементной компоненты связности.*

Доказательство. Предположим, что унар $\langle A, f\rangle$ содержит две или более неодноэлементных компоненты связности. Обозначим через ψ отношение эквивалентности на A, классами которого являются в точности компоненты связности унара $\langle A, f\rangle$. Пусть $x, y \in A$ и $x \ \psi \ y$. Тогда $x, y \in B$ для некоторой компоненты связности B унара $\langle A, f\rangle$. Отсюда, поскольку любая компонента связности является подунаром, имеем $f(x), f(y) \in B$, а значит, $f(x) \ \psi \ f(y)$. Таким образом, отношение ψ есть конгруэнция унара $\langle A, f\rangle$, однако из предположения следует, что ψ не является конгруэнцией Риса. $\square$

Лемма 5. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса. Тогда $\langle A, f\rangle$ содержит не более трёх компонент связности.*

Доказательство. Предположим, что унар $\langle A, f\rangle$ содержит четыре или более компоненты связности. Пусть B, C, D, E — компоненты связности $\langle A, f\rangle$. Определим на A бинарное отношение ρ по правилу

$$x \ \rho \ y \Longleftrightarrow \text{либо } x, y \in B \cup C, \text{ либо } x, y \in D \cup E, \text{ либо } x = y.$$

Поскольку объединение любых двух подунаров снова является подунаром, то отношение ρ является конгруэнцией на $\langle A, f\rangle$, а множества $B \cup C$ и $D \cup E$ — её классами. Поскольку $|B \cup C| > 1$ и $|D \cup E| > 1$, то ρ не является конгруэнцией Риса на $\langle A, f\rangle$. $\square$

Лемма 6. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ содержит компоненту связности, имеющую неподвижный узловой элемент. Тогда $\langle A, f\rangle$ не является конгруэнц-алгеброй Риса.*

Доказательство. Пусть D — компонента связности унара $\langle A, f\rangle$, имеющая неподвижный элемент a, который является узловым. По условию найдутся такие элементы $b, c \in D$, что $f(b) = a = f(c)$ и $|\{a, b, c\}| = 3$. Определим на A бинарное отношение θ по правилу

$$x \ \theta \ y \Longleftrightarrow \text{либо } x, y \in \{b, c\}, \text{ либо } x = y.$$

Очевидно, что θ — эквивалентность, а поскольку $f(x) = a$ для любого $x \in \{b, c\}$, то θ является и конгруэнцией унара $\langle A, f\rangle$.

Предположим, что θ — конгруэнция Риса. Тогда $\theta = B^2 \cup \triangle_A$ для некоторого подунара B унара $\langle A, f\rangle$. Так как $b \neq c$ и $b \ \theta \ c$, то $b, c \in B$. Тогда $a = f(b) \in B$, откуда следует, что $a \ \theta \ b$, что противоречит определению конгруэнции θ. $\square$

Лемма 7. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ является суммой подунаров $B + C$, где $C \cong C_1^0$, а $B \cong C_n^0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда любая неединичная конгруэнция унара $\langle A, f\rangle$ является расширением некоторой конгруэнции подунара B.*

Доказательство. Пусть $\theta \in \mathrm{Con}\langle A, f\rangle$, $\theta \neq \triangledown_A$, $C = \{c\}$. Из последнего равенства имеем $f^k(c) = c$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим случай, когда $[c]\theta = \{c\}$. Тогда все классы конгруэнции θ, за исключением $[c]\theta$, содержат элементы только из B. Поэтому данная совокупность классов определяет эквивалентность φ на B. Пусть $x, y \in B$ и $x \; \varphi \; y$. Тогда $x \; \theta \; y$ и, следовательно, $f(x) \; \theta \; f(y)$. Последнее с учётом условия $B \in \mathrm{Sub}\langle A, f\rangle$ влечёт $f(x) \; \varphi \; f(y)$, а значит, $\varphi \in \mathrm{Con}\langle B, f\rangle$. При этом $\theta = \varphi \cup \triangle_A$.

Пусть теперь класс $[c]\theta$ содержит некоторый элемент $b \in B$. Тогда $b \; \theta \; c$, откуда следует, что $f^k(b) \; \theta \; f^k(c) = c$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, поскольку $B \cong C_n^0$, то $c \; \theta \; x$ для любого $x \in B$. Поэтому $\theta = \triangledown_A$, что противоречит условию. □

Лемма 8. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса. Тогда $\langle A, f\rangle$ изоморфен либо C_p^0, где p — простое число, либо $C_p^0 + C_1^0$, либо C_1^t, где $t \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, либо $C_1^t + C_1^0$, либо $C_1^0 + C_1^0 + C_1^0$.*

Доказательство. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ связный. Предположим, что он содержит непериодический элемент a. Тогда либо $\langle a\rangle \cong F_1$, что противоречит лемме 3, либо $\langle a\rangle \cong C_k^m$ для некоторых $k > 0$, $m \geqslant 0$, что противоречит предположению. Таким образом, унар $\langle A, f\rangle$ является периодическим. Тогда $\langle A, f\rangle$ содержит подунар $B \cong C_n^0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Если подунар B собственный, то в силу связности унара $\langle A, f\rangle$ найдётся такой элемент $u \in A$, что $f(u) \in B$. Отсюда следует, что $B \cup \{u\}$ — подунар в $\langle A, f\rangle$, изоморфный C_n^1. Тогда по следствию 2 из леммы 2 имеем $n = 1$. Другими словами, $B = \{b\}$ для некоторого $b \in A$, причём $f(b) = b$. Также из леммы 2 следует, что $\langle A, f\rangle$ не содержит узловых элементов, отличных от b. По лемме 6 неподвижный элемент b тоже не является узловым. Отсюда следует, что $\langle A, f\rangle$ изоморфен C_1^t для некоторого $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Если $A = B$, то унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен C_n^0, то есть является циклом длины n. Известно [14], что любая конгруэнция на таком цикле определяется некоторым делителем d числа n как конгруэнция, порождённая парой $\big(a, f^d(a)\big)$, где a — порождающий элемент $\langle A, f\rangle$. Обозначим такую конгруэнцию через $\theta^{(d)}$. Предположим, что n — составное число. Тогда n имеет делитель d, удовлетворяющий условию $1 < d < n$. Отсюда следует, что конгруэнция $\theta^{(d)}$ имеет n/d неодноэлементных классов, что противоречит условию леммы. Таким образом, унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен либо C_1^0, либо C_p^0 для некоторого простого числа p.

Пусть теперь унар $\langle A, f\rangle$ несвязен. По лемме 4 $\langle A, f\rangle$ имеет не более одной неодноэлементной компоненты связности.

Рассмотрим случай, когда $\langle A, f\rangle$ имеет единственную неодноэлементную компоненту связности D. Как и выше, по лемме 3 D является периодическим унаром, то есть содержит подунар $B \cong C_n^0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Если $B \neq D$, то по аналогии со случаем, когда унар $\langle A, f\rangle$ связный, получаем, что $D \cong C_1^t$ для некоторого $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. По лемме 5 унар $\langle A, f\rangle$ содержит не более трёх компонент связности. Отсюда следует, что $\langle A, f\rangle$ изоморфен либо $C_1^t + C_1^0$, либо $C_1^t + C_1^0 + C_1^0$. Последний случай противоречит условию леммы.

Действительно, пусть $A = D \cup \{a\} \cup \{b\}$, где $a, b \notin D$, $a \neq b$ и $f(a) = a$, $f(b) = b$. Определим на A бинарное отношение ρ по правилу

$$x \,\rho\, y \iff \text{либо } x, y \in D, \text{ либо } x, y \in \{a, b\}.$$

Прямая проверка показывает, что $\rho \in \mathrm{Con}\langle A, f\rangle$. Однако $\rho \notin \mathrm{Con}_R\langle A, f\rangle$, так как данная конгруэнция имеет два неодноэлементных класса.

Если $B = D$, то $D \cong C_n^0$. Как и выше, по лемме 5 возможны только два случая: либо $\langle A, f\rangle \cong C_n^0 + C_1^0$, либо $\langle A, f\rangle \cong C_n^0 + C_1^0 + C_1^0$. В последнем случае если $n > 1$, то, рассуждая аналогично случаю, когда $\langle A, f\rangle \cong C_1^t + C_1^0 + C_1^0$, получаем противоречие. Если $\langle A, f\rangle \cong C_n^0 + C_1^0$, то по лемме 7 любая неединичная конгруэнция на $\langle A, f\rangle$ является расширением некоторой конгруэнции подунара D. Отсюда следует, что либо $\langle A, f\rangle \cong C_p^0 + C_1^0$ для некоторого простого числа p, либо $\langle A, f\rangle \cong C_1^0 + C_1^0$.

Наконец, пусть все компоненты связности унара $\langle A, f\rangle$ одноэлементны. Тогда с учётом леммы 5 $\langle A, f\rangle$ изоморфен либо $C_1^0 + C_1^0$, либо $C_1^0 + C_1^0 + C_1^0$. □

Лемма 9. *Пусть* $\langle A, f\rangle \cong C_1^t$, $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\theta \in \mathrm{Con}\langle A, f\rangle$, $\theta \neq \triangle_A$, $b, c \in A$, $b \,\theta\, c$, $b \neq c$ *и* $t(c) < t(b)$. *Тогда для любых* $x, y \in A$ *если* $t(x) \leqslant t(b)$, $t(y) \leqslant t(b)$, *то* $x \,\theta\, y$.

Доказательство. Обозначим неподвижный элемент унара $\langle A, f\rangle$ через v. Поскольку $t(c) < t(b)$ и $t(x) \leqslant t(b)$, то $c = f^d(b)$ и $x = f^k(b)$ для некоторых $d > 0$, $k \geqslant 0$. Так как $b \,\theta\, c$, то

$$x = f^k(b) \,\theta\, f^k(c) = f^k\bigl(f^d(b)\bigr) = f^d\bigl(f^k(b)\bigr) = f^d(x).$$

Полученное утверждение $x \,\theta\, f^d(x)$ влечёт $x \,\theta\, f^{dt(b)}(x)$, а поскольку $t(x) \leqslant t(b)$, то $f^{dt(b)}(x) = v$. Отсюда следует, что $x \,\theta\, v$. Аналогично $y \,\theta\, v$. Таким образом, $x \,\theta\, y$. □

Лемма 10. *Если* $\langle A, f\rangle \cong C_1^t$, *где* $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, *то унар* $\langle A, f\rangle$ *является конгруэнц-алгеброй Риса.*

Доказательство. Обозначим неподвижный элемент унара $\langle A, f\rangle$ через v. По [24, леммы 3 и 4] любая нетривиальная конгруэнция унара $\langle A, f\rangle$ имеет вид σ_m для некоторого m, удовлетворяющего условию $0 < m < t(A)$. Зафиксируем n, для которого $0 < n < t(A)$, и рассмотрим подунар $\langle b\rangle$ унара $\langle A, f\rangle$, порождённый элементом $b \in A$, имеющим глубину n. Докажем, что $\sigma_n = \theta_{\langle b\rangle}$.

Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$ и $x \,\theta_{\langle b\rangle}\, y$. Тогда $x, y \in \langle b\rangle$, откуда следует, что $t(x) \leqslant t(b)$, $t(y) \leqslant t(b)$. Заметим, что $b \,\sigma_n\, v$, так как $f^n(b) = v = f^n(v)$. Отсюда по лемме 9 получаем, что $x \,\sigma_n\, y$.

Пусть теперь $x \,\sigma_n\, y$. Тогда $f^n(x) = f^n(y)$. Так как $x \neq y$, то без ограничения общности $y = f^k(x)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Отсюда вытекает, что $f^n(x) = f^n\bigl(f^k(x)\bigr) = f^k\bigl(f^n(x)\bigr)$, и следовательно, $f^n(x)$ — циклический элемент. Тогда $t(x) \leqslant n$, что влечёт $x \in \langle b\rangle$, а значит, и $y \in \langle b\rangle$. Следовательно, $x \,\theta_{\langle b\rangle}\, y$.

Таким образом, $\sigma_n = \theta_{\langle b\rangle}$, а значит, по лемме 1 любая нетривиальная конгруэнция на $\langle A, f\rangle$ является конгруэнцией Риса. □

Теорема 1. *Унар $\langle A, f\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса тогда и только тогда, когда он изоморфен либо C_p^0, где p — простое число, либо $C_p^0 + C_1^0$, либо C_1^t, где $t \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, либо $C_1^t + C_1^0$, либо $C_1^0 + C_1^0 + C_1^0$.*

Доказательство. Необходимость утверждения следует из леммы 8. Докажем его достаточность.

Для случая когда $\langle A, f\rangle \cong C_1^0$, утверждение теоремы очевидно. Если унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен $C_1^0 + C_1^0$ или C_p^0, где p — простое число, то он является простым, и утверждение вытекает из замечания 1.

Если $\langle A, f\rangle \cong B + C_1^0$, где $B \cong C_p^0$ для некоторого простого числа p, то по лемме 7 любая его конгруэнция является расширением некоторой конгруэнции подунара B. Но унар B является простым. Тогда $\langle A, f\rangle$ имеет единственную нетривиальную конгруэнцию θ_B, которая по лемме 1 является конгруэнцией Риса.

Если унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен сумме $C_1^0+C_1^0+C_1^0$, то любая его нетривиальная конгруэнция также имеет вид θ_B, где B — сумма каких-либо двух компонент связности $\langle A, f\rangle$.

В случае когда $\langle A, f\rangle \cong C_1^t$, где $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, утверждение следует из леммы 10.

Пусть теперь $\langle A, f\rangle \cong C_1^t + C_1^0$ для некоторого $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и θ — ненулевая конгруэнция на $\langle A, f\rangle$. Обозначим через B компоненту связности унара $\langle A, f\rangle$, изоморфную C_1^t, а её неподвижный элемент — через v; элемент другой компоненты связности, изоморфной C_1^0, обозначим через a.

Случай 1. $[a]\theta = \{a\}$.

Рассмотрим сначала случай, когда множество глубин элементов подунара B, входящих в нетривиальные пары конгруэнции θ, имеет наибольший элемент n. Поскольку $[a]\theta = \{a\}$, то все нетривиальные пары конгруэнции θ содержат элементы только из множества B. Отсюда вытекает, что найдётся такая пара элементов $b, c \in B$, что $(b, c) \in \theta$, $t(b) = n$ и $t(c) < n$. Докажем, что $\theta = \theta_{\langle b\rangle}$.

Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$ и $x\ \theta\ y$. Поскольку $[a]\theta = \{a\}$, то $x, y \in B$. По условию $t(x) \leqslant n$, $t(y) \leqslant n$, откуда следует, что $x = f^k(b)$, $y = f^m(b)$ для некоторых $k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$. Следовательно, $x, y \in \langle b\rangle$ и, значит, $x\ \theta_{\langle b\rangle}\ y$. Обратно, пусть $x\ \theta_{\langle b\rangle}\ y$. Отсюда следует, что $x, y \in \langle b\rangle$, а значит, $t(x) \leqslant t(b)$, $t(y) \leqslant t(b)$. Тогда по лемме 9 $x\ \theta\ y$. Окончательно получаем, что $\theta = \theta_{\langle b\rangle}$ и по лемме 1 отношение θ является конгруэнцией Риса.

Пусть теперь множество глубин элементов подунара B, входящих в нетривиальные пары конгруэнции θ, не является ограниченным сверху. Докажем, что $\theta = B^2 \cup \triangle_A$.

Предположим, что существует такая пара различных элементов $x, y \in B$, что $(x, y) \notin \theta$. Положим без ограничения общности, что $t(x) > t(y)$. Тогда по условию найдутся такие различные элементы $b, c \in B$, что $b\ \theta\ c$ и $t(b) > t(x)$. Отсюда вытекает, что $t(b) > t(y)$. Тогда по лемме 9 $x\ \theta\ y$, что противоречит предположению. Учитывая условие $[a]\theta = \{a\}$, окончательно получаем равенство $\theta = B^2 \cup \triangle_A$, а значит, $\theta \in \mathrm{Con}_R\langle A, f\rangle$.

Случай 2. $a\ \theta\ z$ для некоторого $z \in B$.

Снова рассмотрим сначала случай, когда множество глубин элементов подунара B, входящих в нетривиальные пары конгруэнции θ, имеет наибольший элемент n. Тогда найдётся такой элемент $b \in B$, что $t(b) = n$, $(b, c) \in \theta$ и $c \neq b$ для некоторого $c \in A$. Докажем, что $\theta = \theta_{\langle a,b\rangle}$.

Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$ и $x\ \theta\ y$. Тогда либо один из элементов x или y равен a, либо $x, y \in B$. В первом случае положим без ограничения общности $y = a$. Тогда $x \in B$. Так как пара (x, a) нетривиальна, то $t(x) \leqslant n$. Значит, $x = f^k(b)$ для некоторого $k \geqslant 0$, что влечёт $x \in \langle a, b\rangle$. Тогда $(x, y) \in \theta_{\langle a,b\rangle}$. Пусть теперь $x, y \in B$. Как и выше, имеем $t(x) \leqslant n$, $t(y) \leqslant n$, откуда следует, что $(x, y) \in \theta_{\langle a,b\rangle}$.

Обратно, пусть $(x, y) \in \theta_{\langle a,b\rangle}$. Так как $x \neq y$, то $x, y \in \langle a, b\rangle$. Тогда либо $x = a$ или $y = a$, либо $x, y \in \langle b\rangle$. В первом случае положим без ограничения общности $x = a$. Тогда $y \in \langle b\rangle$, что влечёт $y = f^m(b)$ для некоторого $m \geqslant 0$. Так как $b \neq c$, то по условию $t(c) < t(b)$, и значит, $c = f^d(b)$ для некоторого $d \in \mathbb{N}$. Учитывая, что $b\ \theta\ c$, получаем, что $y = f^m(b)\ \theta\ f^m\big(f^d(b)\big) = f^d\big(f^m(b)\big) = f^d(y)$. Отсюда следует, что $y\ \theta\ f^{dn}(y) = v$. С другой стороны, из $a\ \theta\ z$ и $z \in B$ вытекает $t(z) \leqslant n$, и следовательно, $x = a = f^n(a)\ \theta\ f^n(z) = v$. Таким образом, $x\ \theta\ v\ \theta\ y$. В случае когда $x, y \in \langle b\rangle$, как и выше имеем $y\ \theta\ v$ и аналогично получаем $x\ \theta\ v$.

Окончательно имеем $\theta = \theta_{\langle a,b\rangle}$, и по лемме 1 отношение θ — конгруэнция Риса.

Пусть теперь множество глубин элементов подунара B, входящих в нетривиальные пары конгруэнции θ, не является ограниченным сверху. Заметим, что в этом случае $t(A) = \infty$. Докажем, что $\theta = \bigtriangledown_A$.

Предположим, что $(x, y) \notin \theta$ для некоторых различных $x, y \in A$. Тогда либо $x = a$ или $y = a$, либо $x, y \in B$. В первом случае положим без ограничения общности $y = a$. Тогда $x \in B$. По условию найдутся такие элементы $b \in B$ и $c \in A$, что $b\ \theta\ c$, $b \neq c$, $t(b) > t(x)$. Из последнего неравенства следует, что $x = f^k(b)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Если $c = a$, то $b\ \theta\ a$. Тогда $x = f^k(b)\ \theta\ f^k(a) = a = y$, что противоречит предположению. Если $c \neq a$, то $c \in B$. Тогда, как и выше, $c = f^d(b)$ для некоторого $d \in \mathbb{N}$. Следовательно, $x = f^k(b)\ \theta\ f^k\big(f^d(b)\big) = f^d(x)$, откуда получаем, что $x\ \theta\ f^{dt(b)}(x) = v$. С другой стороны, из условия $a\ \theta\ z$ вытекает, что $a = f^{t(z)}(a)\ \theta\ f^{t(z)}(z) = v$. Тогда $y = a\ \theta\ v\ \theta\ x$, что снова противоречит предположению.

В случае когда $x, y \in B$, обозначим $s = \max\{t(x), t(y), t(z)\}$. Тогда найдутся такие элементы $b \in B$ и $c \in A$, что $b\ \theta\ c$, $b \neq c$, $t(b) > t(c)$ и $t(b) > s$. Если $c = a$, то $b\ \theta\ a$, и аналогично рассуждениям выше получаем $x\ \theta\ a\ \theta\ y$, что ведёт к противоречию с предположением. Если же $c \in B$, то, как и выше, $c = f^d(b)$ для некоторого $d \in \mathbb{N}$. Тогда $x = f^d(x)$, $y = f^d(y)$, что влечёт $x\ \theta\ v\ \theta\ y$, снова ведущее к противоречию с предположением. □

Теперь опишем рисовски простые унары.

Лемма 11. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ связный. Тогда $\langle A, f\rangle$ является либо периодическим унаром, либо унаром без кручения.*

Доказательство. Предположим, что $\langle A, f\rangle$ содержит непериодический элемент a и периодический элемент b. По условию имеем $f^n(b) = f^m(a)$ для некоторых $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$. По предположению найдутся числа $t \geqslant 0$ и $s > 0$, для которых $f^t(b) = f^{t+s}(b)$. Отсюда следует, что $f^n\big(f^t(b)\big) = f^n\big(f^{t+s}(b)\big)$, а значит, $f^t\big(f^n(b)\big) = f^{t+s}\big(f^n(b)\big)$, а значит, элемент $f^n(b)$ периодический. Как следствие, периодическим будет и элемент $f^m(a)$. Тогда $f^k\big(f^m(a)\big) = f^{k+h}\big(f^m(a)\big)$ для некоторых $k \geqslant 0$, $h > 0$. Отсюда следует, что $f^{k+m}(a) = f^{k+h+m}(a)$. Последнее равенство означает, что элемент a также периодический, а это противоречит выбору a. $\square$

Теорема 2. *Унар $\langle A, f\rangle$ является рисовски простым тогда и только тогда, когда $\langle A, f\rangle$ изоморфен либо C_1^1, либо $C_1^0 + C_1^0$, либо C_n^0 для некоторого $n > 1$.*

Доказательство. Покажем необходимость. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ не изоморфен ни одному из унаров, перечисленных в условии теоремы.

Рассмотрим сначала случай, когда $\langle A, f\rangle$ является связным. По лемме 11 он будет либо периодическим унаром, либо унаром без кручения.

Если $\langle A, f\rangle$ — унар без кручения, то он содержит подунар $B \cong F_1$. Обозначим через b порождающий элемент подунара B. Тогда $B \setminus \{b\}$ — собственный подунар в $\langle A, f\rangle$. Отсюда по лемме 1 получаем, что $\theta_{B\setminus\{b\}}$ — нетривиальная рисовская конгруэнция на $\langle A, f\rangle$.

Если $\langle A, f\rangle$ — периодический унар, то он имеет подунар $B \cong C_n^0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. При $n > 1$ подунар B по условию является собственным. Тогда θ_B — нетривиальная конгруэнция Риса. Если $n = 1$, то $\langle A, f\rangle$ является корнем. Обозначим его неподвижный элемент через a. В данном случае если $A = B$, то унар $\langle A, f\rangle$ не является рисовски простым по определению. Если же подунар B является собственным, то по условию $\langle A, f\rangle$ не изоморфен C_1^1. Тогда либо $t(A) > 1$, либо элемент a является узловым. В последнем случае существуют такие элементы $b, c \in A$, что $f(b) = a = f(c)$ и $|\{a, b, c\}| = 3$. Если же $t(A) > 1$, то найдётся такой элемент $c \in A$, что $t(c) = 2$. Тогда положим $b = f(c)$. В любом из этих случаев подунар $\langle b\rangle$ изоморфен C_1^1 и является собственным подунаром унара $\langle A, f\rangle$. Таким образом, $\theta_{\langle b\rangle}$ — нетривиальная конгруэнция Риса на $\langle A, f\rangle$.

Пусть теперь унар $\langle A, f\rangle$ несвязный. Если он имеет хотя бы одну неодноэлементную компоненту связности B, то конгруэнция θ_B есть нетривиальная конгруэнция Риса. Если же унар $\langle A, f\rangle$ является суммой одноэлементных компонент связности, то по условию эта сумма содержит не менее трёх слагаемых. Обозначим любые две из этих компонент связности через B и C. Так как $B \cup C \in \mathrm{Sub}\langle A, f\rangle$, то $\theta_{B\cup C}$ — конгруэнция Риса, а поскольку $A \setminus (B \cup C) \neq \varnothing$, то конгруэнция $\theta_{B\cup C}$ нетривиальна.

Покажем достаточность. Унары, изоморфные C_1^1 или $C_1^0 + C_1^0$, являются простыми, а следовательно, и рисовски простыми. Пусть $\langle A, f\rangle$ изоморфен унару C_n^0 для некоторого $n > 1$. Обозначим порождающий элемент унара $\langle A, f\rangle$ через a. Как отмечалось в доказательстве леммы 8, любая конгруэнция на C_n^0 определяется делителем d числа n как конгруэнция, порождённая парой $\big(a, f^d(a)\big)$.

Тогда любая нетривиальная конгруэнция на $\langle A, f\rangle$ не является рисовской, так как имеет более одного неодноэлементного класса. $\square$

Следующее очевидное замечание позволяет перенести утверждения теорем 1 и 2 на некоторые классы алгебр с операторами.

Замечание 2. Пусть $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ — алгебра с произвольной основной сигнатурой Ω. Если Ω содержит только 0-арные операции и унарные операции, удовлетворяющие тождеству $g(x) = x$ для любой унарной операции $g \in \Omega$, то $\mathrm{Con}\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle = \mathrm{Con}\langle A, f\rangle$.

Следствие 3. *Пусть $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ — алгебра с оператором f, удовлетворяющая условиям замечания 2. Тогда $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса в том и только том случае, когда унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Соответственно, $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ является рисовски простой алгеброй тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет условиям теоремы 2.*

Рассмотрим теперь необходимые условия конгруэнц-рисовости для алгебр с операторами, имеющих произвольные основные операции.

Лемма 12. *Пусть $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ — алгебра с оператором f и произвольной основной сигнатурой Ω. Если $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса, то унар $\langle A, f\rangle$ содержит не более одного обобщённо узлового элемента.*

Доказательство. Пусть a и v — различные обобщённо узловые элементы унара $\langle A, f\rangle$. Тогда найдутся элементы $a_1, a_2 \in A$, для которых $f(a_1) = a = f(a_2)$ и $|\{a, a_1, a_2\}| = 3$ или выполнится равенство $f(a) = a = f(c)$ для некоторого $c \in A$, $c \neq a$. Отсюда следует, что $a_1\ \sigma_1\ a_2$ или $a\ \sigma_1\ c$ для $\sigma_1 \in \mathrm{Con}\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$. Аналогично $b_1\ \sigma_1\ b_2$ для некоторых $b_1, b_2 \in A$, где $f(b_1) = v = f(b_2)$ и $|\{v, b_1, b_2\}| = 3$ или $v\ \sigma_1\ d$ для некоторого $d \in A$, где $d \neq v$ и $f(v) = v = f(d)$. Таким образом, в любом из возникающих четырёх случаев конгруэнция $\sigma_1 \in \mathrm{Con}\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ имеет два неодноэлементных класса и, следовательно, не является конгруэнцией Риса. $\square$

Лемма 13. *Пусть $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ — алгебра с оператором f и произвольной основной сигнатурой Ω. Если $\langle A, f\rangle$ — связный унар без кручения, имеющий узловой элемент, то $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ не является конгруэнц-алгеброй Риса.*

Доказательство. Пусть a — узловой элемент унара $\langle A, f\rangle$. Тогда найдутся такие элементы $b, c \in A$, что $f(b) = a = f(c)$ и $|\{a, b, c\}| = 3$. Предположим, что $\sigma_1 \in \mathrm{Con}\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ является конгруэнцией Риса. Тогда $\sigma_1 = B^2 \cup \triangle_A$ для некоторой подалгебры $B \in \mathrm{Sub}\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$. Так как $f(b) = f(c)$, то $b\ \sigma_1\ c$, откуда следует, что $b, c \in B$. Тогда $a = f(b) \in B$. Так как $a, b \in B$, то $(a, b) \in B^2 \cup \triangle_A = \sigma_1$, а значит, $f(a) = f(b) = a$. Из равенства $f(a) = a$ следует периодичность элемента a, что противоречит условию. $\square$

Лемма 14. *Пусть $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ — алгебра с оператором f и произвольной основной сигнатурой Ω. Если $\langle A, f\rangle$ — связный периодический унар, имеющий собственный подунар $B \cong C_n^0$ для некоторого $n > 1$, то $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ не является конгруэнц-алгеброй Риса.*

Доказательство. Так как подунар B собственный, а унар $\langle A, f\rangle$ связный, то существует такой нециклический элемент $a \in A$, что элемент $b = f(a)$ является циклическим. Поскольку $n > 1$, то найдётся также такой отличный от b циклический элемент $c \in B$, что $f(c) = b$. Предположим, что $\sigma_1 \in \mathrm{Con}\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ есть конгруэнция Риса. Тогда $\sigma_1 = D^2 \cup \triangle_A$ для некоторой подалгебры $D \in \mathrm{Sub}\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$. Так как $f(c) = b = f(a)$, то $c\,\sigma_1\,a$. Поскольку $a \neq c$, отсюда вытекает, что $a, c \in D$. Тогда $b = f(a) \in D$. Так как $b, a \in D$, то $(b, a) \in D^2 \cup \triangle_A = \sigma_1$, а значит, $f(b) = f(a)$. Тогда $f(b) = b$, что противоречит условию $n > 1$. □

Теорема 3. *Пусть $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ — алгебра с оператором f и произвольной основной сигнатурой Ω. Если $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса, то либо операция f инъективна, либо унар $\langle A, f\rangle$ является неодноэлементным корнем без нетривиальных узлов, либо $\langle A, f\rangle$ является суммой неодноэлементного корня без нетривиальных узлов и подунара, на котором операция f инъективна.*

Доказательство. Пусть операция f не инъективна и унар $\langle A, f\rangle$ не является ни одним из унаров, перечисленных в условии. Так как f не инъективна, то $\langle A, f\rangle$ имеет хотя бы один обобщённо узловой элемент. Если таких элементов более одного, то по лемме 12 $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ не является конгруэнц-алгеброй Риса. Поэтому далее полагаем, что $\langle A, f\rangle$ имеет единственный обобщённо узловой элемент a.

Пусть $\langle A, f\rangle$ — связный унар. По лемме 11 $\langle A, f\rangle$ либо периодический унар, либо унар без кручения. В последнем случае по лемме 13 $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ не является конгруэнц-алгеброй Риса. Если $\langle A, f\rangle$ — периодический унар, то он содержит подунар $B \cong C_n^0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку операция f не инъективна, то подунар B собственный. При $n > 1$ по лемме 14 $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ снова не является конгруэнц-алгеброй Риса. Если же $n = 1$, то $\langle A, f\rangle$ — корень и его неподвижный элемент является обобщённо узловым. По условию $\langle A, f\rangle$ не является корнем без нетривиальных узлов. Тогда он имеет узловой элемент, не совпадающий с неподвижным, что противоречит единственности обобщённо узлового элемента в $\langle A, f\rangle$.

Пусть теперь унар $\langle A, f\rangle$ несвязный. Тогда $\langle A, f\rangle$ является суммой подунара C, на котором операция f инъективна, и неодноэлементной компоненты связности B, содержащей элемент a. Заметим, что в силу инъективности операции f на C конгруэнция σ_1 унара $\langle A, f\rangle$ является расширением конгруэнции σ_1 подунара B.

Пусть $a \neq f(a)$. Тогда a — узловой элемент. По лемме 11 компонента связности B будет либо периодическим унаром, либо унаром без кручения. Если B — унар без кручения, то, рассуждая как при доказательстве леммы 13, получаем, что $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ не является конгруэнц-алгеброй Риса.

Пусть теперь B — периодический унар. Тогда B содержит собственный подунар, изоморфный C_n^0 для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Если a — циклический элемент, то в силу условия $a \neq f(a)$ имеем $n > 1$. Тогда, рассуждая по аналогии с доказательством леммы 14, получаем, что $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ не является конгруэнц-алгеброй Риса. Если же элемент a нециклический, то получаем противоречие с единственностью обобщённо узлового элемента. Действительно, в этом случае элемент $f^{t(a)}(a)$ является циклическим, и если $n = 1$, то $f^{t(a)}(a)$ — обобщённо узловой элемент. Если $n > 1$, то этот элемент также является обобщённо узловым, так как верны равенства $|\{f^{t(a)}(a), f^{t(a)-1}(a), f^{t(a)+n-1}(a)\}| = 3$ и $f\big(f^{t(a)-1}(a)\big) = f^{t(a)}(a) = f\big(f^{t(a)+n-1}(a)\big)$. Таким образом, поскольку $f^{t(a)}(a) \neq a$, то $\langle A, f\rangle$ содержит более одного обобщённо узлового элемента.

Пусть теперь $a = f(a)$. Тогда подунар B является корнем. По условию он не является корнем без нетривиальных узлов. Тогда B имеет узловой элемент, не совпадающий с неподвижным, что вновь ведёт к противоречию. $\square$

Замечание 3. Необходимые условия конгруэнц-рисовости, приведённые в теореме 3, в общем случае не являются достаточными.

Доказательство. Рассмотрим алгебру $\langle A, f, g\rangle$ с двумя унарными операциями f и g, заданную следующим образом: $A = \{a, b, c, d\}$, $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = d$, $f(d) = a$ и $g(x) = x$ для любых $x \in A$. Из определений операций f и g следует, что они инъективны и для всех $x \in A$ выполняется условие $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$. Таким образом, $\langle A, f, g\rangle$ можно рассматривать как алгебру с инъективным оператором f и основной операцией g. По замечанию 2 решётка $\mathrm{Con}\langle A, f, g\rangle$ совпадает с решёткой $\mathrm{Con}\langle A, f\rangle$. Заметим, что $\langle A, f\rangle \cong C_4^0$. Однако конгруэнция на $\langle A, f\rangle$, порождённая парой $\big(a, f^2(a)\big)$, не является конгруэнцией Риса, так как имеет два неодноэлементных класса.

Рассмотрим теперь алгебру $\langle B, f, g\rangle$ с двумя унарными операциями f и g, заданную следующим образом: $B = \{a, b, c\}$, $f(x) = a$ и $g(x) = x$ для любых $x \in B$. Как и выше, $\langle B, f, g\rangle$ есть алгебра с оператором f и основной операцией g, причём унар $\langle B, f\rangle$ является неодноэлементным корнем без нетривиальных узлов. Непосредственная проверка показывает, что отношение $\{b, c\}^2 \cup \triangle_B$ — конгруэнция на $\langle B, f, g\rangle$, но оно не является конгруэнцией Риса, так как множество $\{b, c\}$ не будет подалгеброй в $\langle B, f, g\rangle$.

Рассмотрим, наконец, алгебру $\langle D, f, g\rangle$ с двумя унарными операциями f и g, заданную следующим образом: $D = \{a, b, c, d\}$, $f(a) = a$, $f(b) = a$, $f(c) = a$, $f(d) = d$ и $g(x) = x$ для любых $x \in D$. Снова получаем, что $\langle D, f, g\rangle$ есть алгебра с оператором f и основной операцией g. Обозначив $B = D \setminus \{d\}$, получаем, что унар $\langle D, f\rangle$ является суммой корня без нетривиальных узлов $\langle B, f\rangle$, описанного выше, и подунара $\langle \{d\}, f\rangle$ с инъективной операцией. Непосредственная проверка показывает, что отношение $\{b, c\}^2 \cup \triangle_D$ есть конгруэнция на $\langle D, f, g\rangle$. При этом, как и выше, оно не является конгруэнцией Риса, поскольку $\{b, c\} \notin \mathrm{Sub}\langle D, f, g\rangle$. $\square$

Лемма 15. *Пусть $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ — алгебра с оператором f и произвольной основной сигнатурой Ω. Если унар $\langle A, f\rangle$ является корнем без нетривиальных узлов, то отношение $\sigma_n \in \mathrm{Con}\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ есть конгруэнция Риса для всех $n \leqslant t(A)$.*

Доказательство. Обозначим через a неподвижный элемент унара $\langle A, f\rangle$ и зафиксируем произвольное число $n \leqslant t(A)$. По [9, предложение 1] подунар D_n унара $\langle A, f\rangle$ является подалгеброй в $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$, причём $D_n = [a]\sigma_n$. Докажем, что все классы конгруэнции $\sigma_n \in \mathrm{Con}\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$, отличные от D_n, одноэлементны.

Пусть $b \in A \setminus D_n$. Тогда $t(b) > n$. Предположим, что найдётся элемент $c \in A$, для которого $b \neq c$ и $b\ \sigma_n\ c$. Последнее условие влечёт равенство $f^n(b) = f^n(c)$. Тогда, поскольку $b \neq c$, элемент $f^n(b)$ является обобщённо узловым. Но так как унар $\langle A, f\rangle$ является корнем без нетривиальных узлов, то $f^n(b) = a$, что противоречит условию $t(b) > n$. Таким образом, $[b]\sigma_n = \{b\}$ для всех $b \in A \setminus D_n$. Отсюда следует, что $\sigma_n = D_n^2 \cup \triangle_A$, следовательно, σ_n — конгруэнция Риса. □

Предложение 1. *Пусть $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ — алгебра с оператором f и произвольной основной сигнатурой Ω. Если унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен C_1^t, где $t \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, то алгебра $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса.*

Доказательство. При $t = 0$ алгебра $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ одноэлементна и утверждение тривиально. Если $t = 1$, то $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$ проста и утверждение следует из замечания 1.

Пусть $t \geqslant 2$ и θ — произвольная нетривиальная конгруэнция на алгебре $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$. Тогда $\theta \in \mathrm{Con}\langle A, f\rangle$. По [24, леммы 3 и 4] на унаре $\langle A, f\rangle$ выполняется равенство $\theta = \sigma_n$ для некоторого $n > 0$. Тогда, поскольку $\sigma_n \in \mathrm{Con}\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$, по лемме 15 σ_n — конгруэнция Риса алгебры $\langle A, \Omega \cup \{f\}\rangle$. □

Замечание 4. Пусть конгруэнция $\bar{\alpha}$ произвольной универсальной алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ является расширением конгруэнции α некоторой подалгебры B алгебры $\langle A, \Omega\rangle$. Если α — конгруэнция Риса на подалгебре B, то $\bar{\alpha}$ — конгруэнция Риса алгебры $\langle A, \Omega\rangle$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathrm{Con}_R\langle B, \Omega\rangle$. Тогда $\alpha = S^2 \cup \triangle_B$ для некоторой подалгебры S алгебры $\langle B, \Omega\rangle$. По определению $\bar{\alpha} = \alpha \cup \triangle_A$. Отсюда следует, что $\bar{\alpha} = S^2 \cup \triangle_A$. Так как $S \in \mathrm{Sub}\langle A, \Omega\rangle$, то $\bar{\alpha}$ — конгруэнция Риса алгебры $\langle A, \Omega\rangle$. □

Следующая теорема показывает, как полученные выше общие необходимые условия конгруэнц-рисовости могут быть использованы при изучении конкретных классов алгебр с операторами.

Теорема 4. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и основной тернарной операцией d, заданной по одному из правил* (1), (2). *Алгебра $\langle A, d, f\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса тогда и только тогда, когда либо операция f инъективна, либо унар $\langle A, f\rangle$ является неодноэлементным корнем без нетривиальных узлов, либо $\langle A, f\rangle$ является суммой неодноэлементного корня без нетривиальных узлов и подунара с инъективной операцией.*

Доказательство. Необходимость утверждения следует из теоремы 3. Докажем его достаточность.

Пусть операция f инъективна. Если алгебры $\langle A, p, f\rangle$, $\langle A, s, f\rangle$ одноэлементны, то утверждение тривиально. В случае их неодноэлементности алгебра $\langle A, p, f\rangle$ проста по [24, теорема 2], а алгебра $\langle A, s, f\rangle$ проста по [8, теорема 9]. Тогда утверждение следует из замечания 1.

Пусть теперь унар $\langle A, f\rangle$ является неодноэлементным корнем без нетривиальных узлов. Из леммы 12 из [24] вытекает, что в этом случае любая нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, p, f\rangle$ имеет вид σ_n для некоторого $n > 0$. По [4, лемма 11] то же утверждение справедливо и для алгебры $\langle A, s, f\rangle$. Тогда из леммы 15 следует, что обе эти алгебры являются конгруэнц-алгебрами Риса.

Наконец, пусть унар $\langle A, f\rangle$ является суммой неодноэлементного корня без нетривиальных узлов и унара с инъективной операцией. Обозначим через B компоненту связности унара $\langle A, f\rangle$, являющуюся корнем. В силу (1) и (2) подунар B является подалгеброй алгебр $\langle A, p, f\rangle$ и $\langle A, s, f\rangle$. По [5, лемма 15] в данном случае любая нетривиальная конгруэнция θ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ является расширением некоторой конгруэнции подалгебры B. По [4, лемма 11] то же утверждение выполняется и для алгебры $\langle A, s, f\rangle$. Тогда с учётом леммы 15 и замечания 4 алгебры $\langle A, p, f\rangle$ и $\langle A, s, f\rangle$ являются конгруэнц-алгебрами Риса. $\square$

Литература

[1] Егорова Д. П. Структура конгруэнций унарной алгебры // Упорядоченные множества и решётки: Межвуз. науч. сб. Вып. 5. — Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1978. — С. 11—44.

[2] Карташов В. К. Квазимногообразия унаров // Мат. заметки. — 1980. — Т. 27, № 1. — С. 7—20.

[3] Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Унив. алгебра и её приложения: Тез. докл. междунар. сем., посв. памяти проф. Моск. гос. ун-та Л. А. Скорнякова. — Волгоград: Перемена, 1999. — С. 31—32.

[4] Лата А. Н. О конгруэнц-когерентных алгебрах Риса и алгебрах с оператором // Чебышёвский сб. — 2017. — Т. 18, вып. 2 (62). — С. 154—172.

[5] Усольцев В. Л. О подпрямо неразложимых унарах с мальцевской операцией // Изв. Волгоградск. гос. пед. ун-та, сер. «Ест. и физ.-мат. науки». — 2005. — № 4 (13). — С. 17—24.

[6] Усольцев В. Л. Унары с тернарной мальцевской операцией // УМН. — 2008. — Т. 63, № 5. — С. 201—202.

[7] Усольцев В. Л. Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией p, заданного тождеством $p(x, y, x) = y$ // Чебышёвский сб. — 2011. — Т. 12, вып. 2 (38). — С. 127—134.

[8] Усольцев В.Л. О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией // Уч. зап. Орловск. гос. ун-та. — 2012. — Т. 6 (50), часть 2. — С. 229—236.

[9] Усольцев В. Л. О гамильтоновом замыкании на классе алгебр с одним оператором // Чебышёвский сб. — 2015. — Т. 16, вып. 4 (56). — С. 284—302.

[10] Усольцев В. Л. Алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в одном классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия // Чебышёвский сб. — 2016. — Т. 17, вып. 4 (60). — С. 157—166.

[11] Усольцев В. Л. О рисовском замыкании в некоторых классах алгебр с оператором // Чебышёвский сб. — 2021. — Т. 22, вып. 2. — С. 271—287.

[12] Усольцев В. Л. Подпрямая неразложимость и атомы решёток конгруэнций алгебр с оператором и симметрической основной операцией // Чебышёвский сб. — 2021. — Т. 22, вып. 2. — С. 257—270.

[13] Baker K. A., Pixley A. Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems // Math. Z. — 1975. — Vol. 143. — P. 165—174.

[14] Berman J. On the congruence lattices of unary algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 36. — P. 34—38.

[15] Chajda I., Duda J. Rees algebras and their varieties // Publ. Math. Debrecen. — 1985. — Vol. 32. — P. 17—22.

[16] Chajda I., Eigenthaler G., Langer H. Congruence Classes in Universal Algebra. — Vienna: Heldermann, 2003.

[17] Jakubíková-Studenovská D., Pócs J. Monounary Algebras. — Košice : Pavol Jozef Šafárik Univ., 2009.

[18] Johnson J., Seifert R. L. A survey of multi-unary algebras: Mimeographed seminar notes. — U. C. Berkeley, 1967.

[19] Lavers T., Solomon A. The endomorphisms of a finite chain form a Rees congruence semigroup // Semigroup Forum. — 1999. — Vol. 59, no. 2. — P. 167—170.

[20] Rees D. On semigroups // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1940. — Vol. 36. — P. 387—400.

[21] Skornyakov L. A. Unars // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. — 1982. — Vol. 29. — P. 735—743.

[22] Šešelja B., Tepavčević A. On a characterization of Rees varieties // Tatra Mountains Math. Publ. — 1995. — Vol. 5. — P. 61—69.

[23] Tichy R. F. The Rees congruences in universal algebras // Publ. Inst. Math. (Beograd). — 1981. — Vol. 29. — P. 229—239.

[24] Usoltsev V. L. Simple and pseudosimple algebras with operators // J. Math. Sci. — 2010. — Vol. 164, № 2. — P. 281—293.

[25] Wenzel G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f\rangle$ // Arch. Math. (Basel). — 1970. — Vol. 21. — P. 256—264.