Критерий продолжаемости унитарного характера нормальной подгруппы группы-произведения до чистого одномерного псевдопредставления группы

А. И. ШТЕРН
Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Московский государственный университет,
Научно-исследовательский институт системных исследований
Российской академии наук (*ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН*)
e-mail: aishtern@mtu-net.ru, rroww@mail.ru

УДК 517.986.4

Ключевые слова: характер группы, одномерное псевдопредставление, чистое псевдопредставление.

Аннотация

Получен критерий того, что заданный непрерывный унитарный характер нормальной подгруппы данной группы, являющейся произведением этой нормальной подгруппы и некоторой подгруппы, допускает расширение до чистого одномерного псевдопредставления всей группы.

Abstract

A. I. Shtern, Criterion for the extendability of a unitary character on a normal subgroup of a product group to a pure one-dimensional pseudorepresentation of the group, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 1, pp. 251—254.

We prove a criterion for a given unitary character on a normal subgroup of a group that is a product of this normal subgroup and some subgroup to have an extension to a pure one-dimensional pseudorepresentation of the whole group.

Светлой памяти Александра Васильевича Михалёва

1. Введение

Продолжая исследование проблем расширения, связанных с псевдохарактерами и одномерными чистыми псевдопредставлениями групп [5—9], мы получаем критерий того, что данный унитарный характер на нормальной подгруппе N группы G, которая является произведением $G = SN$ группы N и некоторой подгруппы S группы G, допускает расширение до чистого одномерного псевдопредставления группы G.

2. Предварительные сведения

Напомним некоторые сведения, необходимые ниже.

Пусть G — группа и π — одномерное псевдопредставление G, т. е.

$$\pi\colon G \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \pi(e) = 1,$$

где π — единичный элемент G,

$$|\pi(gh) - \pi(g)\pi(h)| \leqslant \varepsilon, \quad g, h \in G, \quad \pi(g^k) = \pi(g)^k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Минимальное число ε, удовлетворяющее (1), называется *дефектом* псевдопредставления π. Говорят, что псевдопредставление *чистое*, если его ограничение на каждую аменабельную подгруппу группы G является обычным комплексным характером этой подгруппы. Основные сведения о псевдопредставлениях можно найти в [2—4, 10], информацию об одномерных псевдопредставлениях — в [1].

Пусть G — группа, а π и ρ — ограниченные одномерные чистые псевдопредставления группы G с дефектами ε_π и ε_ρ соответственно. Тогда отображение $\pi\rho\colon G \to \mathbb{T}$, где $\mathbb{T} = \{z\colon z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$, определённое по правилу

$$\pi\rho(g) = \pi(g)\rho(g), \quad g \in G,$$

есть ограниченное одномерное чистое псевдопредставление группы G, дефект которого $\varepsilon_{\pi\rho}$ не превышает $\varepsilon_\pi + \varepsilon_\rho$. В частности, семейство ограниченных одномерных чистых псевдопредставлений группы G является группой относительно обычного поточечного умножения отображений (см. [1, лемма 1]).

Определение 1. Обозначим группу ограниченных одномерных чистых псевдопредставлений группы G через $\mathrm{BODPP}(G)$. Обозначим семейство ограничений элементов группы $\mathrm{BODPP}(G)$ на пересечение $S \cap N$ через $I(G, S, N)$. Очевидно, $I(G, S, N)$ — группа относительно операции, определённой в $\mathrm{BODPP}(G)$.

Очевидно, произвольное отображение $f\colon G \to \mathbb{T}$, где $\mathbb{T}$ — единичная окружность в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, удовлетворяет условию

$$|f(gh) - f(g)f(h)| \leqslant 2, \quad g, h \in G,$$

и, таким образом, если дефект чистого псевдопредставления f не меньше 2, то единственным значимым условием для f является условие чистоты, утверждающее, что ограничение f на каждую аменабельную подгруппу H группы G является обычным унитарным характером группы H.

Пусть G — аменабельная группа и f — одномерное ограниченное ε-квазипредставление группы G, удовлетворяющее условиям $f(e) = 1$ и $\varepsilon < 1/5$. Тогда существует обычный унитарный характер ψ группы G, такой что $|f(g) - \psi(g)| < 1/2$ для всех $g \in G$, и характер ψ однозначно определяется этими условиями (см. [1, замечание 2]).

Напомним, что по [1, следствие 3.2] если G — группа, а f — одномерное ограниченное псевдопредставление группы G с дефектом $\varepsilon < 0{,}24$, то ограничение f на каждую аменабельную подгруппу G есть гомоморфизм этой подгруппы в $\mathbb{T}$, поэтому f — чистое псевдопредставление.

3. Основной результат

Теорема 1. *Пусть группа G есть множество произведений вида sn, где s пробегает некоторую подгруппу группы G, а n — некоторую нормальную подгруппу N группы G. Пусть f — заданный унитарный характер группы N. Тогда чистое одномерное псевдопредставление Φ группы G, такое что $\Phi(n) = f(n)$ для всех $n \in N$, существует тогда и только тогда, когда ограничение f на $N \cap S$ принадлежит $I(G, S, N)$.*

Доказательство. Если требуемое чистое одномерное псевдопредставление Φ группы G, такое что $\Phi(n) = f(n)$ для всех $n \in N$, существует, то ограничения $\Phi|_{S\cap N}$ и $f|_{S\cap N}$ совпадают, и следовательно, $f|_{S\cap N} \in I(G, S, N)$.

Обратно, пусть ограничение f на $N \cap S$ принадлежит $I(G, S, N)$. Пусть F — такое чистое одномерное псевдопредставление группы S, что $F|_{S\cap N} = f|_{S\cap N}$. Положим $\Phi(sn) = F(s)f(n)$ для всех $s \in S$ и $n \in N$.

Заметим, что, поскольку Φ — одномерное чистое псевдопредставление и f является характером, для $s \in S$ и $t \in S \cap N$ выполняется соотношение

$$\Phi\big((st)^k\big) = \Phi\left(s^k \prod_{l=k-1}^{0} (s^{-l}ts^l)\right) = \big(F(s)\big)^k f\left(\prod_{l=k-1}^{0} (s^{-l}ts^l)\right) = \\ = F(s)^k f(t)^k = \Phi(st)^k$$

для любого целого числа k. Сходным образом

$$\Phi\Big(\big((st)(t^{-1}n)\big)^k\Big) = \Phi\left((st)^k \prod_{l=k-1}^{0} \big((st)^{-l}(t^{-1}n)(st)^l\big)\right) = \\ = \big(F(st)\big)^k f\left(\prod_{l=k-1}^{0} \big((st)^{-l}(t^{-1}n)(st)^l\big)\right) = \big(F(st)\big)^k \big(f(t^{-1}n)\big)^k = \\ = \big(F(s)F(t)\big)^k f(t)^{-k} f(n)^k = \Phi\big((sn)^k\big)$$

для любого целого k, и, таким образом, Φ является корректно определённым одномерным чистым псевдопредставлением. Очевидно, ограничение Φ до N есть f, что и требовалось доказать. □

Исследование выполнено при частичной поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

Литература

[1] Штерн А. И. Специфические свойства одномерных псевдопредставлений групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 1. — С. 247—255.

[2] Штерн А. И. Локально ограниченные финально преднепрерывные конечномерные квазипредставления связных локально компактных групп // Матем. сб. — 2017. — Т. 208, № 10. — С. 149—170.

[3] Shtern A. I. Quasi-symmetry. I // Russ. J. Math. Phys. — 1994. — Vol. 2, no. 3. — P. 353—382.

[4] Shtern A. I. Finite-dimensional quasirepresentations of connected Lie groups and Mishchenko's conjecture // J. Math. Sci. — 2009. — Vol. 159, no. 5. — P. 653—751.

[5] Shtern A. I. Extension of pseudocharacters from normal subgroups // Proc. Jangjeon Math. Soc. — 2015. — Vol. 18, no. 4. — P. 427—433.

[6] Shtern A. I. Extension of characters on the normal subgroup of a semi-direct product group to one-dimensional pseudorepresentations of the group // Proc. Jangjeon Math. Soc. — 2016. — Vol. 19, no. 3. — P. 451—455.

[7] Shtern A. I. Extension of pseudocharacters from normal subgroups. II // Proc. Jangjeon Math. Soc. — 2016. — Vol. 19, no. 2. — P. 213—218.

[8] Shtern A. I. Extension of pseudocharacters from normal subgroups. III // Proc. Jangjeon Math. Soc. — 2016. — Vol. 19, no. 4. — P. 609—614.

[9] Shtern A. I. Corrections to «Extensions of characters from the normal subgroup of a semidirect product group to one-dimensional pseudorepresentations of the group» // Proc. Jangjeon Math. Soc. — 2017. — Vol. 20, no. 2. — P. 313—317.

[10] Shtern A. I. A version of van der Waerden's theorem and a proof of Mishchenko's conjecture on homomorphisms of locally compact groups // Izv. Math. — 2008. — Vol. 72, no. 1. — P. 169—205.