Предисловие

Настоящий сборник состоит в основном из работ участников семинара «Графы на поверхностях и кривые над числовыми полями», работающего в Московском государственном университете с 1990 года (в настоящее время многие участники семинара по очевидным причинам находятся в разных странах и занятия, как правило, проходят в удалённом режиме). Предыдущие два сборника такого же рода — это выпуск 6 тома 13 (2007 год) и выпуск 6 тома 18 (2013 год).

Общие замечания о предмете нашего семинара содержатся в предисловии к выпуску 2007-го года, и нет причин повторяться. Ограничимся краткими соображениями о современном состоянии теории детских рисунков.

Эта теория основана на эквивалентностях нескольких категорий, иногда совершенно непохожих друг на друга. Одно из наиболее эффектных следствий этих эквивалентностей — действие абсолютной группы Галуа $\mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$ на детских рисунках, дающая уникальную возможность *визуализации* абсолютной группы Галуа. С самого начала теории детских рисунков, то есть с 1980-х годов, упомянутая конструкция давала надежду (среди многих других надежд, например на построение *анабелевой* математики) на решение *обратной задачи теории Галуа*, то есть построения расширения поля $\mathbb{Q}$ с заданной конечной группой Галуа.

За минувшие десятки лет надежда не сбылась, и в этом, возможно, одна из причин того, что некоторые специалисты по теории детских рисунков ушли в другие области. Однако нельзя сказать, что теория теряет популярность: так, обнаруживаются новые связи (с физикой, комбинаторикой, машинным обучением...) и разрабатываются новые методы вычислений. С момента выхода предыдущего сборника теория обогатилась многими красивыми и содержательными примерами. Некоторые из этих методов и примеров представлены в настоящем сборнике.

Отсутствие видимого прогресса в решении обратной задачи теории Галуа (и других ожидаемых приложений) можно сопоставить с другими периодами кажущегося застоя в истории математики. Например, таков был период после замечательного прорыва в 16-м веке, когда итальянским математикам удалось *решить* полиномиальные уравнения 3-й и 4-й степени — точнее, выразить корни через коэффициенты *в радикалах*. А после этого три века «ничего не происходило», уравнения 5-й степени не хотели решаться! Чтобы понять почему, надо было дождаться гениев 19-го века Гаусса, Галуа и Абеля, чтобы понять: корни уравнений степени выше или равной 5 есть, но выражаются через коэффициенты, как правило, с помощью более сложных функций, чем извлечения корней. И мы не можем упрекнуть Кардано за то, что он не поставил вопроса о *разрешимости* групп Галуа многочленов и не предложил вывести формулы для корней в терминах высших трансцендентных функций; потребовались столетия для создания соответствующих понятий и разработки *языков*, на которых могут быть получены полные ответы на вопросы, интересовавшие первых европейских алгебраистов.

Если вернуться к теории детских рисунков, то окажется, что одна из её нерешённых проблем — именно в *языках*, то есть в точном определении *семиотических структур*, соответствующих нашей интуиции. Так, все прекрасно понимают равносильность

$$\underbrace{\bullet\!-\!\!\!-\!\bullet\!-\!\!\!-\!\bullet\quad\ldots\quad\bullet\!-\!\!\!-\!\bullet}_{n}\qquad\longleftrightarrow\qquad\cos(n\arccos z)$$

и могут дать определение цепочки в терминах картографической группы. Однако вряд ли в настоящее время кому-нибудь известно обобщение этого определения на случаи, интуитивно воспринимаемые как семейство детских рисунков. Введение понятий, в терминах которых такое определение можно было бы сформулировать, — частный случай одной из упомянутых выше открытых проблем построения оснований нашей теории. В духе упомянутой выше аналогии эту проблему можно уподобить разработке теории полей и их расширений для углубления понимания формул итальянских алгебраистов 16-го века.

В 1984 году, когда теория появилась, введённый Гротендиком термин «детские рисунки» был очень удачен. В 2016 году[1] Кристофер Бишоп из Университета штата Нью-Йорк в Стони-Бруке предложил термин «рисунки взрослеющих» (для бесконечных деревьев). В 2020 году в препринте Н. Комб, Ю. И. Манина и М. Марколли появился термин «рисунки стариков»[2] (для графов на стабильных кривых). Будем надеяться, что мы достигнем существенных результатов ещё до того, как потомки уподобят наши рисунки произведениям наскальной живописи!

Сборник открывается лестной для автора настоящих строк заметкой А. Звонкина, тёплые слова которого основаны на нашей с ним много(десяти)летней профессиональной и человеческой дружбе.

В статье Н. М. Адрианова и А. М. Ватузова вычислены функции Белого взвешенных деревьев, валентности вершин которых не превосходят 3, а группа вращений рёбер примитивна. В вычислениях используется модулярная униформизация.

Работа Н. М. Адрианова и Г. Б. Шабата стоит несколько особняком: она мотивирована попыткой приложения теории детских рисунков к химии. Речь идёт о так называемых фуллеренах, моделями которых являются сферические рисунки, составленные только из пятиугольников (их оказывается ровно 12, как в додекаэдре) и шестиугольников. Прикладное значение могут иметь метрические свойства модели с двумя шестиугольниками, а теорема несуществования модели

[1] 29 марта 2016 года на геометрическом семинаре Курантовского института математических наук Нью-Йоркского университета.

[2] Термин весьма уместен, особенно если учесть специфику настоящего сборника.

с единственным шестиугольником оказывается связанной со многими классическими разделами математики, например с обобщённым уравнением Ферма в полиномах.

Статья Н. Я. Амбург и Л. Бриль мотивирована одной из последних работ Ю. И. Манина, написанной совместно с М. Марколли и посвящённой (среди прочего) детским рисункам. Ю. И. Манин и М. Марколли утверждают, что так называемый многочлен Татта является инвариантом Галуа; однако Н. Амбург и Л. Бриль опровергают это утверждение сравнительно простым примером.

Статья Н. Я. Амбург и Е. М. Крейнес посвящена компактификации Делиня—Мамфорда пространства модулей кривых рода 0 с пятью отмеченными точками. Авторы показывают, что ориентирующее накрытие этого пространства вместе с одной известной конструкцией является детским рисунком рода 4, а соответствующая кривая есть кривая Бринга.

В большой статье Г. А. Джонса и А. К. Звонкина развиваются глубокие идеи Ф. Клейна, показывающие, что теория детских рисунков уходит своими корнями в 19-й век. С точки зрения Ф. Клейна речь шла о полиномиальных уравнениях степеней 7 и 11, которые ставили некоторые вопросы о группах $\mathrm{PSL}(\mathbb{F}_p)$ при $p \in \{7, 11\}$. Г. А. Джонс и А. К. Звонкин реинтерпретируют эти вопросы на современном языке и дают подробные ответы, распространяя предмет исследования на рисунки типов $(2, 3, p)$. В процессе исследования авторы обнаруживают интереснейшие связи теории детских рисунков с теорией чисел — с гипотезой Бейтмана—Хорна.

Одна из двух коротких заметок Ю. Ю. Кочеткова напрямую связана с тематикой сборника: она посвящёна задачам вычислительной алгебры, связанным с раскраской так называемых цепочек и пропеллеров. В другой рассматривается некоторая дискретная динамическая система на множестве выпуклых четырёхугольников на евклидовой плоскости.

Статья Ф. Б. Паковича посвящена проблемам геометрии сферических рисунков, которую он связывает как с классическими объектами анализа, обобщёнными лемнискатами, так и с современной теоремой Бишопа об аппроксимации континуумов на комплексной плоскости деревьями в истинной форме. В доказательстве основных результатов используется также и нетривиальная алгебраическая геометрия, теорема Люрота.

Сборник завершается статьёй Г. Б. Шабата, в которой устанавливается аналог старой совместной с В. Воеводским теоремы (комплексная кривая задаётся кусочно-евклидовой метрикой, составленной из равносторонних треугольников, тогда и только тогда, когда эта кривая определена над числовым полем), в формулировке которой равносторонние треугольники заменяются на квадраты.

Мы надеемся, что следующий выпуск будет посвящён 50-летию одного из старейшин нашего семинара Н. М. Адрианова.

Г. Б. Шабат