К семидесятилетию Георгия Борисовича Шабата

А. К. ЗВОНКИН
Университет Бордо, Франция
e-mail: zvonkin@labri.fr

УДК 512.542.74

Очень непривычно мне называть Шабата по имени-отчеству: мы с ним знакомы так давно, что иначе как Сашей и Юрой никогда друг друга не называли. Наверное, психологически проще мне будет называть его по фамилии.

Я предложил моему соавтору Гарету Джонсу посвятить нашу статью [1] 70-летию Шабата. Вот что он мне ответил.

> *Дорогой Саша,*
>
> *разумеется, я буду счастлив посвятить нашу статью Джорджу. Я не уверен, что он осознаёт, какую существенную роль он сыграл на важном этапе моей карьеры математика-исследователя. Где-то около 1991 года я почувствовал, что почти исчерпал интересные сюжеты в той области, в которой тогда работал. В этот момент Тони Маки пригласил Дэвида [Сингермана] и меня в Париж на небольшую конференцию, посвящённую гиперкартам, а также на защиту диссертации его аспирантки Лоранс Бессис, на которой мы должны были быть членами жюри. Там он показал нам статью Шабата и Воеводского в сборнике, посвящённом юбилею Гротендика. Так я обнаружил, что кажущиеся скучноватыми сюжеты, связанные с картами, гиперкартами и треугольными группами, открывают окно в совершенно новый мир алгебраической геометрии, алгебраической теории чисел и теории Галуа, в мир, о существовании которого я знал, но с которым мне никогда не удавалось связать мою собственную работу в теории групп и комбинаторике. Это было, возможно, самое глубокое и незабываемое математическое открытие, которое я могу припомнить. Я сказал об этом Джорджу много позже, на конференции в Португалии, посвящённой моему 60-летию, но я не уверен, что он понимает, сколь многим я обязан этой небольшой статье.*

Джонс имеет в виду статью Г. Б. Шабата и В. А. Воеводского [7]. Отметим мимоходом, что не каждому дано иметь в качестве ученика филдсовского лауреата. Вот что сказано на эту тему в статье о Владимире Воеводском в «Википедии».

Фундаментальная и прикладная математика, 2024, том 25, № 2, с. 7—15.

> Во время академического отпуска [Воеводский] подрабатывал преподавателем программирования на учебно-производственном комбинате, там встретился с Георгием Шабатом. Шабат познакомил Воеводского с программой Гротендика, к которой [Воеводский] впоследствии неоднократно обращался в своём творчестве; к осмыслению и развитию идей программы относятся и первые научные исследования Воеводского, проведённые совместно с Шабатом и вылившиеся в ряд публикаций, одна из которых получила одобрение Гротендика.

Следует заметить, что Воеводский, при всей своей гениальности, был человеком довольно непутёвым: его не один раз исключали и из школы, и из университета. Трудно сказать, что стало бы с ним, если бы в решающий момент он не встретил на своём жизненном пути Шабата. В аспирантуру Гарварда его приняли без диплома только лишь потому, что у него уже было несколько публикаций.

Стиль работы математиков бывает очень разный. Кто-то решает сложнейшие задачи, как бы покоряет неприступные вершины. Возьмём, к примеру, теорему о четырёх красках. Доказательство было получено К. Аппелем и В. Хакеном в 1976 году. Они сумели свести утверждение о четырёх красках к рассмотрению 1834 конфигураций, само же доказательство заняло 400 страниц текста и более тысячи часов компьютерного счёта. Последовали многочисленные проверки, упрощения, исправления мелких и не очень мелких ошибок, новые вычисления... Наконец, в 2005 году доказательство было полностью проверено с помощью компьютерной системы проверки доказательств Coq. Команде из нескольких математиков, логиков и программистов потребовалось четыре года на то, чтобы записать доказательство в форме, которая была бы понятна машине. (Компьютерной проверкой доказательств в последние годы своей жизни занимался также В. А. Воеводский: он руководил проектом, наиболее полно освещённым в [5].) Сегодня теорема о четырёх красках — один из наиболее надёжно установленных математических фактов. Ну что ж, снимем шляпу. И будем надеяться, что когда-нибудь эта задача окажется связанной с какими-нибудь другими, более глубокими и важными разделами математики.

Но есть и другой стиль. Он состоит в освоении новых территорий, в их, если угодно, *картографии*. Мы блуждаем по новому, неизведанному миру. Мы поначалу не знаем, на что обращать внимание, не знаем, что окажется важным, а что нет. Мы не знаем, какие вопросы задавать природе. Как сказал как-то раз В. И. Арнольд, постановка задачи становится ясной только тогда, когда эта задача уже решена[1]. Какой контраст с задачей о четырёх красках! Вот этот процесс зарождения новой науки часто — да практически всегда — скрыт от посторонних глаз. Его не найдёшь в учебниках: там будут лишь теоремы и их доказательства и иногда примеры. А кто же им подсказал, какие именно теоремы нужно доказывать? Эту задачу берут на себя первопроходцы, и именно к ним относится Шабат.

[1] Я не ставлю кавычек, так как цитата может оказаться неточной: фраза была высказана устно в частной беседе.

Раздел математики, в котором мы, участники этого сборника, работаем, называется теорией детских рисунков Гротендика. С гораздо бо́льшим основанием его можно было бы назвать теорией детских рисунков Шабата. Но я понимаю, что с точки зрения рекламы имя Гротендика весит гораздо больше. Гротендику принадлежит очень яркая и эмоциональная реакция на теорему Белого, а также то фундаментальное наблюдение, что группа Галуа действует на графах, нарисованных на поверхностях (т. е. на картах). Дальнейшее развитие этой теории принадлежит Шабату.

Впрочем, в последнее время всё чаще звучат голоса о том, что пальму первенства в этой теории нужно отдать Феликсу Клейну. Клейн вычислил функции Белого для платоновых карт, он построил кривую Бринга и фактически нашёл её поле реализации $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ (в то время как поле модулей равно $\mathbb{Q}$). Ещё об одном вкладе Клейна в теорию детских рисунков рассказывается в нашей статье с Г. Джонсом [1], помещённой в этом сборнике. Вот так, наверное, и следует говорить: теория детских рисунков Клейна—Гротендика—Шабата. Неплохая компания.

Теория детских рисунков кардинально изменила подход к теории карт. Возьмём для сравнения перечисление карт — раздел перечислительной комбинаторики. Это замечательная наука, в ней есть множество серьёзных результатов. Упомяну здесь хотя бы работу М. Э. Казаряна и С. К. Ландо [2], в которой строятся производящие функции для карт, удовлетворяющие иерархии уравнений Кадомцева—Петвиашвили. Уместно напомнить, что эти уравнения исходно возникли в физике плазмы. Поразительная демонстрация единства науки! При этом перечислительная комбинаторика оперирует большими ансамблями объектов; отдельные представители этого ансамбля ей не интересны. Это как большие косяки рыбы в море: нам интересно узнать, сколько их, каков их общий вес, но устремлять свой пытливый взор на то, чтобы разглядеть одну конкретную рыбёшку и понять, чем она отличается от других, — это было бы странным занятием.

Теория детских рисунков поступает ровно наоборот. Вот один из моих любимейших примеров: он заимствован из статьи В. О. Филимоненкова и Г. Б. Шабата [3]. Представим себе, что мы находимся на необитаемом острове. У нас нет ни компьютера, ни телефона, ни книг, ни даже ручки с бумагой. Есть только палочка, которой мы можем рисовать на мокром песке. Мы хотим изучить действие группы Галуа на «комбинаторной орбите», показанной на рис. 1: это полный список карт с паспортом $(5^2 1^2, 2^6, 5^2 1^2)$.

Прежде всего мы замечаем, что рисунки a, b, c симметричны с симметрией порядка 2, а рисунки d и e несимметричны. Это сразу ведёт к распадению множества из пяти элементов на три плюс два. Попробуем самодвойственность? Оказывается, все пять рисунков двойственны самим себе. Значит, самодвойственность ничего не даёт? Не будем торопиться с выводами. Если нарисовать карту вместе с её двойственной, то у этой «двойной карты» появится дополнительная симметрия. Ну так вот, у карты a группа автоморфизмов C_2 заменится на C_4, а у карт b и c группа C_2 заменится на четверную группу Клейна V_4.

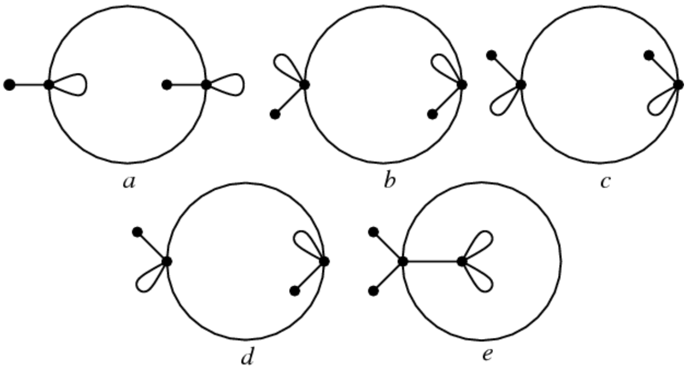

Рис. 1. Пять карт с паспортом $(5^2 1^2, 2^6, 5^2 1^2)$

Таким образом, карта a волей-неволей отделяется от двух остальных карт и тем самым образует отдельную орбиту, определённую над $\mathbb{Q}$. Две оставшиеся карты образуют единую орбиту $\{b, c\}$, определённую над мнимым квадратичным полем: в самом деле, ведь они переходят друг в друга под действием комплексного сопряжения.

Обратимся теперь к картам d и e. Априори имеется две возможности: либо они представляют собой две орбиты, определённые над $\mathbb{Q}$, либо составляют единую орбиту, определённую над квадратичным полем. Это квадратичное поле вещественно: в самом деле, комплексное сопряжение переводит карту e вовсе не в d, а в себя. И в том и в другом случае поле модулей карты d оказывается вещественным. Однако — вот сюрприз! — реализовать эту карту над вещественным полем невозможно: её не удаётся разместить на комплексной плоскости так, чтобы комплексное сопряжение переводило эту карту в себя. А это уже вполне серьёзное открытие. Оказывается, существуют такие детские рисунки, функцию Белого которых невозможно реализовать над полем модулей. Вот сколько интересных фактов из теории Галуа узнали мы, просто разглядывая рисунки.

Когда мы вернёмся с нашего острова на большую землю и получим наконец доступ к компьютерам, справочникам и т. п., мы узнаем следующее: группа монодромии карты a — это группа A_5; группа монодромии карт b и c довольно хитроумна: она равна $(\mathrm{C}_2 \wr \mathrm{A}_6) \cap \mathrm{A}_{12}$, а порядок её равен 11 520; наконец, группа монодромии карт d и e — это группа $\mathrm{PSL}_2(11)$ порядка 660. Поле модулей орбиты $\{b, c\}$ равно $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$. Карты d и e образуют единую орбиту, определённую над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Теперь это поле надо как-то расширить, чтобы можно было реализовать функцию Белого для карты d, и сразу возникает один трудный вопрос: мы знаем, что поле модулей является «объективной характеристикой» рисунка, так что заменить $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ на какое-нибудь другое поле невозможно; а как обстоит дело с *полем реализации*, т. е. с тем полем, над которым можно реализовать нужную нам функцию Белого? Ответ оказывается отрицательным:

нет, поле реализации *не* единственно [4]. К полю $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ можно добавить $\sqrt{-2}$, а можно и ζ_5, корень пятой степени из единицы. Чтобы разобраться в этом, надо рисовать наши карты не на сфере, а на конике. Над полем $\mathbb{C}$ любая коника изоморфна сфере, но над числовыми полями это уже не так.

Этот пример — настоящая жемчужина. Поразительно, сколько можно из него извлечь. Я мог бы ещё продолжать, но надо сделать над собой усилие и остановиться. Всё-таки добавлю ещё одну деталь. Каким будет регулярное накрытие карты a? Группа монодромии A_5 имеет порядок 60; следовательно, регулярное накрытие будет картой степени 60 (т. е. у неё будет 60 полурёбер). Все её вершины будут иметь валентность 5, и все клетки тоже будут валентности 5, а группой автоморфизмов будет та же группа A_5. Знатоки, конечно же, сразу её узнали: это будет кривая Бринга рода 4, введённая Клейном, на которой нарисован *граф* икосаэдра.

Читатель, возможно, уже удивляется: почему я, вместо того чтобы рассказывать о юбиляре, потратил почти две страницы на детальный разбор одного конкретного примера? Ну, во-первых, это пример из работы Шабата. Но важнее другое: он очень выпукло показывает, куда сместился центр интереса в изучении карт.

Или вот более общий факт. Уже давно, с конца XIX века, общим местом является кодирование карт с помощью перестановок. Но почему-то никому не приходило в голову заинтересоваться той группой, которая порождается этими перестановками. По-нашему, это группы монодромии. Как сказал мне один специалист по теории карт, казалось, что там может получиться «что угодно». Вот группы автоморфизмов — это другое дело! И только с приходом теории детских рисунков группы монодромии вышли на передний план — ведь они являются Галуа-инвариантами. И оказалось, что там целые россыпи драгоценностей. Вот вам ещё две-три жемчужины для коллекции: они изображены на рис. 2.

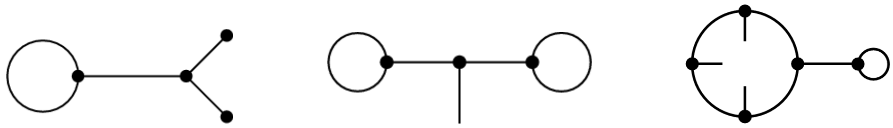

Рис. 2. Группы монодромии всех трёх рисунков являются группами Гурвица. У левого рисунка это группа $\mathrm{PSL}_2(7)$ порядка 168; у среднего рисунка — группа $\mathrm{PSL}_2(8)$ порядка 504; у правого рисунка — группа A_{15} порядка $15!/2$

У всех трёх рисунков все вершины имеют валентность 3 или 1; все рёбра имеют валентность 2 или 1 (рёбра валентности 1 имеют вершину только на одном конце, другой их конец «свободный»); наконец, все клетки имеют валентность 7 или 1. Значит, три перестановки x, y, z, кодирующие эти карты, удовлетворяют соотношениям $x^3 = y^2 = z^7 = xyz = 1$. А раз так, то регулярные накрытия этих рисунков являются картами Гурвица: на них достигается оценка $|G| \leqslant 84(g-1)$, где G — группа автоморфизмов карты рода $g \geqslant 2$. Для левого рисунка мы получаем построенную Клейном карту рода 3, она уже упоминалась ранее. Этой карте и соответствующей алгебраической кривой рода 3 (квартике Клейна) посвящена целая книга в 340 страниц [8]. Второй рисунок даёт карту Фрике—Макбета: она была открыта Р. Фрике в 1899 году и переоткрыта А. М. Макбетом в 1975 году. У неё $504/3 = 168$ вершин валентности 3, $504/2 = 252$ ребра и $504/7 = 72$ клетки валентности 7. Легко проверить, что род этой карты равен 7. Ей тоже посвящено немало публикаций. Специалист по компьютерной графике Я. ван Вейк создал прекрасное изображение этой карты, его можно увидеть в [6], откуда взяты все три примера. Обе регулярные карты — и рода 3, и рода 7 — легко реализовать (но не нарисовать!) в виде перестановок, если иметь под рукой карты рис. 2 и программу GAP. Других карт Гурвица для родов $g \leqslant 13$ не существует. Наконец, третий рисунок добавлен здесь отчасти ради шутки: его регулярное накрытие имеет род

$$g = \frac{15!/2}{84} + 1 = 7\,783\,776\,001.$$

Перебирая все рисунки с одной или двумя клетками валентности 7, мы можем легко убедиться в том, что A_{15} — это наименьшая из знакопеременных групп, являющаяся группой Гурвица. Не правда ли, удивительно, какая бездна информации может быть «зашифрована» в совсем маленьких рисуночках?

Приведённые примеры показывают, что научные заслуги Шабата не сводятся к отдельным конкретным результатам (которых, кстати, немало). Они заключаются прежде всего в *смене парадигмы*. Не биекции, не перечисление, не раскраски, не симметрии, а нечто совсем иное. Вооружившись микроскопом и скальпелем, мы изучаем внутреннюю структуру карт и, не забывая ни о перечислении, ни о симметрии, обнаруживаем совершенно новые связи, в первую очередь с теорией Галуа. Пионером этого нового подхода является Шабат.

Помню, как один молодой математик (ну, скажем, молодой по сравнению со мной) спросил у меня, чем я занимаюсь в науке. Я ответил: «Теорией карт». Он на минуту задумался, потом сказал: «Так вроде бы теорему о четырёх красках уже доказали?» — «Да, — говорю, — доказали». — «Так что же ты тогда делаешь?» Я привёл ему всего один пример, как с помощью детских рисунков буквально на счёт раз-два доказывается одна гипотеза, которая когда-то стояла открытой в течение 16 лет (не пугайтесь, не буду её излагать). Он пришёл в такой восторг, что потом даже пересказал этот результат в одной из своих работ, написав там, что это моя теорема. Мне было даже несколько неловко: ведь для специалиста по теории детских рисунков это было не более чем простым замечанием. Впрочем, я, кажется, начинаю рассказывать не о Шабате, а о себе.

Даже тем, кто близко соприкасается с Шабатом, не всегда бросается в глаза его какая-то сверхчеловеческая трудоспособность. Мои коллеги во Франции любят жаловаться, что их преподавательская нагрузка — восемь часов в неделю — не даёт им возможности полноценно заниматься научной работой. Знали бы они, что герой моего рассказа работает одновременно в *пяти*(!) местах (правда, в некоторых из них не на полную ставку). Причём работает в таком возрасте, когда мы, французы, уже несколько лет как наслаждаемся пенсионерской свободой. Основное место работы — это, конечно же, РГГУ (Российский государственный гуманитарный университет), за ним следует МГУ (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова), далее — НМУ (Независимый московский университет), МПГУ (Московский педагогический государственный университет) и, наконец, ИТЭФ (Институт теоретической и экспериментальной физики: это уже не учебное заведение, а научно-исследовательский институт)[1]. Ко всему прочему, все эти заведения находятся в разных концах Москвы. Я не буду перечислять те учреждения, в которых Шабат работал раньше.

Наверное, после такой нагрузки хочется залечь куда-нибудь в берлогу и долго зализывать раны? Нет, не таков наш герой. Он ещё ведёт разного рода математические кружки для школьников (в том числе «Клуб экспериментальной математики»), а летом уезжает то в Переславльский компьютерный лагерь (это было в прошлом), то в Летнюю школу в Дубне (для старших школьников и студентов). Добавим к этому руководство аспирантами и студентами. Восемь учеников Шабата защитили под его руководством кандидатские диссертации, а уж сколько было дипломников и курсовиков, я думаю, не сосчитать. А ещё и таких учеников, которых ни в какую формальную рубрику не вставишь: и не аспирант, и не дипломник, и не курсовик. Вспомним хотя бы того же В. А. Воеводского. И ещё руководство в течение более чем тридцати лет семинаром «Графы на поверхностях и кривые над числовыми полями». Нередко, когда нет запланированного докладчика, Шабат делает доклады сам. Есть термин, который очень удачно подходит для определения деятельности Шабата: он *миссионер* математики. Немало есть крупных математиков, о которых с благодарностью отзываются их ученики. Редки, однако, случаи, когда человек говорит: «Я выбрал своей профессией математику, потому что меня увлёк пример такого-то». Шабат как раз относится к этой второй, более редкой категории. Здесь проходит разница между службой и *служением*.

Ну что ж, слава, слава великим педагогам. Но для собственно научной работы тут времени совсем уж не остаётся, не так ли? Нет, не так! Список публикаций Шабата содержит более 120 названий. (Я не привожу точную цифру, потому что она имеет тенденцию меняться.)

Мы можем спросить себя, как такое вообще возможно. Тут вспоминается одно высказывание Франсуа Араго об Эйлере: «Эйлер вычислял без всякого видимого усилия, как люди дышат, как орлы парят над землёй». Такое впечатление, что для занятий математикой Шабату не требуются никакие усилия; он ею дышит. Напротив, когда обстоятельства заставляют его отвлекаться на какие-то другие дела, метафора «он ею дышит» подталкивает меня к тому, чтобы написать, что он начинает задыхаться. Это, конечно, было бы преувеличением.

[1]Этот текст писался в 2022 году. В том же году Шабат ушёл из ИТЭФ в связи с тем, что начальство потребовало сообщать обо всех контактах с иностранцами.

Но он начинает совершенно явно тосковать. Мне доводилось наблюдать это не раз.

О главной научной заслуге и главной теме исследований Шабата я уже говорил: это теория детских рисунков. Полезно всё же пройтись по списку его публикаций. Там мы обнаружим несколько неожиданное (по крайней мере для меня) разнообразие. Та самая знаменитая статья, о которой мы говорили в самом начале, фигурирует в списке под номером 15. И до и после этих работ мы увидим статьи и краткие заметки об алгебраических поверхностях, группах Ли, системах дифференциальных уравнений. Постепенно картина расширяется: она охватывает всё новые и новые сюжеты. Не имея возможности перечислить здесь все 122 названия и многочисленных соавторов, я приведу лишь небольшую выборку, а также некоторую весьма условную классификацию тех тем и областей, в которых Шабат оставил свой след. Детские рисунки мы опустим — о них уже было немало сказано.

— Неархимедовы поля и динамические системы: например, «On the chaotic properties of quadratic maps over non-Archimedean fields» и ещё несколько статей на ту же тему.
— Психолингвистика: полтора десятка работ, почти всегда в соавторстве с Г. Е. Крейдлиным. Например: «Когнитивные операции на пути к пониманию текста» или «Теорема как вид текста: когнитивные операции и понятность».
— Медицина: две совместные публикации с офтальмологами, в том числе такая: «Применение гармонического анализа реоофтальмограмм при сравнительной оценке гемодинамики глаза до и после антиглаукоматозных операций» (а, каково!).
— Педагогика: множество работ об экспериментальной математике, о компьютерной геометрии, а также несколько пособий для поступающих в РГГУ — по существу, небольшого размера книг или брошюр.
— Модели квантовой гравитации: «On the elliptic time in the adelic gravity».
— Воспоминания: об отце — Борисе Владимировиче Шабате (он и меня когда-то в незапамятные времена учил теории функций комплексного переменного), об И. Р. Шафаревиче (научном руководителе Шабата), о В. А. Воеводском.
— Размышления: например, «О множественности миров в науке и искусстве XX века».

Мой список, несомненно, неполон, но общая картина ясна: Георгий Борисович Шабат — учёный широкого профиля, первопроходец в науке, а также активный и увлечённый педагог-энтузиаст.

Что можно пожелать юбиляру? Обычно желают доброго здоровья, долгих лет жизни и творческих успехов. Третье пожелание, однако, следует из двух предыдущих. Ведь мы же договорились: Шабат занимается математикой как дышит. Он не уйдёт на покой, он будет служить математике до последнего вздоха. Поэтому — всего одно пожелание: *до ста двадцати*, Юра!

Литература

[1] Джонс Г. А., Звонкин А. К. Десять «детских рисунков» Клейна степени 11: тема с вариациями // Фундамент. и прикл. матем. — 2024. — Т. 25, вып. 2. — С. 103—175.

[2] Казарян М. Э., Ландо С. К. Комбинаторные решения интегрируемых иерархий // УМН. — 2015. — Т. 70, № 3. — С. 77—106.

[3] Филимоненков В. О., Шабат Г. Б. Поля определения функций Белого и когомологии Галуа // Фундамент. и прикл. матем. — 1997. — Т. 1, вып. 3. — С. 781—799.

[4] Van Hoeij M. Private communication. — 2010.

[5] Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics. — Princeton: Institute for Advanced Study, 2013. — `https://homotopytypetheory.org/book/`.

[6] Jones G. A., Zvonkin A. K. Hurwitz groups as monodromy groups of dessins: several examples // Teichmüller Theory and Grothendieck–Teichmüller Theory / L. Ji, A. Papadopoulos, W. Su, eds. — Higher Education Press, Beijing. — 2022. — P. 275—302. — `https://arxiv.org/pdf/2012.07107.pdf`.

[7] Shabat G. B., Voevodsky V. A. Drawing curves over number fields // The Grothendieck Festschrift. Vol. 3. / P. Cartier, L. Illusi, N. M. Katz, G. Laumon, Y. I. Manin, K. A. Ribet, eds. — Birkhäuser, 1990. — P. 199—227.

[8] The Eightfold Way. The Beauty of Klein's Quartic Curve / S. Levy, ed. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.