

# Функции Белого специальных взвешенных деревьев типа $(2, 3)$

**Н. М. АДРИАНОВ**

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова  
e-mail: nadrianov@gmail.com

**А. М. ВАТУЗОВ**

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова  
e-mail: amvatuzov@yandex.ru

УДК 519.17+511.238

**Ключевые слова:** детские рисунки, взвешенные деревья, функции Белого, модулярная группа, модулярные функции.

## Аннотация

В работе вычислены функции Белого взвешенных деревьев типа  $(2, 3)$  с примитивными специальными группами вращения рёбер, образующие 21 орбиту Галуа: 6 функций Белого с рациональными коэффициентами, 12 орбит над квадратичными полями, 3 орбиты над полями степеней 3, 4 и 6. Максимальная степень вычисленных функций — 32. Вычисления проведены с использованием техники модулярных функций.

## Abstract

*N. M. Adrianov, A. M. Vatuzov, Belyi functions of the special weighted trees of  $(2, 3)$ -type, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 2, pp. 17–39.*

In this paper, we calculate the Belyi functions of the weighted trees of  $(2, 3)$ -type with primitive special edge rotation groups. There are 21 Galois orbits of these trees: 6 rational orbits, 12 orbits over quadratic fields, and 3 orbits over fields of degree 3, 4, and 6. The highest degree of the calculated Belyi function is 32. The calculations are performed using modular functions techniques.

## Введение

*Детский рисунок* — двукрашенный (связный) граф  $\Gamma$ , вложенный в компактную ориентированную поверхность  $\mathcal{X}$  таким образом, что дополнение  $\mathcal{X} \setminus \Gamma$  гомеоморфно несвязному объединению открытых дисков. Пусть  $X$  — неособая комплексная алгебраическая кривая. Функция  $\beta$  на  $X$  называется *функцией Белого*, если у  $\beta$  нет критических значений кроме 0, 1 и  $\infty$ . Тогда прообраз  $\beta^{-1}[0, 1]$  даёт детский рисунок на  $X$ . Верно и обратное: для любого детского рисунка  $D = (\mathcal{X}, \Gamma)$  существует пара Белого  $(X, \beta)$ , соответствующая ему.

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2024, том 25, № 2, с. 17–39.  
© 2024 Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»

Более того, эту пару Белого можно определить над числовым полем (алгебраическим расширением  $\mathbb{Q}$  конечной степени). Подробное введение в теорию детских рисунков можно найти, например, в [4].

Действие группы Галуа  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  на парах Белого задаёт её действие на детских рисунках; орбиты этого действия конечны. Таким образом, для каждого детского рисунка определён стабилизатор этого действия — подгруппа конечного индекса в  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  и соответствующее числовое поле, которое называется *полем модулей* детского рисунка. Для рисунка рода 0 мы полагаем  $X = \mathbb{P}^1$ , тогда функция Белого  $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$  определена однозначно с точностью до дробно-линейной замены  $z \rightarrow (az + b)/(cz + d)$ . Для всех рисунков, рассматриваемых в настоящей работе, функцию Белого можно определить над полем модулей рисунка; в общем случае это возможно не всегда (см. [9]).

Степень функции Белого равна количеству рёбер соответствующего рисунка. *Паспортом* детского рисунка  $D$  с  $n$  рёбрами называется тройка разбиений  $\pi(D) = (\lambda_0 \mid \lambda_1 \mid \lambda_2)$ ,  $\lambda \vdash n$ , образованных степенями чёрных вершин, белых вершин и граней рисунка. В терминах пар Белого паспорт описывает кратности ветвления функции Белого над  $0, 1$  и  $\infty$ . Паспорт детского рисунка является инвариантом действия группы Галуа.

Детский рисунок  $D$  может быть задан парой перестановок рёбер  $(a, b)$ , которые соответствуют обходу против часовой стрелки вокруг чёрных и белых вершин. Цикловые структуры перестановок  $a, b$  и  $ab$  совпадают с компонентами паспорта детского рисунка. Группа, порождённая перестановками  $a$  и  $b$ , называется *группой вращений рёбер* и обозначается  $\text{ER}(D)$ . Группа вращений рёбер рисунка изоморфна группе монодромии накрытия  $\beta: X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  и является ещё одним инвариантом действия группы Галуа.

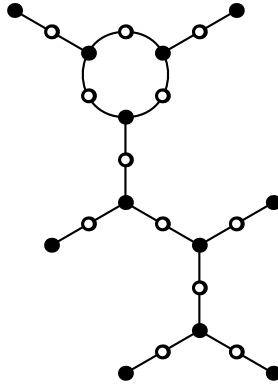


Рис. 1. «Инопланетянин»: детский рисунок с паспортом  $(3^6 1^6 \mid 2^{12} \mid 21^1 3^1)$  и группой вращений рёбер  $\mathbf{M}_{24}$

**Пример.** «Инопланетянин», изображённый на рис. 1, представляет собой 24-рёберный детский рисунок с паспортом  $(3^6 1^6 \mid 2^{12} \mid 21^1 3^1)$ , его группа

вращений рёбер — замечательная группа Матьё  $M_{24}$  (см. [22]). Его функция Белого, определённая над  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ , вычислена в [2].

*Взвешенным деревом* называется детский рисунок рода 0, такой что все степени граней, кроме одной, равны 1. Комбинаторно взвешенные деревья можно описать как плоские деревья, в которых некоторые рёбра заменены на кратные (см. [6, 18]). В [1] были классифицированы взвешенные деревья со специальными примитивными группами вращений рёбер (примитивная группа перестановок  $n$  точек называется *специальной*, если она отлична от групп  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $A_n$  и  $S_n$ ). Всего существует 184 таких дерева, они образуют (не менее) 85 орбит Галуа и порождают 34 примитивные группы (максимальной степени 32).

Мы говорим, что детский рисунок является *рисунком типа (2, 3)*, если все чёрные вершины имеют степень 1 или 3, а все белые вершины — степень 1 или 2. Другими словами, перестановки  $a$  и  $b$  имеют степени 3 и 2 соответственно. В настоящей работе вычислены функции Белого, соответствующие взвешенным деревьям типа (2, 3) со специальными примитивными группами вращений рёбер. Всего существует 43 таких взвешенных дерева, образующих 21 орбиту Галуа; количество рёбер у них варьируется от 6 до 32. Функции Белого некоторых из них были известны и ранее; мы использовали их для опробования метода и включили сюда для полноты списка.

Насколько нам известно, функции Белого рисунков из орбит 12.4, 12.13, 13.1, 14.2, 17.1, 20.1, 24.2, 32.1 публикуются впервые (в [6] приведены поля определения этих орбит, но не сами функции Белого).

## Метод вычисления

Функция Белого  $\beta$  детского рисунка рода 0 представляет собой рациональную функцию одной переменной. Паспорт детского рисунка позволяет записать числители и знаменатели функций  $\beta$  и  $\beta - 1$  в виде произведения многочленов с неопределёнными коэффициентами. Например, паспорт взвешенного дерева типа (2, 3) с  $n$  рёбрами имеет вид  $(3^{p_3} 1^{p_1} \mid 2^{q_2} 1^{q_1} \mid (n - r)^1 1^r)$ . Предположим, что полюс степени  $n - r$  находится в  $z = \infty$ , тогда функция Белого принимает вид

$$\beta = \frac{P_3^3 \cdot P_1}{cR} = \frac{Q_2^2 \cdot Q_1}{cR} + 1, \tag{1}$$

где  $c \in \mathbb{C}$  — константа, а  $P_3, P_1, Q_2, Q_1, R \in \mathbb{C}[z]$  — многочлены без кратных корней со старшими коэффициентами, равными 1, а их степени соответствуют кратностям паспорта:  $\deg P_i = p_i$ ,  $\deg Q_i = q_i$ ,  $\deg R = r$ .

Равенство (1) даёт систему нелинейных алгебраических уравнений на коэффициенты многочленов  $P_i, Q_i, R$ . Система недоопределена: остаётся свобода аффинной замены переменной  $z \rightarrow Az + B$ . Для рисунков типа (2, 3), рассматриваемых в настоящей работе, мы можем добавить два следующих нормирующих условия:

$$\begin{aligned} \text{сумма координат чёрных вершин степени 3 равна 0,} \\ \text{сумма координат белых вершин степени 2 равна 1.} \end{aligned} \quad (2)$$

Эти условия задают значения двух неизвестных в системе (1):

$$\text{coeff}_{p_3-1}P_3 = 0, \quad \text{coeff}_{q_2-1}Q_2 = -1. \quad (3)$$

Наиболее прямолинейный подход — попытаться решить полученную систему, используя базис Грёбнера. К сожалению, с увеличением количества рёбер сложность этого метода быстро растёт, и он практически неприменим для детских рисунков с более чем 12 рёбрами.

Более перспективен метод с использованием приближённых численных вычислений. Общая схема вычислений следующая: решим систему уравнений, полученную из (1) и (2), численно с достаточно высокой точностью, а затем найдём выражения для искомым коэффициентов в виде алгебраических чисел с помощью LLL-алгоритма<sup>1</sup>. Впервые такая схема применительно к детским рисункам была использована в [9]. Сложность здесь состоит в том, что необходимо найти достаточно хорошее начальное приближение, для которого метод Ньютона будет сходиться к функции Белого нужного рисунка<sup>2</sup>. Мы используем метод модулярных функций, основанный на идеях, описанных в [14, 21].

Пусть  $D$  — детский рисунок типа  $(2, 3)$  с  $n$  рёбрами, заданный перестановками  $a, b \in \mathbf{S}_n$ . Тогда группу вращений рёбер  $\text{ER}(D)$  можно представить как фактор модулярной группы

$$\Gamma = \mathbf{PSL}_2(\mathbb{Z}) \simeq \langle S, T \mid S^2 = (ST)^3 = 1 \rangle$$

по некоторой подгруппе  $\Gamma_D \subset \Gamma$  индекса  $n$ .

Группа  $\Gamma$  действует на пополненной верхней полуплоскости  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ , определяя хорошо известное замощение  $\mathcal{H}^*$  идеальными треугольниками. Фундаментальная область группы  $\Gamma_D$  состоит из  $n$  таких треугольников и легко вычисляется по перестановкам  $a$  и  $b$ . Функция Белого замыкает коммутативный треугольник

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{H} & \\ / \Gamma_D & & \searrow J \\ X & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Здесь

$$J(\tau) = \frac{1}{1728} j(\tau),$$

где  $j(\tau)$  — классическая модулярная функция, инвариантная относительно всей группы  $\Gamma$ . Если рисунок  $D$  рода 0, то  $X \simeq \mathbb{P}^1$  и факторизация по  $\Gamma_D$  задаётся модулярной функцией  $t_D: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{P}^1$ , инвариантной относительно группы  $\Gamma_D$ .

<sup>1</sup>Аббревиатура LLL составлена по именам авторов А. К. Ленстра, Х. В. Ленстра и Л. Ловаш. В SageMath алгоритм реализован в функции `algdep`.

<sup>2</sup>Напомним, что мы составили систему, используя только паспорт рисунка. А количество детских рисунков с заданным паспортом может быть гигантским даже при относительно небольшом количестве рёбер.

Пусть  $m$  — степень полюса  $\beta$  в точке  $z = \infty = t_D(i\infty)$ . Тогда функция  $t_D$  инвариантна относительно замены  $\tau \rightarrow \tau + m$  и может быть выражена через переменную  $\zeta = q^{1/m} = e^{2\pi i\tau/m}$  и  $z = t_D$  имеет полюс порядка 1 в  $\zeta = 0$ . Тогда разложение  $t_D$  в степенной ряд по  $\zeta$  имеет вид

$$t_D(\zeta) = \frac{c_{-1}}{\zeta} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^k, \quad c_{-1} \neq 0.$$

Введём обозначение для частичной суммы ряда:

$$[t_D]_N(\zeta) = \frac{c_{-1}}{\zeta} + c_0 + \sum_{k=1}^N c_k \zeta^k.$$

Выберем  $N$  точек  $\{x_i\}_{i=1}^N$  на границе фундаментальной области группы  $\Gamma_D$ , размещая по несколько точек на каждой из дуг, ограничивающих фундаментальную область. Выпишем условия  $[t_D]_N(x_i) = [t_D]_N(M_i(x_i))$ , где  $M_i \in \Gamma_D$  — отображение, задающее склейку для дуги, содержащей точку  $x_i$ . Дополнительно запишем условия (2) в терминах  $[t_D]_N$ . Получаем систему линейных уравнений размера  $(N+2) \times (N+2)$ , решая которую, получаем приближённые значения для коэффициентов  $\{c_{-1}, c_0, \dots, c_N\}$ . Подставляя координаты вершин треугольников в полученную приближённую формулу  $[t_D]_N$ , мы находим приближённые координаты вершин детского рисунка и, следовательно, приближённые значения коэффициентов в (1). Эти значения мы используем в качестве стартовой точки для численного решения системы методом Ньютона.

Применяя описанный метод, мы вычислили (почти в автоматическом режиме) функции Белого взвешенных деревьев до степени 32. Метод применим не только для детских рисунков типа (2, 3): произвольный рисунок можно свести к триангуляции и далее к рисунку типа (2, 3), однако это может привести к увеличению количества ребер в 6 раз и, следовательно, усложнению системы алгебраических уравнений. В последующих работах мы планируем вычислить больше функций Белого и определить границы применимости метода.

В настоящий момент рекордом является вычисление функций Белого с группами монодромии  $J_2$  и  $So_3$  степеней 100 и 276 соответственно (см. [15, 16]). Подобные же методы использованы в [17] при составлении базы данных пар Белого (степени не выше 9).

## Результаты вычислений

В этом разделе представлены вычисленные функции Белого. Мы старались записать функцию Белого в максимально компактном виде, ориентиром для нас были замечательные классические формулы Клейна.

В выражении (1) мы поместили единственный полюс функции Белого степени больше 1 в точку  $z = \infty$ . Это оставляет нам свободу аффинной замены  $z \rightarrow Az + B$ . Если во взвешенном дереве имеется единственная грань степени 1,

то мы помещаем соответствующий полюс в точку  $z = 0$ . В остальных случаях мы приравняем нулю второй по старшинству коэффициент многочлена  $P_3, P_1, Q_2, Q_1$  или числителя функции Белого. Наш выбор многочлена здесь более или менее произволен.

Остаётся ещё возможность мультипликативной замены  $z \rightarrow Az$ , которую мы подбираем таким образом, чтобы:

- 1) старшие коэффициенты многочленов  $P_3, P_1, Q_2, Q_1$  и  $R$  были равны 1 (в некоторых случаях, если отказаться от требования, чтобы старший коэффициент  $R$  был равен 1, формулы получаются компактнее);
- 2) остальные коэффициенты были целыми алгебраическими числами (минимально возможными в смысле нормы).

Мы сталкиваемся с проблемой только в случае орбиты 32.1, когда коэффициенты функции Белого не разлагаются на простые множители единственным образом. Существует ли правильный способ определить минимальную модель функции Белого? Это интересный вопрос.

### $n = 6, (3^2 \mid 2^2 1^2 \mid 5^1 1^1), \mathbf{ER} = \mathbf{PSL}_2(5)$

Взвешенное дерево (орбита 6.1, см. [1]), в орбите один рисунок (рис. 2). Функция Белого задаёт отображение классических модулярных кривых  $X_0(5) \rightarrow X(1)$  и была фактически найдена в классической работе Г. Шварца [20] 150 лет назад (знаменитый список Шварца алгебраических гипергеометрических функций). Несколькими годами позже Ф. Клейн нарисовал детские рисунки  $X_0(N)$  для  $N = 2, 3, 4, 5, 7, 13$  и вычислил их функции Белого (см. [11, с. 143 и рисунки 10, 12, 14 на с. 136–138]).

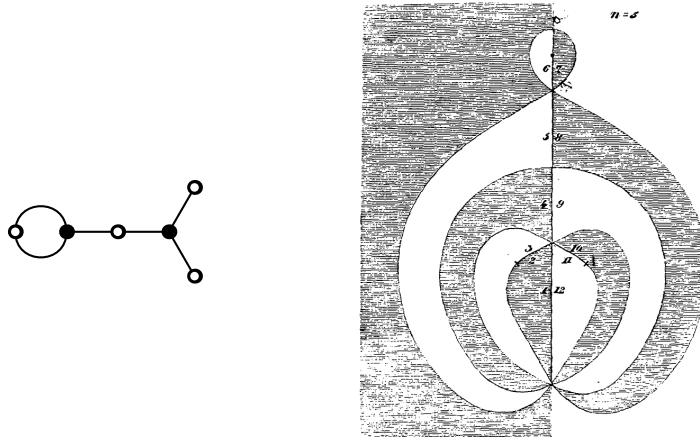


Рис. 2. Группа  $\mathbf{PSL}_2(5)$ : орбита 6.1 и иллюстрация Ф. Клейна

$$\beta = \frac{(z^2 + 10z + 5)^3}{1728z} = \frac{(z^2 + 4z - 1)^2(z^2 + 22z + 125)}{1728z} + 1.$$

$n = 7, (3^2 1^1 \mid 2^3 1^1 \mid 6^1 1^1), \mathbf{ER} = \mathbf{AGL}_1(7)$

Взвешенное дерево (орбита 7.1, см. [1]), в орбите два рисунка (рис. 3 и симметричный ему). Именно этот рисунок был использован для демонстрации метода вычислений в [21].

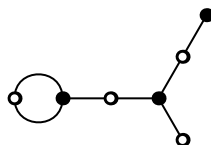


Рис. 3. Группа  $\mathbf{AGL}_1(7)$ : орбита 7.1 размера 2

$$\beta = \frac{P_3^3 P_1}{cz} = \frac{Q_2^2 \cdot Q_1}{cz} + 1,$$

где

$$c = -16(1 - \omega)(1 + \omega)^3(3 - \omega)^7, \quad \omega = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2},$$

$$P_3 = z^2 - 2\omega(1 + \omega)(4 - \omega)z - 4(2 - \omega), \quad P_1 = z - 18\omega,$$

$$Q_2 = z^3 - 2\omega(1 + \omega)(7 - 3\omega)z^2 + 4\omega(1 + \omega)^3(4 - \omega)z - 12(1 + \omega),$$

$$Q_1 = z + 8(1 - 2\omega).$$

$n = 7, (3^2 1^1 \mid 2^2 1^3 \mid 7^1), \mathbf{ER} = \mathbf{PSL}_3(2)$

Обычное дерево (орбита 7.2, см. [1]), в орбите два рисунка (рис. 4). Соответствующая функция Белого является многочленом (так называемым *многочленом Шабата*) и вычислена Ф. Клейном [12, с. 426, 427], а также позже в [7].

$$\beta = \frac{P_3^3 \cdot P_1}{c} = \frac{Q_2^2 \cdot Q_1}{c} + 1,$$

где

$$c = 2^6 \cdot 3^3 \cdot \omega^{14}, \quad \omega = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2},$$

$$P_3 = z^2 + 28, \quad P_1 = z + 7\omega, \quad Q_2 = z^2 + 6\omega z + 4,$$

$$Q_1 = (z^2 - 4z - 4(1 - \omega)(1 - 6\omega))(z - \omega(3 + 2\omega)).$$

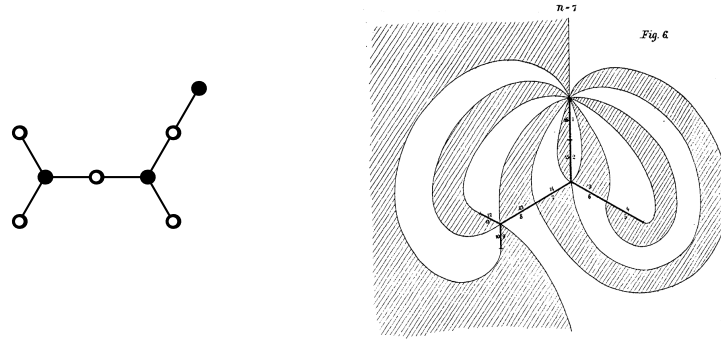


Рис. 4. Группа  $\mathbf{PSL}_3(2)$ : орбита 7.2 размера 2 и иллюстрация Ф. Клейна

$n = 8, (3^2 1^2 \mid 2^4 \mid 7^1 1^1), \mathbf{ER} = \mathbf{PSL}_2(7)$

Взвешенное дерево (орбита 8.8, см. [1]), в орбите один рисунок (рис. 5). Функция Белого задаёт отображение классических модулярных кривых  $X_0(7) \rightarrow X(1)$  и была вычислена Ф. Клейном [11].

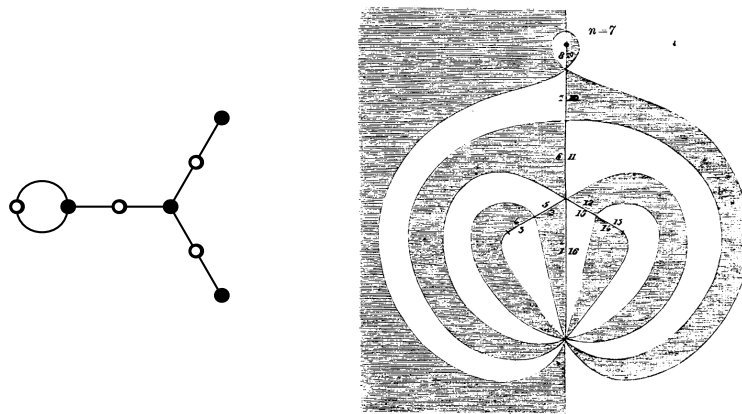


Рис. 5. Группа  $\mathbf{PSL}_2(7)$ : орбита 8.8 размера 1 и иллюстрация Ф. Клейна

$$\beta = \frac{(z^2 + 5z + 1)^3(z^2 + 13z + 49)}{1728z} = \frac{(z^4 + 14z^3 + 63z^2 + 70z - 7)^2}{1728z} + 1.$$



$n = 8, (3^2 1^2 \mid 2^3 1^2 \mid 8^1), \mathbf{ER} = \mathbf{PGL}_2(7)$

Обычное дерево (орбита 8.15, см. [1]), в орбите два рисунка (рис. 6). Соответствующая функция Белого (многочлен Шабата) вычислена в [7].

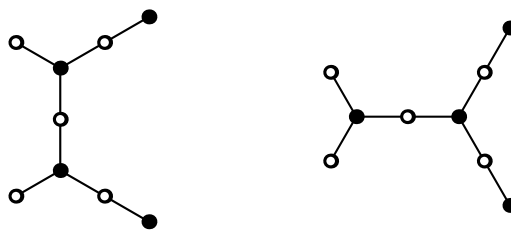


Рис. 6. Группа  $\mathbf{PGL}_2(7)$ : орбита 8.15 размера 2

$$c = 2^4 \cdot 3^3 \cdot \omega^7(2 + \omega), \quad \omega = 1 \pm 2\sqrt{2},$$

$$\beta = \frac{1}{c}(z^2 + \omega^3)^3(z^2 - 8z + \omega^2(8 + \omega)),$$

$$\beta - 1 = \frac{1}{c}(z^3 - 7z^2 + \omega^2(6 + \omega)z - \omega^3)^2(z^2 + 6z + 7(5 + 2\omega)).$$

$n = 9, (3^3 \mid 2^3 1^3 \mid 8^1 1^1), \mathbf{ER} = \mathbf{AGL}_2(3)$

Взвешенное дерево (орбита 9.2, см. [1]), в орбите два рисунка (рис. 7). Функция Белого может быть найдена в базе данных пар Белого [17].

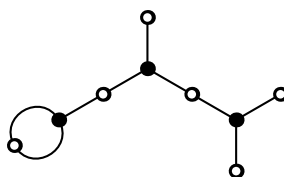


Рис. 7. Группа  $\mathbf{AGL}_2(3)$ : орбита 9.2 размера 2

$$\beta = \frac{P_3^3}{cz} = \frac{Q_2^2 \cdot Q_1}{cz} + 1,$$

где

$$c = -3^3 \cdot \omega^{12}, \quad \omega = 1 \pm \sqrt{-2},$$

$$\begin{aligned}
P_3 &= z^3 + 2^3 \omega z^2 - 2^2 \omega (1 - 4\omega) z - 2^3, \\
Q_2 &= z^3 + 5\omega z^2 - \omega (1 - 4\omega) z + 1, \\
Q_1 &= z^3 + 2 \cdot 7\omega z^2 - \omega (10 - 67\omega) z - 2^9.
\end{aligned}$$

$n = 9, (3^3 \mid 2^4 1^1 \mid 7^1 1^2), \mathbf{ER} = \mathbf{PSL}_2(8)$

Взвешенное дерево (орбита 9.4, см. [1]), в орбите один рисунок (рис. 8). Рисунок является единственной реализацией своего паспорта. Функция Белого вычислена в [19] (спорадическое дерево  $L$ ).

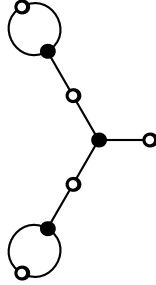


Рис. 8. Группа  $\mathbf{PSL}_2(8)$ : орбита 9.4 размера 1

$$\begin{aligned}
\beta &= -\frac{(z^3 - 16z^2 + 160z - 384)^3}{2^{14} \cdot 3^3 (z^2 - 13z + 128)}, \\
\beta - 1 &= -\frac{z(z^4 - 24z^3 + 336z^2 - 2240z + 8064)^2}{2^{14} \cdot 3^3 (z^2 - 13z + 128)} + 1.
\end{aligned}$$

Если отказаться от требования, чтобы старший коэффициент  $R$  был равен 1, функцию Белого можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\beta &= -\frac{(z^3 - 8z^2 + 40z - 48)^3}{1728(2z^2 - 13z + 64)}, \\
\beta - 1 &= -\frac{z(z^4 - 12z^3 + 84z^2 - 280z + 504)^2}{1728(2z^2 - 13z + 64)}.
\end{aligned}$$

$n = 9, (3^2 1^3 \mid 2^4 1^1 \mid 9^1), \mathbf{ER} = \mathbf{PGL}_2(8)$

Обычное дерево (орбита 9.6, см. [1]), в орбите два рисунка (рис. 9). Соответствующий многочлен Шабата можно найти в каталоге девятирёберных плоских деревьев [5].

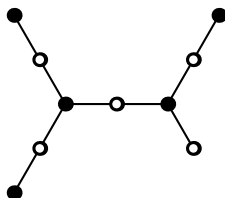


Рис. 9. Группа  $\mathbf{PGL}_2(8)$ : орбита 9.6 размера 2

$$\beta = \frac{P_3^3 \cdot P_1}{c} = \frac{Q_2^2 \cdot Q_1}{c},$$

где

$$c = -2^{15}(1 - \omega)(3 - \omega)^7, \quad \omega = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2},$$

$$P_3 = z^2 - \omega(1 + \omega)(3 - \omega)^3,$$

$$P_1 = z^3 - 9z^2 - (1 + \omega)^3(17 - 6\omega)z + \omega(1 + \omega)^2(3 - \omega)^2(47 - 12\omega),$$

$$Q_2 = z^4 - 8z^3 - 6\omega(3 - \omega)(3 + 2\omega)z^2 + 2^3 \cdot 7\omega(3 - \omega)(3 + 2\omega)z - (3 - \omega)^3(17 - 6\omega),$$

$$Q_1 = z + 7.$$

$n = 10, (3^3 1^1 \mid 2^5 \mid 8^1 1^2), \mathbf{ER} = \mathbf{PGL}_2(9)$

Взвешенное дерево (орбита 10.1, см. [1]), в орбите один рисунок (рис. 10). Рисунок является единственной реализацией своего паспорта. Функция Белого вычислена в [19] (спорадическое дерево  $M$ ).

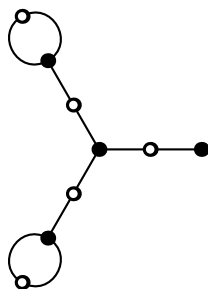


Рис. 10. Группа  $\mathbf{PGL}_2(9)$ : орбита 10.1 размера 1

$$\beta = -\frac{z(z^3 + 36z^2 + 540z + 2592)^3}{2^6 \cdot 3^{12}(z^2 + 28z + 324)},$$

$$\beta - 1 = -\frac{(z^5 + 54z^4 + 1296z^3 + 15\,552z^2 + 87\,480z + 104\,976)^2}{2^6 \cdot 3^{12}(z^2 + 28z + 324)}.$$

Если отказаться от требования, чтобы старший коэффициент  $R$  был равен 1, функцию Белого можно записать в виде

$$\beta = -\frac{z(z^3 + 12z^2 + 60z + 96)^3}{1728(3z^2 + 28z + 108)},$$

$$\beta - 1 = -\frac{(z^5 + 18z^4 + 144z^3 + 576z^2 + 1080z + 432)^2}{1728(3z^2 + 28z + 108)} + 1.$$

### $n = 11$ , $(3^3 1^2 \mid 2^4 1^3 \mid 11^1)$ , $\text{ER} = \text{PSL}_2(11)$

Обычное дерево (орбита 11.1, см. [1]), в орбите два рисунка (рис. 11). Многочлен Шабата вычислен Ф. Клейном [13, с. 547] (иллюстрация взята из [12]), а также позже в [3, 8].

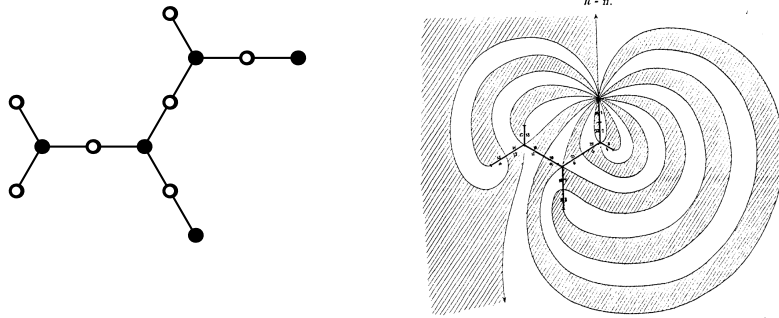


Рис. 11. Группа  $\text{PSL}_2(11)$ , действующая на 11 точках: орбита 11.1 размера 2 и иллюстрация Ф. Клейна

$$\beta = \frac{P_3^3 \cdot P_1}{c} = \frac{Q_2^2 \cdot Q_1}{c},$$

где

$$c = -1728, \quad \omega = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2},$$

$$P_3 = (z - (1 + \omega))(z^2 + (2 + \omega)z - (1 - \omega)), \quad P_1 = z^2 - 3z - 2\omega^2,$$

$$Q_2 = (z - (1 - \omega))(z^3 - (1 + \omega)z^2 - (1 + 2\omega)z - 3(1 - \omega)),$$

$$Q_1 = z^3 + 4z^2 + \omega^4 z + 2(5 - 6\omega).$$

$n = 12, (3^4 | 2^4 1^4 | 11^1 1^1), ER = M_{12}$

Взвешенное дерево (орбита 12.4, см. [1]), в орбите два рисунка (рис. 12).

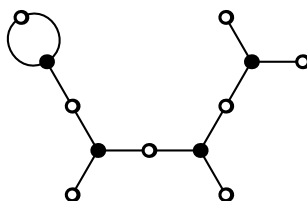


Рис. 12. Группа  $M_{12}$ : орбита 12.4 размера 2

$$\beta = \frac{P_3^3}{cz} = \frac{Q_2^2 \cdot Q_1}{cz},$$

где

$$c = 2^6 \cdot 3^{15}, \quad \omega = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2},$$

$$P_3 = z^4 + 2 \cdot 11\omega z^3 - 3 \cdot 11(13 - 5\omega)z^2 - 2 \cdot 11(56 + 15\omega)z - 11\omega^6,$$

$$Q_2 = z^4 + 2^4\omega z^3 - 3 \cdot 5(13 - 5\omega)z^2 - 2^2(56 + 15\omega)z + \omega^6,$$

$$Q_1 = z^4 + 2 \cdot 17\omega z^3 - 3(2 - \omega)(172 + 21\omega)z^2 - 2(4216 + 1515\omega)z - 11^3\omega^6.$$

$n = 12, (3^3 1^3 | 2^6 | 11^1 1^1), ER = M_{12}$

Взвешенное дерево (орбита 12.5, см. [1]), в орбите два рисунка (рис. 13). Рисунок был впервые представлен Г. Маллем на конференции в Люмине в 1993 и популяризован А. Звонкиным. Рисунок получил имя «месяц Матьё»<sup>1</sup>. Функция Белого вычислена Н. Маго (см. [22]).

$$\beta = \frac{P_3^3 \cdot P_1}{cz} = \frac{Q_2^2}{cz},$$

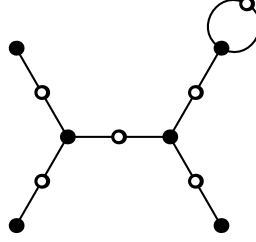
где

$$c = 2^6 \cdot 3^{12}, \quad \omega = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2},$$

$$P_3 = z^3 - 3^2(1 - \omega)z^2 + 3\omega^2(2 + 3\omega)z + \omega^4,$$

$$P_1 = z^3 - 17(1 - \omega)z^2 - (1 - \omega)(1 + \omega)(29 + 35\omega)z + 11^2\omega^4,$$

<sup>1</sup>Л. Ле Брюйн, <http://www.neverendingbooks.org/monsieur-mathieu>.

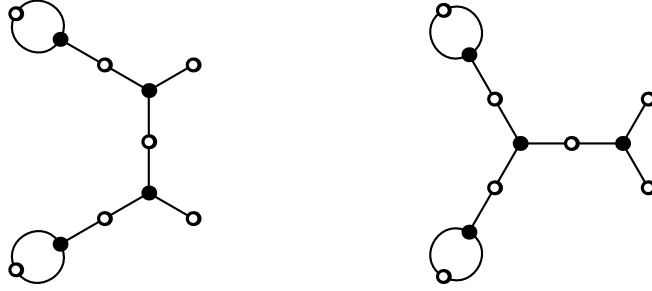
Рис. 13. Группа  $M_{12}$ : орбита 12.5 размера 2

$$Q_2 = z^6 - 2 \cdot 11(1 - \omega)z^5 + 3 \cdot 11\omega^2(1 + 3\omega)z^4 + 2 \cdot 11\omega^4(17 + 3\omega)z^3 - \\ - 3 \cdot 11\omega^4(25 - 23\omega)z^2 + 2 \cdot 3 \cdot 11\omega^6(2 + 3\omega)z - 11\omega^8.$$

---

$n = 12$ ,  $(3^4 \mid 2^5 1^2 \mid 10^1 1^2)$ ,  $ER = PGL_2(11)$

Взвешенное дерево (орбита 12.13, см. [1]), в орбите два рисунка (рис. 14).

Рис. 14. Группа  $PGL_2(11)$ : орбита 12.13 размера 2

$$\beta = \frac{P_3^3}{cR} = \frac{Q_2^2 \cdot Q_1}{cR},$$

где

$$c = 2^8 \cdot 3^3 \cdot \omega^7 \cdot (1 - 2\omega)^5 \cdot (1 - 3\omega)^{11}, \quad \omega = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ P_3 = z^4 - 2(1 - 2\omega)^3 z^3 - 2^2 \omega (1 - 2\omega)^3 (3 + \omega)^2 z^2 + \\ + 2 \cdot 3^2 \cdot 13\omega^3 (1 - 2\omega)^4 z - 3\omega^5 (1 - 2\omega)^4 (7 - \omega)(5 - 8\omega)(11 + \omega), \\ Q_2 = z^5 - 7(1 - 2\omega)z^4 - 2\omega^3 (1 - 2\omega)(127 - 12\omega)z^3 + \\ + 2 \cdot 3^3 \cdot 23\omega^3 (1 - 2\omega)^2 z^2 - 3^2 \omega^5 (1 - 2\omega)^2 (360 - 1469\omega)z - 3^3 \cdot 13\omega^6 (1 - 2\omega)^9, \\ Q_1 = z^2 - 2^4 (1 - 2\omega)z - \omega(1 - 2\omega)(221 - 19\omega), \quad R = z^2 - \omega^3 (1 - 2\omega)^7.$$

$n = 13, (3^4 1^1 \mid 2^4 1^5 \mid 13^1), ER = \text{PSL}_3(3)$

Обычное дерево (орбита 13.1, см. [1]), в орбите четыре рисунка (рис. 15). В [8] вычислено однопараметрическое семейство *многочленов Золотарёва*<sup>1</sup>. Многочлен Шабата этого плоского дерева может быть получен из семейства многочленов Золотарёва специализацией параметра  $T$ .

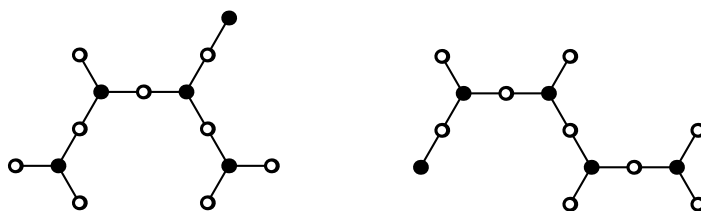


Рис. 15. Группа  $\text{PSL}_3(3)$ : орбита 13.1 размера 4

Поле определения многочлена Шабата совпадает с полем определения семейства многочленов Золотарёва; оно может быть задано как  $K = \mathbb{Q}(a)$ , где  $a^4 + 13a^2 + 13 = 0$ . Заметим, что  $\varepsilon = (a^2 + 2)/3$  удовлетворяет уравнению  $\varepsilon^2 + 3\varepsilon - 1 = 0$ , то есть это единица поля.

Группа Галуа поля  $K$  — циклическая группа порядка 4, следовательно, оно содержит все корни уравнения  $a^4 + 13a^2 + 13 = 0$ ; они имеют вид  $\{a, a/\varepsilon, -a, -a/\varepsilon\}$ .

Для более компактной записи функции Белого рассмотрим уравнение  $\omega^4 + \omega^3 + 2\omega^2 - 4\omega + 3 = 0$ , его корнями являются

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{a^2 - 3a + 5}{6}, & \omega_2 &= \frac{a^3 - a^2 + 11a - 8}{6}, \\ \omega_3 &= \frac{a^2 + 3a + 5}{6}, & \omega_4 &= \frac{-a^3 - a^2 - 11a - 8}{6}. \end{aligned}$$

Тогда  $a = \omega_3 - \omega_1$ ,  $\varepsilon = \omega_1 + \omega_3 - 1$ , а функция Белого может быть записана в виде

$$\beta = \frac{P_3^3 z}{c} = \frac{Q_2^2 \cdot Q_1}{c} + 1,$$

где

$$c = -2^6 \varepsilon^{11} \omega_1^{15} \omega_2^3 \omega_3^{15} \omega_4^3 = -2^6 \cdot 3^3 \varepsilon^{11} \omega_1^{12} \omega_3^{12},$$

<sup>1</sup>Многочленом Золотарёва мы называем комплексный многочлен с тремя конечными критическими значениями. Многочлены Золотарёва соотносятся с многочленами Шабата так же, как пары Фрида (накрытия  $\mathbb{P}^1$ , разветвлённые над четырьмя точками) соотносятся с парами Белого.

$$\begin{aligned}
P_3 &= (z + a\omega_1^3)(z^3 + a\omega_1\omega_2\omega_3(2 - \omega_1 + \omega_2 - \omega_3)z^2 + \\
&\quad + a^2\varepsilon\omega_1\omega_3(2 - 3\omega_1 + 3\omega_2 + 3\omega_3)z + 2^3a^3\varepsilon^3), \\
Q_2 &= z^4 + 2 \cdot 5\varepsilon\omega_1z^3 + 7\varepsilon^2\omega_1\omega_3\omega_4(2 - 2\omega_1 + \omega_3)z^2 + \\
&\quad + 2^2\varepsilon^3(1 - \omega_1)(1 + 12\omega_1 + 6\omega_2 - 12\omega_3)z + 2^3\varepsilon^5\omega_1^3, \\
Q_1 &= \left(z - \frac{\omega_1^6}{\varepsilon}\right)(z^4 - 2\omega_1\omega_2\omega_3(4 + 5\omega_1 + 3\omega_2 - 4\omega_3)z^3 - \\
&\quad - \varepsilon^2\omega_1\omega_3(2 - \omega_1 + \omega_2 + \omega_3)(16 + 21\omega_1 + 14\omega_2 + 7\omega_3)z^2 - \\
&\quad - 2\varepsilon^5(6 + 8\omega_1 + 2\omega_2 + 7\omega_3)(16 + 4\omega_1 + 17\omega_2 + 5\omega_3)z - \varepsilon^2\omega_1^3\omega_2^3\omega_3^{15}\omega_4^3).
\end{aligned}$$

$n = 14$ ,  $(3^4 1^2 \mid 2^6 1^2 \mid 13^1 1^1)$ ,  $\mathbf{ER} = \mathbf{PSL}_2(13)$

Взвешенное дерево (орбита 14.1, см. [1]), в орбите один рисунок (см. рис. 16). Функция Белого задаёт отображение классических модулярных кривых  $X_0(13) \rightarrow X(1)$  и была вычислена Ф. Клейном [11].

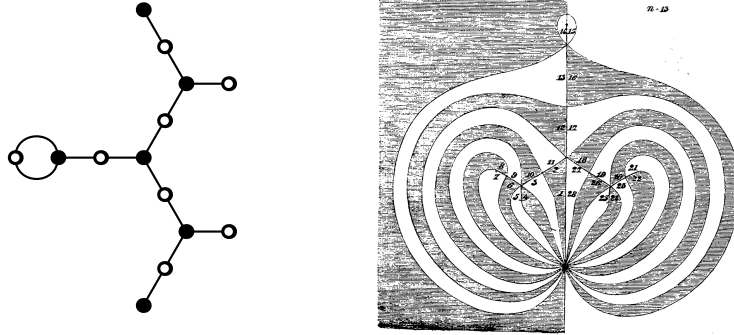


Рис. 16. Группа  $\mathbf{PSL}_2(13)$ : орбита 14.1 размера 1 и иллюстрация Ф. Клейна

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{(z^4 + 7z^3 + 20z^2 + 19z + 1)^3(z^2 + 5z + 13)}{1728z}, \\
\beta - 1 &= \frac{(z^6 + 10z^5 + 46z^4 + 108z^3 + 122z^2 + 38z - 1)^2(z^2 + 6z + 13)}{1728z}.
\end{aligned}$$

$n = 14$ ,  $(3^4 1^2 \mid 2^7 \mid 12^1 1^2)$ ,  $\mathbf{ER} = \mathbf{PGL}_2(13)$

Взвешенное дерево (орбита 14.2, см. [1]), в орбите два рисунка (рис. 17).



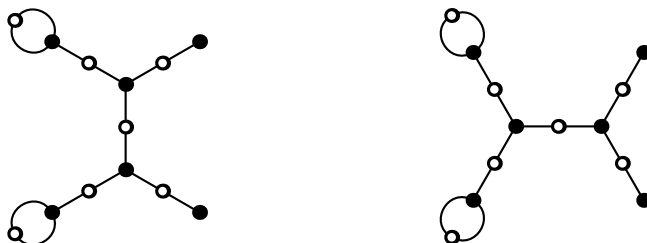


Рис. 17. Группа  $\mathbf{PGL}_2(13)$ : орбита 14.2 размера 2

Функция Белого оказывается определена над  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ; число  $\varepsilon = 2 \pm \sqrt{3}$  является единицей поля.

$$\beta = \frac{P_3^3 \cdot P_1}{cR} = \frac{Q_2^2}{cR},$$

где

$$c = \frac{\omega^{16}(1-\omega)^9}{\varepsilon^4(5-\omega)}, \quad \varepsilon = 1 + \omega, \quad \omega = 1 \pm \sqrt{3},$$

$$P_3 = z^4 + \omega^2(1-\omega)(5-\omega)z^3 + \omega^2(1-\omega)^3(3-4\omega)z^2 + \\ + \omega^2(1-\omega)^3(1-2\omega)(1-3\omega)z + \varepsilon^2(1-\omega)^3(35-19\omega),$$

$$P_1 = z^2 + (1-\omega)^2 = z^2 + 3,$$

$$Q_2 = z^7 + \varepsilon(1-\omega)^3(5-\omega)z^6 + \varepsilon(1-\omega)^2(51+7\omega)z^5 + \\ + 5\varepsilon^2(1-\omega)^3(47-10\omega)z^4 + \varepsilon^2(1-\omega)^4(301-12\omega)z^3 + \\ + \varepsilon^2(1-\omega)^5(261+34\omega)z^2 + \varepsilon^2(1-\omega)^6(157+28\omega)z + \varepsilon^3(1-\omega)^7(115-27\omega),$$

$$R = 13z^2 + \omega^2(1-\omega)^5(5-\omega)z + \varepsilon(1-\omega)^2(5-\omega)(31+10\omega).$$

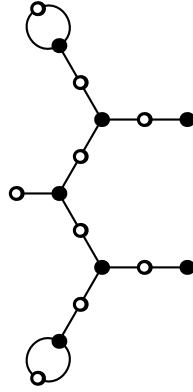
$n = 17, (3^5 1^2 \mid 2^8 1^1 \mid 15^1 1^2), \mathbf{ER} = \mathbf{PSL}_2(16)$

Взвешенное дерево (орбита 17.1, см. [1]), в орбите один рисунок (рис. 18).

$$\beta = \frac{(z^5 + 6z^4 + 48z^3 + 144z^2 + 432z + 288)^3(z^2 + 6z + 24)}{2^{14} \cdot 3^6(2z^2 + 3z + 48)},$$

$$\beta - 1 = \frac{zQ_2^2}{2^{14} \cdot 3^6(2z^2 + 3z + 48)} + 1,$$

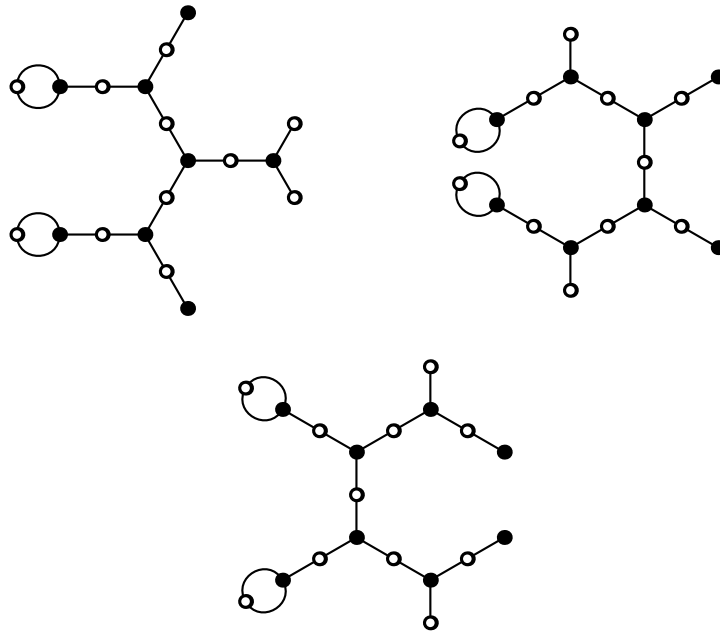
$$Q_2 = z^8 + 12z^7 + 120z^6 + 720z^5 + 3600z^4 + 12096z^3 + 32832z^2 + 51840z + 51840.$$

Рис. 18. Группа  $\mathbf{PSL}_2(16)$ : орбита 17.1 размера 1

---

$n = 20, (3^6 1^2 \mid 2^9 1^2 \mid 18^1 1^2), \mathbf{ER} = \mathbf{PGL}_2(19)$

Взвешенное дерево (орбита 20.1, см. [1]), в орбите три рисунка (рис. 19).

Рис. 19. Группа  $\mathbf{PGL}_2(19)$ : орбита 20.1 размера 3

Функция Белого оказывается определена над полем  $K = \mathbb{Q}(a)$ , где  $a^3 - 3a + 1$ . Элементы  $\varepsilon_1 = a$  и  $\varepsilon_2 = a - 1$  являются единицами поля. Группа Галуа поля  $K$  циклическая порядка 3.

$$\beta = \frac{P_3^3 P_1}{cR} = \frac{Q_2^2 Q_1}{cR} + 1,$$

где

$$c = -2^{16} \varepsilon_1^{50} \varepsilon_2^{-24} (a+1)^9 (a-3)^{19},$$

$$R = z^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2^6 (a+1)^{11},$$

$$\begin{aligned} P_3 = & z^6 - 2\varepsilon_1^2 (a+1)^2 (a^2 - a + 3)z^5 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 (a+1)^2 (3a-2)(3a+5)^2 (7a-3)z^4 - \\ & - 4\varepsilon_1^6 (a+1)^3 (30a^2 + 167a + 22)z^3 - \\ & - \varepsilon_1^{10} \varepsilon_2^{-3} (a+1)^4 (3a-4)(a^2 + 2a - 9)(34a^2 + 8a + 125)z^2 - \\ & - 2\varepsilon_1^{10} (a+1)^5 (1540a^2 + 5229a - 206)z + \\ & + \varepsilon_1^{14} \varepsilon_2^{-5} (a+1)^5 (3a-5)(11a-8)(a^2 - 6a + 15)(5a^2 - 48a - 21), \end{aligned}$$

$$P_1 = z^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 (a+1)^5 z + \varepsilon_1^3 \varepsilon_2^2 (a+1)^5 (2a+1)(4a+3),$$

$$\begin{aligned} Q_2 = & z^9 - \varepsilon_1^2 (a+1)(14a+9)z^8 + 4\varepsilon_1^6 \varepsilon_2^{-6} (a+1)(3a-5)(5a-8)(18a-5)z^7 + \\ & + 4\varepsilon_1^5 \varepsilon_2^{-1} (a+1)^3 (12a^2 - 975a + 397)z^6 + \\ & + 2\varepsilon_1^9 \varepsilon_2^3 (a+1)^4 (a^2 - 9a + 6)(2a^2 - 4706a - 8847)z^5 + \\ & + 2\varepsilon_1^{14} \varepsilon_2^{-5} (a+1)^4 (6a+5)(2a^2 - 11a - 12)(11a^2 + 1116a - 1729)z^4 - \\ & - 4\varepsilon_1^{15} \varepsilon_2^{-6} (a+1)^3 (3a-2)(6348a^2 - 115767a + 151928)z^3 - \\ & - 4\varepsilon_1^{14} \varepsilon_2^{-3} (a+1)^4 (19a-7)(2a^2 + 15a + 33)(25a^2 - 991a + 3062)z^2 - \\ & - \varepsilon_1^{19} (a+1)^4 (11a+21)(4a^2 - 28a - 49)(1249a^2 + 4040a + 23231)z + \\ & + \varepsilon_1^{19} \varepsilon_2^2 (a+1)^{15} (a^2 - 3a - 8)(a^2 + 3a + 4)(7a+5)(a^2 - 26a + 40)(7a^2 - 31a + 56), \end{aligned}$$

$$Q_1 = z^2 - 2^3 \varepsilon_1^3 (a+1)z + \varepsilon_1^5 (a+1)(5a^2 + 40a + 84).$$

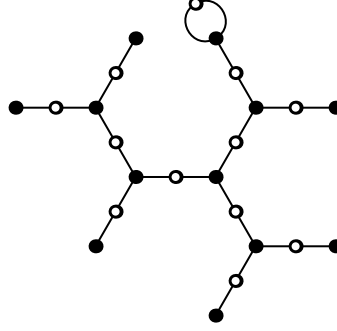
### $n = 24, (3^6 1^6 \mid 2^{12} \mid 23^1 1^1), \mathbf{ER} = \mathbf{M}_{24}$

Взвешенное дерево (орбита 24.1, см. [1]), в орбите два рисунка (рис. 20). Функция Белого вычислена в [10]. Также на примере этого рисунка в [14] продемонстрирован метод вычислений с использованием техники модулярных функций.

$$\beta = \frac{P_3^3 \cdot P_1}{cz} = \frac{Q_2^2}{cz},$$

где

$$c = -2^{38} \cdot 3^3 (1 - \omega)^9 (1 + \omega)^4, \quad \omega = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{2},$$

Рис. 20. Группа  $M_{24}$ : орбита 24.1 размера 2

$$P_3 = z^6 - 2 \cdot 3 \cdot 7z^5 - (1 - \omega)^3(23 + 16\omega)z^4 - 2(1 + \omega)(616 - 423\omega)z^3 - \\ - (1 - \omega)(29 - 6\omega)(37 - 139\omega)z^2 + 2(1 - \omega)^3(1099 + 45\omega)z + \\ + (1 - \omega)(1 + \omega)^5(1 + 2\omega),$$

$$P_1 = z^6 - 2 \cdot 29z^5 - 5(1 - 3\omega)(9 - 17\omega)z^4 + 2\omega(1 + \omega)(1043 + 348\omega)z^3 + \\ + (1 + \omega)(23 \cdot 675 - 23 \cdot 163\omega)z^2 - (1 + \omega)(20 - 13\omega)(37 + 15\omega)(67 - 47\omega)z + \\ + 23^2(1 - \omega)(1 + \omega)^5(1 + 2\omega),$$

$$Q_2 = z^{12} - 2^2 \cdot 23z^{11} + 2 \cdot 23(1 - \omega)(1 + 14\omega)z^{10} - 2^2 \cdot 23(1 + \omega)(245 - 141\omega)z^9 + \\ + 23(1 + \omega)(3 - \omega)(7427 - 1236\omega)z^8 - 2^3 \cdot 3^2 \cdot 23(1 - \omega)^2(1 + 7\omega)(25 + 43\omega)z^7 + \\ + 23(1 + \omega)^2(4 + 3\omega)(4 - 21\omega)(211 - 779\omega)z^6 + \\ + 2^3 \cdot 23(1 + \omega)^2(470 \cdot 573 + 119 \cdot 123\omega)z^5 + \\ + 23(1 - \omega)^2(1 + \omega)^2(13 + 6\omega)(59 - 74\omega)(587 + 162\omega)z^4 + \\ + 2 \cdot 3 \cdot 23(1 - \omega)^3(1 + \omega)^2(7 - 2\omega)(7420 - 25 \cdot 173\omega)z^3 + \\ + 2 \cdot 23(1 - \omega)^5(1 + \omega)(5 - \omega)(11 \cdot 641 - 65 \cdot 466\omega)z^2 - \\ - 23(1 + \omega)^7(2 + \omega)(1 + 2\omega)^2(1099 + 45\omega)z - 23(1 - \omega)^2(1 + \omega)^{10}(1 + 2\omega)^2.$$

---


$$n = 24, (3^8 \mid 2^8 1^8 \mid 23^1 1^1), ER = M_{24}$$

Взвешенное дерево (орбита 24.2, см. [1]), в орбите два рисунка (рис. 21).

$$\beta = \frac{P_3^3}{cz} = \frac{Q_2^2 \cdot Q_1}{cz},$$

где

$$c = -2^{18} \cdot 3^3 \cdot \omega^{12} \cdot (1 + \omega)^{10}, \quad \omega = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{2},$$

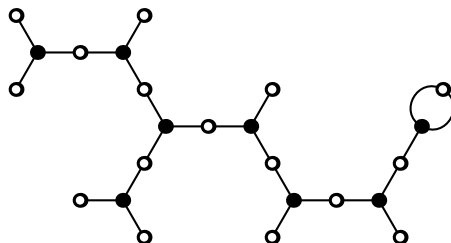


Рис. 21. Группа  $M_{24}$ : орбита 24.2 размера 2

$$\begin{aligned}
 P_3 &= z^8 - 23(1 + \omega)z^7 + 2^2 \cdot 23\omega(5 + 2\omega)z^6 + \\
 &+ 2^3 \cdot 23(8 + \omega)(15 - 2\omega)z^5 - 2 \cdot 23\omega(2 - \omega)(380 + 149\omega)z^4 - \\
 &- 2^3 \cdot 23(2 - \omega)(2 + 5\omega)(63 - 44\omega)z^3 - 2^2 \cdot 23(2 - \omega)(14 - \omega)(14 - 169\omega)z^2 - \\
 &- 2^2 \cdot 23(2 - \omega)^3(61 - 197\omega)z - 23(2 - \omega)^4(3 - 2\omega)^2, \\
 Q_2 &= z^8 - 2^2 \cdot 5(1 + \omega)z^7 + 2^2 \cdot 17\omega(5 + 2\omega)z^6 - 2^3 \cdot 3 \cdot 7(2 - 3\omega)(1 - 5\omega)z^5 - \\
 &- 2 \cdot 11\omega(2 - \omega)(380 + 149\omega)z^4 - 2^6(2 - \omega)(2 + 5\omega)(63 - 44\omega)z^3 - \\
 &- 2^2 \cdot 5(2 - \omega)(14 - \omega)(14 - 169\omega)z^2 - 2^3(2 - \omega)^3(61 - 197\omega)z + (2 - \omega)^4(3 - 2\omega)^2, \\
 Q_1 &= z^8 - 29(1 + \omega)z^7 - (3 - \omega)(833 - 114\omega)z^6 + 5(1 + \omega)(3 - 4\omega)(335 + 64\omega)z^5 - \\
 &- (2 - \omega)(4 - 3\omega)(3 - 7\omega)(593 - 696\omega)z^4 - 2^2\omega(8 - 3\omega)(9629 - 17877\omega)z^3 - \\
 &- (2 - \omega)^2(7 - 3\omega)(41 + 83\omega)(524 - 387\omega)z^2 + \\
 &+ 2^2(2 - \omega)(8 - \omega)(332225 - 49341\omega)z - 23^3\omega^6(2 - \omega)^2.
 \end{aligned}$$

$n = 32, (3^{10}1^2 \mid 2^{12}1^8 \mid 31^11^1), \mathbf{ER} = \mathbf{ASL}_5(2)$

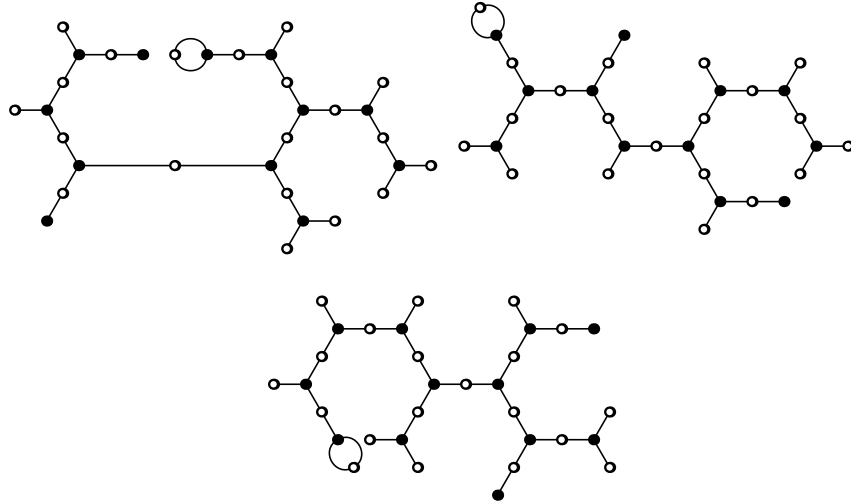
Взвешенное дерево (орбита 32.1, см. [1]), в орбите шесть рисунков (рис. 22).

С помощью GAP<sup>1</sup> можно проверить, что в группе  $\mathbf{ASL}_5(2)$  имеются шесть классов сопряжённости элементов порядка 31. Для любых двух из них  $C_1, C_2$  существует  $k \in (\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})^*$ , такое что любой элемент из  $C_1$  является  $k$ -й степенью какого-то элемента из  $C_2$ . Среди значений неприводимых характеров на этих классах встречаются шесть иррациональных чисел вида

$$e_{31}^k + e_{31}^{2k} + e_{31}^{4k} + e_{31}^{8k} + e_{31}^{16k},$$

где  $e_{31}$  — примитивный корень степени 31 из единицы. Все они являются корнями многочлена  $a^6 + a^5 + 3a^4 + 11a^3 + 44a^2 + 36a + 32$ . Его группа Галуа циклическая порядка 6.

<sup>1</sup><https://www.gap-system.org/>.

Рис. 22. Группа  $ASL_5(2)$ : орбита 32.1 размера 6

Из общей теории можно сделать вывод о том, что функции Белого рассматриваемых рисунков определены над полем разложения многочлена

$$a^6 + a^5 + 3a^4 + 11a^3 + 44a^2 + 36a + 32,$$

и это подтверждается нашими вычислениями. Также это поле определения было вычислено в 2016 году Дж. Войтом. Формулы для функций Белого слишком громоздки, чтобы приводить их здесь, их можно найти в дополнительных материалах к статье.

### Дополнительные материалы

Функции Белого, представленные в настоящей статье, доступны в формате системы SageMath в репозитории на GitHub <https://github.com/nadrianov/supplementary>.

### Литература

- [1] Адрианов Н. М., Звонкин А. К. Взвешенные деревья с примитивными группами вращений рёбер // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2013. — Т. 18, вып. 6. — С. 5–50.
- [2] Ватузов А. М. Вычисление функций Белого с использованием техники модулярных функций // *Интеллект. системы. Теория и приложения.* — 2021. — Т. 25, № 4. — С. 88–91.
- [3] Джонс Г. А., Звонкин А. К. Десять «детских рисунков» Клейна степени 11: тема с вариациями // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2024. — Т. 25, вып. 2. — С. 103–175. — <https://arxiv.org/abs/2104.12015>

- [4] Звонкин А. К., Ландо С. К. Графы на поверхностях и их приложения. — М.: МЦНМО, 2010.
- [5] Кочетков Ю. Ю. Девятирёберные плоские деревья. Каталог // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 6. — С. 159—195.
- [6] Adrianov N. M., Pakovich F., Zvonkin A. K. Davenport–Zannier Polynomials and Dessins d’Enfants. — Providence, RI, 2020. — (AMS Math. Surveys Monographs; Vol. 249).
- [7] Bétréma J., Péré D., Zvonkin A. K. Plane Trees and Their Shabat Polynomials. Catalog: Technical Report LaBRI No. 92-75. — Bordeaux, 1992.
- [8] Cassou-Noguès P., Couveignes J.-M. Factorisations explicites de  $g(y) - h(z)$  // Acta Arith. — 1999. — Vol. 87, no. 4. — P. 291—317.
- [9] Couveignes J.-M. Calcul et rationalité de fonctions de Belyi en genre 0 // Ann. Inst. Fourier. — 1994. — Vol. 44, no. 1. — P. 1—38.
- [10] Hoyden-Siedersleben G., Matzat B. H. Realisierung sporadischer einfacher Gruppen als Galoisgruppen über Kreisteilungskörpern // J. Algebra. — 1986. — Vol. 101. — P. 273—286.
- [11] Klein F. Über die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades // Math. Ann. — 1878. — Vol. 14 — P. 111—172.
- [12] Klein F. Über die Erniedrigung der Modulargleichungen // Math. Ann. — 1878. — Vol. 14 — P. 417—427.
- [13] Klein F. Über die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen // Math. Ann. — 1879. — Vol. 15 — P. 533—555.
- [14] Monien H. How to calculate rational coverings for subgroups of  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  efficiently: Доклад на конф. «Embedded Graphs», Санкт-Петербург. — 2014 — <http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2014/EG/presentations/Hartmut%20Monien.pdf>.
- [15] Monien H. The sporadic group J2, Hauptmodul and Belyi map. — 2017. — <https://arxiv.org/abs/1703.05200>.
- [16] Monien H. The sporadic group Co3, Hauptmodul and Belyi map. — 2018. — <https://arxiv.org/abs/1802.06923>.
- [17] Musty M., Schiavone S., Sijsling J., Voight J. A database of Belyi maps // Proc. of the Thirteenth Algorithmic Number Theory Symposium. The Open Book Series. — 2019. — Vol. 2, no. 1. — P. 375—392. — <https://www.lmfdb.org/Belyi/>.
- [18] Pakovich F., Zvonkin A. K. Minimum degree of the difference of two polynomials over  $\mathbb{Q}$ , and weighted plane trees // Selecta Math. New Ser. — 2014. — Vol. 20, no. 4. — P. 1003—1065.
- [19] Pakovich F., Zvonkin A. K. Davenport–Zannier polynomials over  $\mathbb{Q}$  // Int. J. Number Theory. — 2018. — Vol. 14, no. 4. — P. 925—974.
- [20] Schwarz H. Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt // J. Reine Angew. Math. — 1873. — Vol. 75. — P. 292—335.
- [21] Sijsling J., Voight J. On computing Belyi maps // Pub. Math. de Besançon. — 2014. — Vol. 1. — P. 73—131.
- [22] Zvonkin A. How to draw a group? // Discrete Math. — 1998. — Vol. 180. — P. 403—413.

