

Фуллерены и функции Белого

Н. М. АДРИАНОВ

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: nadrianov@gmail.com

Г. Б. ШАБАТ

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Российский государственный гуманитарный университет*
e-mail: george.shabat@gmail.com

УДК 512.622+514.113.5

Ключевые слова: детские рисунки, функции Белого, фуллерены, додекаэдр, бочка.

Аннотация

Работа представляет собой попытку применения теории детских рисунков к теории фуллеренов. Классические результаты, касающиеся вычисления функции Белого додекаэдра, воспроизводятся и применяются к вычислению функции Белого бочки, исследуется евклидова геометрия бочки. Методами теории детских рисунков устанавливается несуществование фуллерена с единственной шестиугольной гранью.

Abstract

N. M. Adrianov, G. B. Shabat, Fullerenes and Belyi functions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 2, pp. 41–61.

The paper is an attempt to apply the theory of dessins d'enfants to the theory of fullerenes. The classical results concerning the calculation of the dodecahedron Belyi function are presented and then applied to the calculation of the Belyi function of the barrel, and the Euclidean geometry of the latter is investigated. The non-existence of a fullerene with the only hexagonal face is established by the methods of dessins d'enfants.

Введение

Фуллерены, модная тема химии и других естественных наук, имеют разнообразные приложения, от квантовых компьютеров (см., например, [11]) до медицины (см. [27]).

Математические аспекты теории фуллеренов также разнообразны. Обсуждение связанных с фуллеренами тем из теории графов, конечных групп и их представлений, геометрии многогранников, изопериметрических проблем и т. п. можно найти (помимо многих других работ) в [14] и [5]. Цель настоящей работы — представить ещё один раздел математики, который, как авторы надеются, сможет углубить понимание комбинаторики и геометрии фуллеренов. Речь идёт

о теории *детских рисунков*; эта теория была создана Александром Гротендиком в [18], а её современное изложение можно найти в [7] или [16].

Основной ингредиент, который может быть внесён теорией детских рисунков в теорию фуллеренов, — *глобальная конформная структура*, определяемая вложением фуллерена в риманову сферу; точнее, имеется 3-параметрическое вещественное семейство соответствующих *метрических* структур. Один из основных текущих вопросов — имеют ли отношение эти структуры к тем, которые наблюдаются в природе. В определённых случаях, одному из которых (бочке) посвящён отдельный раздел настоящей работы, некоторая *замечательная метрика* может быть выделена из упомянутого семейства. Если ответ на основной вопрос окажется положительным, то будет открыт новый раздел *прикладной теории детских рисунков*; некоторые исходные проблемы этого раздела перечислены в заключении настоящей работы.

Можно надеяться, что развиваемый нами подход имеет некоторое отношение к богатой связанной с фуллеренами математике, о которой мы узнали из недавней заметки Е. Каца [23]. Оказалось, что некоторые связанные с фуллеренами химические структуры «решают» некоторые нетривиальные комбинаторные и вариационные задачи, возможно связанные, например, с *плотной упаковкой дисков* (см. [12]), являющейся одним из методов приближённого решения задач, которыми мы занимаемся в настоящей работе. Е. Кац ссылается на монографию [9], в которой её автор Д. Д. Мордухай-Болтовской¹ применял различные математические средства для описания геометрии радиолярий, открытых в 19-м веке (и глубоко изучавшихся А. Тьюрингом и его учениками), и фуллереноподобных структур за десятилетия до открытия настоящих фуллеренов.

В разделе 1 мы кратко излагаем основы теории детских рисунков в её соотношении со сферическими графами и, в частности, с фуллеренами; вводятся соответствующие функции Белого. Раздел 2 содержит основное алгебраическое уравнение, которому удовлетворяют эти функции Белого.

В разделе 3 мы обсуждаем фуллерены с минимальным количеством шестиугольников. Что касается фуллеренов без шестиугольников, это просто *додекаэдр*. Вычисление его функции Белого (разумеется, в другой терминологии) принадлежит математике 19-го века. Однако мы приводим подробное вычисление в терминах детских рисунков; оно оказывается существенно короче (наши несколько страниц соответствуют существенной части знаменитой книги Ф. Клейна) и, как нам кажется, идейно прозрачнее. Затем мы доказываем несуществование фуллерена с единственным шестиугольником. Это хорошо известный фольклорный результат. Обзор недавних работ, содержащих строгое доказательство этого факта, мы приводим в подразделе 3.1. Мы также показываем, что детские рисунки предлагают строгий — хотя и несколько громоздкий — алгебраический подход к решению задач такого рода. (В процессе работы

¹Этот весьма разносторонний математик широко известен своими переводами «Начал» Евклида. Кроме того, А. И. Солженицын был его студентом.

над этим доказательством мы обнаружили, что похожие вопросы рассматривались на рубеже 19-го и 20-го веков несколькими французскими и русскими математиками, включая малоизвестных сегодня; мы приводим соответствующие формулировки и ссылки.) Затем мы довольно подробно изучаем фуллерен с двумя шестиугольниками, так называемую бочку. Из соображений симметрии вычисления в этом случае сводятся к случаю додекаэдра. В конце раздела мы изучаем метрическую структуру бочки в надежде на то, что её можно сравнить с бочками, встречающимися в природе.

В коротком заключительном разделе 4 мы фантазируем о возможных связях между детскими рисунками и химией.

Мы признательны В. М. Бухштаберу, лекции которого в Дубнинской летней школе в 2015-м году вместе с последующими обсуждениями вовлекли нас в этот волнующий раздел математики.

1. Фуллерены и детские рисунки

Мы начнём с установления соотношений между традиционными объектами математической теории фуллеренов и главными объектами теории детских рисунков.

1.0. Краткий обзор детских рисунков

Детский рисунок (dessin d'enfant) — это двукрашенный граф Γ , вложенный в компактную связную ориентированную поверхность X так, что дополнение $X \setminus \Gamma$ гомеоморфно несвязному объединению открытых дисков. Эти диски называются *гранями* рисунка.

Этот термин был введён Александром Гротендиком в [18], но сами объекты известны начиная с 19-го века как *двукрашенные карты* (или *гиперкарты*) на *поверхностях*. Теория детских рисунков отличается от других, рассматривающих те же объекты, *категорным подходом* и установлением эквивалентностей между подходящим образом определённой категорией $\mathcal{DESSJNS}$ и другими, на первый взгляд весьма непохожими. Для нужд настоящей работы будет упомянута лишь одна из них — категория $\mathcal{BELPAJR}(\mathbb{C})$ *пар Белого* над комплексными числами. Объекты этой категории — пары (\mathcal{X}, β) , где \mathcal{X} — гладкая компактная связная риманова поверхность, а β — непостоянная мероморфная функция на ней, конечные критические значения которой только 0 и 1.

Паре Белого ставится в соответствие детский рисунок следующим образом: поверхность $X := \mathbf{top}(\mathcal{X})$ определяется как *топологическая модель* римановой поверхности (это просто означает забывание комплексной структуры), а граф $\Gamma := \beta^{-1} \circ ([0, 1])$ определяется как прообраз отрезка, соединяющего критические значения; чёрные и белые вершины графа Γ — прообразы соответственно 0 и 1.

Мы привели набросок определения функтора

$$\mathbf{draw}: \mathcal{BELPAJR}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{DESSJNS}.$$

Этот функтор оказывается категорной эквивалентностью; детали можно найти в [29] и во многих других публикациях. Это означает, в частности, что *любой* детский рисунок соответствует некоторой вполне определённой комплексно-аналитической структуре. По теореме существования Римана эта комплексная структура имеет алгебро-геометрическую природу: \mathcal{X} — алгебраическая кривая, а β — рациональная функция на ней.

В настоящей работе мы ограничиваемся поверхностями $X \simeq \mathbf{S}^2$ рода 0. В соответствии со сказанным выше мы отождествляем двумерную сферу с проективной прямой (римановой сферой) $\mathbf{P}_1(\mathbb{C})$, и наша задача сводится к нахождению такой рациональной функции $\beta(z)$, что полный прообраз $\beta^{-1} \circ [0, 1]$ изотопен графу Γ . «Хорошо известно»¹ [7], что можно найти желаемую функцию $\beta \in \mathbb{Q}(z)$ с *алгебраическими* коэффициентами. Широкий арсенал продвинутых методов, начиная с [15], был развит для вычисления функций Белого; прекрасный обзор этих методов можно найти в [28]. Многообещающий метод, основанный на вышеупомянутой плотной упаковке дисков, разработан в [12].

Ветвление функции Белого β над тремя критическими точками 0, 1 и ∞ определяет три разбиения числа $n = \deg \beta$. Мы называем эту тройку разбиений *паспортом* рисунка. Комбинаторно паспорт задаётся степенями белых вершин, чёрных вершин и граней рисунка (см. детали в [7]).

1.1. Многогранники и сферические графы

Для любого выпуклого многогранника \mathcal{P} спроектируем его вершины и рёбра из любой внутренней точки O многогранника \mathcal{P} на любую сферу с центром в O , получив таким образом связный граф на сфере; стереографическая проекция этого графа задаёт плоский граф, называемый *диаграммой Шлегеля*. Знаменитая *теорема Штейница* [30] утверждает, что любой простой² планарный 3-связный граф является диаграммой Шлегеля некоторого многогранника. Захватывающее изложение истории теоремы Штейница можно найти в [19].

Диаграммы Шлегеля не обязательно раскрашиваемы в два цвета, поэтому мы добавляем белую вершину в середину каждого ребра; в результате получается рисунок, все белые вершины которого имеют степень 2 (рис. 1). Из 3-связности графа следует, что все степени чёрных вершин не меньше 3. Паспорт тетраэдра — $(3^4 \mid 2^6 \mid 3^4)$, а паспорт куба — $(3^8 \mid 2^{12} \mid 4^6)$.

Диаграммы Шлегеля предоставляют удобный язык для анализа комбинаторных свойств многогранников — до тех пор, пока нас не интересуют их метрические свойства (см., например, [3, 13]). Тем не менее мы хотим отметить, что любой рисунок определяет уникальную комплексную структуру на сфере.

Любой связный плоский 3-валентный граф, все грани которого — пяти- и шестиугольники, может быть реализован многогранником — *фуллереном* (см.

¹Это утверждение есть «лёгкая половина» теоремы Белого, однако её очевидность специалисты оценивают по-разному.

²Простым графом называется граф без петель и кратных рёбер.

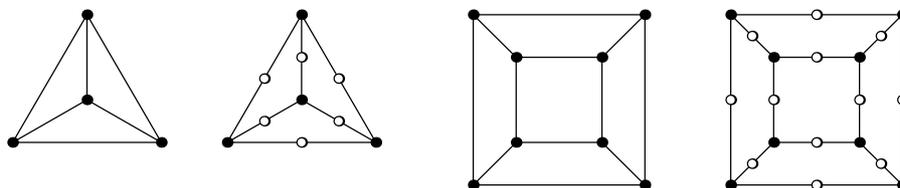


Рис. 1. Диаграммы Шлегеля и соответствующие рисунки

[3, 5]). Таким образом, детские рисунки с паспортами $(3^{2n} | 2^{3n} | 5^{12} 6^{n-10})$ в точности соответствуют фуллеренам с $2n$ вершинами. Отметим, что без предположения о гранях — пяти- и шестиугольниках это неверно: не каждая реализация паспорта рисунком соответствует многограннику.

1.2. f-векторы¹

Будем использовать при $i = 0, 1, 2$ традиционные обозначения f_i для количеств граней фуллерена размерности i . Тогда имеют место следующие равенства:

$$\begin{cases} f_0 - f_1 + f_2 = 2 & (\text{Эйлер}), \\ 3f_0 = 2f_1 & (\text{тривалентность}), \\ f_2 = p_5 + p_6 & (\text{«фейс-контроль»}), \\ 3f_0 = 5p_5 + 6p_6 & (\text{фуллеренность}). \end{cases}$$

Формальные операции с равенствами этой системы позволяют установить хорошо известные свойства фуллеренов

$$p_5 = 12$$

и

$$\begin{cases} f_0 = 20 + 2p_6 & (\text{вершины}), \\ f_1 = 30 + 3p_6 & (\text{рёбра}), \\ f_2 = 12 + p_6 & (\text{грани}). \end{cases}$$

Эти соотношения легко запоминаются: случай $p_6 = 0$ соответствует додекаэдру. Б. Грюнбаум и Т. С. Моцкин [20] доказали, что все значения $p_6 \geq 2$ реализуемы.

2. Функции Белого, соответствующие фуллеренам

В соответствии с подразделом 1.0 задача нахождения пары Белого, соответствующей фуллерену с p_6 шестиугольниками, сводится к нахождению рациио-

¹К сожалению, для английского словосочетания «face vector», по-видимому, не существует адекватного нетехнического русского перевода.

нальной функции Белого $\beta \in \mathbb{C}(z)$ вида

$$\beta = k \frac{V^3}{P^5 H^6}, \quad (2.1)$$

где $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $V, P, H \in \mathbb{C}[z]$ представляют собой *вершинный*, *пентагональный* и *гексагональный* многочлены.

В соответствии с подразделом 1.2

$$\deg P = 12, \quad \deg H = p_6, \quad (2.2)$$

$$\deg V = 20 + 2p_6. \quad (2.3)$$

То, что функция β является функцией Белого, означает, что все нули функции $\beta - 1$ в точности двукратны, следовательно, вычисляя

$$\beta - 1 = k \frac{V^3}{P^5 H^6} - 1 = \frac{kV^3 - P^5 H^6}{P^5 H^6},$$

мы приходим к главному уравнению

$$\boxed{kV^3 - P^5 H^6 = M^2}, \quad (2.4)$$

где M — это *серединный* многочлен, по предположению не имеющий кратных корней.

Неизвестными в главном уравнении (2.4) являются

k ; коэффициенты V, P, H, M .

Предполагая, что старшие коэффициенты многочленов V, P и H равны 1, найдём количество неизвестных:

$$1 + (20 + 2p_6) + 12 + p_6 + (31 + 3p_6) = 64 + 6p_6. \quad (2.5)$$

Они связаны уравнениями в количестве

$$1 + 2 \deg M = 1 + 2(30 + 3p_6) = 61 + 6p_6. \quad (2.6)$$

Разность между (2.5) и (2.6) равна

$$64 - 61 = 3 = \dim \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}).$$

Она соответствует произволу в дробно-линейных преобразованиях переменной z .

3. Малые фуллерены и их функции Белого

3.0. $p_6 = 0$. Додекаэдр

Наименьший фуллерен C_{20} с $p_6 = 0$ является одним из платоновых тел, додекаэдром. У него

$$\boxed{\#\text{вершин} = 20, \#\text{рёбер} = 30, \#\text{граней} = 12},$$

что согласуется с формулами подраздела 1.2. Соответствующий рисунок D_{60} изображён слева на рис. 2. В настоящем подразделе мы вычислим соответствующую функцию Белого.

Функция Белого додекаэдра была фактически вычислена в классической работе Г. Шварца [31] (в 1873 г.). Те же формулы встречаются в книге Ф. Клейна [8], опубликованной в 1884 г. Мы полагаем, что наглядный подход, основанный на теории детских рисунков, может прояснить эти вычисления.

Группа автоморфизмов додекаэдра изоморфна знакопеременной группе A_5 . Рассмотрим фактор додекаэдра D_{60} по любой из подгрупп группы A_5 , изоморфной диэдральной группе D_5 . Эта факторизация может быть осуществлена в два шага: сначала профакторизуем додекаэдр по циклической группе C_5 , в результате чего получится рисунок D_{12} с 12 рёбрами и паспортом $(3^4 | 2^6 | 5^2 1^2)$ (рис. 2). У рисунка D_{12} есть нетривиальный автоморфизм порядка 2, который не так легко увидеть, если рисовать его как на рис. 2. Однако он становится очевиден, если перерисовать D_{12} иначе (рис. 3). Факторизуя D_{12} по этому автоморфизму, мы получаем рисунок D_6 с 6 рёбрами и паспортом $(3^2 | 2^2 1^2 | 5^1 1^1)$.

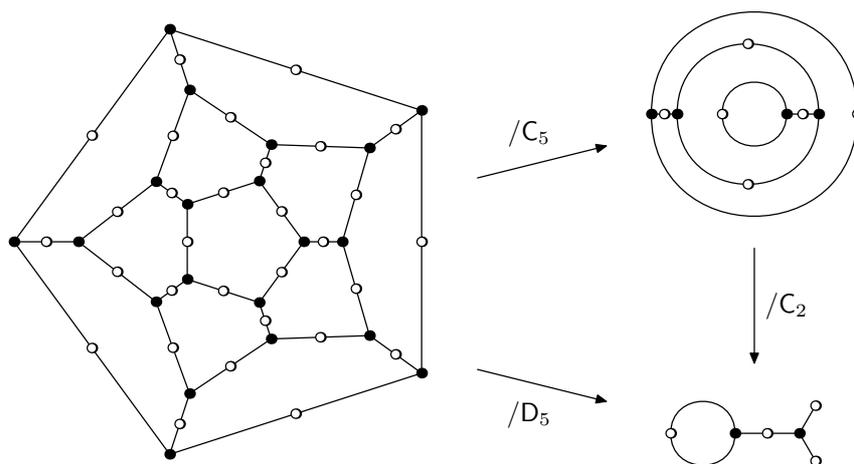
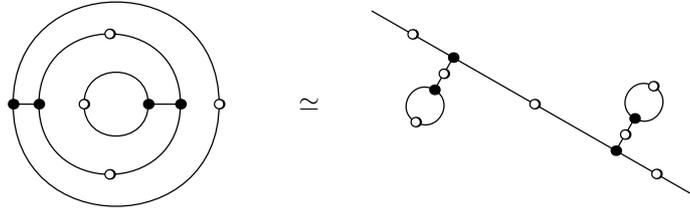


Рис. 2. Рисунок додекаэдра и его факторы по C_5 и D_5

Пусть $\beta_6(z)$ — функция Белого, соответствующая рисунку D_6 . Для упрощения вычислений мы предположим, что её единственный полюс порядка 5 расположен в $z = \infty$, а единственный полюс порядка 1 — в $z = 0$. Это оставляет нам лишь мультипликативную свободу $z \rightarrow \alpha z$. Тогда искомая функция принимает вид

$$\beta_6(z) = \frac{(z^2 + a_1 z + a_0)^3}{kz} = \frac{(z^2 + b_1 z + b_0)^2 (z^2 + c_1 z + c_0)}{kz} + 1$$

Рис. 3. Два способа нарисовать рисунок D_{12}

и следующий многочлен обращается в ноль:

$$S := (z^2 + a_1z + a_0)^3 - (z^2 + b_1z + b_0)^2(z^2 + c_1z + c_0) - kz = 0,$$

где $(z^2 + a_1z + a_0)$, $(z^2 + b_1z + b_0)$ и $(z^2 + c_1z + c_0)$ попарно взаимно просты.

Коэффициенты многочлена S при z^5 , z^4 линейны по c_1 , c_0 , так что получаем

$$\begin{aligned} c_1 &= 3a_1 - 2b_1, \\ c_0 &= 3a_0 - 2b_0 + 3(a_1 - b_1)^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если бы имело место равенство $b_1 = a_1$, то из него следовало бы

$$S = (a_0 - b_0)^2(3z^2 + 3a_1z + a_0 + 2b_0) - kz,$$

и можно было бы заключить, что $b_0 = a_0$, и тогда $(z^2 + a_1z + a_0) = (z^2 + b_1z + b_0)$ не были бы взаимно просты. Следовательно, $b_1 \neq a_1$.

Подставляя (3.1) в коэффициент многочлена S при z^3 , получаем

$$(a_1 - b_1)(a_1^2 - 5a_1b_1 + 4b_1^2 + 6a_0 - 6b_0) = 0,$$

и следовательно,

$$b_0 = a_0 + \frac{1}{6}(a_1 - b_1)(a_1 - 4b_1). \quad (3.2)$$

Подставляя (3.1) и (3.2) в коэффициент многочлена S при z^2 , получаем

$$-\frac{(a_1 - b_1)^2(11a_1^2 - 40a_1b_1 + 20b_1^2 + 36a_0)}{12} = 0,$$

и следовательно,

$$a_0 = \frac{a_1^2}{4} - \frac{5}{9}(a_1 - b_1)^2. \quad (3.3)$$

Подставляя (3.1), (3.2) и (3.3) в свободный член многочлена S , получаем

$$-\frac{(2a_1 - 5b_1)(a_1 - b_1)^5}{27} = 0,$$

и следовательно,

$$b_1 = \frac{2}{5}a_1. \quad (3.4)$$

Используя мультипликативную свободу $z \rightarrow \alpha z$, мы можем положить $a_1 = 10$, и тогда функция Белого принимает вид

$$\beta_6(z) = \frac{(z^2 + 10z + 5)^3}{1728z} = \frac{(z^2 + 4z - 1)^2 (z^2 + 22z + 125)}{1728z} + 1. \quad (3.5)$$

Корни многочлена $(z^2 + 22z + 125)$ — это $-11 \pm i$. Пусть $\mu_1 \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ — дробно-линейное преобразование, переводящее $0, 1$ and ∞ соответственно в $-11 + 2i, 0$ и $-11 - 2i$:

$$\mu_1(z) = \frac{-125i(z - 1)}{(2 + 11i)z + (2 - 11i)}.$$

Тогда $\beta_6(\mu_1(z^2))$ — функция Белого рисунка D_{12} , такая что её полюса расположены в ± 1 . Компонируя её с преобразованием

$$\mu_2(z) = \frac{iz - 1}{iz + 1},$$

которое отображает 0 в -1 и ∞ в 1 , мы получаем её в виде, в котором полюса порядка 1 были расположены в 0 и ∞ :

$$\begin{aligned} \beta_{12}(z) &= \beta_6 \circ \mu_1 \circ (z \rightarrow z^2) \circ \mu_2 = \frac{(z^4 + 228z^3 + 494z^2 - 228z + 1)^3}{1728z(z^2 - 11z - 1)^5} = \\ &= \frac{(z^2 + 1)^2(z^4 - 522z^3 - 10006z^2 + 522z + 1)^2}{1728z(z^2 - 11z - 1)^5} + 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Теперь мы можем записать функцию Белого додекаэдра:

$$\beta_{60}(z) = \beta_{12}(z^5) = \frac{(z^{20} + 228z^{15} + 494z^{10} - 228z^5 + 1)^3}{1728z^5(z^{10} - 11z^5 - 1)^5}. \quad (3.7)$$

Отметим, что эта функция Белого была фактически вычислена Г. Шварцем при составлении знаменитого списка Шварца (алгебраических гипергеометрических функций): в его обозначениях [31, с. 330]

$$\begin{aligned} \varphi_{12} &= s(1 - 11s^5 - s^{10}), \\ \varphi_{20} &= 1 + 228s^5 + 494s^{10} - 228s^{15} + s^{20}, \\ \varphi_{30} &= 1 - 522s^5 - 10005s^{10} - 10005s^{20} + 522s^{25} + s^{30}, \end{aligned}$$

и функция Белого может быть записана в виде

$$\beta_{60}(-s) = \frac{\varphi_{20}^3}{1728 \cdot \varphi_{12}^5} = \frac{\varphi_{30}^2}{1728 \cdot \varphi_{12}^5} + 1.$$

Та же функция появляется в исследовании Ф. Клейна, посвящённом икосаэдру и решению уравнений пятой степени (см. [8, с. 61]¹).

¹Русское издание содержит интересные современные приложения, написанные Ж.-П. Серром, В. И. Арнольдом и А. Н. Тюриным. Заметим, однако, что в нём имеется опечатка: в одной из ключевых формул (см. φ_{30} основного текста) вместо 10005 напечатано 1005 .

3.1. $p_6 = 1$. Несуществующий фуллерен

Общеизвестно, что фуллерена C_{22} с $p_6 = 1$ не существует. Вероятно, М. Гольдберг [17] в 1935 был первым, кто отметил несуществование многогранников с такими параметрами. Он пишет: «Легко показать, что не существует медиального многогранника с $n = 11$ и для $n = 13$ »¹. Гольдберг не делает попыток обосновать своё утверждение.

Некоторые авторы ошибочно утверждают, что несуществование обсуждаемого фуллерена было доказано Б. Грюнбаумом и Т. С. Моцкиным [20]. Это не так: Б. Грюнбаум и Т. С. Моцкин доказывают, что для каждого $p_6 \geq 2$ существует фуллерен, но они не пытаются доказать, что его не существует при $p_6 = 1$. Другое доказательство существования приводится, например, в [34], но проблема несуществования также обходится авторами.

Этот вопрос был предложен в виде задачи читателям журнала *Analytical and Bioanalytical Chemistry* [25] в 2006 г., и автор обосновывает (ссылаясь на статью Б. Грюнбаума и Т. С. Моцкина как на источник «более строгого» доказательства) несуществование фуллерена следующим образом [26].

Экспериментирование с фуллеренными графами (их плоскими проекциями) показывает, что действительно невозможно построить 22-вершинный многогранник с 12 пятиугольниками и только одним шестиугольником. (...) Попытка построить фуллерен с единственным шестиугольником в центре (...) оканчивается неудачей, поскольку последняя (внешняя) грань графа должна быть ещё одним шестиугольником, что приводит к многограннику с двумя шестиугольниками и 24 вершинами.

Очевидным образом это рассуждение нельзя считать математическим доказательством и формализовать его довольно трудно. Полное, математически строгое, комбинаторное доказательство приведено в [2, предложение 1.26]. Настоящий подраздел в большой степени инспирирован вопросом В. М. Бухштабера о возможности доказательства несуществования фуллерена C_{22} методами теории детских рисунков. На самом деле существует целый ряд доказательств, и все они связаны с довольно глубокими математическими теориями.

Основной результат подраздела — теорема 1. Мы не формулируем её в максимальной общности, поскольку это выходит за пределы понятий настоящей работы. В максимальной общности она сформулирована Р. Видунасом и Г. Филипуком [32, лемма 5.1 а]. Их доказательство кратко, но предполагает владение теорией фуксовых дифференциальных уравнений. Ещё одно краткое доказательство, использующее метрические структуры, дано И. Измествевым [22]. Мы приводим самодостаточное доказательство, которое использует только элементарные соображения (см. также обсуждение обобщённого уравнения Ферма

¹Фуллерен с $p_6 = 1$ — это в терминологии М. Гольдберга медиальный многогранник с $n = 13$ гранями.

и результата Ж. А. Альфана в конце подраздела). И, наконец, ещё одно доказательство с помощью теоретико-групповых методов приведено в [1].

Теорема 1. *Не существует рисунка рода $g = 0$ с паспортом $(3^k | 2^l | 5^m s^1)$ для $s \neq 5$.*

Следствие 2. *Не существует фуллерена C_{22} с $p_6 = 1$.*

Доказательство. Предположим, что существует рисунок с паспортом $(3^k | 2^l | 5^m s^1)$. Количество рёбер рисунка равно $n = 3k = 2l = 5m + s$. По формуле Эйлера имеем

$$k + l + m + 1 - n = 2,$$

или

$$\frac{n}{3} + \frac{n}{2} + \frac{n-s}{5} = n + 1,$$

и следовательно,

$$n = 30 + 6s, \quad k = 10 + 2s, \quad l = 15 + 3s, \quad m = 6 + s. \quad (3.8)$$

Поместим центр единственной грани степени s в бесконечную точку проективной прямой \mathbf{P}_1 (оставляя, таким образом, свободу аффинных замен $z \rightarrow az + b$). Тогда функция Белого примет вид

$$\beta = \frac{V^3}{kP^5} = \frac{M^2}{kP^5} + 1, \quad (3.9)$$

где V , M и P — многочлены со старшими коэффициентами 1, попарно взаимно простые и не имеющие кратных корней,

$$\deg V = k, \quad \deg M = l, \quad \deg P = m. \quad (3.10)$$

Применим так называемый *дифференциальный трюк*, то есть вычислим производную двумя способами:

$$\beta' = \frac{V^2(3V'P - 5VP')}{kP^6} = \frac{M(2M'P - 5MP')}{kP^6}$$

и, следовательно,

$$V^2(3V'P - 5VP') = M(2M'P - 5MP'). \quad (3.11)$$

Простые вычисления показывает, что $3V'P - 5VP'$ — многочлен степени

$$k + m - 1 = 10 + 2s + 6 + s - 1 = 15 + 3s = \frac{n}{2}$$

со старшим коэффициентом $3k - 5m = n - (n - s) = s$. Поскольку V и M взаимно просты, M делит $3V'P - 5VP'$, так что оба многочлена имеют степень $n/2$, а старший коэффициент многочлен M равен 1, так что получаем

$$sM = (3V'P - 5VP'). \quad (3.12)$$

Похожим образом

$$sV^2 = 2M'P - 5MP'. \quad (3.13)$$

Подставляя M , выраженное из (3.12) в (3.13), получаем

$$s^2V^2 = 6V''P^2 - 19V'P'P - 10VPP'' + 25VP'^2, \quad (3.14)$$

что равносильно

$$V(s^2V + 10PP'' - 25P'^2) = P(6V''P - 19V'P'). \quad (3.15)$$

Поскольку V и P взаимно просты, мы заключаем, что

$$VR = 6V''P - 19V'P', \quad (3.16)$$

$$PR = s^2V + 10PP'' - 25P'^2 \quad (3.17)$$

для некоторого $R \in \mathbb{C}[z]$. Из (3.16) заключаем, что $\deg R \leq \deg P - 2$ (легко убедиться, рассмотрев коэффициенты при z^{m-2} , что на самом деле имеет место равенство, но нам это не понадобится).

Из (3.17) имеем

$$s^2V = PR - 10PP'' + 25P'^2 \quad (3.18)$$

и, подставляя это в (3.16), получаем

$$\begin{aligned} PR^2 - 10PP''R + 25P'^2R &= 6PP'R - 7PP'R' + 6P^2R'' + \\ &+ 240PP''^2 + 370PP'P''' - 60P^2P^{IV} - 19P'^2R - 760P'^2P'', \end{aligned}$$

что равносильно

$$\begin{aligned} 4P'^2(11R + 190P'') &= \\ &= -P(7P'R' - 6PR'' - 370P'P''' + 60PP^{IV} + R^2 - 16P''R - 240P''^2). \end{aligned}$$

Поскольку P не имеет кратных корней, P и P' взаимно просты и, следовательно, P должен делить $11R + 190P''$, но степень последнего меньше, чем $\deg P$. Таким образом,

$$11R + 190P'' = 0 \quad (3.19)$$

и

$$7P'R' - 6PR'' - 370P'P''' + 60PP^{IV} + R^2 - 16P''R - 240P''^2 = 0. \quad (3.20)$$

Подставляя $11R = -190P''$ в (3.20), получаем дифференциальное уравнение порядка 4 на P :

$$22PP^{IV} + 45P''^2 - 66P'P''' = 0. \quad (3.21)$$

Подставляя $11R = -190P''$ в (3.18), а затем результат в (3.12), выражаем V и M через P :

$$\frac{11s^2}{25}V = -12PP'' + 11P'^2, \quad (3.22)$$

$$\frac{11s^3}{25}M = 90PP'P'' - 36P^2P''' - 55P'^3. \quad (3.23)$$

Теперь займёмся решением дифференциального уравнения на многочлен P . Левая часть уравнения (3.21) — многочлен степени $\leq 8 + 2s$, а коэффициент при z^{8+2s} равен

$$\begin{aligned} 22m(m-1)(m-2)(m-3) + 45m^2(m-1)^2 - 66m^2(m-1)(m-2) = \\ = m(m-1)(m-11)(m-12) = (s-6)(s-5)(s+5)(s+6). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (3.21) не имеет решений при $s \neq 5, 6$.

Запишем многочлен P с неопределёнными коэффициентами:

$$P = z^m + a_{m-1}z^{m-1} + a_{m-2}z^{m-2} + \dots + a_1z + a_0. \quad (3.24)$$

Используя аффинную замену $z \rightarrow z+b$ (и сохраняя мультипликативную свободу $z \rightarrow az$), мы можем предположить, что $a_{m-1} = 0$. Рассмотрим по отдельности случаи $s = 5$ и $s = 6$.

Случай $s = 5$. В этом случае $m = 11$. Подставляя (3.24) в (3.21) и последовательно решая линейные уравнения на a_i , получаем

$$a_9 = a_8 = a_7 = a_5 = a_4 = a_3 = a_2 = 0, \quad a_1 = -\frac{a_6^2}{121}, \quad a_0 = 0.$$

Используя мультипликативную свободу $z \rightarrow az$, выбираем $a_6 = 11$ и получаем

$$P = z^{11} - 11z^6 - z.$$

Тогда из (3.22) и (3.23) следует

$$\begin{aligned} V &= z^{20} + 228z^{15} + 494z^{10} - 228z^5 + 1, \\ M &= z^{30} - 522z^{25} - 10\,005z^{20} - 10\,005z^{10} + 522z^5 + 1. \end{aligned}$$

Мы получили функцию Белого додекаэдра:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{(z^{20} + 228z^{15} + 494z^{10} - 228z^5 + 1)^3}{kz^5(z^{10} - 11z^5 - 1)^5} = \\ &= \frac{(z^{30} - 522z^{25} - 10\,005z^{20} - 10\,005z^{10} + 522z^5 + 1)^2}{kz^5(z^{10} - 11z^5 - 1)^5} + 1. \quad (3.25) \end{aligned}$$

Коэффициент $k = 1\,728$ определяется из условия $V^3 = M^2 + kP^5$.

Более того, мы доказали, что функция Белого рисунка с паспортом $(3^{20} \mid 2^{30} \mid 5^{12})$ эквивалентна (3.25). Это означает, что додекаэдр — единственная реализация своего паспорта.

Случай $s = 6$. В этом случае $m = 12$. Многочлен V должен иметь степень 22, но из (3.22) мы выводим, что его коэффициент при z^{22} равен нулю:

$$\frac{25}{11s^2}(-12m(m-1) + 11m^2) \Big|_{m=12} = 0$$

(то же самое верно для многочлена M : он должен иметь степень 33, но его коэффициент при z^{33} равен нулю). Следовательно, не существует решения уравнения (3.9), удовлетворяющего (3.10), и это завершает доказательство. \square

Тем не менее давайте проверим, что за решение мы нашли при $s = 6$. Подставляя (3.24) в (3.21) и решая последовательно линейные уравнения на a_i , получаем

$$\begin{aligned} a_8 &= -\frac{15a_{10}^2}{44}, & a_7 &= -\frac{6a_9a_{10}}{55}, & a_6 &= -\frac{25a_{10}^3 + 66a_9^2}{1210}, \\ a_5 &= \frac{3a_9a_{10}^2}{1210}, & a_4 &= -\frac{3a_{10}(125a_{10}^3 + 176a_9^2)}{106480}, \\ a_3 &= -\frac{a_9(15a_{10}^3 + 22a_9^2)}{13310}, & a_2 &= \frac{a_{10}^2(625a_{10}^3 + 924a_9^2)}{5856400}, \\ a_1 &= \frac{a_9a_{10}(475a_{10}^3 + 704a_9^2)}{64420400}, & a_0 &= \frac{3125a_{10}^6 + 9856a_9^2a_{10}^3 + 7744a_9^4}{2834497600}. \end{aligned}$$

Старшие коэффициенты многочленов V и M —

$$\begin{aligned} V &= -\frac{50}{33}a_{10}z^{20} - \frac{50}{11}a_9z^{19} + \dots, \\ M &= \frac{25}{11}a_9z^{30} - \frac{2500}{363}a_{10}^2z^{29} + \dots \end{aligned}$$

Итак, мы получили 1-мерное семейство решений: два параметра a_9 и a_{10} преобразуются при мультипликативной замене $z \rightarrow az$ как $(a_9 : a_{10}) \rightarrow (a_9/a^3 : a_{10}^2)$, так что мы можем считать, что семейство параметризовано точкой проективной прямой с координатой $(a_9 : a_{10})$. Можно проверить, что (3.9) даёт функцию Белого при

$$k = -\frac{5^4 \cdot (2^3 \cdot 5^2 \cdot a_{10}^3 + 3^3 \cdot 11 \cdot a_9^2)}{3^3 \cdot 11^3}.$$

При $a_{10} = 0$ мы получаем додекаэдр, одна из вершин которого находится в бесконечной точке, а при $a_9 = 0$ получаем альтернативную реализацию додекаэдра, при которой в бесконечную точку попадает середина одного из рёбер.

Обобщённые уравнения Ферма и теорема Альфана

Первый шаг в нашем доказательстве состоял в сведении задачи построения рисунка к задаче нахождения комплексных многочленов, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{V^3}{kP^5} = \frac{M^2}{kP^5} + 1,$$

или

$$V^3 = M^2 + kP^5,$$

что является частным случаем обобщённого уравнения Ферма $X^p + Y^q = Z^r$ для $X, Y, Z \in \mathbb{C}[x]$.

Это уравнение привлекало к себе изрядное внимание на рубеже 19-20 веков. И Г. Шварц, и Ф. Клейн нашли частные решения уравнения. Полный ответ был дан Ж. А. Альфаном. В 1880 г. он написал мемуар [21], посвящённый

обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям и их преобразованиям. Мемуар был представлен на соискание гран-при Парижской академии наук, и эта премия была Ж. А. Альфану присуждена.

Хотя предмет мемуара далёк от диофантовых уравнений, Ж. А. Альфан естественным образом пришёл к обобщённому уравнению Ферма в многочленах и получил следующие результаты.

1. Уравнение $X^p + Y^q = Z^r$ не имеет решений во взаимно простых непостоянных многочленах, если $1/p + 1/q + 1/r \leq 1$.
2. Для любой платоновой тройки $(p, q, r) = (2, 2, r), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5)$ все решения уравнения имеют вид

$$X = aV^{n/p}P(\varphi), \quad Y = bV^{n/q}Q(\varphi), \quad Z = cV^{n/r}R(\varphi),$$

где $a, b, c \in \mathbb{C}$ таковы, что $a^n = b^n = c^n$, $\varphi = U/V$ — рациональная функция, $U, V \in \mathbb{C}[z]$ и P, Q и R — многочлены, через которые выражаются функции Белого платоновых тел типа (p, q, r) (диэдр, тетраэдр, октаэдр, додекаэдр).

Первое утверждение доказать достаточно легко: можно применить то же рассуждение, которое А. Коркин [24] использовал в своём письме к Ш. Эрмиту при доказательстве неразрешимости уравнения Ферма $X^n + Y^n = Z^n$ в многочленах при $n \geq 3$.

Элементарный подход к задаче нахождения *всех* полиномиальных решений обобщённого уравнения Ферма был намечен В. П. Ермаковым в 1898 г. [6]. Он призвал молодых математиков заполнить пробелы. Это было сделано В. П. Вельминым (тогда ещё студентом) в 1904 г. [4]. Справиться с диэдральным, тетраэдральным и октаэдральным случаями оказалось легко, тогда как додекаэдральный случай требовал более изоощрённых усилий. После 20 страниц утомительных вычислений В. П. Вельмин получил нужный ответ для $(p, q, r) = (2, 3, 5)$, но его полнота осталась недоказанной.

Отметим, что «элементарное» для В. П. Ермакова означает запрет на использование дифференцирования. В нашем доказательстве мы не накладывали таких искусственных ограничений и получили концептуально тот же результат значительно проще.

Современное изложение результата Ж. А. Альфана с использованием теории Галуа приведено в [10].

Можно применить результат Ж. А. Альфана для получения нашей теоремы 1. Дополнительные ограничения, накладываемые функциями Белого, можно использовать, чтобы показать, что функция φ должна иметь степень 1.

3.2. $p_6 = 2$. Бочка

Специализируя вычисления раздела 1.2 к случаю $p_6 = 2$, получаем

$$\boxed{\# \text{vertexes} = 24, \quad \# \text{edges} = 36, \quad \# \text{faces} = 14}.$$

Хорошо известно, что существует только один фуллерен с такими параметрами, он называется *бочка* и обозначается C_{24} . Соответствующий рисунок D_{72} имеет 72 ребра, он изображён на рис. 4.

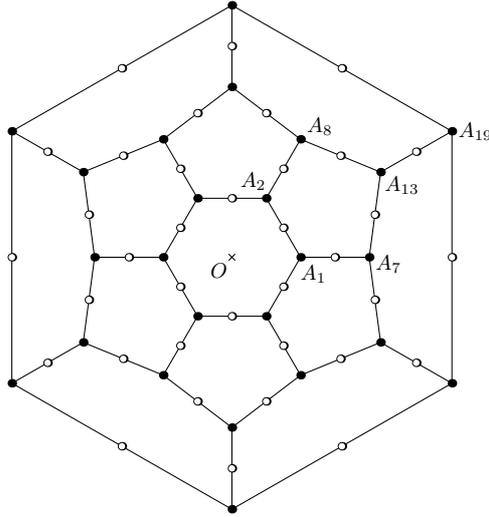


Рис. 4. Бочка D_{72} (фуллерен с двумя шестиугольниками)

Группа автоморфизмов рисунка D_{72} есть диэдральная группа D_6 , факторизация по которой даёт тот же рисунок D_{12} , который встречался нам при рассмотрении додекаэдра. Таким образом, мы бесплатно получаем функцию Белого рисунка D_{72} :

$$\beta_{72}(z) = \beta_{12}(z^6) = \frac{(z^{24} + 228z^{18} + 494z^{12} - 228z^6 + 1)^3}{1728z^6(z^{12} - 11z^6 - 1)^5}. \quad (3.26)$$

Вершинный многочлен рисунка есть

$$V = z^{24} + 228z^{18} + 494z^{12} - 228z^6 + 1 = \prod_{i=1}^{24} (z - A_i),$$

где

$$A_k = \begin{cases} a_1 \cdot e^{\frac{\pi(k-1)i}{3}} & \text{при } k = 1, \dots, 6, \\ a_7 \cdot e^{\frac{\pi(k-1)i}{3}} & \text{при } k = 7, \dots, 12, \\ a_{13} \cdot e^{\frac{\pi i}{6} + \frac{\pi(k-1)i}{3}} & \text{при } k = 13, \dots, 18, \\ a_{19} \cdot e^{\frac{\pi i}{6} + \frac{\pi(k-1)i}{3}} & \text{при } k = 19, \dots, 24 \end{cases} \quad (3.27)$$

с вещественными положительными a_i , такими что $-a_{19} < -a_{13} < a_1 < a_7$ — корни многочлена $Z^4 + 228Z^3 + 494Z^2 - 228Z + 1$. Находя корни этого многочлена,

получаем

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \sqrt[6]{-57 - 25\sqrt{5} + 5\sqrt{255 - 114\sqrt{5}}} = 0,405\dots, \\
 a_7 &= \sqrt[6]{-57 + 25\sqrt{5} + 5\sqrt{255 - 114\sqrt{5}}} = 0,853\dots, \\
 a_{13} &= \sqrt[6]{57 - 25\sqrt{5} + 5\sqrt{255 - 114\sqrt{5}}} = 1,171\dots, \\
 a_{19} &= \sqrt[6]{57 + 25\sqrt{5} + 5\sqrt{255 - 114\sqrt{5}}} = 2,467\dots
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

Формулы (3.27) и (3.28) полностью определяют геометрию (нашей модели) бочки. Поскольку мы собираемся изучить пятиугольник $A_1A_2A_8A_{13}A_7$, напомним, что

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = e^{\frac{\pi i}{3}} a_1, \quad A_7 = a_7, \quad A_8 = e^{\frac{\pi i}{3}} a_7, \quad A_{13} = e^{\frac{\pi i}{6}} a_{13}. \tag{3.29}$$

Положение вершин $A_1, A_2, A_7, A_8, A_{13}$ можно увидеть на рис. 4. Отметим, что в силу C_2 -симметрии, переставляющей шестиугольники, имеем

$$A_{19} = \frac{e^{\frac{\pi i}{6}}}{A_1}, \quad A_{13} = \frac{e^{\frac{\pi i}{6}}}{A_7}.$$

3.3. Геометрия пятиугольной грани

Положения вершин фуллерена на стандартной сфере в \mathbb{R}^3 могут быть вычислены с помощью стереографической проекции.

Снабдим \mathbb{R}^3 евклидовыми координатами X, Y, Z и предположим, что стандартная сфера $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ определена уравнением

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Введённые выше вершины A_k понимаются как лежащие на конечной части проективной прямой $\mathbf{P}_1(\mathbb{C})$. Обратная стереографическая проекция $\mathbb{C} \rightarrow \mathbf{S}^2$ определяется (в вещественных координатах $z = x + yi$ на аффинной части римановой сферы $\mathbf{P}_1(\mathbb{C})$) формулами

$$X = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad Y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Используя численные значения, задаваемые (3.29), вычисляем (с точностью до трёх десятичных знаков) евклидовы координаты основных вершин фуллерена на двумерной сфере:

$$\begin{aligned}
 X(A_1) &= 0,696\dots, & Y(A_1) &= 0, & Z(A_1) &= -0,717\dots, \\
 X(A_2) &= 0,348\dots, & Y(A_2) &= 0,602\dots, & Z(A_2) &= -0,717\dots, \\
 X(A_7) &= 0,987\dots, & Y(A_7) &= 0, & Z(A_7) &= -0,156\dots,
 \end{aligned}$$

$$X(A_8) = 0,493\dots, \quad Y(A_8) = 0,855\dots, \quad Z(A_8) = -0,156\dots,$$

$$X(A_{13}) = 0,855\dots, \quad Y(A_{13}) = 0,493\dots, \quad Z(A_{13}) = 0,156\dots$$

Евклидовы длины рёбер таковы:

$$|A_1A_7| = 0,632\dots, \quad |A_7A_{13}| = 0,599\dots,$$

$$|A_{13}A_8| = 0,599\dots, \quad |A_8A_2| = 0,632\dots, \quad |A_2A_1| = 0,696\dots$$

(таким образом, осевая симметрия рассматриваемой грани подтверждена численно).

Из симметричных свойств фуллерена следует, что *вершины A_1, A_2, A_7, A_8 лежат в одной и той же плоскости*

$$A_1A_2A_7A_8: \boxed{0,935\dots X + 0,540\dots Y - 0,485\dots Z = 1}.$$

Плоскость, содержащая A_7, A_8, A_{13} , определяется уравнением

$$A_7A_8A_{13}: \boxed{0,939\dots X + 0,542\dots Y - 0,457\dots Z = 1}.$$

Угол между плоскостями равен

$$\arccos(0,9997\dots) = 1,36\dots^\circ,$$

следовательно, пренебрежим. Таким образом, *рассматриваемая грань весьма близка к плоской, но всё же не совсем плоская*. Мы завершаем наше рассмотрение, предьявляя плоскую аппроксимацию грани $A_1A_2A_8A_{13}A_7$.

Углы между рёбрами —

$$\angle A_1A_2A_8 = \angle A_2A_1A_7 = 103,3\dots^\circ,$$

$$\angle A_2A_8A_{13} = \angle A_{13}A_7A_1 = 111,2\dots^\circ,$$

$$\angle A_7A_{13}A_8 = 110,8\dots^\circ.$$

Таким образом, форма нашей пятиугольной грани оказывается дотаточно близкой к правильному пятиугольнику. Его плоское приближение выглядит как на рис. 5.

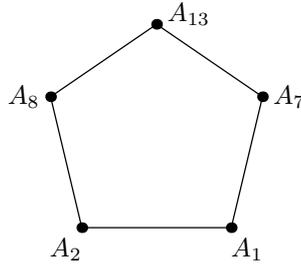


Рис. 5. Плоская аппроксимация грани $A_1A_7A_{13}A_8A_2$ бочки

Мы бы очень хотели узнать, похожа ли реальная бочка на нашу модель.

4. Обсуждение

Наиболее важный вопрос — имеет ли отношение найденная метрическая структура к реальной геометрии фуллеренов. Ответ на этот вопрос требует некоторого сотрудничества математиков и химиков. Ниже мы предполагаем, что ответ положителен (в противном случае окажется, что обнаружены *две* «естественные» метрические реализации одной и той же комбинаторной структуры). Тогда возникают следующие вопросы.

- Найти *физических* представителей конформных классов общих детских рисунков, соответствующих фуллеренам.
- Определить в терминах p_6 границы возможностей современных (супер?) компьютеров для нахождения *точных* решений основного уравнения (2.4).
- Развить технику *приближённых* решений основного уравнения (2.4).
- Исследовать *орбиты Галуа* фуллеренов; было бы очень интересно обнаружить, что малые орбиты (то есть те, которые можно задать иррациональностями небольших степеней) совпадают с избранными природой.

Литература

- [1] Адрианов Н. М. Группы монодромии и действие на k -подмножествах // *Фундамент. и прикл. матем.* — Принята к публикации.
- [2] Бухштабер В. М., Ероховец Н. Ю. Усечения простых многогранников и приложения // *Тр. МИАН* — 2015. — Т. 289. — С. 115–144.
- [3] Бухштабер В. М., Ероховец Н. Ю. Конструкции семейств трёхмерных многогранников, характеристические фрагменты фуллеренов и многогранники Погорелова // *Изв. РАН. Сер. матем.* — 2017. — Т. 81, № 5. — С. 15–91.
- [4] Вельминъ В. П. Рѣшение неопредѣленного уравнения $u^m + v^n = w^k$ // *Матем. сб.* — 1904. — Т. 24, № 4. — С. 633–661.
- [5] Деза М., Дютур Сикирич М., Штогрин М. И. Фуллерены и диск-фуллерены // *УМН.* — 2013. — Т. 68, № 4. — С. 69–128.
- [6] Ермаковъ В. П. Трехчленные неопредѣленные уравнения // *Матем. сб.* — 1898. — Т. 20, № 2. — С. 293–298.
- [7] Звонкин А. К., Ландо С. К. Графы на поверхностях и их приложения. — М.: МЦНМО, 2010.
- [8] Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. — М.: Наука, 1989.
- [9] Мордухай-Болтовской Д. Д. Геометрия радиоларий // *Учѣные записки Ростовского ун-та* — 1936. — № 8 — С. 1–91; М.: УРСС, 2012.
- [10] Arnaudies J.-M., Bertin J. Groupes, algèbres et géométrie. Т. 3. Surfaces de Riemann, equation de Halphen et groupes polyédraux. — Paris: Ellipses, 2001.
- [11] Benjamin S. C., Ardavan A., Briggs G. A. D., Britz D. A., Gunlycke D., Jefferson J., Jones M. A. G., Leigh D. F., Lovett B. W., Khlobystov A. N., Lyon S. A.,

- Morton J. J. L., Porfyrakis K., Sambrook M. R., Tyryshkin A. M. Towards a fullerene-based quantum computer // *J. Phys. Condens. Matter* — 2006. — Vol. 18, no. 21. — P. 867–883.
- [12] Bowers P. L., Stephenson K. Uniformizing Dessins and Belyi Maps via Circle Packing. — *Amer. Math. Soc.*, 2004. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 170; No. 805).
- [13] Buchstaber V. M., Erokhovets N. Construction of fullerenes. — 2015. — <https://arxiv.org/abs/1510.02948>.
- [14] Chung F., Sternberg S. Mathematics and the Buckyball // *American Scientist*. — 1993. — Vol. 81, no. 1. — P. 56–71.
- [15] Couveignes J.-M. Calcul et rationalité de fonctions de Belyi en genre 0 // *Ann. Inst. Fourier*. — 1994. — Vol. 44, no. 1. — P. 1–38.
- [16] Gironde E., González-Diez G. Introduction to Compact Riemann Surfaces and Dessins d'Enfants. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011.
- [17] Goldberg M. The isoperimetric problem for polyhedra // *Tôhoku Math. J.* — 1935. — Vol. 40. — P. 226–236.
- [18] Grothendieck A. Esquisse d'un Programme // *Geometric Galois Actions 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme* / P. Lochak, L. Schneps, eds. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 242). — P. 5–48.
- [19] Grünbaum B. Graphs of polyhedra; polyhedra as graphs // *Discrete Math.* — 2007. — Vol. 307. — P. 445–463.
- [20] Grünbaum B., Motzkin T. S. The number of hexagons and the simplicity of geodesics on certain polyhedra // *Canad. J. Math.* — 1963. — Vol. 15. — P. 744–751.
- [21] Halphen G. H. Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut National de France (1883). — Oeuvres de G.-H. Halphen. Tome III. — Paris, 1921. — P. 1–260.
- [22] Izmetiev I. Color or cover. — 2015. — <https://arxiv.org/abs/1503.00605>.
- [23] Katz E. Geometrical analysis of radiolaria and fullerene structures: Who gets the credit? // *Math. Intelligencer* — 2014. — Vol. 36, no. 1. — P. 34–36.
- [24] Korkine A. Sur l'impossibilité de la relation algébrique $x^n + y^n + z^n = 0$ // *C. R. Acad. Sci.* — 1880. — P. 303–304. — <https://zbmath.org/12.0134.04>.
- [25] Meija J. Goldberg variations challenge // *Analytical Bioanalytical Chem.* — 2006. — Vol. 385. — P. 6–7.
- [26] Meija J. Solution to Goldberg variations challenge // *Analytical Bioanalytical Chem.* — 2006. — Vol. 386. — P. 4.
- [27] Petrovic D., Seke M., Srdjenovic B., Djordjevic A. Applications of anti/prooxidant fullerenes in nanomedicine along with fullerenes influence on the immune system // *J. Nanomaterials*. — 2015. — No. 2. — ID 565638.
- [28] Sijtsling J., Voight J. On computing Belyi maps // *Pub. Math. Besançon*. — 2014. — Vol. 1 — P. 73–131.
- [29] Shabat G. B., Voevodsky V. A. Drawing curves over number fields // *The Grothendieck Festschrift. Vol. III* — Boston: Birkhäuser, 2006. — (Modern Birkhäuser Classics; Vol. 88). — P. 199–227.

- [30] Steinitz E. Polyeder und Raumeinteilungen // *Encycl. Math. Wiss.* — 1922. — Band 3 (Geometrie) 3A12. — P. 1—139.
- [31] Schwarz H. Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt // *J. Reine Angew. Math.* — 1873. — Vol. 75. — P. 292—335.
- [32] Vidunas R., Filipuk G. A classification of coverings yielding Heun-to-hypergeometric reductions // *Osaka J. Math.* — 2014. — Vol. 51, no. 4. — P. 867—905.
- [33] Thompson D'A. W. *On Growth and Form.* — Cambridge Univ. Press, 1917; 2nd ed.: 1942.
- [34] Voytekhoovskiy Y., Stepenshchikov D. On the Motzkin–Grunbaum theorem // *Acta Cryst. A.* — 2005. — Vol. 61, no. 6. — P. 584—585.

