

О гипотезе Галуа-инвариантности многочлена Татта для детских рисунков Гротендика

Н. АМБУРГ

НИЦ «Курчатовский институт»,
НИУ «Высшая школа экономики»,
Институт проблем передачи информации
e-mail: amburg@mccme.ru

Л. БРИЛЬ

НИУ «Высшая школа экономики»
e-mail: eabril@edu.hse.ru

УДК 511.238

Ключевые слова: группа Галуа, детские рисунки Гротендика.

Аннотация

Ю. И. Манин и М. Марколли предложили новый способ построения инвариантов действия абсолютной группы Галуа на детских рисунках Гротендика. В частности, они сформулировали гипотезу о том, что многочлен Татта является примером такого инварианта. В этой заметке мы приводим контрпример, опровергающий эту гипотезу.

Abstract

N. Amburg, L. Bril, On the conjecture of the Galois invariance of the Tutte polynomial for Grothendieck's dessins d'enfants, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 2, pp. 63–77.

Yuri Manin and Matilde Marcolli proposed a novel method of constructing invariants of the action of the absolute Galois group on Grothendieck's dessins d'enfant. In particular, they formulated the conjecture that the Tutte polynomial is an example of such an invariant. In this note, we present a counterexample that refutes this conjecture.

*Посвящается Георгию Борисовичу Шабату
по случаю его 70-летия*

1. Введение

Одним из основных направлений теории детских рисунков Гротендика является исследование действия абсолютной группы Галуа. Действие группы Галуа на рисунках (комбинаторных объектах) определяется её действием на функциях Белого (алгебраических объектах). Известны некоторые комбинаторные

инварианты действия группы Галуа, например количество рёбер и группа автоморфизмов. Но также известны нетривиальные случаи распада орбит действия группы Галуа, которые не объясняются известными комбинаторными инвариантами.

Ю. И. Манин и М. Марколли в [2] предложили новые инварианты действия абсолютной группы Галуа. В частности, они высказали гипотезу о том, что, возможно, многочлен Татта — это инвариант Галуа. В данной работе мы рассматриваем сферические рисунки с набором валентностей $(5, 5, 1, 1 \mid 5, 5, 1, 1)$ [1]. Одна из орбит действия группы Галуа состоит из двух таких рисунков, но у этих рисунков различные многочлены Татта.

2. Группа Галуа и детские рисунки Гротендика

Определение 1. Детским рисунком D называется граф Γ , вложенный в гладкую связную компактную поверхность X так, что его вершины — различные точки поверхности, его рёбра — непересекающиеся кривые на поверхности, а все связные компоненты $X \setminus \Gamma$ (границы) гомеоморфны открытым дискам.

Определение 2. Функцией Белого $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ называется мероморфная функция на римановой поверхности (алгебраической кривой), неразветвлённая вне $\{0, 1, \infty\}$. Парой Белого называется пара (X, f) , где f — функция Белого на X .

Детский рисунок $D = D_f$ пары Белого (X, f) — это прообраз $f^{-1}([0, 1])$, вложенный в X и рассматриваемый как двудольный граф следующим образом.

- Его вершины — $V(D) = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$, $f^{-1}(0)$ покрашены в чёрный, $f^{-1}(1)$ — в белый цвет.
- Его рёбра (открытые) — это связные компоненты $f^{-1}(0, 1)$, прообраза единичного интервала.
- Дополнение к $f^{-1}([0, 1])$ в X состоит из дисков, причём каждый диск содержит среди своих внутренних точек в точности одну точку из прообраза $f^{-1}(\infty)$. Назовём их гранями рисунка.

Замечание. Категория детских рисунков и категория пар Белого эквивалентны. В частности, для каждого рисунка D существует пара Белого, такая что её рисунок эквивалентен рисунку D .

Определение 3. Рисунок называется чистым, если все его белые вершины имеют валентность 2.

Белые вершины чистого рисунка можем не рисовать — помним, что в середине каждого ребра между чёрными вершинами есть белая вершина валентности 2.

Определение 4. Группа автоморфизмов поля $\bar{\mathbb{Q}}$ алгебраических чисел называется *абсолютной группой Галуа* и обозначается $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Теорема 1 (теорема Белого). *Риманова поверхность X может быть определена как алгебраическая кривая над полем алгебраических чисел \mathbb{Q} тогда и только тогда, когда существует накрытие $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, неразветвлённое вне $\{0, 1, \infty\}$. Если такая мероморфная функция f существует, то её тоже можно выбрать определённой над полем \mathbb{Q} .*

Пусть f — функция Белого на X . По теореме Белого мы можем выбрать X и f так, чтобы все коэффициенты были алгебраическими числами. Элемент $\gamma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует на X и f покоэффициентно. При этом γf тоже функция Белого на кривой γX . Результатом действия $\gamma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ на пару Белого (X, f) с рисунком D будет новая пара Белого $(\gamma X, \gamma f)$ с новым рисунком γD .

3. Многочлен Татта

Определение 5. Многочлен Татта графа D может быть определён формулой

$$T_D(x, y) = \sum_{\delta \subseteq D} (x-1)^{b_0(\delta)-b_0(D)} (y-1)^{b_1(\delta)},$$

где сумма берётся по всем подграфам δ с множеством вершин $V(\delta) = V(D)$ и множеством рёбер $E(\delta) \subseteq E(D)$; $b_0(\delta)$ — число компонент связности δ ,

$$b_1(\delta) = b_0(\delta) + \#E(\delta) - \#V(\delta).$$

Гипотеза [1]. Многочлен Татта $T_D(x, y)$ — это инвариант Галуа рисунка D , то есть $T_{\gamma D}(x, y) = T_D(x, y)$ для всех $\gamma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Теорема 2. Многочлен Татта $T_D(x, y)$ не является инвариантом Галуа.

Замечание. Доказательство теоремы представлено в разделе 5.2.

4. Рисунки Филимоненкова и Шабата

4.1. Семейство рисунков

с набором валентностей $[5^2 1^2, 2^6, 5^2 1^2]$

Рассмотрим пример из [1] — семейство сферических рисунков с заданными валентностями: шесть белых вершин валентности 2 (чистый рисунок), две чёрные вершины валентности 1, две вершины валентности 5, две грани валентности 1, две грани валентности 5. Такие рисунки перечислены на рис. 1. Все они самодвойственные. Это значит, что прообразы отрезков $[0, 1]$ и $[1, \infty]$ — эквивалентные рисунки.

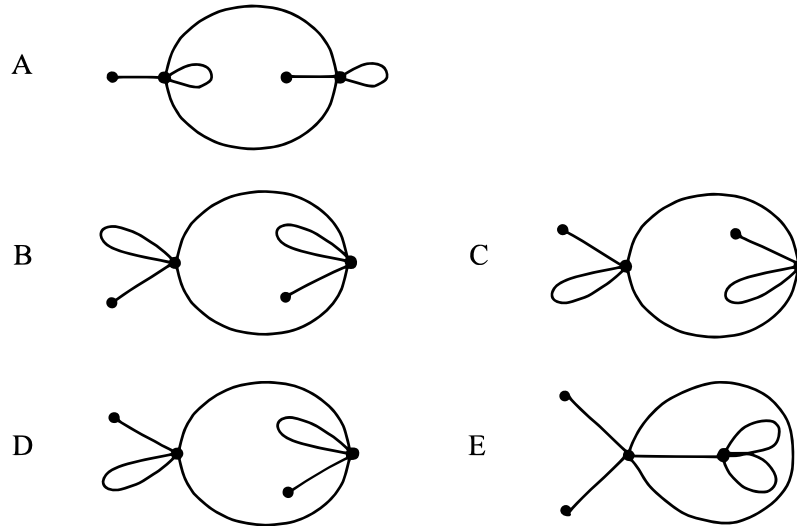


Рис. 1. Рисунки Филимоновки и Шабата

4.2. Истинные формы рисунков с набором валентностей $[5^2 1^2, 2^6, 5^2 1^2]$

В [1] приведены функции Белого для детских рисунков А, В, С, D, Е (рис. 1). В этом разделе мы рисуем вложенные графы — прообразы отрезка $[1, \infty]$ для этих функций. Мы используем нашу программу на Python.

Функция Белого рисунка А:

$$f_A(z) = \frac{(z^2 - 1)^5(z^2 - 4z - 1)}{-64z^5(z^2 + z - 1)}.$$

«Истинная форма» рисунка А изображена на рис. 2. Одна из чёрных вершин валентности 5 — это бесконечность. На рис. 3 можем рассмотреть детали рисунка А вблизи второй вершины валентности 5 в точке $z = 0$.

Функция Белого рисунка В:

$$f_B(z) = \frac{-7251 - 245\sqrt{-15}}{39168} \times \frac{(17cz^2 + (498 + 66\sqrt{-15})z + 17)(cz^2 + 1)^5}{(cz^2 + (14 - 2\sqrt{-15})z + 1)(cz^2 + (50 + 2\sqrt{-15})z + 1)^5}.$$

Здесь $c = -990 - 14\sqrt{-15}$.

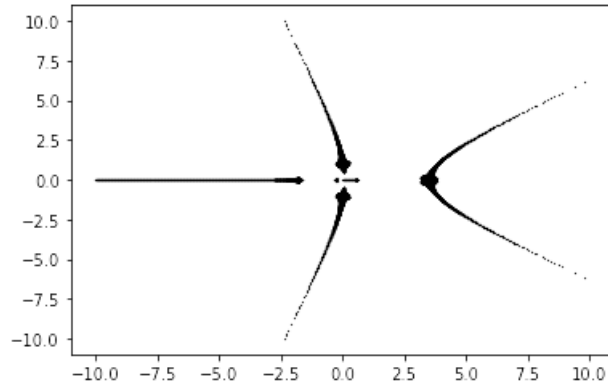


Рис. 2. Истинная форма рисунка А

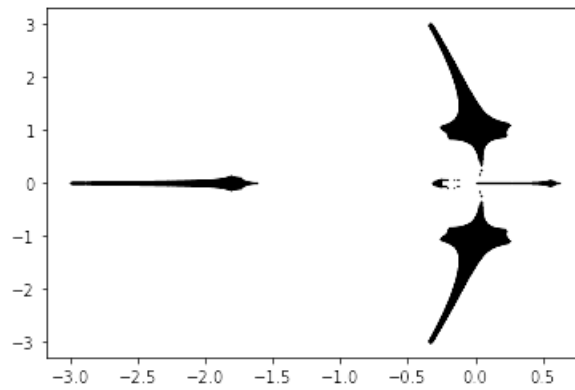


Рис. 3. Рисунок А — детали

Функция Белого рисунка С:

$$f_C(z) = \frac{-7251 + 245\sqrt{-15}}{39168} \times \frac{(17cz^2 + (498 - 66\sqrt{-15})z + 17)(cz^2 + 1)^5}{(cz^2 + (14 + 2\sqrt{-15})z + 1)(cz^2 + (50 - 2\sqrt{-15})z + 1)^5}.$$

Здесь $c = -990 + 14\sqrt{-15}$.

Функции Белого для В и С получаются друг из друга заменой $\sqrt{-15}$ на $-\sqrt{-15}$. Значит, рисунки В и С принадлежат одной орбите действия группы Галуа $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Истинная форма рисунка В изображена на рис. 4. Истинная форма рисунка С изображена на рис. 5.

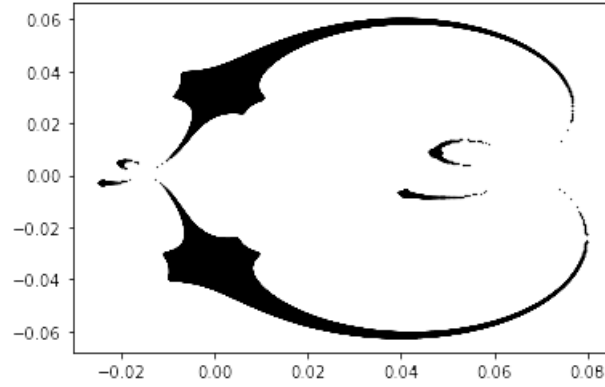


Рис. 4. Истинная форма рисунка В

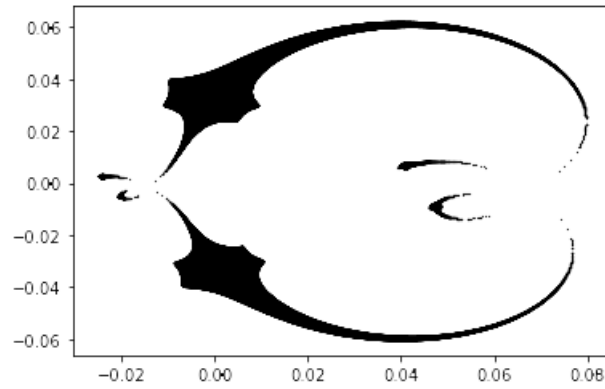


Рис. 5. Истинная форма рисунка С

Лемма 1. Рисунки D и E принадлежат одной орбите действия $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Доказательство. Покажем, что найдётся такой автоморфизм $\gamma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, что $E = \gamma D$.

Функция Белого рисунка D:

$$f_D(z) = -\frac{(sz^2 - uz - 1)^5(sz^2 - tz - r^2)}{(sz^2 + uz - 1)^5(sz^2 + tz - r^2)},$$

$$s = \sqrt{5},$$

$$t = \frac{290\sqrt{5} + 600 - 270\sqrt{-10} - 350\sqrt{-2}}{121},$$

$$r = -\frac{2\sqrt{5} + 3 - 3\sqrt{-10} + \sqrt{-2}}{11},$$

$$q = 19\sqrt{5} + 40 + 90\sqrt{-2} + 42\sqrt{-10},$$

$$p = 70\sqrt{5} + 145 + 185\sqrt{-2} + 80\sqrt{-10},$$

$$u = -2\sqrt{5} - 4.$$

На рис. 6 приведена истинная форма рисунка D, а на рис. 7 можно подробнее рассмотреть детали.

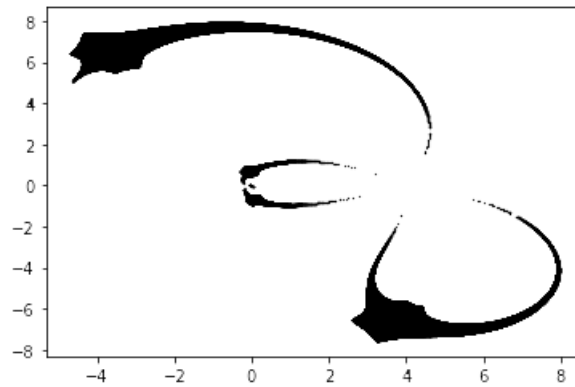


Рис. 6. Истинная форма рисунка D

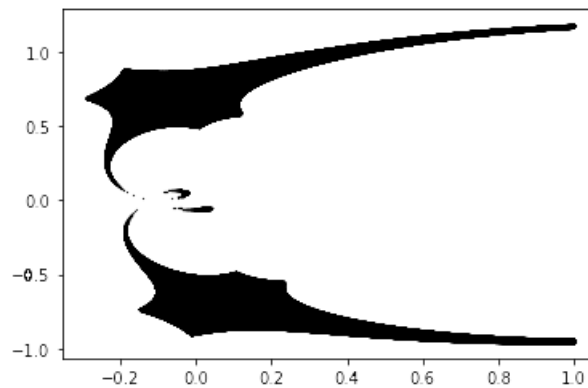


Рис. 7. Рисунок D — детали

Функцией Белого для рисунка E является функция $f_E = \gamma f_D$, где $\gamma(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$. Таким образом, теперь коэффициенты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 s &= -\sqrt{5}, \\
 t &= \frac{-290\sqrt{5} + 600 + 270\sqrt{-10} - 350\sqrt{-2}}{121}, \\
 r &= -\frac{-2\sqrt{5} + 3 + 3\sqrt{-10} + \sqrt{-2}}{11}, \\
 q &= -19\sqrt{5} + 40 + 90\sqrt{-2} - 42\sqrt{-10}, \\
 p &= -70\sqrt{5} + 145 + 185\sqrt{-2} - 80\sqrt{-10}, \\
 u &= 2\sqrt{5} - 4.
 \end{aligned}$$

На рис. 8 истинная форма рисунка Е, в то время как рис. 9 даёт дополнительные детали.

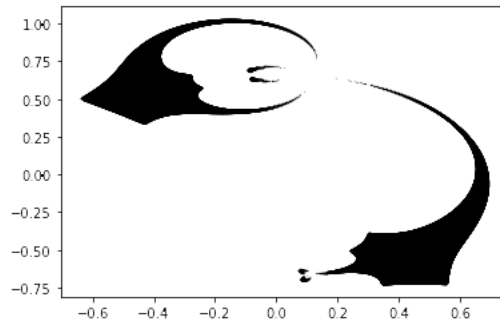


Рис. 8. Истинная форма рисунка Е

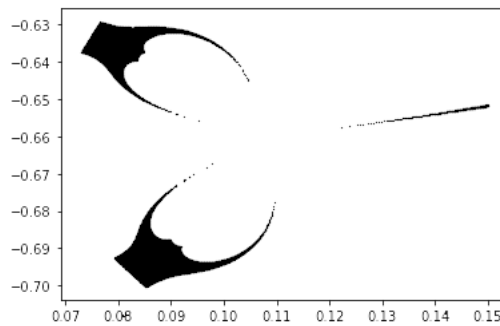


Рис. 9. Рисунок Е — детали

Таким образом, мы нашли нужный автоморфизм γ , лемма доказана. \square

5. Многочлены Татта для рисунков Филимоненкова и Шабата

5.1. Вычисления

Вычислим многочлены Татта рисунков из раздела 4.

Лемма 2. Многочлены Татта для рисунков А, В, С, D, E:

$$T_A(x, y) = T_B(x, y) = T_C(x, y) = T_D(x, y) = x^3y^2 + x^2y^3, \quad T_E(x, y) = x^3y^3.$$

Доказательство. Достаточно посчитать многочлены Татта только графов D и E. Действительно, графы А, В, С, D изоморфны, а у изоморфных графов многочлены Татта совпадают. Значит,

$$T_A(x, y) = T_B(x, y) = T_C(x, y) = T_D(x, y).$$

В приложении мы перечисляем все подграфы рисунков D и E, необходимые для вычислений.

Многочлен Татта рисунка D:

$$\begin{aligned} T_D(x, y) = & (x-1)^3 + 4(x-1)^2 + 2(x-1)^3(y-1) + 5(x-1) + 9(x-1)^2(y-1) + \\ & + (x-1)^3(y-1)^2 + 2 + 12(x-1)(y-1) + 6(x-1)^2(y-1)^2 + (x-1)^2(y-1)^3 + \\ & + 5(y-1) + 9(x-1)(y-1)^2 + 4(y-1)^2 + 2(x-1)(y-1)^3 + (y-1)^3. \end{aligned}$$

После упрощения мы имеем

$$T_D(x, y) = x^3y^2 + x^2y^3.$$

Многочлен Татта рисунка E:

$$\begin{aligned} T_E(x, y) = & (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1)^3(y-1) + 9(x-1)^2(y-1) + \\ & + 3(x-1)^3(y-1)^2 + 3(x-1) + 1 + 9(x-1)(y-1) + 9(x-1)^2(y-1)^2 + \\ & + (x-1)^3(y-1)^3 + 3(y-1) + 9(x-1)(y-1)^2 + 3(x-1)^2(y-1)^3 + \\ & + 3(y-1)^2 + 3(x-1)(y-1)^3 + (y-1)^3. \end{aligned}$$

Мы получаем

$$T_E(x, y) = x^3y^3. \quad \square$$

5.2. Доказательство теоремы 2

Доказательство теоремы 2. Мы установили, что рисунки D и E принадлежат одной орбите действия абсолютной группы Галуа в лемме 1.

Из леммы 2 получили

$$T_D(x, y) = x^3y^2 + x^2y^3 \neq x^3y^3 = T_E(x, y).$$

Таким образом, рисунки из одной орбиты имеют различные многочлены Татта. Значит, многочлен Татта не является инвариантом Галуа. Это завершает доказательство теоремы. \square

Приложение



Рис. 10. Подграфы с нулём рёбер (D)

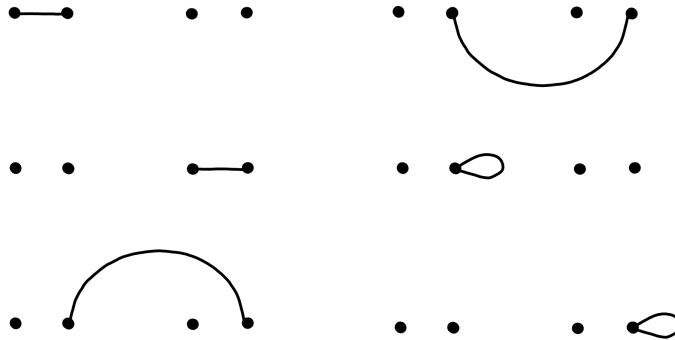


Рис. 11. Подграфы с одним ребром (D)

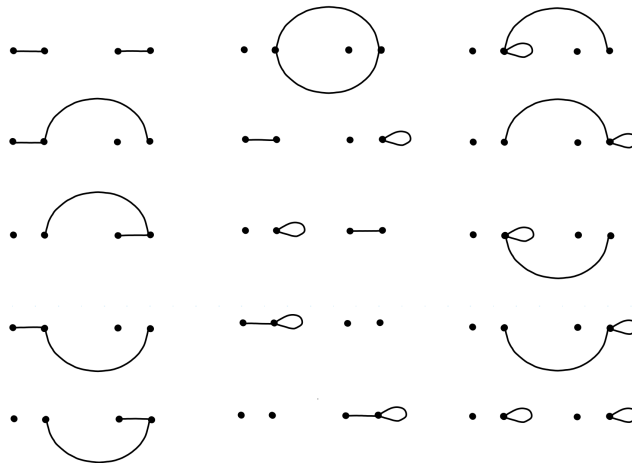


Рис. 12. Подграфы с двумя рёбрами (D)

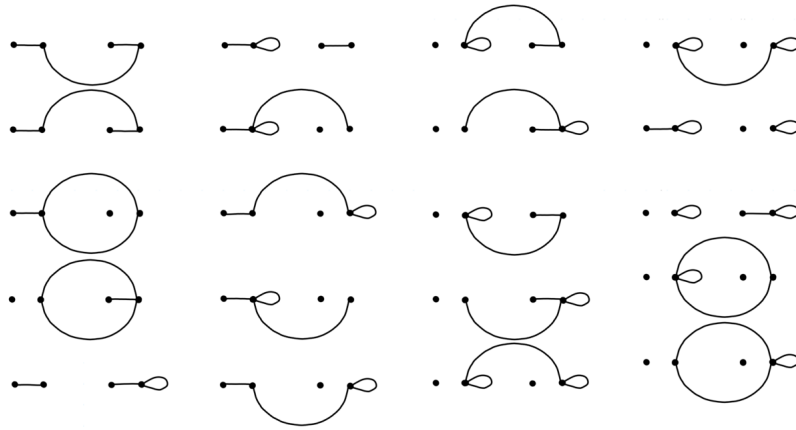


Рис. 13. Подграфы с тремя рёбрами (D)

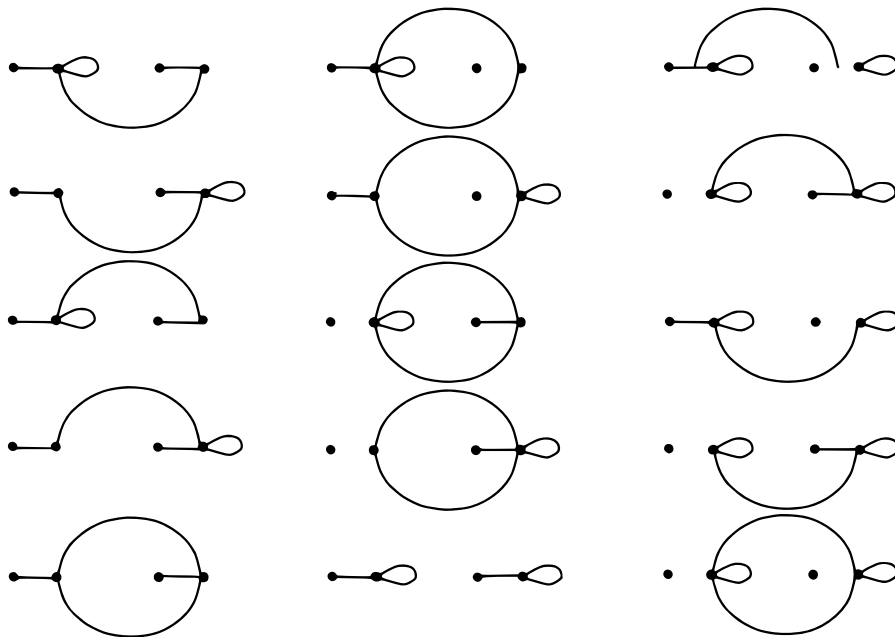


Рис. 14. Подграфы с четырьмя рёбрами (D)

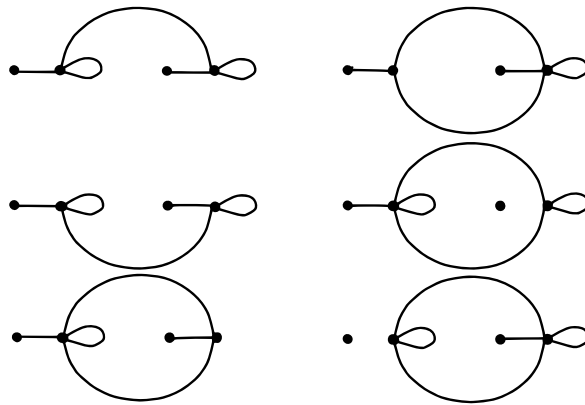


Рис. 15. Подграфы с пятью рёбрами (D)

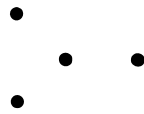


Рис. 16. Подграфы с нулём рёбер (E)

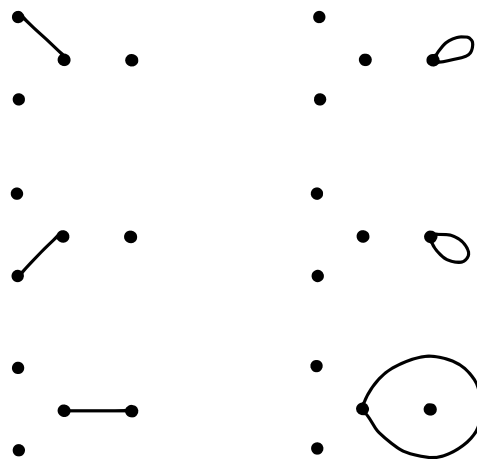


Рис. 17. Подграфы с одним ребром (E)

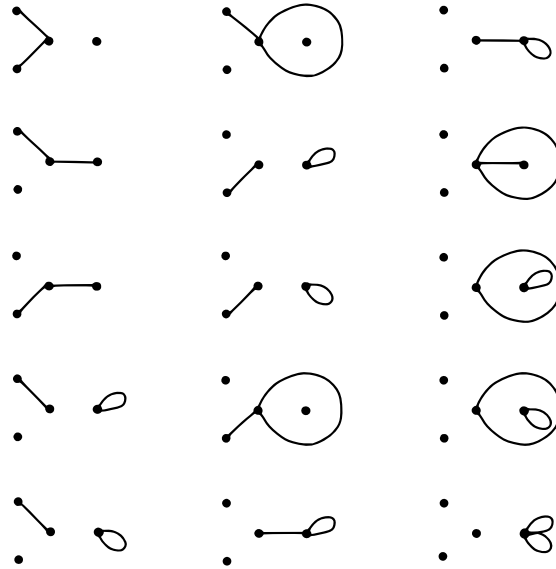


Рис. 18. Подграфы с двумя рёбрами (E)

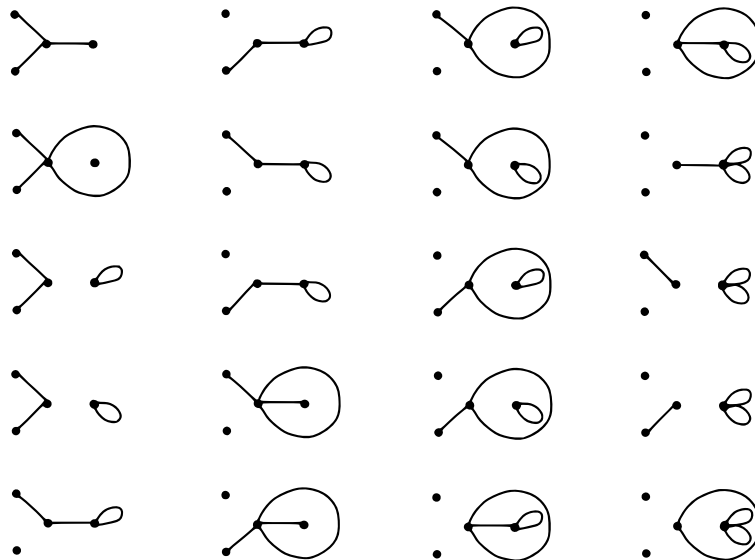


Рис. 19. Подграфы с тремя рёбрами (E)

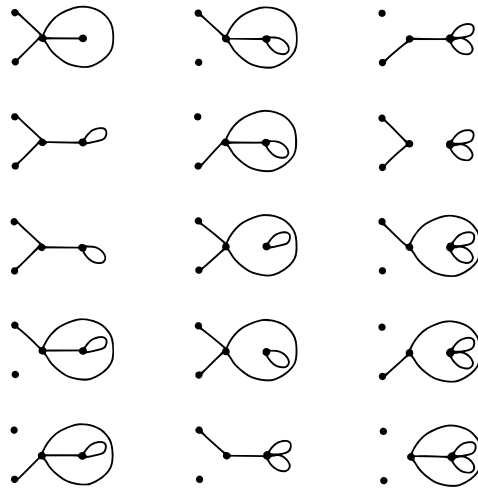


Рис. 20. Подграфы с четырьмя рёбрами (E)

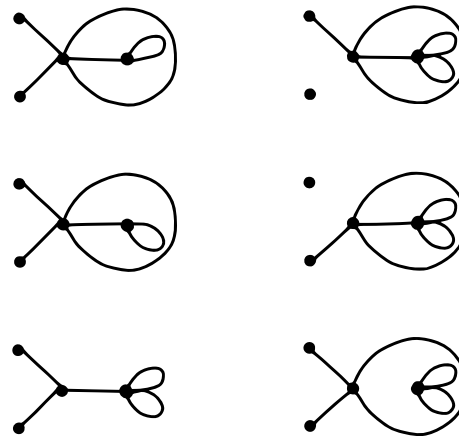


Рис. 21. Подграфы с пятью рёбрами (E)

Авторы благодарят Георгия Борисовича Шабата за привлечение внимания к статье [2]. Авторы выражают глубокую благодарность Дмитрию Васильеву, Георгию Борисовичу Шабату и Елене Крейнес за ценные обсуждения и замечания.

Работа Н. Я. Амбург финансировалась Российским научным фондом (грант 21-12-00400).

Литература

- [1] Филимоненков В. О., Шабат Г. Б. Поля определения рациональных функций одной переменной с тремя критическими значениями // *Фундамент. и прикл. матем.* — 1995. — Т. 1, вып. 3 — С. 781—799.
- [2] Manin Yu. I., Marcolli M. Quantum statistical mechanics of the absolute Galois group // *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* — 2020. — Vol. 16, no. 038.

