

# Пара Белого ориентирующего накрытия многообразия $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}}$

**Н. Я. АМБУРГ**

НИЦ «Курчатовский институт»,  
НИУ «Высшая школа экономики»,  
Институт проблем передачи информации  
e-mail: amburg@mcsme.ru

**Е. М. КРЕЙНЕС**

Тель-Авивский университет, Израиль,  
Университет им. Давида Бен-Гуриона в Негеве, Израиль  
e-mail: kreines@tauex.tau.ac.il

УДК 512.627.44

**Ключевые слова:** детские рисунки, функции Белого, кривая Бринга, пространство модулей вещественных алгебраических кривых.

## Аннотация

Обозначим через  $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}}$  компактификацию Делиня—Мамфорда пространства модулей вещественных алгебраических кривых рода 0 с пятью отмеченными точками, а через  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}})$  — его ориентирующее накрытие. Клеточное разбиение пространства  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}})$  является детским рисунком рода 4. В работе вычислена пара Белого этого рисунка. В частности, оказалось, что соответствующая кривая — это известная кривая Бринга.

## Abstract

*N. Ya. Amburg, E. M. Kreines, Belyi pair for the orientation cover of  $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}}$ , Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 2, pp. 79–101.*

Let  $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}}$  be the Deligne–Mumford compactification of the moduli space of genus 0 real algebraic curves with five marked points. By  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}})$  we denote its orientation cover. The cell decomposition of  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}})$  is a dessin d'enfant of genus 4. In this paper, we compute the Belyi pair for this dessin. In particular, it turns out that the corresponding curve is the celebrated Bring curve.

*Георгию Борисовичу Шабату с любовью, по случаю его 70-летия*

## 1. Введение

Пусть  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\mathbb{R}}$  обозначает компактификацию Делиня—Мамфорда пространства модулей вещественных алгебраических кривых рода 0 с  $n$  нумерованными отмеченными точками. Многообразию  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\mathbb{R}}$  описано, например, в [8, 10, 12]. В част-

ности, в [2, 6] вычислен первый класс Штифеля—Уитни пространства  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\mathbb{R}}$  и получено геометрическое описание двойственного к нему класса.

Существует естественное клеточное разбиение пространства  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\mathbb{R}}$ . Ориентирующее накрытие многообразия  $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}}$  является компактной гладкой ориентированной поверхностью рода 4, а значит, клеточное разбиение задаёт детский рисунок, т. е. связный вложенный граф со специальной структурой (см. определение 4.1). Теория детских рисунков была предложена Александром Гротендиком в [11] и активно развивалась впоследствии (см. монографию [15] и приведённые в ней ссылки). Детские рисунки естественным образом связаны с так называемыми парами Белого, т. е. непостоянными мероморфными функциями на алгебраических кривых, имеющими не более трёх критических значений (см. определение 4.2). Эта взаимосвязь порождает множество нетривиальных приложений в алгебре, геометрии, математической физике и т. д. Важной и сложной проблемой является точное вычисление конкретной пары Белого, соответствующей заданному детскому рисунку. Есть лишь небольшое количество вычисленных примеров, особенно для кривых положительного рода. В этой работе вычислена пара Белого детского рисунка рода 4, заданного естественным клеточным разбиением ориентирующего накрытия многообразия  $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}}$ .

Кривая Бринга известна с 1786 года (см. [5]) и широко изучалась позже (см. [18] и приведённые там ссылки). Изучая работу [18], авторы представленной заметки выяснили, что группа перестановок  $S_5$  действует на некотором детском рисунке рода 4, и заинтересовались, неужели существует два различных детских рисунка рода 4 с такой большой группой автоморфизмов? Нам удалось связать кривую Бринга с детским рисунком, полученным из естественного клеточного разбиения  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}})$ , и доказать, что этот рисунок является двойственным к  $I_4 \cup I_4^*$ , введённому в [18] (см. также определение 5.5 этого текста).

Работа организована следующим образом: раздел 2 содержит необходимые определения и общее описание клеточного разбиения многообразия  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\mathbb{R}}$ . В разделе 3 приведено подробное описание клеточного разбиения  $\mathcal{D}$  ориентирующего накрытия  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}})$  пространства  $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}}$ , которое включает число клеток, типы примыканий клеток и графическое изображение примыкания. Показано, что  $\mathcal{D}$  — детский рисунок, вычислены его род и комбинаторный тип. В разделе 4 вводится икосаэдр рода 4, обсуждаются его симметрии и функция Белого на кривой Бринга. Раздел 5 содержит окончательную формулу для функции Белого, соответствующей детскому рисунку, возникающему при рассмотрении клеточного разбиения ориентирующего накрытия  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}})$ .

## 2. Компактификация Делиня—Мамфорда пространства $\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}$

В этом и следующем разделах изложение в основном следует определениям и обозначениям из [2]. Для полноты изложения и удобства читателя здесь

представлено детальное описание хорошо известной конструкции клеточного разбиения пространства модулей вещественных кривых.

Пусть  $n \geq 3$ . Через  $\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}$  обозначено пространство модулей вещественных алгебраических кривых рода 0 с  $n$  нумерованными отмеченными точками, т. е. вещественное алгебраическое многообразие, параметризующее классы изоморфизма таких кривых.

### 2.1. Стабильные кривые

В соответствии с [10] вещественные стабильные кривые представлены в виде «кактусоподобных» структур, состоящих из окружностей с точками  $\{1, 2, \dots, n\}$  на них.

**Определение 2.1 [7].** *Стабильной кривой* рода 0 с  $n$  нумерованными отмеченными точками над полем вещественных чисел  $\mathbb{R}$  называется конечное объединение вещественных проективных прямых  $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_p$  с  $n$  различными отмеченными точками  $z_1, z_2, \dots, z_n \in C$ , если выполняются следующие условия.

1. Для каждой точки  $z_i$  существует единственная прямая  $C_j$ , такая что  $z_i \in C_j$ .
2. Для каждой пары прямых их пересечение  $C_i \cap C_j$  либо пусто, либо состоит из единственной точки, причём в последнем случае пересечение является трансверсальным.
3. Абстрактный граф объединения  $C$  (здесь прямые  $C_1, C_2, \dots, C_p$  — вершины графа и две вершины инцидентны одному ребру, если и только если соответствующие прямые пересекаются) является деревом.

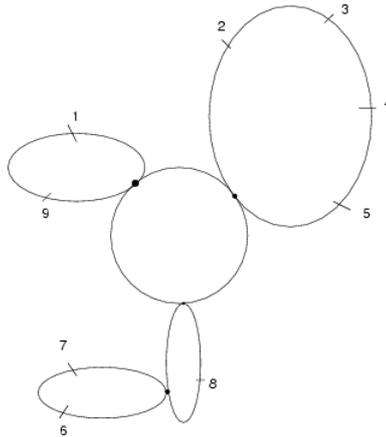


Рис. 1. Вещественная стабильная кривая рода 0 с девятью отмеченными точками

4. Общее число *специальных точек* (отмеченных точек или точек пересечения прямых), принадлежащих данной прямой  $C_j$ , не менее трёх для каждого  $j = 1, \dots, p$ .

Говорят, что  $p$  — *число компонент* стабильной кривой, соответственно  $C_j$  называют *компонентами*.

**Определение 2.2.** Пусть

$$C = (C_1, C_2, \dots, C_p, z_1, z_2, \dots, z_n), \quad C' = (C'_1, C'_2, \dots, C'_p, z'_1, z'_2, \dots, z'_n) —$$

вещественные стабильные кривые рода 0 с  $n$  нумерованными отмеченными точками. Кривые  $C$  и  $C'$  называются *эквивалентными*, если существует такой изоморфизм алгебраических кривых  $f: C \rightarrow C'$ , что  $f(z_i) = z'_i$  для всех  $i = 1, \dots, n$ .

## 2.2. Пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\mathbb{R}}$

**Определение 2.3.** Пусть  $n \geq 3$ . *Компактификацией Делиня—Мамфорда*  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\mathbb{R}}$  пространства модулей вещественных алгебраических кривых рода 0 с  $n$  нумерованными отмеченными точками называется множество классов эквивалентности вещественных стабильных кривых рода 0 с  $n$  нумерованными отмеченными точками.

**Теорема 2.1 [8].** Для всех  $n \geq 3$  множество  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\mathbb{R}}$  является вещественным компактным многообразием размерности  $\dim(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\mathbb{R}}) = n - 3$  и является замыканием многообразия  $\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}$ . При  $n > 4$  многообразие  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\mathbb{R}}$  неориентируемое.

## 2.3. Клеточное разбиение пространства $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\mathbb{R}}$

**Замечание 2.4.** На пространстве  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\mathbb{R}}$  задана естественная структура клеточного разбиения. Она описана, например, в [8, 12].

Следуя [8], обозначим через  $\mathcal{G}^L(n, k)$  множество  $n$ -угольников с метками  $1, 2, \dots, n$  на рёбрах, в которых проведены  $k$  непересекающихся диагоналей.

**Определение 2.5.** *Твистом*  $n$ -угольника  $M \in \mathcal{G}^L(n, k)$  вдоль диагонали  $d$  называется  $n$ -угольник  $M' \in \mathcal{G}^L(n, k)$ , полученный в результате следующей процедуры. Сперва  $M$  разрезается вдоль диагонали  $d$ . Затем одна (любая) из частей переворачивается вокруг оси, ортогональной диагонали  $d$  в плоскости  $n$ -угольника, на  $180^\circ$ . Затем обе части склеиваются по линии  $d$ .

**Замечание 2.6.** Пусть  $M'$  — твист  $M$  и метки  $1, 2, \dots, n$  на сторонах  $M$  расположены в порядке  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ . Будем считать также, что стороны, помеченные  $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ , отделены диагональю  $d$  от сторон, помеченных  $\zeta_{k+1}, \dots, \zeta_n$ . Тогда метки на сторонах  $M'$  располагаются в последовательности  $\zeta_1, \dots, \zeta_k, \zeta_n, \zeta_{n-1}, \dots, \zeta_{k+1}$ .

**Конструкция 2.7 (описание клеточного разбиения  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\mathbb{R}}$  [8, 12]).** Различные клетки пространства модулей  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\mathbb{R}}$  помечаются  $n$ -угольниками с маркированными сторонами и, возможно, несколькими непересекающимися диагоналями. Стороны этих  $n$ -угольников соответствуют отмеченным точкам на кривой и также маркированы символами  $1, \dots, n$ . Клетки максимальной размерности помечены  $n$ -угольниками без диагоналей. Клетки коразмерности 1 помечены  $n$ -угольниками с одной диагональю. Заметим, что эти клетки состоят в точности из стабильных кривых с двумя компонентами. Клетки коразмерности 2, т. е. состоящие из стабильных кривых с тремя компонентами, помечены  $n$ -угольниками с двумя диагоналями. В общем случае клетка коразмерности  $k$  помечена  $n$ -угольником  $M$  с  $k$  диагоналями. Эти диагонали разбивают  $M$  на  $k + 1$  многоугольник:  $M_1, \dots, M_{k+1}$ . Рёбра  $M_1, \dots, M_{k+1}$ , являющиеся рёбрами  $M$ , маркированы отмеченными точками стабильной кривой. Заметим, что условие 3 из определения 2.1 гарантирует, что различные диагонали не пересекаются вне вершин  $M$ . Условие 4 из определения 2.1 гарантирует, что у каждого из многоугольников  $M_1, \dots, M_{k+1}$  существует как минимум три стороны, т. е. это действительно многоугольники. Многоугольники  $M$  и  $M' \in \mathcal{G}^L(n, k)$  помечают одну клетку пространства модулей, если  $M'$  возможно получить из  $M$  серией твистов и действий группы диэдра  $n$ -угольника.

**Замечание 2.8.** Особая прелесть приведённой конструкции заключается в том, что отмеченные точки и особые точки (точки пересечения различных компонент кривой) не имеют принципиальных различий: и те и другие обозначены рёбрами многоугольника. Также каждая компонента или связное объединение компонент кривой обозначены некоторым многоугольником. Этот многоугольник маркирует клетку клеточного разбиения пространства модулей, возможно меньшей размерности.

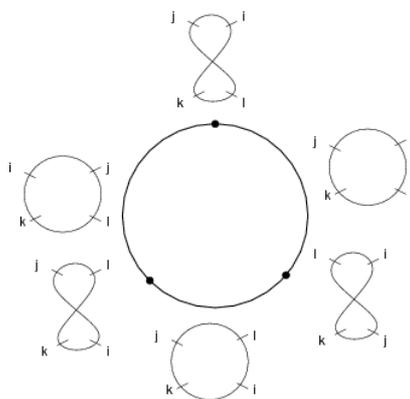


Рис. 2.  $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}^{\mathbb{R}}$

**Пример 2.9.** Клеточное разбиение пространства  $\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}}$  содержит  $(n-1)!/2$  клеток максимальной размерности  $n-3$ .

**Пример 2.10.** Многообразие  $\overline{\mathcal{M}_{0,4}^{\mathbb{R}}}$  представляет собой окружность, состоящую из трёх клеток размерности 1 и трёх клеток размерности 0. На рис. 2 изображено многообразие  $\overline{\mathcal{M}_{0,4}^{\mathbb{R}}}$ . Рядом с каждой клеткой расположен её «типичный» представитель, т. е. одна из стабильных кривых, из которых состоит данная клетка.

## 2.4. Ориентирующее накрытие многообразия $\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}}$

**Определение 2.11.** Пусть  $M$  — связное неориентируемое многообразие. *Ориентирующим накрытием*  $M$  называется такое двулистное накрытие  $\rho: \mathcal{L}(M) \rightarrow M$ , что многообразие  $\mathcal{L}(M)$  является связным и ориентируемым. Если  $\rho: \mathcal{L}(M) \rightarrow M$  — ориентирующее накрытие, то многообразие  $\mathcal{L}(M)$  также называют *ориентирующим накрытием*  $M$ .

Корректность этого определения и существование ориентирующего накрытия любого неориентируемого многообразия доказаны, например, в [14, предложение 2.2], единственность проверена в [14, предложение 2.1]. Если  $\rho: \mathcal{L}(M) \rightarrow M$  — ориентирующее накрытие, то существует изменяющая ориентацию на противоположную инволюция  $\pi: \mathcal{L}(M) \rightarrow \mathcal{L}(M)$ , которая переставляет слои и удовлетворяет соотношению  $\rho \circ \pi = \rho$ . Полное и детальное описание ориентирующего накрытия многообразия  $\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}}$  для всех  $n \geq 5$  представлено в [2; 9, теорема 6]. Здесь мы только отметим, что оно наследует клеточное разбиение, введённое в предыдущем разделе, и каждая клетка максимальной размерности многообразия  $\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}}$  покрывается двумя идентичными, но противоположным образом ориентированными клетками пространства  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}})$ .

Хорошо известно, что группа  $S_n$  точно и гладко действует на многообразии  $\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}}$  перестановкой отмеченных точек. Это действие естественным образом продолжается на ориентирующее накрытие  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}})$ .

**Лемма 2.12 [9, теорема 6].** Симметрическая группа  $S_n$  действует на ориентирующем накрытии  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}})$  перестановкой точек, и это действие является точным и гладким.

Для введённого выше действия характерно, что некоторые элементы группы  $S_n$  сохраняют ориентацию, тогда как некоторые меняют. Далее вводится другое действие группы  $S_n$  на многообразии  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}})$ , которое сохраняет ориентацию.

**Лемма 2.13.** Существует точное действие симметрической группы  $S_n$  на многообразии  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}})$ , при котором для любого элемента  $\sigma \in S_n$  индуцированное им отображение  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}}) \rightarrow \mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}})$  является диффеоморфизмом, сохраняющим ориентацию.

**Доказательство.** Пусть  $\sigma \in S_n$  и  $g_\sigma$  обозначает автоморфизм многообразия  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}})$ , заданный перестановкой  $\sigma$  по лемме 2.12. Тогда  $\pi \circ g_\sigma = g_\sigma \circ \pi$ , так как  $g_\sigma$  поднята с действия на  $\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}}$ . Следовательно, инволюция  $\pi$  не индуцирована действием группы  $S_n$  на многообразии  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}})$ . Тогда группа  $G = S_n \oplus \mathbb{Z}_2$  действует на  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}})$ . А именно, пара  $(\sigma, a) \in G$  действует как композиция  $g_\sigma \circ \pi^a$ , где  $a \in \{0, 1\}$ . Это действие является точным, и каждый элемент группы действует диффеоморфизмом, поскольку берётся композиция двух диффеоморфизмов.

Отображение  $\pi$  меняет ориентацию, а  $\pi^2 = e$  сохраняет ориентацию. Следовательно, отображение  $g_\sigma \rightarrow g_\sigma \circ \pi$  — биекция между подмножествами сохраняющих ориентацию и изменяющих ориентацию элементов группы  $G$ . Таким образом, ровно половина элементов группы  $G$  сохраняет ориентацию.

Рассмотрим подмножество  $G' \subset S_n \oplus \mathbb{Z}_2$ :

$$G' = \begin{cases} (\sigma, 0), & \text{если } g_\sigma \text{ сохраняет ориентацию,} \\ (\sigma, 1), & \text{если } g_\sigma \text{ не сохраняет ориентацию.} \end{cases}$$

Заметим, что для элементов  $(\sigma_1, a_1), (\sigma_2, a_2) \in G'$  справедливо  $(\sigma_1, a_1)(\sigma_2, a_2) = (\sigma_1\sigma_2, a_1 + a_2) \in G'$ . Действительно, если оба элемента  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  сохраняют или меняют ориентацию, то в обоих случаях их произведение  $\sigma_1\sigma_2$  сохраняет ориентацию и  $a_1 + a_2 \in \{0 + 0, 1 + 1\} = \{0\}$ . Если же только один из элементов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  сохраняет ориентацию, то произведение  $\sigma_1\sigma_2$  изменяет ориентацию и  $a_1 + a_2 = 0 + 1 = 1$ . Следовательно, подмножество  $G' \subset G$  является подгруппой и её индекс равняется 2. Соответствующий каждому элементу  $(\sigma, a) \in G'$  диффеоморфизм  $g_\sigma \circ \pi^a$  сохраняет ориентацию многообразия  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}})$ . Следовательно,  $G'$  действует на  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}})$  и сохраняет ориентацию. В заключение покажем, что  $G' \cong S_n$ . Определим отображение  $f: G' \rightarrow S_n$  формулой  $f(\sigma, a) = \sigma$ . Тогда  $f$  является биекцией и сохраняет групповую операцию по построению. Таким образом, определено сохраняющее ориентацию действие группы  $S_n$  на многообразии  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}})$ .  $\square$

**Замечание 2.14.** В дальнейшем под действием  $S_n$  на  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}})$  всегда подразумевается сохраняющее ориентацию действие, введённое в лемме 2.13.

### 3. Клеточное разбиение многообразий $\overline{\mathcal{M}_{0,5}^{\mathbb{R}}}$ и $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}_{0,5}^{\mathbb{R}}})$

#### 3.1. Клеточное разбиение $\overline{\mathcal{M}_{0,5}^{\mathbb{R}}}$

Согласно примеру 2.9 клеточное разбиение многообразия  $\overline{\mathcal{M}_{0,5}^{\mathbb{R}}}$  состоит из клеток максимальной размерности  $\dim(\overline{\mathcal{M}_{0,5}^{\mathbb{R}}}) = 5 - 3 = 2$ . На рис. 3 пред-

ставлена одна из этих клеток, а именно клетка, все кривые которой помечены точками 1, 2, 3, 4, 5 в приведённом порядке. Граница этой клетки состоит из клеток размерности 1 (стабильные кривые с одной особой точкой) и клеток размерности 0 (стабильные кривые с двумя особыми точками). Одномерные клетки изображены на рис. 3 рёбрами пятиугольника. Рядом с каждым ребром нарисован типичный представитель соответствующей клетки.

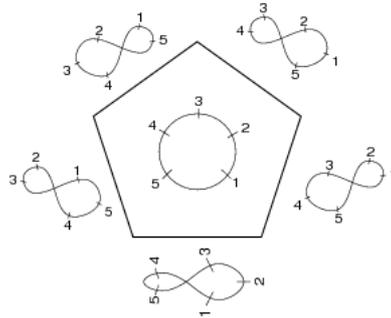


Рис. 3. Одна из двумерных клеток многообразия  $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}}$  с её границей

Есть пять вариантов разбивки упорядоченных точек (1, 2, 3, 4, 5) по двум компонентам, при которых получается стабильная кривая. Каждая двумерная клетка — пятиугольник. В соответствии с конструкцией 2.7 клетка на рис. 3 маркирована пятиугольником с рис. 4.

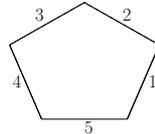


Рис. 4. Пятиугольник, маркирующий клетку, соответствующую порядку отмеченных точек (1, 2, 3, 4, 5)

Каждая из граничных клеток размерности 1 промаркирована одним из пятиугольников с одной диагональю, изображённых на рис. 5. Первый соответствует нижнему ребру клетки на рис. 3, следующие перечисляются в порядке, противоположном движению часовой стрелки.

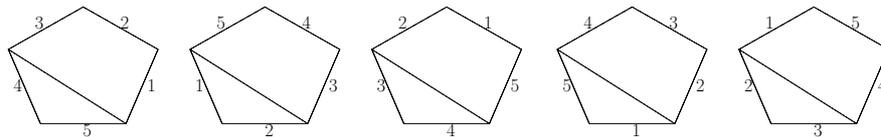


Рис. 5. Пятиугольники, маркирующие клетки границы

Пятиугольники, маркирующие двумерные клетки по другую сторону каждой одномерной клетки границы, изображены на рис. 6. Каждая двумерная клетка состоит из гладких кривых. Порядок отмеченных точек на каждой кривой внутри клетки задан порядком меток на рёбрах соответствующего пятиугольника.

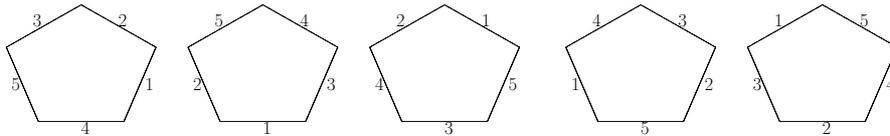


Рис. 6. Пятиугольники, маркирующие двумерные клетки, соседние с клеткой на рис. 4

Пара соседних клеток представлена на рис. 7. Верхняя клетка маркирована пятиугольником на рис. 4, а нижняя — первым пятиугольником на рис. 6. Граница между ними помечена первым из пятиугольников на рис. 5.

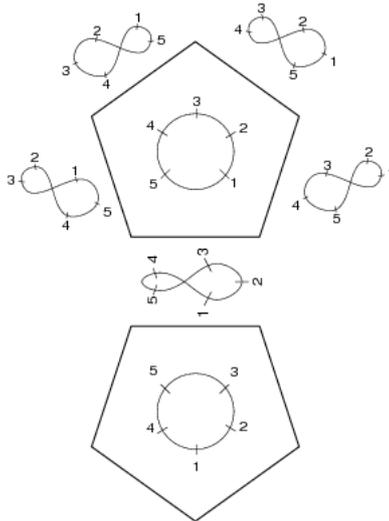


Рис. 7. Пара соседних клеток многообразия  $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}}$

**Лемма 3.1.** Клеточное разбиение многообразия  $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}}$  состоит из двенадцати клеток размерности 2, тридцати клеток размерности 1 и пятнадцати клеток размерности 0.

**Доказательство.** Число клеток размерности 2 равняется числу упорядочиваний набора 1, 2, 3, 4, 5, поделённому на порядок группы диэдра пятиугольника. Следовательно, получаем

$$\frac{5!}{5 \cdot 2} = 12.$$

Число клеток коразмерности 1 равняется

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} = 30,$$

так как требуется выбрать две точки на одной из компонент и одну точку из трёх оставшихся, которая расположена между двумя другими.

Клетки коразмерности 2 состоят из трёхкомпонентных стабильных кривых. Компонента, имеющая две общие точки с другими компонентами, содержит одну из отмеченных точек, и мы будем называть эту компоненту средней. Каждая из двух оставшихся компонент содержит две отмеченные точки. Число таких клеток равняется

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \binom{4}{2} = 15,$$

поскольку требуется выбрать одну из пяти точек на средней компоненте, затем две точки на одной из оставшихся компонент, а потом поделить на 2, поскольку эти две компоненты не различаются.

Склеив все клетки, получим разбиение многообразия  $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}}$  на пятиугольники, изображённое на рис. 8.  $\square$

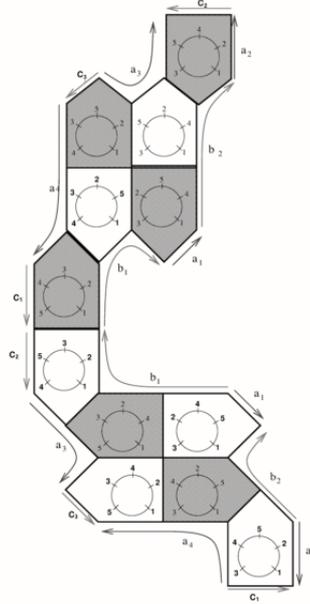


Рис. 8. Клеточное разбиение многообразия  $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}}$

**Замечание 3.2.** Многообразие  $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}}$  представлено на рис. 8 и 9. Склейка всех двенадцати клеток изображена на рис. 8. На рис. 9 представлена та же самая поверхность. Здесь все стороны, помеченные  $a_1, \dots, a_5$ , склеены, и стороны, помеченные  $b_1, b_2, b_3 = c_1 \cup c_2 \cup c_3$ , должны быть склеены так, как показывают стрелки.

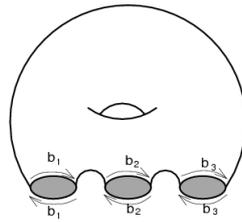


Рис. 9. Склейка  $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}}$

### 3.2. Клеточное разбиение $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}})$

Согласно [2, теорема 1.2, рис. 6] ориентирующее накрытие  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}})$ , введённое в определении 2.11, можно получить следующим образом. Каждая клетка

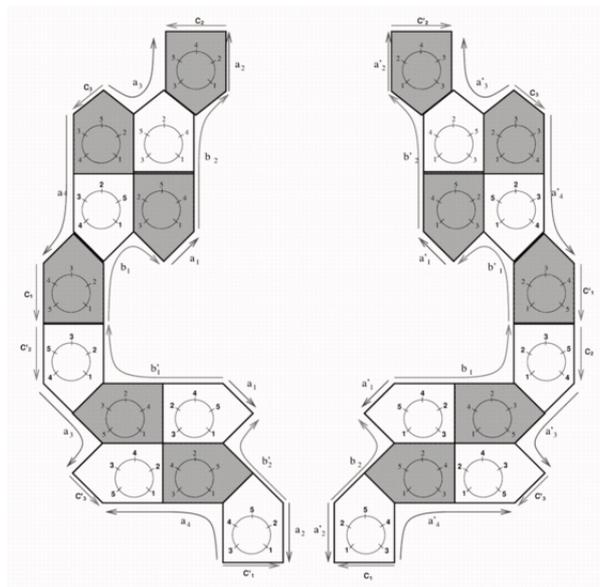


Рис. 10. Развёртка многообразия  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}})$

максимальной размерности, описанная конструкцией 2.7, удваивается с обеими возможными ориентациями. Затем все клетки склеиваются вместе таким образом, что если клетки  $C_1$  и  $C_2$  склеены в многообразии  $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}}$ , то  $C_1$  приклеивается или к  $C_2$ , или к её удвоению — клетке  $C'_2$  — таким образом, что ориентации клеток вдоль общего ребра согласованы. Соответственно,  $C'_1$  приклеивается или к  $C'_2$ , или к  $C_2$ . В силу [14, предложения 2.1 и 2.2] склейка всех 24 клеток представляет собой связную ориентируемую поверхность, которая является ориентирующим накрытием  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}})$  с зафиксированной ориентацией. Из формулы Эйлера следует, что род этой поверхности равняется 4, и её можно получить из фигуры, изображённой на рис. 9, разрезав её вдоль рёбер  $b_1, b_2, b_3$ , обозначив одно из двух получившихся рёбер  $b_i$  через  $b'_i$ , применив зеркальную симметрию к фигуре с краем  $b_1 \cup b'_1 \cup b_2 \cup b'_2 \cup b_3 \cup b'_3$  и склеив  $b_i$  на одной поверхности с краем  $b'_i$  на другой поверхности с краем,  $i = 1, 2, 3$ .

Склейка  $24 = 12 \cdot 2$  пятиугольников, образующая многообразие  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}})$ , представлена на рис. 10. Другой способ представления и визуализации этого многообразия можно увидеть в [9, рис. 13].

## 4. Детские рисунки и пары Белого

### 4.1. Основные определения и обозначения

**Определение 4.1.** *Детским рисунком* называется компактная связная гладкая ориентированная поверхность  $S$  вместе с двукрашенным графом  $\Gamma$ , вложенным в поверхность  $S$  таким образом, что дополнение  $S \setminus \Gamma$  гомеоморфно несвязному объединению открытых дисков.

**Определение 4.2.** Пусть  $\mathcal{X}$  — неприводимая гладкая алгебраическая кривая над  $\mathbb{C}$ . Функция  $\beta$ , определённая на  $\mathcal{X}$ , называется *функцией Белого*, если она определяет накрытие  $\beta: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , неразветвлённое над всеми точками множества  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ . Пара  $(\mathcal{X}, \beta)$  называется *парой Белого*.

Детские рисунки связаны с парами Белого следующим естественным образом. Поверхность  $S$  — это топологическая модель кривой  $\mathcal{X}$ . Графом на ней является полный прообраз  $\beta^{-1}([0, 1])$ . Здесь рёбра — это прообразы  $\{\beta^{-1}((0, 1))\}$ , белые вершины —  $\{\beta^{-1}(\{1\})\}$ , а чёрные вершины —  $\{\beta^{-1}(\{0\})\}$ . Известно, что если  $(\mathcal{X}, \beta)$  — пара Белого, то такая конструкция определяет детский рисунок. Также для каждого детского рисунка существует пара Белого, которая его задаёт. Более того, в [17] доказано, что для определённых естественным образом морфизмов категория пар Белого эквивалентна категории детских рисунков. Детальная и полная информация о соответствии между детскими рисунками и парами Белого, возникающем из этой эквивалентности, может быть почерпнута из [1, 3, 16, 17]. Здесь приводятся лишь несколько известных свойств, которые используются в дальнейшем.

**Замечание 4.3.** Пусть  $(S, \Gamma)$  — детский рисунок, а  $(\mathcal{X}, \beta)$  — его пара Белого.

1. Изменение цветов вершин  $\Gamma$  на противоположные соответствует следующему преобразованию пар Белого:  $(\mathcal{X}, \beta) \rightarrow (\mathcal{X}, 1 - \beta)$ .
2. Отображение  $(\mathcal{X}, \beta) \rightarrow (\mathcal{X}, 4\beta(1 - \beta))$  преобразует граф  $\Gamma$  в граф  $\Gamma'$ , вложенный в ту же самую поверхность  $S$ , причём чёрные вершины  $\Gamma'$  — это все вершины  $\Gamma$ , а все белые вершины  $\Gamma'$  имеют валентность 2 и расположены в серединах рёбер  $\Gamma$ .
3. Отображение  $(\mathcal{X}, \beta) \rightarrow (\mathcal{X}, 1/\beta)$  преобразует граф  $\Gamma$  в граф  $\Gamma''$ , вложенный в ту же самую поверхность  $S$ , причём белые вершины графов  $\Gamma''$  и  $\Gamma$  совпадают, а центры граней  $\Gamma$  — это чёрные вершины  $\Gamma''$  и наоборот. Рёбрами графа  $\Gamma''$  являются прообразы интервала  $(0, 1)$  относительно действия функции  $1/\beta$ , т. е. прообразы интервала  $(1, \infty)$  относительно действия функции  $\beta$ .

**Определение 4.4.** Детский рисунок называется *регулярным*, если его группа сохраняющих раскраску и ориентацию автоморфизмов транзитивно действует на множестве рёбер.

## 4.2. Детский рисунок многообразия $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}})$

**Лемма 4.5.** *Добавление белых вершин в серединах рёбер клеточного разбиения  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}})$  задаёт детский рисунок  $\mathcal{D}$  на поверхности рода 4. Грани рисунка  $\mathcal{D}$  — десятиугольники. У рисунка  $\mathcal{D}$  24 грани, 120 рёбер, 30 чёрных вершин валентности 4 и 60 белых вершин валентности 2.*

**Доказательство** следует из леммы 3.1 и определения 2.11. □

## 4.3. Двойственные детские рисунки

Понятие двойственного рисунка возникает при перестановке критических значений функции Белого. Соответственно, возникают шесть типов двойственности или, возможно, три типа двойственности и два типа «тройственности». Однако к настоящему времени хорошо изучен и обычно рассматривается только случай так называемых чистых пар Белого, у которых все ветвления над 1 имеют порядок 2. В этом случае под двойственным рисунком подразумевается прообраз отрезка  $[0, 1]$  относительно действия функции  $1/\beta$ . Полную и детальную информацию по этой теме можно найти в [4].

Далее понятие двойственности, введённое в [4], расширяется на общий случай дословно.

**Определение 4.6.** Пусть  $(X, \Gamma)$  — детский рисунок и  $(\mathcal{X}, \beta)$  — соответствующая пара Белого. Рисунок  $(X, \Gamma^*)$  называется *двойственным* к рисунку  $(X, \Gamma)$ , если граф  $\Gamma^*$  является прообразом отрезка  $[0, 1]$  относительно функции  $1/\beta: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .

**Замечание 4.7.** Детский рисунок  $(X, \Gamma^*)$  является двойственным к рисунку  $(X, \Gamma)$ , если  $(X, \Gamma^*)$  — такой детский рисунок, что множества белых вершин графов  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$  совпадают, множество чёрных вершин графа  $\Gamma^*$  совпадает с множеством центров граней графа  $\Gamma$ , а рёбра соединяют центры граней графа  $\Gamma$  со всеми белыми вершинами, инцидентными соответствующей грани.

**Определение 4.8.** Пусть  $(X, \Gamma)$  — детский рисунок,  $(X, \Gamma^*)$  — двойственный к нему рисунок. Объединение  $(X, \Gamma) \cup (X, \Gamma^*)$  образует детский рисунок на поверхности  $X$ , определённый следующим образом: белыми вершинами рисунка являются общие белые вершины графов  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$ , чёрными вершинами — объединение множества чёрных вершин графа  $\Gamma$  и множества чёрных вершин графа  $\Gamma^*$ , рёбрами — объединение множеств рёбер  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$ .

**Замечание 4.9.** Пусть  $(X, \Gamma)$  — детский рисунок,  $\beta$  — его функция Белого. Тогда функцией Белого объединения  $(X, \Gamma) \cup (X, \Gamma^*)$  является функция  $4\beta/(\beta + 1)^2$  на той же кривой, это может быть проверено непосредственно (см. также [18, пример 5.1]).

## 5. 4-икосаэдр и его свойства

В этом разделе изложение следует работе [18] А. К. Звонкина, где среди других результатов исследована пара Белого 4-икосаэдра.

### 5.1. Кривая Бринга

**Определение 5.1.** *Кривой Бринга* называется алгебраическая кривая в четырёхмерном комплексном проективном пространстве с координатами  $x_1 : \dots : x_5$ , заданная системой уравнений

$$V_5: \begin{cases} \sum_{i=1}^5 x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^5 x_i^3 = 0. \end{cases}$$

В 1786 году Эрланд Бринг, профессор истории из Лунда, придумал замену переменных, приводящую общее уравнение пятой степени к виду  $q(x) = x^5 + ax + b$ . Позднее, в 1884 году, Феликс Клейн [13] определил кривую Бринга и впервые исследовал её свойства. Множество из пяти корней уравнения  $q(x) = 0$  обычно задаёт 120 точек на кривой  $V_5$ , являющихся различными перестановками этих корней. При определённых значениях параметров  $a$  и  $b$  число точек может уменьшаться.

**Лемма 5.2 [18, пример 5.5, предложение 5.6].** Пусть  $x_1, \dots, x_5$  — корни уравнения  $x^5 + ax + b = 0$ . Тогда функция

$$f_{B_5}(x_1 : \dots : x_5) = \frac{256a^5}{256a^5 + 3125b^4}$$

является функцией Белого на кривой Бринга  $B_5$ . Степень функции  $f_{B_5}$  на кривой  $B_5$  равняется 120.

**Замечание 5.3.** По теореме Виета коэффициенты уравнения  $q(x) = 0$  являются элементарными симметрическими многочленами от корней  $x_1, \dots, x_5$  уравнения  $q(x) = 0$ . Поскольку  $q(x) = x^5 + ax + b$ , получается, что элементарные симметрические многочлены степеней 1, 2, 3 от  $x_1, \dots, x_5$  тождественно равны нулю. Следовательно, степенные суммы степеней 1, 2, 3 от  $x_1, \dots, x_5$  тоже нулевые. Поэтому  $(x_1 : \dots : x_5)$  удовлетворяют уравнению кривой Бринга  $B_5$ , т. е.  $(x_1 : \dots : x_5) \in B_5$ . Коэффициенты  $a$  и  $b$  — симметрические многочлены от переменных  $x_1, \dots, x_5$  степеней 4 и 5 соответственно. Поскольку  $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5)$  — проективная точка, пара  $(a, b)$  должна рассматриваться с точностью до эквивалентности  $(a, b) \sim (\lambda^4 a, \lambda^5 b)$  для всех  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Тогда выражение  $256a^5 / (256a^5 + 3125b^4)$  зависит только от точки  $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5)$  на кривой Бринга, т. е. оно является функцией на кривой  $B_5$ .

## 5.2. Иной икосаэдр

Для начала рассмотрим обычный икосаэдр. Это платоново тело, состоящее из двадцати треугольников. Каждая вершина икосаэдра инцидентна пяти различным треугольникам. У икосаэдра 30 рёбер и 12 вершин. Этот объект задаёт регулярный детский рисунок на сфере, получающийся при добавлении белой вершины валентности 2 в середину каждого ребра. Таким образом, получается регулярный детский рисунок рода 0 с 30 белыми вершинами, 12 чёрными вершинами, которые являются вершинами икосаэдра, 60 рёбрами и 20 гранями.

Поскольку граф икосаэдра является вложенным в ориентированную поверхность, определён циклический порядок рёбер в каждой вершине. В частности, на пяти рёбрах, инцидентных данной вершине, может быть задано отношение «быть следующим». Введём специальные обозначения рёбер в чёрных вершинах для удобства дальнейшего описания.

**Определение 5.4.** Для каждой чёрной вершины  $v$  обозначим рёбра, инцидентные  $v$ , через  $(e_1^v, e_2^v, e_3^v, e_4^v, e_5^v)$ , начав с любого фиксированного ребра и двигаясь против часовой стрелки.

Зафиксируем введённые обозначения. Каждое ребро получает ровно одно обозначение, поскольку имеет одну чёрную вершину и одну белую вершину.

Теперь рассмотрим граф икосаэдра как абстрактный граф. Задание циклического порядка рёбер в каждой вершине определяет вложение любого абстрактного графа в некоторую поверхность. Эта процедура превращает граф в детский рисунок (см. [15, раздел 1.3.3]). Ниже определяется регулярный детский рису-

нок положительного рода, полученный из графа икосаэдра (см. [15, упражнение 1.3.13]).

**Определение 5.5.** Рассмотрим регулярный детский рисунок, полученный из графа икосаэдра при фиксации циклически упорядоченной последовательности рёбер  $(e_1^v, e_3^v, e_5^v, e_2^v, e_4^v)$  в каждой чёрной вершине  $v$ . Следуя [18], обозначим этот рисунок  $I_4$  и назовём его 4-икосаэдр.

Каждая грань этого рисунка — пятиугольник. В каждой заданной вершине  $v$  этот пятиугольник можно увидеть, рассмотрев сечение исходного платонова тела плоскостью, проходящей через пару рёбер из множества  $\{(e_1^v, e_3^v), (e_2^v, e_4^v), (e_3^v, e_5^v), (e_4^v, e_1^v), (e_5^v, e_2^v)\}$ . Таким образом, в каждой вершине  $v$  пересекается пять граней.

**Замечание 5.6.** Если  $\sigma$  — перестановка, задающая циклический порядок рёбер в чёрных вершинах обычного икосаэдра, то икосаэдр  $I_4$  определяется перестановкой  $\sigma^2$ .

Заметим, что валентность любой белой вершины равняется 2 по построению, поэтому изменить порядок следования рёбер в белых вершинах невозможно.

Для введённого рисунка  $I_4$  справедливо следующее утверждение.

**Лемма 5.7 [18, пример 2.9].** Рисунок  $I_4$  является регулярным детским рисунком на поверхности рода 4. У детского рисунка  $I_4$  12 чёрных вершин валентности 5, 30 белых вершин валентности 2, 60 рёбер и 12 граней валентности 5. Его группой автоморфизмов является группа  $A_5$ .

Рисунок 11 представляет развёртку  $I_4$ . Здесь одинаковыми символами обозначены рёбра, которые надо склеить, чтобы получить исходную поверхность. Отметим, что некоторые автоморфизмы рисунка легко увидеть на этой развёртке. В частности, вращение отдельных частей в противоположных направлениях на угол  $2\pi/5$  является автоморфизмом. Заметим также, что отображение  $p_i \leftrightarrow q_i$

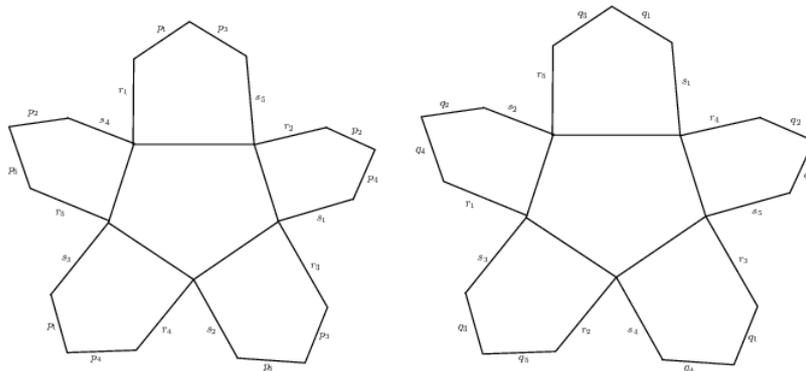


Рис. 11. Развёртка детского рисунка  $I_4$

и  $s_i \leftrightarrow r_i, i = 1, \dots, 5$ , является зеркальной симметрией (не автоморфизмом) рисунка.

Красивые изображения детского рисунка  $I_4$ , включая мозаику на полу собора Святого Марка в Венеции, приписываемую Паоло Уччелло (около 1430 г.), можно найти в [18, с. 338 и 368].

Обозначим через  $I_4^*$  двойственный детский рисунок к рисунку  $I_4$ .

**Лемма 5.8 [18, пример 5.5].** *Детские рисунки  $I_4$  и  $I_4^*$  изоморфны.*

Рассмотрим объединение  $I_4 \cup I_4^*$  как детский рисунок, описанный в определении 4.8. У этого рисунка 24 чёрные вершины валентности 5, 30 белых вершин валентности 4 и 60 граней, каждая из которых представляет собой четырёхугольник.

**Теорема 5.1 [18, предложение 5.6].**

1. Группой автоморфизмов рисунка  $I_4 \cup I_4^*$  является симметрическая группа  $S_5$ .
2. Парой Белого, соответствующей рисунку  $I_4 \cup I_4^*$ , является пара  $(B_5, f_{B_5})$ .

## 6. Пара Белого клеточного разбиения многообразия $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}})$

**Определение 6.1.** Обозначим через  $\mathcal{J}$  детский рисунок, полученный из рисунка  $(I_4 \cup I_4^*)^*$  перекрашиванием белых и чёрных вершин.

**Лемма 6.2.** *Парой Белого рисунка  $\mathcal{J}$  является пара  $(B_5, 1 - 1/f_{B_5})$ .*

**Доказательство.** Заметим, что преобразование  $\rho: x \rightarrow 1 - 1/x$  отображает интервал  $[1, \infty)$  в отрезок  $[0, 1]$ , перемещая 1 в 0 и  $\infty$  в 1. Остальное следует из определения рисунка  $\mathcal{J}$ .  $\square$

Следующая лемма описывает структуру детского рисунка  $\mathcal{J}$ .

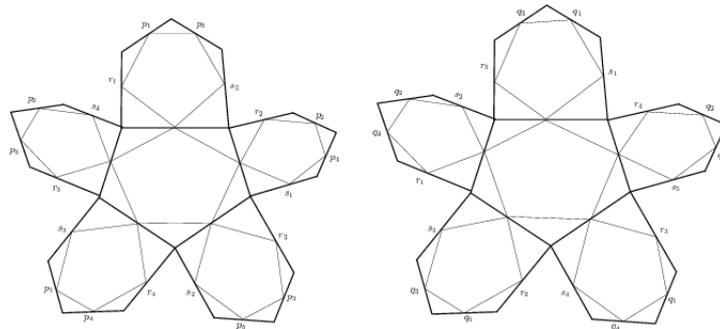


Рис. 12. Развёртка рисунков  $I_4$  (тёмные линии) и  $\mathcal{J}$  (светлые линии) из определения 6.1

**Лемма 6.3.**

1. Валентность всех белых вершин рисунка  $\mathcal{J}$  равна 2.
2. Детский рисунок  $\mathcal{J}$  без белых вершин изображён светлыми линиями на рис. 12. Он вложен в поверхность, получаемую из фигуры, нарисованной тёмными линиями, при склеивании сторон, помеченных одинаковыми символами.
3. Границами рисунка  $\mathcal{J}$  являются 24 двукрашенных десятиугольника.

**Доказательство.** Начнём с грани рисунка  $I_4$  и преобразуем её геометрически.

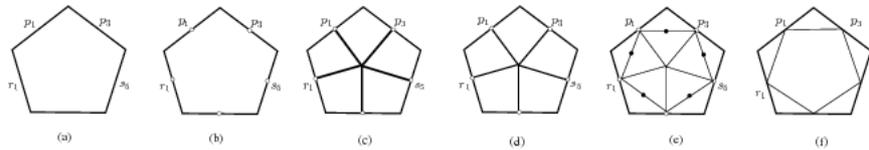


Рис. 13. Переход от грани  $I_4$  к грани  $\mathcal{J}$

Далее будем рассматривать один из пятиугольников, изображённых на рис. 11 (рис. 13 (a)). Добавим белые вершины в середины рёбер, чтобы получить рисунок 13 (b), и нарисуем двойственный детский рисунок  $I_4^*$  более тёмными линиями (рис. 13 (c)). На рис. 13 (d) изображено объединение пятиугольника и части двойственного рисунка, расположенной внутри этого пятиугольника, как единый двукрашенный детский рисунок. Рисунок 13 (e) представляет двойственный детский рисунок к детскому рисунку, изображённому на рис. 13 (d). Здесь двойственный детский рисунок изображён светлыми линиями. Заметим, что валентность всех чёрных вершин двойственного детского рисунка на рис. 13 (d) равняется 2, поскольку соответствующие грани исходного детского рисунка — четырёхугольники. Поэтому далее вершины валентности 2 двойственного детского рисунка, изображённого на рис. 13 (d), можно опустить, и они будут опущены. Изменяя цвета вершин и стирая рёбра рисунка  $I_4^*$ , чтобы не загромождать картинку, получаем рисунок 13 (f). Повторяя этот процесс для каждой грани детского рисунка  $I_4$ , получаем фигуру на рис. 12, т. е. детский рисунок  $\mathcal{J}$ .  $\square$

Основная цель этого раздела — показать, что детский рисунок  $\mathcal{J}$  изоморфен детскому рисунку  $\mathcal{D}$ , изображённому на рис. 10. Для этого используется серия лемм, в которых пошагово показано, как надо разрезать и склеить развёртку рисунка  $J$ , чтобы получить требуемую фигуру.

**Лемма 6.4.** На рис. 17 изображена развёртка детского рисунка  $\mathcal{J}$ .

**Доказательство.** Покажем, как мы отрезаем и склеиваем части фигур на рис. 12, чтобы получить изображение на рис. 17. От каждого из десяти наружных пятиугольников на рис. 14 отрезаются три заштрихованных треугольника.

Отрезанные треугольники склеиваются по линиям, маркированным одинаковыми символами. Новые разрезы обозначены символами  $x_i, y_i, u_i, v_i, z_i, t_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , как это изображено на рис. 14. Отметим зеркальную симметрию:  $x_i \leftrightarrow y_i, v_i \leftrightarrow z_i$  и  $u_i \leftrightarrow t_i$ .

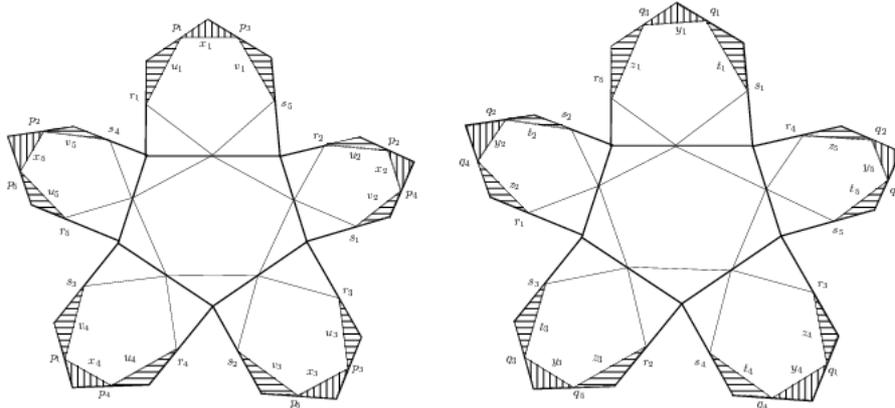


Рис. 14. Треугольники, отрезаемые от  $\mathcal{J}$

Затем треугольники с горизонтальной штриховкой с левой стороны рис. 14 приклеиваются к фигуре на правой стороне и становятся горизонтально заштрихованными пиками на правой стороне рис. 15 и наоборот для треугольников с горизонтальной штриховкой с правой стороны рис. 14. Вертикально заштрихованные треугольники после склейки становятся пятиугольниками на рис. 16.

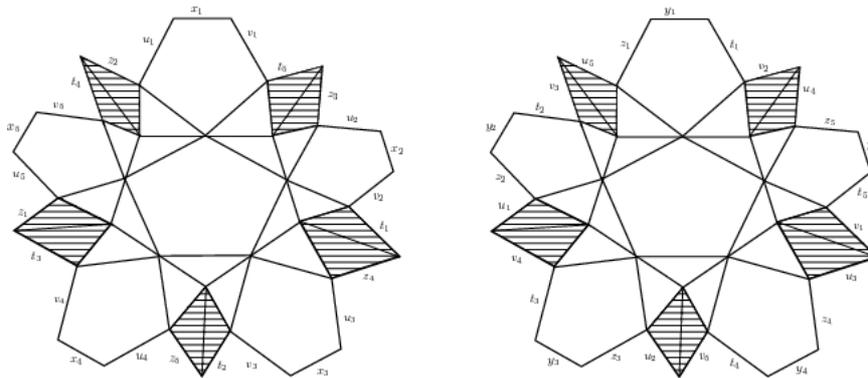


Рис. 15. Приклеивание горизонтально заштрихованных частей  $\mathcal{J}$

В частности, треугольник, помеченный  $r_1, p_1, u_1$  на левой стороне рис. 14, становится верхней половиной заштрихованного пика на правой стороне рис. 15,

помеченного символами  $u_1$  и  $v_4$ . Нижняя половина этого пика берётся из треугольников, помеченных символами  $p_1, s_3, v_4$  на левой стороне рис. 14. Части пика склеены по ребру, помеченному  $p_1$ .

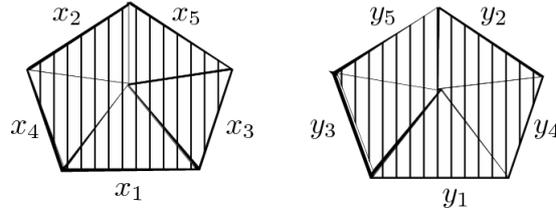


Рис. 16. Приклеивание вертикально заштрихованных частей  $\mathcal{J}$

Треугольники с вертикальной штриховкой с левой стороны рис. 14 отрезаются вдоль рёбер, обозначенных  $x_i, i = 1, \dots, 5$ , и склеиваются вдоль рёбер, обозначенных  $p_i, i = 1, \dots, 5$ , составляя левый пятиугольник на рис. 16. Аналогично при отрезании треугольников с вертикальной штриховкой от фигуры на правой стороне рис. 14 вдоль рёбер, обозначенных  $y_i, i = 1, \dots, 5$ , и склеивании их друг с другом вдоль рёбер, обозначенных  $q_i, i = 1, \dots, 5$ , получается пятиугольник в правой части рис. 16.

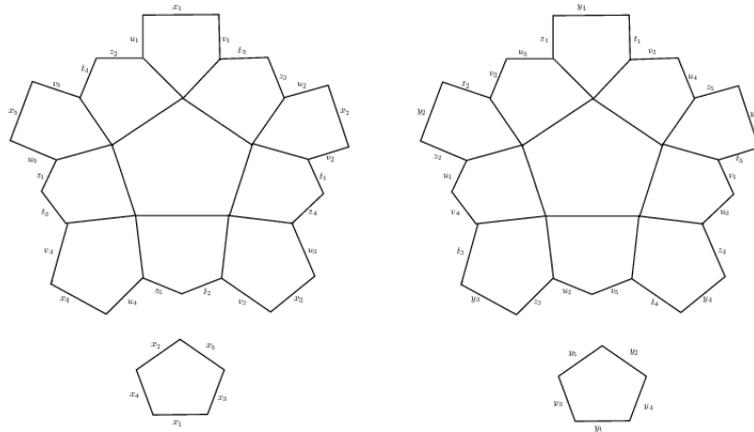


Рис. 17. Детский рисунок  $\mathcal{J}$

Новая фигура, полученная при разрезании вдоль рёбер, обозначенных  $x_i, y_i, u_i, v_i, z_i, t_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ , и склеивании вдоль рёбер, обозначенных  $p_j, q_j, r_j, s_j, j = 1, 2, 3, 4, 5$ , фигуры на рис. 11, изображена на рис. 17. Таким образом, это другая склейка детского рисунка  $\mathcal{J}$ . Рёбра детского рисунка  $I_4$  на ней больше не отображены.  $\square$

**Лемма 6.5.** *Детские рисунки  $\mathcal{J}$  и  $\mathcal{D}$  изоморфны.*

**Доказательство.** На рис. 17 изображена развёртка детского рисунка  $\mathcal{J}$ . Одинаковые символы обозначают склеиваемые стороны. Склеивая две стороны, обозначенные  $x_1$ , и две стороны, обозначенные  $y_1$ , получаем рисунок 18.

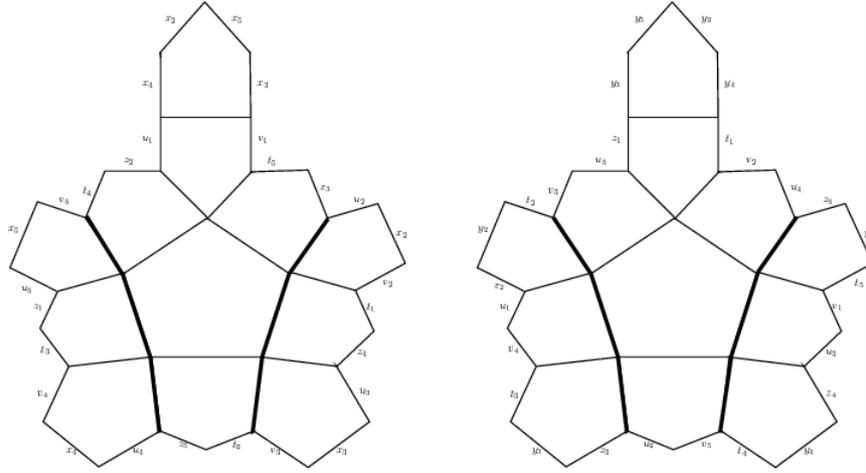


Рис. 18. Другая склейка детского рисунка  $\mathcal{J}$  с проведёнными линиями разреза

Многоугольники на рис. 18 разрезаются по тёмным линиям. Затем склеиваются друг с другом стороны, отмеченные символами  $x_5$ , стороны, отмеченные символами  $t_3$ , и стороны, отмеченные символами  $v_4$ . В результате получается верхний многоугольник на рис. 10. Склеивая друг с другом стороны, отмеченные символами  $y_5$ , стороны, отмеченные символами  $u_3$ , и стороны, отмеченные символами  $z_4$ , получаем нижний многоугольник на рис. 10.  $\square$

**Лемма 6.6.** *Детский рисунок  $\mathcal{D}$ , соответствующий ориентирующему накрытию пространства модулей  $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}}$ , является прообразом отрезка  $[1, \infty)$  относительно отображения  $f_{B_5}: B_5 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Прообразы точки  $\infty$  являются серединами рёбер рисунка.*

**Доказательство.** По лемме 6.5 детский рисунок  $\mathcal{J}$  изоморфен детскому рисунку  $\mathcal{D}$ . По определению рисунок  $\mathcal{J}$  получен из двойственного рисунка  $(I_4 \cup I_4^*)^*$  сменой цветов вершин и «забыванием» вершин валентности 2. Лемма 6.2 завершает доказательство.  $\square$

**Теорема 6.7.** *Парой Белого детского рисунка  $\mathcal{D}$ , возникшего из клеточного разбиения многообразия  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^{\mathbb{R}})$ , является пара*

$$\left( B_5, 1 - \frac{1}{f_{B_5}} \right) = \left( B_5, \frac{3125 \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} \right)^4}{256 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \right).$$

**Доказательство.** Этот результат — непосредственное следствие леммы 6.2, применённой к результату леммы 6.6.  $\square$

**Следствие 6.8.** Существует действие симметрической группы  $S_5$  на рисунке  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{0,5}^{\mathbb{R}})$ , при котором каждый элемент  $S_5$  действует как сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, уважающий клеточное разбиение.

**Доказательство.** Это утверждение является частным случаем леммы 2.13. Приведём также независимое доказательство, которое следует из теории Белого и справедливо только в случае  $n = 5$ .

Перестановка координат  $(x_1 : \dots : x_5)$  является голоморфным автоморфизмом кривой Бринга  $V_5$ . Следовательно, группа  $S_5$  действует на кривой  $V_5$  диффеоморфизмами, сохраняющими ориентацию. Непосредственно проверяется, что эти диффеоморфизмы сохраняют также функцию Белого. Следовательно, элементы группы  $S_5$  действуют на пару Белого и, следовательно, на рисунок  $\mathcal{D}$ , который является  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{0,5}^{\mathbb{R}})$ .  $\square$

**Следствие 6.9.** Симметрическая группа  $S_5$  действует транзитивно на рисунок  $\mathcal{D}$ , и рисунок  $\mathcal{D}$  является регулярным.

**Доказательство.** Утверждение следует из того, что рисунок  $\mathcal{J}$  является регулярным по лемме 6.5.  $\square$

Авторы выражают глубокую благодарность С. М. Натанзону, Г. Б. Шабату и А. К. Звонкину за ценные замечания и мотивирующие обсуждения, а также Грише Гутерману за помощь с рисованием картинок.

Работа Н. Я. Амбург финансировалась Российским научным фондом (грант 21-12-00400). Работа Е. М. Крейнес выполнена при финансовой поддержке гранта ISF 1092/22.

## Литература

- [1] Амбург Н. Я. Симметрии графов на поверхностях и алгебраические кривые: Дис... канд. физ.-мат. наук. — М., 2007.
- [2] Амбург Н. Я., Крейнес Е. М. Вычисление первого класса Штифеля—Уитни многообразия  $\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}$  // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 6. — С. 51—75.
- [3] Амбург Н. Я., Крейнес Е. М., Шабат Г. Б. Паразитические решения систем уравнений, определяющие функции Белого плоских деревьев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2004. — № 1. — С. 20—25.
- [4] Гурвич В. А., Шабат Г. Б. Карты поверхностей и их схемы // ДАН СССР. — 1989. — Т. 305, № 6 — С. 390—394.
- [5] Bring E. S. Meletemata quaedam mathematica circa transformationem aequationum algebraicarum. — Lund, 1786.
- [6] Seyhan O. On moduli of pointed real curves of genus zero. — 2007. — arXiv:math.AG/0207058.v5.

- [7] Deligne P., Mumford D. The irreducibility of the space of curves of given genus // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. — 1969. — Vol. 36. — P. 75–109.
- [8] Devadoss S. Tessellations of moduli spaces and the mosaic operad // Contemp. Math. — 1999. — Vol. 239. — P. 91–114.
- [9] Devadoss S., Morava J. Navigation in tree spaces // Adv. Appl. Math. — 2015. — Vol. 67. — P. 75–95.
- [10] Etingof P., Henriques A., Kamnitzer J., Rains E. The cohomology ring of the real locus of the moduli space of stable curves of genus 0 with marked points // Ann. Math. — 2010. — Vol. 171, no. 2. — P. 731–777.
- [11] Grothendieck A. Esquisse d'un Programme // Geometric Galois Actions 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme / P. Lochak, L. Schneps, eds. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 242). — P. 5–48.
- [12] Kapranov M. The permuto-associahedron, MacLane coherence theorem and the asymptotic zones for the KZ equation // J. Pure Appl. Algebra. — 1993. — Vol. 85. — P. 119–142.
- [13] Klein F. Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. — Leipzig: Teubner, 1884.
- [14] Kreck M. Orientation covering — definition // Bulletin of the Manifold Atlas. — 2014. — <http://www.boma.mpim-bonn.mpg.de/data/54screen.pdf>.
- [15] Lando S. K., Zvonkin A. K. Graphs on surfaces and their application. — Berlin: Springer, 2004.
- [16] Shabat G. Calculating and drawing Belyi pairs // Zap. Nauchn. Sem. POMI. — 2016. — Vol. 446. — P. 182–220.
- [17] Shabat G. B., Voevodsky V. A. Drawing curves over number fields // The Grothendieck Festschrift. Vol. III. — Birkhäuser, 1990. — P. 199–227.
- [18] Zvonkin A. K. Functional composition is a generalized symmetry // Symmetry: Culture Sci. — 2010. — Vol. 21, no. 1-4. — P. 333–368.

