Раскрашивание вершин цепочки и пропеллера в три цвета

Ю. Ю. КОЧЕТКОВ
Московский институт электроники
и математики им. А. Н. Тихонова
Высшей школы экономики
e-mail: yukochetkov@hse.ru, yuyukochetkov@gmail.com

УДК 519.17

Ключевые слова: граф, хроматическое число.

Аннотация

Цепочка — это дерево, все вершины которого, кроме двух вершин степени 1, имеют степень 2. Пропеллер — это дерево, у которого есть одна вершина степени 3, три вершины степени 1, а остальные вершины имеют степень 2. Правильный пропеллер — это пропеллер, у которого вершины степени 1 равноудалены от вершины степени 3. В работе решается следующая задача: найти число способов раскрасить вершины цепочки или правильного пропеллера в три цвета, если задано число вершин каждого цвета.

Abstract

Yu. Yu. Kochetkov, On 3-coloring of chains and propellers, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 2, pp. 177—181.

A chain is a tree where two vertices have degree 1 and all others have degree 2. A propeller is a tree that has one vertex of degree 3, three vertices of degree 1, and all other vertices have degree 2. A proper propeller is a propeller, where vertices of degree one are at equal distances from the vertex of degree 3. We study the following problem: how to find the number of 3-colorings of a chain and a proper propeller in the case where the numbers of vertices of each color are given? In both cases, generating functions are presented.

1. Введение

В данной работе рассматривается своего рода «пропущенная задача» о раскраске вершин графа.

Когда мы говорим о раскраске вершин графа, то мы имеем в виду *правильную* раскраску, т. е. такую, когда смежные вершины имеют разный цвет. Задачу о числе правильных раскрасок вершин графа решает хроматический многочлен (см. [1,2]). Однако хроматический многочлен не учитывает число вершин каждого цвета. Так, вычисления с помощью хроматического многочлена дают, что

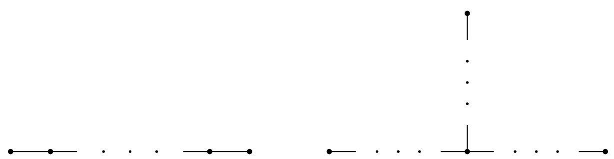
Фундаментальная и прикладная математика, 2024, том 25, № 2, с. 177—181.

имеется двенадцать способов раскрасить вершины 3-цепочки

в три цвета: шесть способов, когда имеется по одной вершине каждого цвета, и шесть способов, когда имеется две вершины одного цвета и одна вершина другого.

Нас будет интересовать задача нахождения числа правильных раскрасок вершин графа при условии, что задано число вершин каждого цвета.

Удовлетворительный (т. е. достаточно компактный) ответ удаётся получить для 3-раскрашивания вершин цепочки и правильного пропеллера. Цепочка — это дерево, у которого все вершины, кроме двух концевых, имеют степень 2, а пропеллер — это дерево, у которого три вершины имеют степень 1, одна вершина — степень 3, а остальные имеют степень 2.



цепочка пропеллер

Пропеллер мы назовём *правильным*, если концевые вершины находятся на равном расстоянии от вершины степени 3.

Задача формулируется так: найти число 3-раскрашиваний вершин цепочки и вершин правильного пропеллера при условии, что задано число вершин каждого цвета.

2. Цепочка

Сначала обсудим задачу о 3-раскрашивании цепочки в красный, синий и зелёный цвета. Мы будем следить за цветом самой правой вершины (когда идёт речь об 1-цепочке, то самая правая вершина одновременно является и самой левой).

Пусть $p(k,l,m)$ — число способов раскрасить n-цепочку, $n=k+l+m$, так, чтобы было k красных вершин, l синих и m зелёных, причём правая вершина красная. Число $q(k,l,m)$ (число $r(k,l,m)$) определяется аналогично, но правая вершина здесь синяя (зелёная). Имеем

$$
\begin{aligned}
p(k,l,m) &= q(k-1,l,m) + r(k-1,l,m),\\
q(k,l,m) &= p(k,l-1,m) + r(k,l-1,m),\\
r(k,l,m) &= p(k,l,m-1) + q(k,l,m-1).
\end{aligned}
$$

Пусть

$$P(x,y,z) = \sum_{k+l+m>0} p(k,l,m)x^k y^l z^m,$$
$$Q(x,y,z) = \sum_{k+l+m>0} q(k,l,m)x^k y^l z^m,$$
$$R(x,y,z) = \sum_{k+l+m>0} r(k,l,m)x^k y^l z^m\ —$$

производящие ряды. Тогда

$$\begin{cases} P = x\cdot(Q+R)+x, \\ Q = y\cdot(P+R)+y, \\ R = z\cdot(P+Q)+z. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно неизвестных P, Q, R, получаем

$$P = \frac{x+xy+xz+xyz}{1-xy-xz-yz-2xyz},$$
$$Q = \frac{y+xy+yz+xyz}{1-xy-xz-yz-2xyz},$$
$$R = \frac{z+xz+yz+xyz}{1-xy-xz-yz-2xyz}.$$

Таким образом,

$$P+Q+R = \frac{x+y+z+2xy+2xz+2yz+3xyz}{1-xy-xz-yz-2xyz} = \frac{\sigma_1+2\sigma_2+3\sigma_3}{1-\sigma_2-2\sigma_3},$$

где $\sigma_1 = x+y+z$, $\sigma_2 = xy+xz+yz$, $\sigma_3 = xyz$ — элементарные симметрические многочлены. Производящий ряд F числа раскрасок цепочки выглядит так:

$$F = \sigma_1+2\sigma_2+3\sigma_3+(\sigma_1+2\sigma_2+3\sigma_3)\cdot(\sigma_2+2\sigma_3)+ \\ +(\sigma_1+2\sigma_2+3\sigma_3)\cdot(\sigma_2+2\sigma_3)^2+\ldots. \quad (1)$$

Пример. Найдём число таких раскрасок 9-цепочки, чтобы три вершины были красные, три — синие и три — зелёные. Для этого в (1) нужно найти коэффициент при $x^3y^3z^3$, т. е. найти коэффициент при $x^3y^3z^3$ в разложении

$$\sigma_1\cdot\sigma_2^4+3\sigma_3\cdot\sigma_2^3+12\sigma_2\cdot\sigma_2^2\sigma_3+12\sigma_1\cdot\sigma_2\sigma_3^2+12\sigma_3\cdot\sigma_3^2.$$

Нетрудно вычислить, что этот коэффициент равен 174.

3. Правильный пропеллер

Размером правильного пропеллера назовём расстояние от концевых вершин до центра. Упорядочим концевые вершины, т. е. припишем им номера 1, 2 и 3.

Занумеруем цвета: первый — красный, второй — синий, третий — зелёный. *Конфигурация* (i,j,k) некоторой раскраски пропеллера — это список цветов концевых вершин. Так, если конфигурация раскраски равна $(2,1,2)$, то это означает, что первая концевая вершина синяя, вторая красная, третья синяя.

Пусть n — размер правильного пропеллера. Через $p_{(i,j,k)}(q,r,s)$ мы будем обозначать число таких раскрасок конфигурации (i,j,k), что имеется q красных вершин, r синих и s зелёных, $q+r+s=3n$.

Замечание. Мы не учитываем цвет центральной вершины. Он должен только отличаться от цвета смежных с ней вершин.

Имеется 27 соотношений, которые связывают числа $p_{i,j,k)}(q,r,s)$, $q+r+s=3n$, с числами $p_{(i',j',k')}(q',r',s')$, $q'+r'+s'=3n-3$. Выпишем три из них:

$$\begin{aligned}
&p_{(1,1,1)}(q,r,s)=p_{(2,2,2)}(q-3,r,s)+p_{(2,2,3)}(q-3,r,s)+\\
&\quad+p_{(2,3,2)}(q-3,r,s)+p_{(2,3,3)}(q-3,r,s)+p_{(3,2,2)}(q-3,r,s)+\\
&\quad+p_{(3,2,3)}(q-3,r,s)+p_{(3,3,2)}(q-3,r,s)+p_{(3,3,3)}(q-3,r,s),\\
&p_{(1,1,2)}(p,q,r)=p_{(2,2,1)}(q-2,r-1,s)+p_{(2,2,3)}(q-2,r-1,s)+\\
&\quad+p_{(2,3,1)}(q-2,r-1,s)+p_{(2,3,3)}(q-2,r-1,s)+p_{(3,2,1)}(q-2,r-1,s)+\\
&\quad+p_{(3,2,3)}(q-2,r-1,s)+p_{(3,3,1)}(q-2,r-1,s)+p_{(3,3,3)}(q-2,r-1,s),\\
&p_{(1,2,3)}(q,r,s)=p_{(2,1,1)}(q-1,r-1,s-1)+p_{(2,1,2)}(q-1,r-1,s-1)+\\
&\quad+p_{(2,3,1)}(q-1,r-1,s-1)+p_{(2,3,2)}(q-1,r-1,s-1)+\\
&\quad+p_{(3,1,1)}(q-1,r-1,s-1)+p_{(3,1,2)}(q-1,r-1,s-1)+\\
&\quad+p_{(3,3,1)}(q-1,r-1,s-1)+p_{(3,3,2)}(q-1,r-1,s-1).
\end{aligned}$$

Замечание. Нужно иметь в виду, что

$$\begin{aligned}
&p_{(i,i,i)}(1,1,1)=2,\\
&p_{(i,i,j)}(1,1,1)=p_{(i,j,i)}(1,1,1)=p_{(j,i,i)}(1,1,1)=1 \quad (\text{при } i\neq j),\\
&p_{(i,j,k)}(1,1,1)=0 \qquad (\text{при } i\neq j,\ i\neq k,\ j\neq k).
\end{aligned}$$

Аналогично имеется 27 соотношений для соответствующих порождающих рядов $P_{(i,j,k)}(x,y,z)$. Выпишем три из них:

$$\begin{aligned}
&P_{(1,1,1)}=x^3\cdot(P_{(2,2,2)}+P_{(2,2,3)}+P_{(2,3,2)}+P_{(2,3,3)}+\\
&\quad+P_{(3,2,2)}+P_{(3,2,3)}+P_{(3,3,2)}+P_{(3,3,3)}+2),\\
&P_{(1,1,2)}=x^2y\cdot(P_{(2,2,1)}+P_{(2,2,3)}+P_{(2,3,1)}+P_{(2,3,3)}+\\
&\quad+P_{(3,2,1)}+P_{(3,2,3)}+P_{(3,3,1)}+P_{(3,3,3)}+1),\\
&P_{(1,2,3)}=xyz\cdot(P_{(2,1,1)}+P_{(2,1,2)}+P_{(2,3,1)}+P_{(2,3,2)}+\\
&\quad+P_{(3,1,1)}+P_{(3,1,2)}+P_{(3,3,1)}+P_{(3,3,2)}).
\end{aligned}$$

Эти соотношения дают нам линейную систему из 27 уравнений с неизвестными $P_{(i,j,k)}$, $1\leqslant i,j,k\leqslant 3$. Решим эту систему и вычислим производящую функцию

$$F=\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant 3}P_{(i,j,k)}=\sum_{k,l,m}f_{k,l,m}x^ky^lz^m$$

числа 3-раскрасок правильного пропеллера. Функция F — рациональная целочисленная функция от переменных σ_1, σ_2, σ_3, где $\sigma_1 = x+y+z$, $\sigma_2 = xy+xz+yz$, $\sigma_3 = xyz$. Мы введём дополнительную переменную t, степень которой равна степени слагаемого (а именно, введение переменной t преобразует слагаемое $\sigma_1^k\sigma_2^l\sigma_3^m$ в слагаемое $\sigma_1^k\sigma_2^l\sigma_3^m \cdot t^{k+2l+3m}$) и упорядочим слагаемые числителя и знаменателя F по степеням t.

Знаменатель F равен

$$\begin{aligned}1 - [2\sigma_3 \cdot t^3 + 2\sigma_2^3 \cdot t^6 + 24\sigma_3^3 \cdot t^9 + (-48\sigma_3^4 + 8\sigma_2^3\sigma_3^2 - \sigma_2^6) \cdot t^{12} +\\ + (40\sigma_2^3\sigma_3^3 - 2\sigma_2^6\sigma_3) \cdot t^{15} + (4\sigma_2^6\sigma_3^2 - 3\sigma_2^3\sigma_3^4 - 192\sigma_3^6) \cdot t^{18} +\\ + (8\sigma_2^6\sigma_3^3 - 160\sigma_2^3\sigma_3^5 + 384\sigma_3^7) \cdot t^{21} - 64\sigma_2^3\sigma_3^6 \cdot t^{24} +\\ + (512\sigma_3^9 - 128\sigma_2^3\sigma_3^7) \cdot t^{27} - 1024 \cdot 3^{10} \cdot t^{30}].\end{aligned}$$

Числитель F равен

$$\begin{aligned}&(2\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) \cdot t^3 + (-4\sigma_1^3\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 10\sigma_2^3 + 9\sigma_3^2) \cdot t^6 +\\ &+ (12\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3 - 2\sigma_1^3\sigma_2^3 + 42\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2 + 3\sigma_1\sigma_2^4 - 29\sigma_2^3\sigma_3 + 18\sigma_3^3) \cdot t^9 +\\ &+ (45\sigma_1\sigma_2^4\sigma_3 - 4\sigma_1^3\sigma_2^3\sigma_3 - 32\sigma_1^3\sigma_3^3 - 60\sigma_1\sigma_2\sigma_3^3 - 10\sigma_2^6 - 39\sigma_2^3\sigma_3^2) \cdot t^{12} +\\ &+ (6\sigma_1^2\sigma_2^5\sigma_3 - 16\sigma_1^3\sigma_2^3\sigma_3^2 - 72\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^3 + 64\sigma_1^3\sigma_3^4 +\\ &+ 120\sigma_1\sigma_2\sigma_3^4 + 60\sigma_1\sigma_2^4\sigma_3^2 + 50\sigma_2^3\sigma_3^3 - 20\sigma_2^6\sigma_3 - 144\sigma_3^5) \cdot t^{15} +\\ &+ (144\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^4 + 12\sigma_1^2\sigma_2^5\sigma_3^2 - 32\sigma_1^3\sigma_2^3\sigma_3^3 + 12\sigma_1\sigma_2^4\sigma_3^3 -\\ &- 384\sigma_1\sigma_2\sigma_3^5 - 8\sigma_2^6\sigma_3^2 - 64\sigma_2^3\sigma_3^4 - 288\sigma_3^6) \cdot t^{18} +\\ &+ (128\sigma_1^3\sigma_3^6 - 384\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^5 + 240\sigma_1\sigma_2^4\sigma_3^4 +\\ &+ 672\sigma_1\sigma_2\sigma_3^6 - 16\sigma_2^6\sigma_3^3 - 768\sigma_2^3\sigma_3^5 + 576\sigma_3^7) \cdot t^{21} +\\ &+ (384\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^6 - 96\sigma_1\sigma_2^4\sigma_3^5 - 256\sigma_1^3\sigma_3^7 - 768\sigma_1\sigma_2\sigma_3^7 - 32\sigma_2^3\sigma_3^6 + 576\sigma_3^8) \cdot t^{24} +\\ &+ (384\sigma_1\sigma_2\sigma_3^8 - 512\sigma_2^3\sigma_3^7 + 1152\sigma_3^9) \cdot t^{27} - 3072\sigma_3^{10} \cdot t^{30}.\end{aligned}$$

Имеем $f_{1,1,1} = 0$, $f_{2,2,2} = 36$. Эти числа легко найти. Но вот число $f_{3,3,3} = 264$ вычислить непосредственно уже трудно.

Литература

[1] Ландо С. К. Введение в дискретную математику. — М.: МЦНМО, 2012.
[2] Харари Ф. Теория графов. — М.: URSS, 2006.