Динамическая система на пространстве выпуклых четырёхугольников

Ю. Ю. КОЧЕТКОВ
Московский институт электроники
и математики им. А. Н. Тихонова
Высшей школы экономики
e-mail: yukochetkov@hse.ru, yuyukochetkov@gmail.com

УДК 514.4

Ключевые слова: пространство выпуклых четырёхугольников, динамическая система.

Аннотация

Рассмотрим семейство выпуклых четырёхугольников на плоскости с заданными углами и периметром 2π. Набор длин сторон такого четырёхугольника — это точка в пространстве $\mathbb{R}^4$, а семейству отвечает конечный интервал I в этом пространстве. Середина интервала I задаёт четырёхугольник, который мы будем называть сбалансированным. Определим отображение f, которое ставит в соответствие сбалансированному четырёхугольнику Q сбалансированный четырёхугольник Q' с углами, численно равными сторонам четырёхугольника Q. Отображение f задаёт динамическую систему на пространстве сбалансированных четырёхугольников. В работе изучаются свойства этой системы.

Abstract

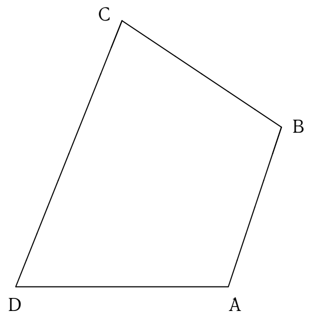
Yu. Yu. Kochetkov, A dynamical system in the space of convex quadrangles, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 2, pp. 183—188.

Let us consider a family $F(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ of convex quadrangles in the plane with given angles $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ and with the perimeter 2π. Such a quadrangle $Q \in F(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ can be considered as a point $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$, where $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ are lengths of edges. Then to F there corresponds a finite open segment $I \subset \mathbb{R}^4$. A quadrangle in F that corresponds to the midpoint of I is called a balanced quadrangle. Let M be the set of balanced quadrangles. The function $f\colon M \to M$ is defined in the following way: angles of the balanced quadrangle Q', $Q' = f(Q)$, are numerically equal to edges of Q. The map f defines a dynamical system in the space of balanced quadrangles. In this work, we study properties of this system.

1. Введение

В данной работе предпринята попытка построить что-то вроде двойственности на пространстве выпуклых четырёхугольников. В отличие от конструкции работ [1,2], мы, аналогично [3], изучаем «двойственность» между углами и сторонами. Точнее, мы рассматриваем выпуклый четырёхугольник с периметром

2π и переходим к новому четырёхугольнику с периметром 2π, углы которого численно равны длинам сторон исходного четырёхугольника. Новый четырёхугольник, однако, не определён однозначно. Чтобы добиться однозначности, мы введём понятие сбалансированного четырёхугольника и будем работать именно с такими четырёхугольниками.



Пусть нам известны углы выпуклого четырёхугольника $ABCD$: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ и $\angle D = \delta$. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 длины сторон DA, AB, BC и CD соответственно, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\pi$. Такому четырёхугольнику мы ставим в соответствие точку в пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4). Семейство же $F(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ таких выпуклых четырёхугольников задаёт конечный открытый интервал I в этом пространстве.

Определение 1. Четырёхугольник из семейства $F(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, отвечающий середине интервала I, мы будем называть *сбалансированным*.

Обозначим через M множество сбалансированных четырёхугольников и определим отображение $f\colon M \to M$.

Определение 2. Отображение f ставит в соответствие сбалансированному четырёхугольнику $Q \in M$ сбалансированный четырёхугольник Q', углы которого (в порядке обхода против часовой стрелки) численно равны длинам сторон четырёхугольника Q (перечисленным в порядке обхода против часовой стрелки).

Нас интересует динамика отображения f.

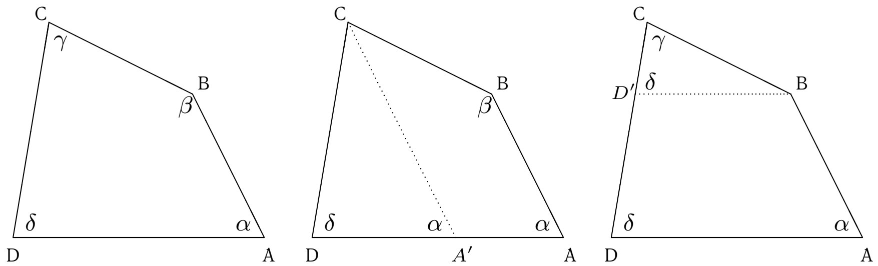
Для четырёхугольника общего положения его итерации сходятся к 2-циклу $(Q_1 \leftrightarrow Q_2)$, где четырёхугольники Q_1 и Q_2 различаются лишь направлением обхода (углы четырёхугольника Q_1 указаны в разделе 4). Это утверждение имеет эмпирический характер.

Два случая особого поведения рассмотрены в разделе 3:

а) квадрат является неподвижной отталкивающей точкой отображения f;
б) итерации четырёхугольника с углами $(\alpha, \beta, \alpha, \delta)$ сходятся к притягивающему 2-циклу.

2. Явные формулы

Пусть α, β, γ и δ — углы выпуклого четырёхугольника, перечисленные в порядке обхода против часовой стрелки. Из двух пар углов — $\{\delta, \alpha\}$ и $\{\beta, \gamma\}$ — сумма углов в одной паре больше π, а в другой меньше π. То же самое справедливо для пар $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\gamma, \delta\}$. Пусть $\alpha + \delta < \pi$ и $\gamma + \delta < \pi$. Деформации четырёхугольника с этими углами (при сохранении периметра) дают нам два треугольника периметра 2π, которые являются концевыми точками интервала I.



На рисунке слева показан выпуклый четырёхугольник с заданными углами α, β, γ и δ. Здесь длины сторон DA, AB, BC и CD равны x_1, x_2, x_3 и x_4 соответственно. На рисунке посередине показан результат вырождения четырёхугольника $ABCD$ в треугольник $A'CD$ (здесь $x_3 = 0$), а на рисунке справа показан результат вырождения четырёхугольника $ABCD$ в треугольник BCD' (здесь $x_2 = 0$).

Стороны x_1', x_2', x_3', x_4' вырожденного четырёхугольника $A'CD$ равны

$$x_1' = \frac{2\pi \cdot \sin(\alpha+\delta)}{\sin(\alpha)+\sin(\delta)+\sin(\alpha+\delta)}, \quad x_2' = \frac{2\pi \cdot \sin(\delta)}{\sin(\alpha)+\sin(\delta)+\sin(\alpha+\delta)},$$

$$x_3' = 0, \quad x_4' = \frac{2\pi \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\alpha)+\sin(\delta)+\sin(\alpha+\delta)}.$$

Стороны x_1'', x_2'', x_3'', x_4'' вырожденного четырёхугольника BCD' равны

$$x_1'' = \frac{2\pi \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\gamma)+\sin(\delta)+\sin(\gamma+\delta)}, \quad x_2'' = 0,$$

$$x_3'' = \frac{2\pi \cdot \sin(\delta)}{\sin(\gamma)+\sin(\delta)+\sin(\gamma+\delta)}, \quad x_4' = \frac{2\pi \cdot \sin(\gamma+\delta)}{\sin(\gamma)+\sin(\delta)+\sin(\gamma+\delta)}.$$

Теперь стороны сбалансированного четырёхугольника с этими углами равны

$$x_1 = \frac{x_1' + x_1''}{2}, \quad x_2 = \frac{x_2' + x_2''}{2}, \quad x_3 = \frac{x_3' + x_3''}{2}, \quad x_4 = \frac{x_4' + x_4''}{2}. \tag{1}$$

Предложение 1. *Пусть $\varphi > 0$, $\psi > 0$, $\varphi + \psi < \pi$. Тогда*

$$\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\varphi)+\sin(\psi)+\sin(\varphi+\psi)} < \frac{1}{2}, \quad \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin(\varphi)+\sin(\psi)+\sin(\varphi+\psi)} < \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin(\varphi)+\sin(\psi)+\sin(\varphi+\psi)} = \frac{\cos\frac{\varphi+\psi}{2}}{\cos\frac{\varphi+\psi}{2}+\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}.$$

Так как

$$\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right| < \frac{\varphi+\psi}{2},$$

то

$$\cos\frac{\varphi-\psi}{2} > \cos\frac{\varphi+\psi}{2},$$

и мы получаем второе неравенство.

Производная знаменателя

$$\big(\sin(\varphi)+\sin(\psi)+\sin(\varphi+\psi)\big)'_{\psi} = 2\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{2\psi+\varphi}{2}$$

положительна на интервале $0 < \psi < (\pi-\varphi)/2$ и отрицательна на интервале $(\pi-\varphi)/2 < \psi < \pi-\varphi$. Следовательно, дробь максимальна на концах интервала $0 < \psi < \pi-\varphi$. Но на концах интервала дробь равна $1/2$. □

Следствие 1. *У сбалансированного четырёхугольника есть две смежные стороны, длины которых не превышают $\pi/2$.*

Доказательство. Действительно, это стороны x_2 и x_3. □

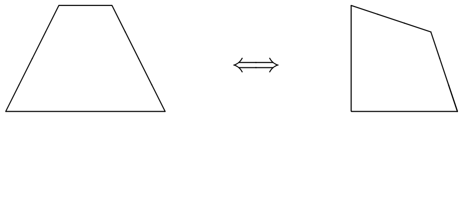
Следствие 2. *Выпуклый четырёхугольник с периметром 2π, у которого длины трёх сторон превышают $\pi/2$, не может быть сбалансированным.*

3. Особые случаи

Если у сбалансированного четырёхугольника Q равны две противоположные стороны, то, как следует из формул (1), набор длин сторон четырёхугольника Q' таков: (a,a,b,b), $a<b=\pi-a$. Это означает, что четырёхугольник Q'' является равнобочной трапецией с длинами сторон

$$\left(\frac{\pi}{2+2\cos(a)},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2+2\cos(a)},\ \frac{\pi}{2}+\frac{\pi\cdot\cos(a)}{1+\cos(a)}\right).$$

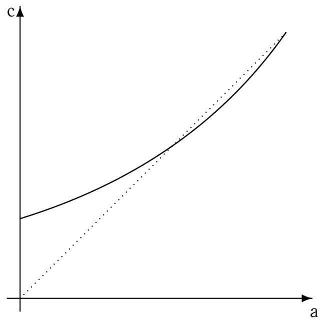
У полученного четырёхугольника две противоположные стороны равны, следовательно, f отображает его в ромбовидный четырёхугольник со сторонами (c,c,d,d). Таким образом, f отображает равнобочные трапеции в ромбовидные четырёхугольники, а их — в равнобочные трапеции.



Равнобочная трапеция с углами (a, a, b, b), $a < b$, после двукратного применения отображения f переходит в равнобочную трапецию с углами (c, c, d, d), меньший угол c которой равен

$$c = \frac{\pi}{1 + \sin\frac{\pi}{2+2\cos(a)} + \cos\frac{\pi}{2+2\cos(a)}}.$$

На интервале $(0, \pi/2)$ функция $c(a)$ возрастает от значения $\pi/(\sqrt{2}+1) \approx 1{,}3$ до значения $\pi/2$ и выпукла вниз. Её график в квадрате $[1{,}4, \pi/2] \times [1{,}4, \pi/2]$ выглядит следующим образом (масштаб не соблюдён).



Пересечение кривой и прямой $c = a$ происходит в точках $a \approx 1{,}4834215876937$ и $a = \pi/2$. Первая точка задаёт притягивающий 2-цикл (производная в этой точке приблизительно равна 0,8). Точка $\pi/2$ — отталкивающая стационарная точка, квадрат (производная в этой точке приблизительно равна 1,2).

Замечание. Притягивающий 2-цикл выглядит так (указаны углы):

$$(1{,}48342\ldots,\ 1{,}48342\ldots,\ 1{,}65817\ldots,\ 1{,}65817\ldots) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \left(1{,}44472\ldots,\ \frac{\pi}{2},\ 1{,}44472,\ \frac{\pi}{2} + 0{,}25214\ldots\right).$$

4. Ситуация общего положения

Вычисления показывают, что при итерациях отображения f четырёхугольник общего положения попадает в притягивающий 2-цикл $Q_1 \leftrightarrow Q_2$, где четырёхугольники Q_1 и Q_2 зеркально конгруэнтны. Углы α, γ и δ определяются соотношениями

$$\alpha = \frac{\pi \cdot \sin(\alpha+\delta)}{\sin(\alpha) + \sin(\delta) + \sin(\alpha+\delta)} + \frac{\pi \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\gamma) + \sin(\delta) + \sin(\gamma+\delta)},$$

$$\delta = \frac{\pi \cdot \sin(\delta)}{\sin(\alpha) + \sin(\delta) + \sin(\alpha+\delta)},$$

$$\gamma = \frac{\pi \cdot \sin(\delta)}{\sin(\gamma) + \sin(\delta) + \sin(\gamma+\delta)}$$

и равны

$$\begin{aligned}
\alpha &\approx 1{,}548193052486692251529339853 24,\\
\beta &\approx 1{,}8240518851275930050861489 0573,\\
\gamma &\approx 1{,}4151595303135090979965414 4250,\\
\delta &\approx 1{,}4957808392517921223132565 6509.
\end{aligned}$$

Не все частные прозводные компонент отображения f по переменным α, β, γ меньше единицы по модулю, но сходимость к 2-циклу — эмпирический факт, требующий объяснения.

Литература

[1] Busjatskaja I., Kochetkov Yu. Dual quadrangles in the plane. — 2019. — arXiv:1911.09321.

[2] Cantarella J., Needham T., Shonkwiler C. Random triangles and polygons in the plane // Amer. Math. Monthly. — 2019. — Vol. 126, no. 2. — P. 113—134.

[3] Kochetkov Yu. Two dynamical systems in the space of triangles. — 2021. — arXiv:2101.03734.