О детских рисунках с равными носителями

Ф. Б. ПАКОВИЧ
Университет им. Давида Бен-Гуриона, Израиль
e-mail: pakovich@math.bgu.ac.il

УДК 512.772.7

Ключевые слова: детские рисунки, функции Белого, лемнискаты, произведения Бляшке.

Аннотация

Для функции Белого $\beta\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$, разветвлённой только над точками -1, 1, ∞, соответствующий «детский рисунок» $\mathcal{D}_\beta$ определён как множество $\beta^{-1}([-1,1])$, рассматриваемое как двукрашенный граф на римановой сфере, белые и чёрные вершины которого — это точки множеств $\beta^{-1}\{-1\}$ и $\beta^{-1}\{1\}$ соответственно. Само множество $\beta^{-1}([-1,1])$, без структуры графа, называется носителем детского рисунка $\mathcal{D}_\beta$. В настоящей заметке решена следующая проблема: при каких условиях различные рисунки $\mathcal{D}_{\beta_1}$ и $\mathcal{D}_{\beta_2}$ имеют равные носители?

Abstract

F. B. Pakovich, On dessins d'enfants with equal supports, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2024), no. 2, pp. 189—196.

For a Belyi function $\beta\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ ramified only over the points -1, 1, and ∞, a corresponding «dessin d'enfant» $\mathcal{D}_\beta$ is defined as the set $\beta^{-1}([-1,1])$ considered as a bi-colored graph on the Riemann sphere whose white and black vertices are points of the sets $\beta^{-1}\{-1\}$ and $\beta^{-1}\{1\}$, correspondingly. Merely the set $\beta^{-1}([-1,1])$ without a graph structure is called the support of $\mathcal{D}_\beta$. In this note, we solve the following problem: under what conditions different dessins $\mathcal{D}_{\beta_1}$ and $\mathcal{D}_{\beta_2}$ have equal supports?

Г. Б. Шабату, по случаю его 70-летия

1. Введение

Одним из следствий теории «детских рисунков» (см., например, [9, 12, 13]) является тот факт, что любой двукрашенный граф Γ на римановой сфере имеет «истинную форму». Это означает, что существует функция Белого $\beta\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$, разветвлённая только над точками -1, 1, ∞, такая что множество $\mathcal{D}_\beta = \beta^{-1}([-1,1])$, рассматриваемое как двукрашенный граф, белые и чёрные вершины которого — это точки множеств $\beta^{-1}\{-1\}$ и $\beta^{-1}\{1\}$ соответственно, представляет Γ в следующем смысле: существует такой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм φ сферы, что $\varphi(\Gamma) = \beta^{-1}([-1,1])$ и φ отображает

Фундаментальная и прикладная математика, 2024, том 25, № 2, с. 189—196.

белые и чёрные вершины Γ в белые и чёрные вершины $\beta^{-1}([-1,1])$ соответственно. Граф $\mathcal{D}_\beta$ называется *детским рисунком* или просто *рисунком*, соответствующим функции Белого β. В этой заметке мы всегда будем предполагать, что рассматриваемые функции Белого являются рациональными функциями на сфере, разветвлёнными только над точками -1, 1, ∞. Соответственно, все рассматриваемые рисунки являются сферическими.

Геометрия плоских деревьев (то есть графов без циклов), заданных в истинной форме, изучалась в нескольких публикациях (см. [1, 2, 4, 11]). В частности, замечательный результат Бишопа [4] состоит в том, что для любого компактного связного множества $K \subset \mathbb{C}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует полином Шабата (то есть полиномиальная функция Белого) P, такая что множество $P^{-1}([-1,1])$ аппроксимирует K с точностью ε в хаусдорфовой метрике. Таким образом, множества $P^{-1}([-1,1])$ плотны в плоских континуумах.

В силу фундаментального соответствия между двукрашенными графами и функциями Белого рисунок $\mathcal{D}_\beta$ определяет соответствующую функцию Белого β с точностью до эквивалентности. В этой заметке мы изучаем следующую проблему, которая кажется особенно интересной ввиду теоремы Бишопа. Пусть $\mathcal{D}_\beta$ — рисунок. До какой степени само множество $\beta^{-1}([-1,1])$, без структуры графа, определяет $\mathcal{D}_\beta$? Другими словами, при каких условиях на $\mathcal{D}_{\beta_1}$ и $\mathcal{D}_{\beta_2}$ множества $\beta_1^{-1}([-1,1])$ и $\beta_2^{-1}([-1,1])$ совпадают как подмножества $\mathbb{CP}^1$? Для функции Белого β мы будем называть множество $\beta^{-1}([-1,1])$ *носителем* $\mathcal{D}_\beta$ и обозначать его $\operatorname{supp}\{\mathcal{D}_\beta\}$.

Чтобы описать пары рисунков $\mathcal{D}_{\beta_1}$ и $\mathcal{D}_{\beta_2}$, такие что

$$\operatorname{supp}\{\mathcal{D}_{\beta_1}\} = \operatorname{supp}\{\mathcal{D}_{\beta_2}\}, \tag{1}$$

достаточно ограничиться случаем, когда соответствующие функции Белого β_1 и β_2 удовлетворяют условию $\mathbb{C}(\beta_1, \beta_2) = \mathbb{C}(z)$, то есть порождают всё поле рациональных функций $\mathbb{C}(z)$. Действительно, из теоремы Люрота следует, что для произвольных рациональных функций β_1, β_2 существуют рациональные функции $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ и W, такие что

$$\beta_1 = \hat{\beta}_1 \circ W, \quad \beta_2 = \hat{\beta}_2 \circ W \tag{2}$$

и $\mathbb{C}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \mathbb{C}(z)$. Более того, легко видеть, что равенства (2) и

$$\beta_1^{-1}([-1,1]) = \beta_2^{-1}([-1,1]) \tag{3}$$

влекут равенство

$$\hat{\beta}_1^{-1}([-1,1]) = \hat{\beta}_2^{-1}([-1,1]), \tag{4}$$

в то время как равенства (2) и (4) влекут равенство (3). Наконец, если β_1, β_2 — функции Белого, то по цепному правилу $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ также функции Белого.

Примеры различных рисунков с равными носителями дают «отрезки» и «окружности». По определению *отрезок* — это рисунок, носитель которого гомеоморфен отрезку, а *окружность* — это рисунок, носитель которого гомеоморфен окружности. Отметим, что отрезки и окружности могут быть охарактеризованы как рисунки, все вершины которых имеют валентность 1 или 2. Легко видеть, что полином Чебышёва $\pm T_n$, $n \geqslant 1$, является функцией Белого, соответствующей отрезку с n рёбрами, а

$$\pm\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right), \quad n \geqslant 1,$$

является функцией Белого, соответствующей окружности с $2n$ рёбрами. Поскольку для любого $n \geqslant 1$ прообраз $(\pm T_n)^{-1}([-1,1])$ является отрезком $[-1,1]$, для любых функций Белого β_1 и β_2, таких что $\mathcal{D}_{\beta_1}$ и $\mathcal{D}_{\beta_2}$ — отрезки, существует преобразование Мёбиуса μ, такое что

$$\operatorname{supp}\{\mathcal{D}_{\beta_1}\} = \operatorname{supp}\{\mathcal{D}_{\beta_2\circ\mu}\}. \tag{5}$$

Подобным образом равенство (5) выполняется для некоторого преобразования Мёбиуса μ, если $\mathcal{D}_{\beta_1}$ и $\mathcal{D}_{\beta_2}$ — окружности, поскольку для любого $n \geqslant 1$ прообраз

$$\left(\pm\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)\right)^{-1}([-1,1])$$

является единичной окружностью. Дальнейшие примеры рисунков, удовлетворяющих (1), можно получить по формулам (2), где $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$ — функции Белого, соответствующие отрезкам или окружностям, и W — рациональная функция с подходящим ветвлением, обеспечивающим, что β_1 и β_2 также являются функциями Белого. В частности, для любой функции Белого β выполнены равенства

$$\operatorname{supp}\{\mathcal{D}_\beta\} = \operatorname{supp}\{\mathcal{D}_{\pm T_n\circ\beta}\}, \quad n \geqslant 1.$$

В этой заметке доказывается следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть $\mathcal{D}_{\beta_1}$ и $\mathcal{D}_{\beta_2}$ — такие рисунки, что*

$$\operatorname{supp}\{\mathcal{D}_{\beta_1}\} = \operatorname{supp}\{\mathcal{D}_{\beta_2}\}, \quad \mathbb{C}(\beta_1,\beta_2) = \mathbb{C}(z).$$

Тогда или $\mathcal{D}_{\beta_1}$ и $\mathcal{D}_{\beta_2}$ — отрезки, или $\mathcal{D}_{\beta_1}$ и $\mathcal{D}_{\beta_2}$ — окружности.

Наш подход к задаче основывается на наблюдении, что детские рисунки на римановой сфере являются подмножествами рациональных лемнискат. Напомним, что *рациональная лемниската* — это кривая в $\mathbb{C}$, определённая равенством

$$\mathcal{L}_\beta = \{z \in \mathbb{C} \colon |\beta(z)| = 1\}, \tag{6}$$

где β — непостоянная рациональная функция. Геометрия лемнискат — классический объект исследования. Например, Д. Гильберт доказал [10], что для каждого топологического кольца $A \subset \mathbb{C}$ существует полином P, лемниската которого — аналитическая жорданова кривая, разделяющая две граничные компоненты A. Лемнискаты целых и мероморфных функций изучались Ж. Валироном [19] и М. Л. Картрайт [6]. Более поздние результаты могут быть найдены в работах [3, 5, 7, 8, 14—16, 18, 20] и приведённой в них библиографии.

Поскольку вещественная ось может быть отображена в единичную окружность преобразованием Мёбиуса μ, для каждой рациональной функции β множество $\beta^{-1}([-1,1])$ является подмножеством лемнискаты $\mathcal{L}_{\mu\circ\beta}$. Поэтому результаты о геометрии лемнискат могут быть использованы для изучения геометрии детских рисунков. В частности, наше доказательство теоремы 1.1 опирается на результаты недавних статей [14, 15].

2. Лемнискаты и детские рисунки

2.1. Пересечения лемнискат

Напомним, что *конечное произведение Бляшке* — это рациональная функция вида

$$B = c\prod_{i=1}^{m}\frac{z-a_i}{1-\bar{a}_i z},$$

где $|c| = 1$ и a_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, принадлежат открытому единичному кругу $\mathbb{D}$. Соответственно, *частное конечных произведений Бляшке* — это рациональная функция вида $B = B_1/B_2$, где B_1 и B_2 — конечные произведения Бляшке. Заметим, что частные конечных произведений Бляшке можно охарактеризовать как рациональные функции, отображающие единичную окружность $\mathbb{T}$ в себя.

Пусть P_1 и P_2 — непостоянные комплексные рациональные функции степеней n_1 и n_2. В [15] было показано, что если система уравнений

$$|P_1(z)| = |P_2(z)| = 1 \tag{7}$$

имеет более чем $(n_1+n_2)^2$ решений $z \in \mathbb{C}$, то

$$P_1 = B_1 \circ U, \quad P_2 = B_2 \circ U \tag{8}$$

для некоторых рациональных функций B_1, B_2 и U, где B_1 и B_2 — частные конечных произведений Бляшке. Геометрически решения системы (7) можно рассматривать как точки пересечения лемнискат $\mathcal{L}_{P_1}$ и $\mathcal{L}_{P_2}$, и в [14] была получена точная оценка числа таких точек. Именно, в [14] утверждается, что если не выполняется условие (8), то лемнискаты $\mathcal{L}_{P_1}$ и $\mathcal{L}_{P_2}$ имеют не более чем $2n_1n_2$ точек пересечения, и эта оценка является наилучшей из возможных.

Из результатов [14] и [15] вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть β_1, β_2 — непостоянные рациональные функции и K_1, K_2 — подмножества $\mathbb{R}$, такие что пересечение $\beta_1^{-1}(K_1) \cap \beta_2^{-1}(K_2)$ бесконечно. Тогда существуют рациональная функция W и рациональные функции с вещественными коэффициентами P_1 и P_2, такие что выполняются равенства $\beta_1 = P_1 \circ W$ и $\beta_2 = P_2 \circ W$.*

Доказательство. Обозначим через $\hat{\mathbb{R}}$ проективно расширенную вещественную прямую, $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty$, и через C преобразование Кэли,

$$C(z) = \frac{z+i}{z-i}.$$

Поскольку C отображает $\hat{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{T}$, если пересечение $\beta_1^{-1}(K_1) \cap \beta_2^{-1}(K_2)$ бесконечно, то пересечение $\mathcal{L}_{C\circ\beta_1} \cap \mathcal{L}_{C\circ\beta_2}$ также бесконечно. Следовательно, согласно результатам [14] и [15] существуют рациональные функции B_1, B_2 и U, где B_1 и B_2 — частные конечных произведений Бляшке, такие что

$$C \circ \beta_1 = B_1 \circ U, \quad C \circ \beta_2 = B_2 \circ U. \tag{9}$$

Ясно, что из равенств (9) следуют равенства

$$\beta_1 = (C^{-1} \circ B_1 \circ C) \circ (C^{-1} \circ U), \quad \beta_2 = (C^{-1} \circ B_2 \circ C) \circ (C^{-1} \circ U). \tag{10}$$

С другой стороны, поскольку C отображает $\hat{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{T}$, рациональная функция B является частным конечных произведений Бляшке тогда и только тогда, когда рациональная функция $P = C^{-1} \circ B \circ C$ отображает $\hat{\mathbb{R}}$ в $\hat{\mathbb{R}}$. В свою очередь, последнее условие эквивалентно условию, что P имеет действительные коэффициенты (поскольку $P(z) - \bar{P}(z) = 0$ для бесконечного числа $z \in \mathbb{R}$). Таким образом, из (10) следует, что заключение теоремы выполняется для

$$P_1 = C^{-1} \circ B_1 \circ C, \quad P_2 = C^{-1} \circ B_2 \circ C, \quad W = C^{-1} \circ U. \qquad \square$$

2.2. Доказательство теоремы 1.1

Мы выведем теорему 1.1 из теоремы 2.1 и следующего утверждения.

Теорема 2.2. *Пусть P_1 и P_2 — непостоянные рациональные функции с действительными коэффициентами, такие что $\mathbb{R}(P_1, P_2) = \mathbb{R}(z)$. Тогда*

$$P_1^{-1}(\hat{\mathbb{R}}) \cap P_2^{-1}(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}} \cup A,$$

где A — конечное подмножество $\mathbb{CP}^1$.

Доказательство. Поскольку P_1 и P_2 имеют действительные коэффициенты, $P_1(\hat{\mathbb{R}})$ и $P_2(\hat{\mathbb{R}})$ являются подмножествами $\hat{\mathbb{R}}$, что влечёт

$$\hat{\mathbb{R}} \subseteq P_1^{-1}(\hat{\mathbb{R}}) \cap P_2^{-1}(\hat{\mathbb{R}}).$$

С другой стороны, поскольку $\mathbb{R}(P_1, P_2) = \mathbb{R}(z)$, существуют ненулевые многочлены с вещественными коэффициентами $R_1(x, y)$ и $R_2(x, y)$, такие что

$$z = \frac{R_1\big(P_1(z), P_2(z)\big)}{R_2\big(P_1(z), P_2(z)\big)}. \tag{11}$$

Так как для каждой точки $z_0 \in P_1^{-1}(\mathbb{R}) \cap P_2^{-1}(\mathbb{R})$ значения $P_1(z_0)$ и $P_2(z_0)$ принадлежат $\mathbb{R}$, из равенства (11) следует, что если z_0 принадлежит $P_1^{-1}(\mathbb{R}) \cap P_2^{-1}(\mathbb{R})$, то z_0 принадлежит $\mathbb{R}$, если только z_0 не является нулём $R_2\big(P_1(z), P_2(z)\big)$. Отсюда следует, что множество $\big(P_1^{-1}(\hat{\mathbb{R}}) \cap P_2^{-1}(\hat{\mathbb{R}})\big) \setminus \hat{\mathbb{R}}$ конечно. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. Поскольку множество $\beta_1^{-1}([-1, 1])$ бесконечно, из равенства (3) по теореме 2.1 с учётом условия $\mathbb{C}(\beta_1, \beta_2) = \mathbb{C}(z)$ следует, что существуют преобразование Мёбиуса μ и функции Белого с действительными коэффициентами $\tilde{\beta}_1$ и $\tilde{\beta}_2$, такие что

$$\beta_1 = \tilde{\beta}_1 \circ \mu, \quad \beta_2 = \tilde{\beta}_2 \circ \mu \tag{12}$$

и $\mathbb{R}(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2) = \mathbb{R}(z)$.

Для рациональной функции β и точки $z \in \mathbb{CP}^1$ обозначим через $\operatorname{mult}_z \beta$ кратность β в точке z. Заметим, что для любых $z_1 \in \tilde{\beta}_1^{-1}(\{-1,1\})$ и $z_2 \in \tilde{\beta}_2^{-1}(\{-1,1\})$ выполнены неравенства $\operatorname{mult}_{z_1} \tilde{\beta}_1 \leqslant 2$ и $\operatorname{mult}_{z_2} \tilde{\beta}_2 \leqslant 2$. Действительно, в окрестности любой точки $z \in \tilde{\beta}_1^{-1}(\{-1,1\})$ с $\operatorname{mult}_z \tilde{\beta}_1 = k \geqslant 3$ множество

$$T = \tilde{\beta}_1^{-1}([-1,1]) = \tilde{\beta}_2^{-1}([-1,1]) \tag{13}$$

гомеоморфно «звезде» с $k \geqslant 3$ ветвями. С другой стороны, поскольку

$$T \subseteq \tilde{\beta}_1^{-1}(\hat{\mathbb{R}}) \cap \tilde{\beta}_2^{-1}(\hat{\mathbb{R}}), \tag{14}$$

из теоремы 2.2 следует, что $T \subset \hat{\mathbb{R}} \cup A$, где A — конечное подмножество $\mathbb{CP}^1$. Полученное противоречие показывает, что $\operatorname{mult}_{z_1} \tilde{\beta}_1 \leqslant 2$ для любого $z_1 \in \tilde{\beta}_1^{-1}(\{-1,1\})$. Аналогично $\operatorname{mult}_{z_2} \tilde{\beta}_2 \leqslant 2$ для любого $z_2 \in \tilde{\beta}_2^{-1}(\{-1,1\})$. Из этих неравенств следует, что $\mathcal{D}_{\beta_1}$ и $\mathcal{D}_{\beta_2}$ являются либо отрезками, либо окружностями. Более того, из (3) следует, что оба рисунка $\mathcal{D}_{\beta_1}$ и $\mathcal{D}_{\beta_2}$ являются либо отрезками, либо окружностями. □

Замечание 2.3. Заметим, что по теореме Люрота условие

$$\mathbb{C}(\beta_1, \beta_2) = \mathbb{C}(z) \tag{15}$$

всегда выполняется, если степени $\deg \beta_1$ и $\deg \beta_2$ взаимно просты. Поскольку

$$T_{n_1 n_2} = T_{n_2} \circ T_{n_1}, \quad n_1, n_2 \geqslant 1,$$

из этого следует, в частности, что функции

$$\beta_1 = \pm T_{n_1}, \quad \beta_2 = \pm T_{n_2} \tag{16}$$

удовлетворяют (15) тогда и только тогда, когда $\gcd(n_1, n_2) = 1$. С другой стороны, формулы

$$\pm\frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = \pm T_n \circ \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad n \geqslant 1,$$

показывают, что функции

$$\beta_1 = \pm\frac{1}{2}\left(z^{n_1} + \frac{1}{z^{n_1}}\right), \quad \beta_2 = \pm\frac{1}{2}\left(z^{n_2} + \frac{1}{z^{n_2}}\right), \quad n_1, n_2 \geqslant 1, \tag{17}$$

никогда не удовлетворяют (15), поскольку обе эти функции являются рациональными функциями от

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Тем не менее, заменяя β_1 и β_2 в (17) на функции β_1 и $\beta_2 \circ \mu$, где μ — подходящее преобразование Мёбиуса, отображающее $\mathbb{T}$ в себя, можно получить функции, удовлетворяющие (1) и (15) для произвольных n_1 и n_2 (аналогичное замечание относится и к функциям, определяемым (16)). Действительно, если равенства (2) выполняются для некоторой рациональной функции W степени не ниже двух, то из цепного правила следует, что функции β_1 и β_2 имеют общие критические точки. Таким образом, достаточно доказать, что для любых рациональных функций β_1 и β_2 существует μ как выше, такое что β_1 и $\beta_2 \circ \mu$ не имеют общих критических точек. Для доказательства заметим сначала, что, поскольку преобразования Мёбиуса, отображающие $\mathbb{T}$ в себя, имеют вид $(az+b)/(\bar{b}z+\bar{a})$, где a, b являются комплексными числами, удовлетворяющими $|a| \neq |b|$, можно найти такое μ, что ноль и бесконечность не являются критическими точками $\beta_2 \circ \mu$. Если это условие выполнено, то, очевидно, можно найти вращение $z \to cz$, $|c| = 1$, такое что функции β_1 и $\beta_2 \circ \mu \circ cz$ не имеют общих критических точек.

Литература

[1] Кочетков Ю. Ю. О геометрии одного класса плоских деревьев // Функц. анализ и его прил. — 1999. — Т. 33, № 4. — С. 78—81.

[2] Кочетков Ю. Ю. Геометрия плоских деревьев // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 6. — С. 149—158.

[3] Оревков С. Ю. Неприводимость лемнискат // УМН. — 2018. — Т. 73, № 3. — С. 177—178.

[4] Bishop C. True trees are dense // Invent. Math. — 2014. — Vol. 197, no. 2. — P. 433—452.

[5] Bishop C., Lazebnik K. Hilbert's lemniscate theorem for rational functions: Preprint. — 2023.

[6] Cartwright M. L. On the level curves of integral and meromorphic functions // Proc. London Math. Soc. — 1937. — Vol. 43. — P. 468—474.

[7] Ebenfelt P., Khavinson D., Shapiro H. S. Two-dimensional shapes and lemniscates // Contemp. Math. — 2011. — Vol. 553. — P. 45—59.

[8] Eremenko A., Hayman W. On the length of lemniscates // Michigan Math. J. — 1999. — Vol. 46, no. 2. — P. 409—415.

[9] Girondo E., González-Diez G. Introduction to Compact Riemann Surfaces and Dessins d'Enfants. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012. — (London Math. Soc. Student Texts. Vol. 79).

[10] Hilbert D. Über die Entwicklung einer beliebigen analytischen Funktion einer Variablen in eine unendliche nach rationalen Funktionen fortschreitende Reihe // Nachrichten Gesellschaften Wissenschaften Göttingen. — 1997. — P. 63—70.

[11] Jensen G., Pommerenke C. Shabat polynomials and conformal mapping // Acta Sci. Math. (Szeged) — 2019. — Vol. 85, no. 1-2. — P. 147—170.

[12] Jones G., Wolfart J. Dessins d'Enfants on Riemann Surfaces. — Cham: Springer, 2016. — (Springer Monographs Math.).

[13] Lando S., Zvonkin A. Graphs on Surfaces and Their Applications. — Berlin: Springer, 2004. — (Encyclopaedia Math. Sci., Vol. 141).

[14] Orevkov S., Pakovich F. On intersection of lemniscates of rational functions. — 2023. — `arxiv:2309.04983`.

[15] Pakovich F., Shparlinski I. Level curves of rational functions and unimodular points on rational curves // Proc. Amer. Math. Soc. — 2020. — Vol. 148, no. 5. — P. 1829—1833.

[16] Sharon E., Mumford D. 2D-shape analysis using conformal mapping // Int. J. Comput. Vis. — 2006. — Vol. 70. — P.55—75.

[17] Stephenson K., Sundberg C. Level curves of inner functions // Proc. London Math. Soc. — 1985. — Vol. 51. — P. 77—94.

[18] Stephenson K. Analytic functions sharing level curves and tracts // Ann. Math. — 1986. — Vol. 123. — P. 107—144.

[19] Valiron G. Sur les courbes de module constant des fonctions entieres // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. — 1937. — Vol. 204. — P. 402—404.

[20] Younsi M. Shapes, fingerprints and rational lemniscates // Proc. Amer. Math. Soc. — 2016. — Vol. 144, no. 3. — P. 1087—1093.