

# Поверхности «в клеточку» и кривые над числовыми полями

Г. Б. ШАБАТ

Российский государственный гуманитарный университет  
e-mail: george.shabat@gmail.com

УДК 511.6+515.162.2+512.772.7

**Ключевые слова:** плоские поверхности, арифметика алгебраических кривых.

## Аннотация

В работе представлен аналог старого результата автора и В. А. Воеводского, согласно которому риманова поверхность допускает комплексную структуру, определённую равносторонней триангуляцией, тогда и только тогда, когда соответствующая алгебраическая кривая определяема над полем алгебраических чисел; установлен похожий результат для поверхностей, разбитых на квадраты.

## Abstract

*G. B. Shabat, Square-tiled surfaces and curves over number fields*, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, vol. 25 (2024), no. 2, pp. 197–203.

The paper presents an analog of an old result by the author and V. Voevodsky, according to which a Riemann surface admits a conformal structure defined by an equilateral triangulation if and only if the corresponding algebraic curve can be defined over the field of the algebraic numbers; a similar result is obtained for the square-tiled surfaces.

## Введение

В работе представлен аналог старого результата [1], согласно которому риманова поверхность допускает конформную структуру, определяемую равносторонней триангуляцией, тогда и только тогда, когда соответствующая алгебраическая кривая может быть определена над полем алгебраических чисел. Здесь мы устанавливаем похожий результат, заменяя равносторонние треугольники на квадраты; одно из существенных различий между настоящей и предыдущей работой заключается в том, что в 1980-е годы кусочно-евклидовы структуры на поверхностях представляли собой нечто экзотическое, тогда как в наше время *поверхности «в клеточку»*, или *оригами*, интенсивно изучаются в течение уже нескольких десятилетий (см., например, [8]).

Среди немедленных приложений мы получаем возможность явно выписывать определяющие уравнения некоторых кривых, традиционно определяемых трансцендентными средствами. Можно надеяться, что сильные статистические

результаты, касающиеся поверхности «в клеточку» могут углубить наше понимание типичных свойств многорёберных детских рисунков, например распределения размеров их орбит Галуа.

## 1. Предварительные понятия

Мы собираемся работать с *кусочно-евклидовыми* компактными ориентируемыми замкнутыми поверхностями. Есть два способа определить эту структуру. Один из них чисто метрический и использует вводимую на поверхности метрику, являющуюся римановой вне конечного множества и *плоской* вне этого множества; кратко такие поверхности сами называются *плоскими* (см. [8]).

Мы принимаем другой подход, рассматривая поверхности вместе с некоторыми комбинаторными структурами, *детскими рисунками* (см. [2]), а затем снабжаем рисунки дополнительными метрическими структурами. Топологически рисунок представляет собой тройку

$$\mathcal{D} = (\mathbf{X}_2 \supset \mathbf{X}_1 \supset \mathbf{X}_0),$$

где  $\mathbf{X}_2$  — ориентированная компактная связная поверхность,  $\mathbf{X}_0$  — конечное множество, а дополнения  $\mathbf{X}_i \setminus \mathbf{X}_{i-1}$  гомеоморфны конечным несвязным объединениям  $i$ -клеток при  $i \in \{1, 2\}$ .

Неформально поверхность просто разбита на метризованные многоугольники. Удобный *картографический* формализм был предложен в [2] (хотя он был хорошо известен задолго до этой работы — не Гротендику...). Комбинаторика рисунка  $\mathcal{D}$  задаётся множеством его *направленных рёбер*  $\vec{E}(\mathcal{D})$ , на котором действует *ориентируемая картографическая группа*

$$C_2^+ := \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2 \mid \rho_1^2 = \rho_2 \rho_1 \rho_0 = 1 \rangle;$$

$\rho_0$  поворачивает ребро против часовой стрелки,  $\rho_1$  обращает направленное ребро, а  $\rho_2$  перемещает его вдоль границы клетки, оставляя клетку слева. Множества вершин, рёбер и клеток рисунка  $\mathcal{D}$  восстанавливаются как

$$V(\mathcal{D}) := \frac{\vec{E}(\mathcal{D})}{\langle \rho_0 \rangle}, \quad E(\mathcal{D}) := \frac{\vec{E}(\mathcal{D})}{\langle \rho_1 \rangle}, \quad F(\mathcal{D}) := \frac{\vec{E}(\mathcal{D})}{\langle \rho_2 \rangle}$$

с отношениями инцидентности, определяемыми в терминах подгрупп группы  $C_2^+$ .

Для направленного ребра  $\varepsilon \in \vec{E}(\mathcal{D})$  мы будем использовать обозначения Концевича [3]

$$[\varepsilon]_j \in \frac{\vec{E}(\mathcal{D})}{\langle \rho_j \rangle} \quad \text{для } j \in \{0, 1, 2\};$$

так,  $[\varepsilon]_0$  — это начало направленного ребра,  $[\varepsilon]_1$  — соответствующее ненаправленное ребро, а  $[\varepsilon]_2$  — 2-клетка «слева» от направленного ребра.

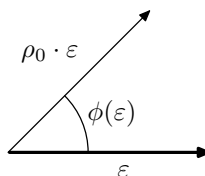
Дополнительная структура, превращающая поверхность  $\mathbf{X}_2$  в метрическое пространство, определяется по отдельности на каждой грани; мы фиксируем её,

выбирая комплексную координату  $z: U \hookrightarrow \mathbb{C}$  для каждой связной компоненты  $U$  дополнения  $\mathbf{X}_2 \setminus \mathbf{X}_1$ . Предполагается, что замыкание каждой  $z(U)$  — многоугольник и что метрика на  $U$  индуцирована стандартной евклидовой метрикой на  $\mathbb{C}$ ; она фиксируется *длинами*

$$\ell: \vec{E}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

и *углами*

$$\phi: \vec{E}(\mathcal{D}) \rightarrow (0, 2\pi).$$



Координаты  $z'$  определены с точностью до замен  $z \leftarrow az + b$ , где  $a, b \in \mathbb{C}$ , причём  $|a| = 1$ . Выберем канонических представителей  $z_\varepsilon$  этих координат, параметризованных всеми  $\varepsilon \in \vec{E}(\mathcal{D})$  и нормализованных условиями  $z_\varepsilon([\varepsilon]_0) = 0$  и  $z_\varepsilon([\varepsilon]_1) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Тогда эти координаты  $z_\varepsilon$  предполагаются продолженными в некоторые окрестности клеток  $[\varepsilon]_2$  (не содержащие вершин), и в пересечениях областей определения координат имеют место соотношения

$$z_{\rho_0 \cdot \varepsilon} = e^{i\phi(\varepsilon)} z_\varepsilon, \quad z_{\rho_1 \cdot \varepsilon} = \ell(\varepsilon) - z_\varepsilon.$$

Числа  $\ell(\varepsilon)$  и  $\phi(\varepsilon)$  должны удовлетворять некоторым соотношениям, гарантирующим, что каждая 2-клетка метрически — замкнутый многоугольник. В простейших случаях, которые мы собираемся рассматривать, эти соотношения очевидны.

Для каждого рисунка  $\mathcal{D}$  обозначим

$$\text{Met}(\mathcal{D}) \subset \mathbb{R}^{\vec{E}(\mathcal{D})} \times (0, 2\pi)^{\vec{E}(\mathcal{D})}$$

множество метрических структур на поверхности  $\mathbf{X}_2$ , на которую помещён рисунок  $\mathcal{D}$ . Затем обозначим, как обычно, через  $\mathcal{DESS}$  категорию рисунков, а через  $\mathbf{DESS}$  множество классов изоморфности рисунков, разложенное по родам:

$$\mathbf{DESS} = \coprod_{g=0}^{\infty} \mathbf{DESS}_g.$$

Рассмотрим для каждого  $g \in \mathbb{N}$  множество

$$\text{PE}_g := \bigcup_{[\mathcal{D}] \in \mathbf{DESS}_g} \text{Met}(\mathcal{D})$$

кусочно-евклидовых структур на поверхности рода  $g$ . На нём есть структура бесконечномерного вещественного многообразия с краем, но мы её использовать не будем.

## 2. Основная теорема

В предыдущем разделе мы поставили в соответствие каждой метрике  $\mu \in \text{PE}_g$  множество локальных голоморфных координат  $\{z_\varepsilon\}$ , определив тем самым отображение

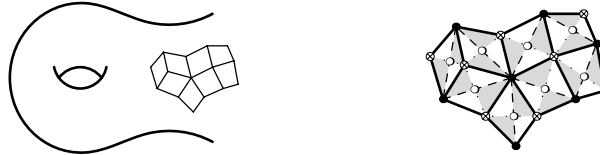
$$\text{compl}_g : \text{PE}_g \rightarrow \mathcal{M}_g(\mathbb{C}),$$

преобразующее метрические структуры в комплексные. Оно сюръективно, поскольку на каждой римановой поверхности имеется *штребелев дифференциал* (см. [7]) и потому она может быть разрезана на прямоугольники.

Нас, однако, интересуют  $\text{compl}_g$ -образы некоторых счётных подмножеств множества  $\text{PE}_g$ . Введём множество  $\Delta_g \subset \text{PE}_g$  *равносторонних триангуляций* (определённых функциями  $\ell \equiv 1$ ,  $\phi \equiv \pi/3$ ) и множество  $\square_g \subset \text{PE}_g$  *разбиений на квадраты* (здесь  $\ell \equiv 1$ ,  $\phi \equiv \pi/2$ ). В [1] было доказано, что  $\text{compl}_g(\Delta_g) = \mathcal{M}_g(\bar{\mathbb{Q}})$ . Целью настоящей работы является установление аналогичного результата для разбиений на квадраты.

**Теорема.** *Имеет место равенство  $\text{compl}_g(\square_g) = \mathcal{M}_g(\bar{\mathbb{Q}})$ . Иначе говоря, комплексная кривая  $\mathbf{X}$  может быть определена над полем алгебраических чисел тогда и только тогда, когда её комплексная структура может быть задана кусочно-евклидовой метрикой, в которой риманова поверхность  $\mathbf{X}$  является объединением квадратов.*

**Доказательство.** Часть «тогда». Разделим каждый квадрат диагоналями на четыре прямоугольных равносторонних треугольника и раскрасим их следующим образом.



А именно, введём на поверхности  $\mathbf{X}$  *трёхцветную триангуляцию*<sup>1</sup> (см. [5]), т. е. рисунок  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_2 \supset \mathbf{X}_1 \supset \mathbf{X}_0$ , снабжённый *отображением раскраски*

$$\text{col}_3 : \mathbf{X}_1 \rightarrow \{\text{blue, green, red}\},$$

постоянным на рёбрах. Требуется, чтобы

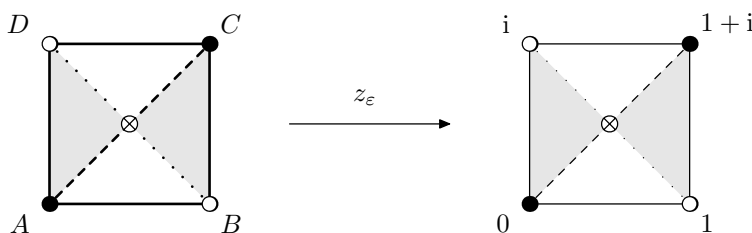
- 1) любая вершина была инцидентна рёбрам ровно двух цветов;
- 2) любое ребро имело две вершины в замыкании;
- 3) любая грань имела три ребра в замыкании, раскрашенных попарно различно.

<sup>1</sup>Цветные рисунки можно увидеть в [6], здесь цвета обозначены следующим образом: зелёное ребро — сплошная линия, синее ребро — пунктирная линия, красное ребро — последовательность точек, зеленая вершина — крест, синяя вершина — белая, красная вершина — чёрная.

Для каждого квадрата с вершинами  $A, B, C, D \in \mathbf{X}_0$  обозначим  $\varepsilon$  направленное ребро от  $A$  к  $B$ ; в приведённых выше обозначениях это читается как  $[\varepsilon]_0 = A$  и  $[\rho_1 \cdot \varepsilon]_0 = B$ . Имеют место соотношения  $[\rho_2 \cdot \varepsilon]_0 = C$  и  $[\rho_2^3 \cdot \varepsilon]_0 = D$ , а голоморфная координата  $z_\varepsilon$  удовлетворяет равенствам

$$z_\varepsilon(A) = 0, \quad z_\varepsilon(B) = 1, \quad z_\varepsilon(C) = 1 + i, \quad z_\varepsilon(D) = i.$$

Обозначим  $O$  пересечение диагоналей квадрата  $ABCD$ , тогда  $z_\varepsilon(O) = (1 + i)/2$ .

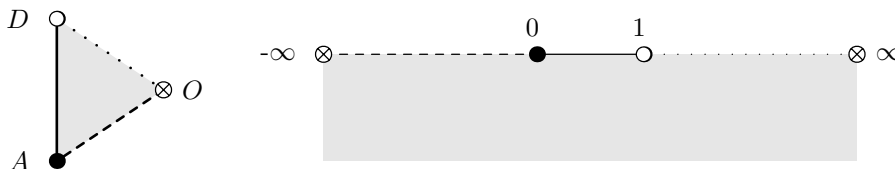


Теперь мы можем определить функцию Белого  $\beta: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{P}_1(\mathbb{C})$ , потребовав, чтобы её ограничение на внутренность треугольника  $AOD$  осуществляло конформную эквивалентность с нижней полуплоскостью  $\mathcal{L} := \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(w) < 0\}$ :

$$\beta|_{AOD}: AOD \xrightarrow{\cong} \mathcal{L},$$

удовлетворяя граничным условиям

$$\beta(O) = -\infty, \quad \beta(A) = 0, \quad \beta(D) = 1.$$



Такая функция  $\beta$  с помощью интеграла Кристоффеля—Шварца (см., например, [4]) может быть выписана явно в терминах голоморфной координаты  $z_\varepsilon$ : для точки  $P$  внутри рассматриваемого треугольника  $AOD$

$$z(P) = i \frac{\int_0^{\beta(P)} \frac{dw}{\sqrt[4]{w^3(1-w)^3}}}{\int_0^1 \frac{dw}{\sqrt[4]{w^3(1-w)^3}}}.$$

Из общих принципов геометрической теории функций следует, что такие  $\beta$ , определённые потреугольно, являются ограничениями глобально определённой мероморфной функции на  $\mathbf{X}$ , отображающей белые треугольники на верхнюю полуплоскость, а чёрные — на нижнюю. Эта функция осуществляет конформное отображение вне вершин и поэтому ветвится только над  $0, 1, \infty$ , являясь, следовательно, функцией Белого. Утверждение следует поэтому из лёгкой половины теоремы Белого.

Часть «только тогда». Теперь предположим, что комплексная кривая  $\mathbf{X}$  определена над  $\mathbb{Q}$ . Тогда в соответствии с [1] она может быть реализована как объединение равносторонних треугольников, так что на ней существует такой рисунок  $\mathcal{D}$  с  $\rho_2^3 \equiv 1$  и метрическими параметрами  $\ell \equiv 1$ ,  $\varphi \equiv \pi/3$ , что определяемая им комплексная структура изоморфна  $\mathbf{X}$ . Обозначив  $\beta_0$  исходную функцию Белого, соответствующую равносторонней триангуляции, введём

$$\beta := \frac{4}{27} \frac{(\beta_0^2 - \beta_0 + 1)^3}{\beta_0^2(1 - \beta_0)^2}.$$

Это тоже функция Белого, и переход от  $\beta_0$  к  $\beta$  соответствует барицентрическому подразделению исходной триангуляции.

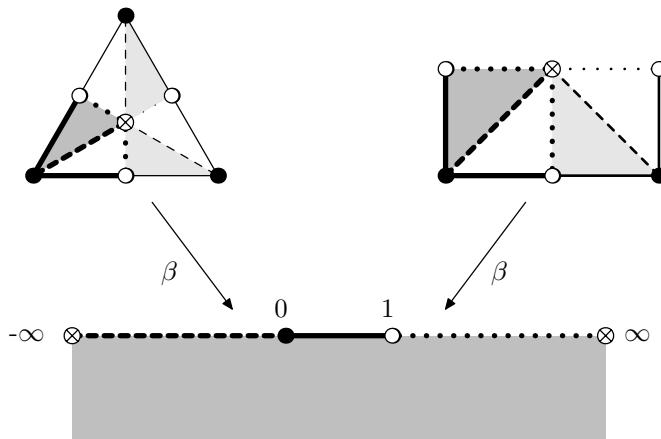
В локальных координатах  $\{z_\varepsilon \mid \varepsilon \in \vec{E}(\mathcal{D})\}$ , построенных как выше, композиционно обратная функция к функции Белого  $\beta$  задаётся интегралом Кристоффеля—Шварца

$$z_\varepsilon(P) = \frac{\int_0^{\beta(P)} \frac{dw}{\sqrt[6]{w^5(1-w)^3}}}{\int_0^1 \frac{dw}{\sqrt[6]{w^5(1-w)^3}}}.$$

«Квадратные» локальные координаты  $\{Z_\varepsilon \mid \varepsilon \in \vec{E}(\mathcal{D})\}$  определяются другим интегралом Кристоффеля—Шварца:

$$Z_\varepsilon(P) = \frac{\int_0^{\beta(P)} \frac{dw}{\sqrt[4]{w^3(1-w)^2}}}{\int_0^1 \frac{dw}{\sqrt[4]{w^3(1-w)^2}}}.$$

Преобразование  $z_\varepsilon \rightarrow Z_\varepsilon$  глобально определено на  $\mathbf{X}$  и реализует переход от равносторонних треугольников к квадратам.  $\square$



## Литература

- [1] Воеводский В. А., Шабат Г. Б. Равносторонние триангуляции римановых поверхностей и кривые над полями алгебраических чисел // ДАН СССР. — 1989. — Т. 304, № 2. — С. 265—268.
- [2] Grothendieck A. Esquisse d'un Programme // Geometric Galois Actions 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme / P. Lochak, L. Schneps, eds. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 242). — P. 5—48.
- [3] Kontsevich M. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function // Commun. Math. Phys. — 1992. — Vol. 147. — P. 1—23.
- [4] Nehari Z. Conformal Mapping. — New York: Dover, 1982.
- [5] Shabat G. Counting Belyi pairs over finite fields // 2016 MATRIX Annals / D. R. Wood, J. de Gier, Ch. E. Praeger, T. Tao, eds. — Cham: Springer, 2018. — P. 305—322.
- [6] Shabat G. Square-tiled surfaces and curves over number fields. — 2022. — [arXiv: 2212.07755](https://arxiv.org/abs/2212.07755).
- [7] Strebel K. Quadratic Differentials. — Berlin: Springer, 1984. — (A Ser. Modern Surveys Math.; Vol. 5).
- [8] Zorich A. Flat surfaces // Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry. Vol. I / P. Cartier, B. Julia, P. Moussa, P. Vanhove, eds. — Berlin: Springer, 2006. — P. 439—586.

