Алгебраические и комбинаторные свойства характеров Джека

А. К. ВОРОНИН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: andrej_765@mail.ru

А. Л. КАНУННИКОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: andrew.kanunnikov@gmail.com

УДК 512.62

Ключевые слова: диаграммы Юнга, симметрические функции, полиномы Джека, характеры Джека.

Аннотация

В статье исследована матрица характеров Джека. Найдены формулы для её определителя, вычислены корни этого определителя как многочлена от параметра Джека α, дана комбинаторная интерпретация их кратностей. Также вычислен второй столбец этой матрицы. Исследованы матрицы перехода между мономиальным, степенным базисами и базисом полиномов Джека, в произведение которых раскладывается матрица характеров Джека. Найдены рекуррентные формулы для вычисления некоторых элементов этих матриц.

Abstract

A. K. Voronin, A. L. Kanunnikov, Algebraic and combinatorial properties of Jack characters, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 3, pp. 3—25.

We investigate the Jack character matrix. Formulas for its determinant are derived, its roots as a polynomial in terms of α are found, a combinatorial interpretation of their multiplicities is given. The second column of this matrix is computed. We also investigate matrices of transitions between the monomial, power, and Jack polynomial bases, into which the Jack character matrix is decomposed, in particular; we establish recursive formulas for computing some elements of these matrices.

Введение

В 1970 году шотландский математик Генри Джек ввёл семейство симметрических функций, зависящих от параметра $\alpha > 0$, впоследствии названных его именем [3]. Функции Джека естественным образом обобщают функции Шура (получаемые после некоторой нормировки при $\alpha = 1$) и зональные функции (получаемые при $\alpha = 2$). Коэффициенты разложения многочленов Шура по степенному базису $(p_\mu)_\mu$ пропорциональны характерам неприводимых представлений

Фундаментальная и прикладная математика, 2025, том 25, № 3, с. 3—25.

симметрической группы (классический результат Шура): $s_\lambda = \sum\limits_{\mu \vdash n} z_\mu^{-1} \chi_\mu^\lambda p_\mu$. Коэффициентам разложения $\theta_\lambda^\mu(\alpha)$ многочленов Джека по тому же базису также присущи некоторые свойства характеров: например, они ортогональны, поэтому их назвали характерами Джека. Они образуют базис алгебры функций на диаграммах Юнга. Характеры Джека $\theta_\lambda^\mu(\alpha)$ и связанные с ними алгебраические объекты активно изучаются последние десятилетия [1, 4—6]. В частности, установлено, что они являются многочленами с целыми коэффициентами от α, найдены явные формулы для их вычисления для некоторых разбиений [5, 6].

В данной работе найдены формулы для определителя матрицы характеров Джека, в частности его корни как многочлена от α, дана комбинаторная интерпретация их кратностей. Также вычислен второй столбец данной матрицы. В заключительном разделе исследованы матрицы перехода между мономиальным, степенным базисами и базисом полиномов Джека, в произведение которых раскладывается матрица характеров Джека. Найдены рекуррентные формулы для вычисления некоторых элементов этих матриц.

1. Предварительные сведения и результаты

1.1. Разбиения

Разбиением называется конечная неубывающая последовательность натуральных чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$. Приняты стандартные обозначения:

- $|\lambda| = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i$ — *мощность разбиения* λ;
- $l(\lambda) = m$ — *длина разбиения* λ;
- $m_i(\lambda)$ — количество частей разбиения λ, равных i;
- $\lambda = [1^{m_1(\lambda)} 2^{m_2(\lambda)} \ldots]$ — другая запись разбиения;
- C_λ — класс сопряжённости в группе S_n, состоящий из перестановок с цикловым типом λ;
- $z_\lambda = \prod\limits_i i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)! = n!/|C_\lambda|$ — мощность централизатора перестановки из C_λ;
- $\mathcal{P}$ — множество всех разбиений, $\mathcal{P}(n)$ — множество разбиений мощности n, $\lambda \vdash n \iff \lambda \in \mathcal{P}(n)$;
- $p(n) = |\mathcal{P}(n)|$;
- $\varepsilon_\lambda = (-1)^{|\lambda| - l(\lambda)}$ — знак перестановок из C_λ.

На множестве $\mathcal{P}(n)$ используются следующие частичные порядки.

Лексикографический: $\lambda \succcurlyeq \mu$, если $\lambda = \mu$ или если первая ненулевая разность $\lambda_i - \mu_i$ положительна. Это линейный порядок. Пример для $n = 5$:

$$[1^5] \prec [21^3] \prec [2^2 1] \prec [31^2] \prec [32] \prec [41] \prec [5].$$

Натуральный (естественный): $\lambda \geqslant \mu$, если $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i \geqslant \mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_i$ для всех i.

Порядок утоньшения ($\geqslant_R$): разбиение $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_k]$ тоньше разбиения μ (обозначение $\lambda \geqslant_R \mu$), если части разбиения μ можно разбить на k групп так, что сумма частей в первой равна λ_1, во второй — $\lambda_2, \ldots$, в k-й — λ_k.

Замечание 1. Хорошо известно (см., например, [5]), что:

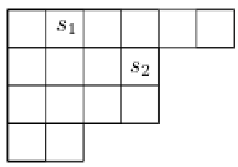
1) $\lambda \geqslant_R \mu$, что влечёт $\lambda \geqslant \mu$, откуда следует $\lambda \succcurlyeq \mu$;
2) натуральный порядок и порядок утоньшения являются частичными. Например, при $n=6$ разбиения $[31^3]$ и $[2^3]$ не сравнимы в порядке $\geqslant$;
3) если $l(\pi)=l(\lambda)$ и $\pi \neq \lambda$, то они не сравнимы в порядке $\geqslant_R$.

Разбиения удобно рассматривать как $|\lambda|$ квадратных ячеек, выстроенных в $l(\lambda)$ рядов так, что i-й ряд содержит λ_i ячеек. Такое представление называется *диаграммой Юнга* разбиения λ.

Транспонированной диаграммой Юнга называется диаграмма, в которой ячейки выстраиваются не по строкам, а по столбцам. Соответствующее разбиение обозначается λ^{T}.

Для каждой ячейки s диаграммы Юнга разбиения λ положим: $a(s)$ — количество ячеек справа от s; $a'(s)$ — количество ячеек слева от s; $l(s)$ — количество ячеек под s; $l'(s)$ — количество ячеек над s. Например:

$$\lambda=(6,4,4,2),\ |\lambda|=16,\ l(\lambda)=4$$



$$a(s_1)=4,\ a'(s_1)=1,\ l(s_1)=3,\ l'(s_1)=0$$
$$a(s_2)=0,\ a'(s_2)=3,\ l(s_2)=1,\ l'(s_2)=1$$

Крюком ячейки s диаграммы Юнга называется множество ячеек, в которое входят ячейки, расположенные справа от неё, под ней, а также она сама. Для каждого разбиения λ вводятся следующие многочлены от одной переменной α, называющиеся *крюковыми*:

$$\begin{aligned} h_\lambda(\alpha) &= \prod_{s\in\lambda}(\alpha a(s)+l(s)+1),\\ h'_\lambda(\alpha) &= \prod_{s\in\lambda}(\alpha a(s)+l(s)+\alpha),\\ \tilde h_\lambda(\alpha) &= \prod_{s\in\lambda,\ a(s)\neq 0}(\alpha a(s)+l(s)+1),\\ \tilde h'_\lambda(\alpha) &= \prod_{s\in\lambda,\ l(s)\neq 0}(\alpha a(s)+l(s)+\alpha). \end{aligned} \tag{1}$$

1.2. Симметрические многочлены

Обозначим через $\Lambda^n(x_1, \ldots, x_k)$ пространство однородных симметрических многочленов степени n от $k \geqslant n$ переменных $x_1, \ldots, x_k$. В этом пространстве имеются следующие базисы, индексированные разбиениями $\lambda \vdash n$ (см. [5]).

1. Мономиальный базис. *Мономиальным симметрическим многочленом* $m_\lambda(x)$ называется сумма многочленов из S_k-орбиты монома $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots$. Например, для $n = k = 3$ мономиальный базис состоит из многочленов

$$\begin{aligned}
&m_{[1^3]}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3,\\
&m_{[21]}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2,\\
&m_{[3]}(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3.
\end{aligned}$$

2. Степенной базис. Для каждого натурального числа m определяется *степенной многочлен* $p_r(x) = x_1^r + x_2^r + \ldots + x_k^r$. Пусть $\lambda \vdash n$. Тогда произведение $p_\lambda(x) = p_{\lambda_1}(x) \cdot p_{\lambda_2}(x) \cdot \ldots$ называется *степенным многочленом*, соответствующим разбиению λ. Например, для $n = k = 3$ степенной базис состоит из многочленов

$$\begin{aligned}
&p_{[1^3]}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^3 = m_{[3]} + 3m_{[21]} + 6m_{[1^3]},\\
&p_{[21]}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1 + x_2 + x_3) = m_{[3]} + m_{[21]},\\
&p_{[3]}(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = m_{[3]}.
\end{aligned}$$

3. Базис из *многочленов Шура*. Многочленом Шура, соответствующим разбиению λ, называется многочлен

$$s_\lambda(x) = \frac{\det(x_i^{\lambda_j + k - j})_{i,j=1}^k}{\det(x_i^{k-j})_{i,j=1}^k}.$$

Это однородный симметрический многочлен степени $|\lambda|$. Например, для $n = k = 3$ базис многочленов Шура состоит из многочленов

$$\begin{aligned}
&s_{[1^3]}(x_1, x_2, x_3) = m_{[1^3]}(x_1, x_2, x_3),\\
&s_{[21]}(x_1, x_2, x_3) = 2m_{[1^3]}(x_1, x_2, x_3) + m_{[21]}(x_1, x_2, x_3),\\
&s_{[3]}(x_1, x_2, x_3) = m_{[1^3]}(x_1, x_2, x_3) + m_{[21]}(x_1, x_2, x_3) + m_{[3]}(x_1, x_2, x_3).
\end{aligned}$$

Замечание 2. Справедливы следующие утверждения [5]:

а) при лексикографическом упорядочении матрица перехода от s_λ к m_λ является верхнетреугольной, а матрица перехода от p_λ к m_λ является нижнетреугольной;

б) многочлены Шура образуют ортонормированный базис относительно следующего скалярного произведения:

$$\langle p_\lambda,\, p_\mu \rangle_1 = z_\lambda \delta_{\lambda\mu};$$

в) имеется связь между многочленами Шура и представлениями группы S_n:

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} \frac{\chi_\mu^\lambda}{z_\mu} p_\mu,$$

где χ_μ^λ — значение неприводимого характера, соответствующего классу сопряжённости C_λ, на перестановке из класса сопряжённости C_μ.

4. Базис из *зональных многочленов* Z_λ, связанный с теорией зональных сферических функций. Зональные многочлены обладают следующими свойствами, схожими со свойствами функций Шура:

а) в лексикографическом порядке матрица перехода от Z_λ к m_λ является верхнетреугольной;

б) зональные многочлены образуют ортогональный базис относительно следующего скалярного произведения: $\langle p_\lambda,\, p_\mu\rangle_2 = 2^{l(\lambda)} z_\lambda \delta_{\lambda\mu}$.

5. Базис из *многочленов Джека* $J_\lambda(x;\alpha)$, к которому приводит задание скалярного произведения с помощью параметра Джека α:

$$\langle p_\lambda,\, p_\mu\rangle = \langle p_\lambda,\, p_\mu\rangle_\alpha = \alpha^{l(\lambda)} z_\lambda \delta_{\lambda\mu}.$$

Многочлены Джека можно определить разными способами. Например, они характеризуются следующими свойствами:

(P1) (ортогональность) $\langle J_\lambda(\alpha), J_\mu(\alpha)\rangle = 0$ при $\lambda \neq \mu$;

(P2) (верхнетреугольность) $J_\lambda(\alpha) = \sum\limits_{\mu \succcurlyeq \lambda} \nu_{\mu\lambda}(\alpha) m_\mu$;

(P3) (нормализация) $[m_\lambda] J_\lambda(\alpha) = \nu_{\lambda\lambda}(\alpha) = h_\lambda(\alpha)$.

Отметим, что $J_\lambda(1) = h_\lambda(1) s_\lambda$, $J_\lambda(2) = Z_\lambda$, $\langle J_\lambda(\alpha),\, J_\lambda(\alpha)\rangle = h_\lambda(\alpha)\, h'_\lambda(\alpha)$ [6].

Характерами Джека $\theta_\mu^\lambda(\alpha)$ называются коэффициенты перехода от базиса $J_\lambda(\alpha)$ к p_λ:

$$J_\lambda(\alpha) = \sum_{\mu \vdash n} \theta_\mu^\lambda(\alpha) p_\mu.$$

Известно [1], что $\theta_\mu^\lambda(\alpha)$ являются многочленами с целыми коэффициентами от α.

Выпишем ряд соотношений, полученных Р. Стенли [6]:

$$\theta_{[1^n]}^\lambda(\alpha) = 1, \tag{2}$$

$$\theta_{[1^{n-2}2^1]}^\lambda(\alpha) = \sum_{s\in\lambda} \bigl(\alpha a'(s) - l'(s)\bigr), \tag{3}$$

$$\theta_{(n)}^\lambda(\alpha) = \prod_{s\in\lambda\setminus\{(1,1)\}} \bigl(\alpha a'(s) - l'(s)\bigr), \tag{4}$$

$$\theta_\mu^\lambda(\alpha) = \varepsilon_\mu\, \alpha^{n-\ell(\mu)} \theta_\mu^{\lambda^{\mathrm{T}}}(\alpha^{-1}), \tag{5}$$

$$\theta_\mu^{[1^n]}(\alpha) = \frac{n!}{z_\mu} \varepsilon_\mu. \tag{6}$$

Рассмотрим матрицу $\Theta_n(\alpha) = \big(\theta^\lambda_\mu(\alpha)\big)_{\lambda,\mu\vdash n}$, в которой порядок строк и столбцов определяется лексикографическим порядком. Рассмотренные выше формулы позволяют вычислить первую, вторую и последнюю строки данной матрицы, а также первый и последний столбцы. Этого достаточно для вычисления $\Theta_n(\alpha)$ при малых значениях n:

$$\begin{array}{cc} n=2 & n=3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & \alpha-1 & 3\alpha \\ 2 & -\alpha & 2\alpha^2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Введём обозначения для матриц перехода между различными базисами пространства симметрических функций, принятые в [5].

Пусть u_λ, v_λ — два базиса векторного пространства. Матрицу перехода от u_λ к v_λ будем обозначать $M(u,v)$. Тогда $\Theta_n(\alpha) = M(J(\alpha),p) = M(m,p)\cdot S(\alpha)$, $S(\alpha) = M(J(\alpha),m)$.

2. Определитель и комбинаторные свойства матрицы $\Theta_n(\alpha)$

Сформулируем две основные теоремы, которые мы докажем в этом разделе.

Теорема 1. *Справедливы следующие формулы для определителя матрицы характеров*:

$$\det\Theta_n(\alpha) = \prod_\lambda \tilde h_\lambda(\alpha), \tag{7}$$

$$\det\Theta_n(\alpha) = \prod_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \big((\lambda_i-1)!\big) \prod_{i,j\in\mathbb{N},\ (i,j)=1} \left(\alpha + \frac{i}{j}\right)^{\varphi_n(i+j)},$$

где $\varphi_n(t) = \sum\limits_{k\leqslant n/t} \sigma(k)\cdot p(n-kt)$, $\sigma(k)$ *— количество делителей числа* k.

Доказательство теоремы 1 будет основано на другом результате для разбиений, который интересен сам по себе.

Пусть $a, l \in \mathbb{N}_0$. Скажем, что ячейка s диаграммы Юнга $\lambda \in \mathcal{P}$ имеет тип (a,l), если $a(s) = a$, $l(s) = l$. Определим множество

$$H(n;a,l) = \{(\lambda,s) \mid \lambda\vdash n,\ s\in\lambda,\ a(s)=a,\ l(s)=l\}.$$

Теорема 2. *Для всех* $n,a,l\in\mathbb{N}_0$ *верно равенство*

$$|H(n;a,l)| = \sum_{k=1}^{[n/(a+l+1)]} p\big(n-k(a+l+1)\big).$$

В этом разделе мы будем в основном работать с диаграммами Юнга разбиений, и нам будет полезно ввести следующие соглашения.

1. Будем считать, что диаграмма Юнга содержит нулевые строку и столбец, в которых расположено ∞ ячеек. При этом длины строк всё также будут упорядочены сверху вниз по нестрогому убыванию, а длины столбцов будут упорядочены слева направо по нестрогому убыванию. Мы также положим $\lambda_0 = \infty$.
2. Если $i > l(\lambda)$, будем считать, что $\lambda_i = 0$. Таким образом, мы формально добавляем счётное число нулевых слагаемых в разбиение, сохраняя порядок.

Перед доказательством теоремы 2 мы рассмотрим лемму, доказывающуюся проще, но со схожей идеей (лемма приведена в [5] в качестве упражнения, но авторам не удалось найти доказательства в литературе).

Для натуральных чисел n и k введём множества

$$F(n,k) = \{(\lambda, i) \in \mathcal{P}_n \times \mathbb{N} \mid \lambda_i = k\},$$
$$G(n,k) = \{(\lambda, i) \in \mathcal{P}_n \times \mathbb{N} \mid m_i(\lambda) \geqslant k\}.$$

Лемма 1. *Для всех $n, k \in \mathbb{N}$ верны равенства*

$$|F(n,k)| = |G(n,k)| = \sum_{i=1}^{[n/k]} p(n-ik).$$

Доказательство. При $n < k$ обе части доказываемых равенств равны 0, а при $n = k$ они равны 1 с учётом соглашения $p(0) = 1$. Далее считаем, что $n > k$.

Докажем второе равенство. Для каждого $i \in \mathbb{N}_0$ введём множество $G_i(n,k)$ разбиений числа n, в которых слагаемое i встречается хотя бы k раз:

$$G_i(n,k) = \{\lambda \vdash n \mid m_i(\lambda) \geqslant k\};$$

в частности, $G_0(n,k) = \mathcal{P}_n$. При $i \geqslant 1$ каждому разбиению $\lambda \in G_i(n,k)$ поставим в соответствие разбиение $\lambda' \vdash n-k$, полученное из λ уменьшением ровно k частей, равных i, на единицу. В разбиении λ' хотя бы k частей равны $i-1$, при этом соответствие $\lambda \mapsto \lambda'$ устанавливает биекцию между множествами $G_i(n,k)$ и $G_{i-1}(n-k,k)$, следовательно,

$$|G_i(n,k)| = |G_{i-1}(n-k,k)|.$$

Применяя это равенство i раз, получаем

$$|G_i(n,k)| = |G_0(n-ik,k)| = |\mathcal{P}_{n-ik}| = p(n-ik).$$

Суммируя по $i \geqslant 1$, получаем требуемое равенство:

$$|G(n,k)| = \sum_{i\geqslant 1} |G_i(n,k)| = \sum_{i\geqslant 1} p(n-ik).$$

Докажем аналогичное равенство для $|F(n,k)|$. Введём следующие множества:

$$F_i(n,k) = \{\lambda \vdash n \mid \lambda_i = k\}, \quad i \in \mathbb{N},$$
$$F^{\lambda}(n,k) = \{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i = k\}, \quad \lambda \vdash n.$$

Каждому разбиению $\lambda \in F_i(n,k)$ поставим в соответствие разбиение $\bar{\lambda} \vdash n-k$, полученное из λ удалением одного слагаемого, равного k. Образ этого отображения состоит из разбиений числа $n-k$, в которые перед i-м слагаемым можно вставить k. Вообще, чтобы в некоторое разбиение λ можно было вставить слагаемое k на i-е место, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\lambda_{i-1} \geqslant k \geqslant \lambda_i$ (по нашим соглашениям это верно также в случаях, когда в λ только $i-1$ слагаемое (тогда $\lambda_i = 0$) и когда $i = 1$ (тогда $\lambda_{i-1} = \lambda_0 = \infty$)). Введём множества

$$\begin{aligned} \bar{F}(n,k) &= \{(\lambda, i) \in \mathcal{P}_n \times \mathbb{N} \mid \lambda_{i-1} \geqslant k \geqslant \lambda_i\}, \\ \bar{F}_i(n,k) &= \{\lambda \vdash n \mid \lambda_{i-1} \geqslant k \geqslant \lambda_i\}, \quad i \in \mathbb{N}, \\ \bar{F}^\lambda(n,k) &= \{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_{i-1} \geqslant k \geqslant \lambda_i\}, \quad \lambda \vdash n. \end{aligned}$$

Поскольку разбиения из $F_i(n,k)$ при удалении слагаемого k биективно переходят в разбиения из $\bar{F}_i(n-k,k)$, то

$$|F_i(n,k)| = |\bar{F}_i(n-k,k)|. \tag{8}$$

Докажем, что для всех $\lambda \vdash n$

$$|\bar{F}^\lambda(n,k)| = |F^\lambda(n,k)| + 1. \tag{9}$$

По определению множеств $F^\lambda(n,k)$ и $\bar{F}^\lambda(n,k)$ имеем $F^\lambda(n,k) \subseteq \bar{F}^\lambda(n,k)$ и

$$\bar{F}^\lambda(n,k) \setminus F^\lambda(n,k) = \{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_{i-1} \geqslant k > \lambda_i\}.$$

Это множество, очевидно, состоит из одного номера i (включая случай, когда все слагаемые в λ меньше k, и тогда $i = 1$). Равенство (9) доказано. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} |F(n,k)| &= \sum_{i \geqslant 1} |F_i(n,k)| \overset{(8)}{=} \left| \sum_{i \geqslant 1} \bar{F}_i(n-k,k) \right| = |\bar{F}(n-k,k)| = \\ &= \sum_{\lambda \vdash n-k} |\bar{F}^\lambda(n-k,k)| \overset{(9)}{=} \sum_{\lambda \vdash n-k} (|F^\lambda(n-k,k)| + 1) = |F(n-k,k)| + p(n-k). \end{aligned}$$

Итерируя это равенство, получаем требуемое:

$$|F(n,k)| = \sum_{i \geqslant 1} p(n-ik). \qquad \square$$

Следствие 1. *Произведение* $\prod\limits_\lambda z_\lambda = \prod\limits_\lambda \prod\limits_i i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)!$ *является полным квадратом, причём* $\prod\limits_\lambda \prod\limits_i i^{m_i(\lambda)} = \prod\limits_\lambda \prod\limits_i m_i(\lambda)!$.

Доказательство.

$$\prod_\lambda \prod_i i^{m_i(\lambda)} = \prod_i \prod_\lambda i^{m_i(\lambda)} = \prod_i i^{|F(n,k)|} = \prod_i i^{|G(n,k)|} = \prod_\lambda \prod_i m_i(\lambda)!. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 2. Начнём со случая $l = 0$. Множество $H(n; a, 0)$ находится в биективном соответствии с множеством

$$X(n, a) = \{(\lambda, i) \in \mathcal{P}_n \times \mathbb{N} \mid \lambda_i - \lambda_{i+1} \geqslant a + 1\} :$$

паре $(\lambda, s) \in H(n; a, 0)$ соответствует пара (λ, i), где i — номер строки, содержащей ячейку s. Обозначим

$$X_i(n, a) = \{\lambda \vdash n \mid \lambda_i - \lambda_{i+1} \geqslant a + 1\}, \quad i \in \mathbb{N}_0 \quad (X_0(n, a) = \mathcal{P}_n).$$

Каждому разбиению $\lambda \in X_i(n, a)$ поставим в соответствие разбиение λ', полученное из λ уменьшением слагаемого λ_i на $a + 1$. Тогда при $i \geqslant 1$ имеем $\lambda'_{i-1} - \lambda'_i \geqslant a + 1$, и соответствие $\lambda \to \lambda'$ устанавливает биекцию между множествами $X_i(n, a)$ и $X_{i-1}(n - a - 1, a)$, поэтому

$$|X_i(n, a)| = |X_{i-1}(n - a - 1, a)|, \quad i \geqslant 1.$$

Итерируя это равенство и учитывая, что $|X_0(m, a)| = |\mathcal{P}_m| = p(m)$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$, получаем

$$\begin{aligned} |H(n, a, 0)| = |X(n, a)| = \sum_{i \geqslant 1} |X_i(n, a)| = \sum_{i \geqslant 1} |X_{i-1}(n - a - 1, a)| = \\ = p(n - a - 1) + \sum_{i \geqslant 1} |X_i(n - a - 1, a)| = \sum_{i \geqslant 1} p\big(n - i(a + 1)\big). \end{aligned}$$

Случай $a = 0$ сводится к случаю $l = 0$ транспонированием диаграмм Юнга.

Далее считаем, что $a, l > 0$. Числа a, l будем опускать в обозначениях: $H(n) = H(n, a, l)$ и т. д.

Пусть $s \in \lambda \in \mathcal{P}$, т. е. s — ячейка диаграммы Юнга λ. Номер её строки и номер её столбца в λ обозначим соответственно $x(s)$ (абсцисса) и $y(s)$ (ордината). Введём также обозначения

$$H_\lambda(s) = \big\{s' \in \lambda \mid \big(x(s') = x(s),\ y(s') \geqslant y(s)\big) \text{ или } \big(y(s') = y(s),\ x(s') \geqslant x(s)\big)\big\}$$
(крюк с головой s);

$Q_\lambda(s) = \{s' \in \lambda \mid x(s') \geqslant x(s) \text{ и } y(s') \geqslant y(s)\}$ (квадрант с головой s);

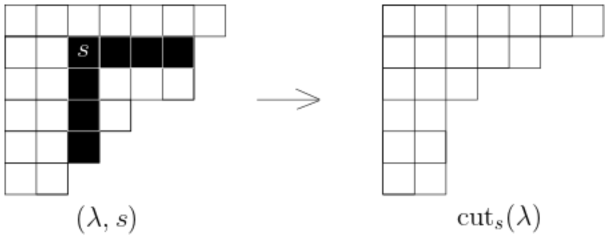
$Q^\circ_\lambda(s) = Q_\lambda(s) \setminus H_\lambda(s)$.

Для каждой клетки $s \in \mathbb{N}^2$ определим операцию cut_s удаления крюка с головой s: диаграмме Юнга λ, содержащей s, поставим в соответствие диаграмму

$$\mathrm{cut}_s(\lambda) = \lambda \setminus Q_\lambda(s) \cup \big(\nwarrow Q^\circ_\lambda(s)\big).$$

Иными словами, диаграмма $\mathrm{cut}_s(\lambda)$ получается из λ удалением крюка с головой s и сдвигом ячеек, лежащих справа и снизу от него, вверх и влево на одну клетку. Клетка s при этом либо лежит в диаграмме $\mathrm{cut}_s(\lambda)$, либо примыкает к ней.

Клетку $s \in \mathbb{N}^2$ назовём *подходящей* для диаграммы μ (не обязательно содержащей s), если μ получается из некоторой диаграммы λ удалением крюка



с головой s типа (a, l). Ясно, что при этом λ имеет вид

$$\big(\mu \setminus Q_\mu(s)\big) \cup \mathrm{hook}(s, a, l) \cup \searrow Q_\mu(s).$$

Чтобы это множество ячеек являлось диаграммой Юнга, необходимо и достаточно, чтобы его строки и столбцы были упорядочены по нестрогому убыванию. Требование на строки равносильно двойному неравенству $a_\mu(\uparrow s) \geqslant a > a_\mu(s)$. Если клетка s лежит в первой строке, то $a_\mu(\uparrow s) = +\infty$, а если $s \notin \mu$, то $a_\mu(s) = 0$ (соответствующие неравенства выполняются автоматически, так как принимают вид $+\infty \geqslant a$ и $a > 0$). Требование на столбцы равносильно неравенству $l_\mu(\leftarrow s) \geqslant l > l_\mu(s)$ (если s в первом столбце, то $l_\mu(\leftarrow s) = +\infty$, а если $s \notin \mu$, то $l_\mu(s) = 0$).

Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$B(n) = \{(\mu, s) \mid \mu \vdash n,\ s \text{ — подходящая клетка для } \mu\}.$$

Из предыдущих рассуждений вытекает, что

$$B(n) = \{(\mu, s) \mid \mu \vdash n,\ a_\mu(\uparrow s) \geqslant a > a_\mu(s),\ l_\mu(\leftarrow s) \geqslant l > l_\mu(s)\}. \tag{10}$$

Для данного разбиения λ определим множество его ячеек типа (a, l) и множество подходящих клеток:

$$H^\lambda = \{s \in \lambda \mid (\lambda, s) \in H(|\lambda|)\},$$
$$B^\lambda = \{s \in \mathbb{N}^2 \mid (\lambda, s) \in B(|\lambda|)\}.$$

Для данной клетки $s \in \mathbb{N}^2$ и числа $n \in \mathbb{N}$ определим множества разбиений числа n, для которых клетка s имеет тип (a, l) и для которых она является подходящей:

$$H_s(n) = \{\lambda \vdash n \mid (\lambda, s) \in H(n)\},$$
$$B_s(n) = \{\lambda \vdash n \mid (\lambda, s) \in B(n)\}.$$

Операция удаления крюка типа (a, l) с головой s устанавливает биекцию между множествами $H_s(n)$ и $B_s(n - a - l - 1)$, поэтому

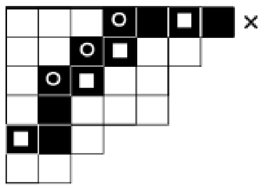
$$|H_s(n)| = |B_s(n - a - l - 1)|. \tag{11}$$

Зафиксируем произвольное разбиение $\lambda \in \mathcal{P}$ и докажем равенство

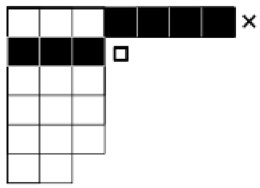
$$|B^\lambda| = |H^\lambda| + 1. \tag{12}$$

Определим следующий путь Path по клеткам в $\mathbb{N}^2$. Первой клеткой будет $s_1 = (\lambda_1 + 1, 1)$. Далее: пусть клетка $s_i = (x_i, y_i)$ нашего пути определена. Если $a(s_i) = a$, то делаем шаг вниз: $s_{i+1} = \downarrow s_i = (x_i, y_i + 1)$. Если $a(s_i) < a$, то шагаем влево: $s_{i+1} = \leftarrow s_i = (x_i - 1, y_i)$. Путь заканчивается, когда $a(s_i) < a$ и шаг влево сделать невозможно, т. е. $x_i = 1$.

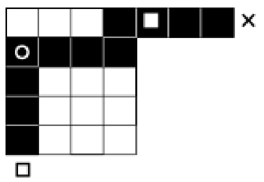
$\lambda = (7, 6, 5, 5, 3, 2)$, $a = 3$, $l = 3$



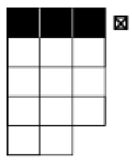
$\lambda = (7, 3, 3, 3, 3, 2)$, $a = 3$, $l = 3$



$\lambda = (7, 4, 4, 4)$, $a = 3$, $l = 3$



$\lambda = (3, 3, 3, 3, 2)$, $a = 3$, $l = 3$



Чёрными квадратами отмечены клетки пути, являющиеся ячейками разбиения, крестом — первая клетка пути, белыми квадратами обозначены подходящие клетки, а белыми кружками — ячейки типа (a, l).

Легко видеть, что $a(s) \leqslant a$ для каждой клетки s построенного пути. Далее мы покажем, что все ячейки типа (a, l) и подходящие клетки этого разбиения λ лежат на нашем пути. Более того, для множеств этих клеток верно следующее:

$$H^\lambda = \{s_i \in \mathrm{Path} \mid l(s_i) = l,\ l(s_{i+1}) < l\}, \tag{13}$$

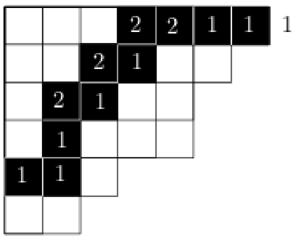
$$B^\lambda = \{s_i \in \mathrm{Path} \mid l(s_i) < l,\ \text{либо } s_i \text{ — последняя клетка, либо } l(s_{i+1}) = l\}. \tag{14}$$

Действительно, все клетки типа (a, l) лежат на пути, так как все клетки s, такие что $a(s) = a$, лежат на пути. При этом если $a(s_i) = a$ и $l(s_i) = l$, то $l(s_{i+1}) = l - 1$. Отсюда следует (13).

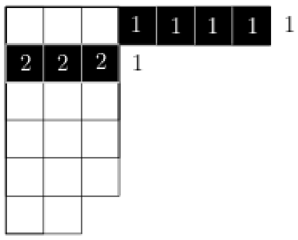
Согласно равенству (10) для подходящей клетки s выполняется $a(\uparrow s) \geqslant a$, а значит, в одной строке с s справа есть клетка пути, а из $a > a(s)$ следует, что тогда путь проходит и через саму клетку s. В обратную сторону: если для клеток пути $l(s_i) < l$ и $l(s_{i+1}) = l$ (или s_i — последняя клетка пути), то мы из клетки s_i двигались влево, а значит, $a > a(s_i)$, $a(\uparrow s) \geqslant a$ и $l(\leftarrow s) = l(s_{i+1}) = l$ ($l(\leftarrow s) = +\infty$ в случае, когда s_i последняя). Значит, все неравенства в критерии (10) выполняются и такие клетки пути являются подходящими. Таким образом, (14) тоже доказано.

Остаётся заметить, что все клетки пути делятся на две группы: в первой клетки s такие, что $l(s) < l$, а во второй такие, что $l(s) \geqslant l$. Из (14) видно, что клетки B^λ принадлежат второй группе и являются последними в пути или же за ними идёт клетка первой группы. Из (13) следует, что клетки H^λ принадлежат первой группе, а сразу же за ними обязательно идут клетки второй группы. При этом для первой ячейки пути верно $l(s_1) = 0$, так она не лежит в разбиении, а значит, s_1 в первой группе. Отсюда сразу же получаем (12).

$\lambda = (7, 6, 5, 5, 3, 2)$, $a = 3$, $l = 3$



$\lambda = (7, 3, 3, 3, 3, 2)$, $a = 3$, $l = 3$



Выше приведены иллюстрации, демонстрирующие разбиения клеток пути на группы для двух предыдущих примеров.

$$\begin{aligned}|H(n)| &= \sum_s |H_s(n)| \overset{(7)}{=} \sum_s |B_s(n-a-l-1)| = |B(n-a-l-1)| = \\ &= \sum_{\lambda \vdash n-a-l-1} |B^\lambda| \overset{(8)}{=} \sum_{\lambda \vdash n-a-l-1} (|H^\lambda| + 1) = \\ &= |H(n-a-l-1)| + p(n-a-l-1).\end{aligned}$$

Применяя предположение индукции к $|H(n-a-l-1)|$, получаем требуемое равенство. $\square$

Теперь докажем предложение, устанавливающее связь между многочленами $h_\lambda(\alpha)$, $h'_\lambda(\alpha)$, $\tilde{h}_\lambda(\alpha)$ и $\tilde{h'}_\lambda(\alpha)$.

Предложение 1.

$$\prod_\lambda h_\lambda(\alpha) = \sqrt{\prod_\lambda z_\lambda} \prod_\lambda \tilde{h}_\lambda(\alpha) = \sqrt{\prod_\lambda z_\lambda} \prod_\lambda \tilde{h'}_\lambda(\alpha) = \frac{\prod\limits_\lambda h'_\lambda(\alpha)}{\prod\limits_\pi \alpha^{l(\pi)}}. \tag{15}$$

Доказательство. Сначала установим равенства по краям. Тут мы используем следствие 1:

$$\begin{aligned}\prod_\lambda h_\lambda(\alpha) &= \prod_\lambda \prod_{s\in\lambda} (\alpha a(s) + l(s) + 1) = \prod_\lambda \tilde{h}_\lambda(\alpha) \cdot \prod_\lambda \prod_{s\in\lambda,\ a(s)=0} (l(s)+1) = \\ &= \prod_\lambda \tilde{h}_\lambda(\alpha) \cdot \prod_\lambda \prod_i m_i(\lambda)! = \prod_\lambda \tilde{h}_\lambda \sqrt{\prod_\lambda z_\lambda},\end{aligned}$$

$$\prod_\lambda h'_\lambda(\alpha) = \prod_\lambda \prod_{s\in\lambda} (\alpha a(s) + l(s) + \alpha) = \prod_\lambda \tilde{h}'_\lambda(\alpha) \cdot \prod_\lambda \prod_{s\in\lambda,\ l(s)=0} (\alpha a(s) + \alpha) =$$

$$= \prod_\lambda \tilde{h}'_\lambda(\alpha) \cdot \prod_\pi \prod_{s\in\pi,\ a(s)=0} \alpha \cdot \prod_\lambda \prod_{s\in\lambda,\ l(s)=0} (a(s)+1) \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \prod_\lambda \tilde{h}'_\lambda(\alpha) \cdot \prod_\pi \alpha^{l(\pi)} \cdot \prod_\lambda \prod_{s\in\lambda,\ a(s)=0} (l(s)+1) =$$

$$= \prod_\lambda \tilde{h}'_\lambda(\alpha) \cdot \prod_\pi \alpha^{l(\pi)} \cdot \prod_\lambda \prod_i m_i(\lambda)! = \prod_\lambda \tilde{h}'_\lambda(\alpha) \cdot \prod_\pi \alpha^{l(\pi)} \cdot \sqrt{\prod_\lambda z_\lambda},$$

$(*)$: операция транспонирования задаёт взаимно-однозначное соответствие между множествами $\{(\lambda, s) \mid a(s) = 0,\ l(s) = k\}$ и $\{(\lambda, s) \mid a(s) = k,\ l(s) = 0\}$, поэтому

$$\prod_\lambda \prod_{s\in\lambda,\ a(s)=0} (l(s)+1) = \prod_\lambda \prod_{s\in\lambda,\ l(s)=0} (a(s)+1).$$

Наконец, докажем среднее равенство, для которого нам понадобится вытекающее из теоремы 2 равенство $|H(n; a, l)| = |H(n; a-1, l+1)|$ при $a, l \in \mathbb{N}$, $a > 0$:

$$\prod_\lambda \tilde{h}_\lambda(\alpha) = \prod_\lambda \prod_{s\in\lambda,\ a(s)\neq 0} (\alpha a(s) + l(s) + 1) = \prod_{a\neq 0,\ l} (\alpha a + l + 1)^{|H(n;a,l)|} =$$

$$= \prod_{a\neq 0,\ l} (\alpha a + l + 1)^{|H(n;a-1,l+1)|} \overset{(**)}{=} \prod_{a,\ l\neq 0} (\alpha(a+1) + l)^{|H(n;a,l)|} =$$

$$= \prod_\lambda \prod_{s\in\lambda,\ l(s)\neq 0} (\alpha a(s) + l(s) + \alpha) = \prod_\lambda \tilde{h}'_\lambda(\alpha),$$

$(**)$: замена $(a-1, l+1) \to (a, l)$. □

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем формулу (7), используя следствие 1 и предложение 1:

$$\det \Theta_n(\alpha) = \det M(m, p) \cdot \det S(\alpha) =$$

$$= \prod_\lambda \prod_i \frac{1}{m_i(\lambda)} \cdot \prod_\lambda h_\lambda(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\prod_\lambda z_\lambda}} h_\lambda(\alpha) = \prod_\lambda \tilde{h}_\lambda(\alpha).$$

Теперь разберёмся с корнями полученного многочлена. В формуле выше перемножаются двучлены вида $\alpha a(s) + l(s) + 1$, $a(s) \neq 0$, имеющие отрицательные корни $-(l(s)+1)/a(s)$, где $a(s) + l(s) + 1 \leqslant n$. Поэтому все корни определителя имеют описанный в формулировке теоремы вид $-i/j$, $i, j \in \mathbb{N}$, $i + j \leqslant n$. Кратность корня $-i/j$, $(i, j) = 1$, равна количеству двучленов $\alpha j + i$, $\alpha 2j + 2i, \ldots$ в произведении, т. е. мощностям $|H(n; j, i-1)|$, $|H(n; 2j, 2i-21)|, \ldots$ соответственно. Из этого соображения получаем кратность корня:

$$\varphi_n(i+j) = \sum_{l \geqslant 1} |H(n; lj, li-1)| = \sum_{l \geqslant 1} \sum_{k=1} p\big(n - k(li + lj)\big) =$$
$$= \sum_{l \geqslant 1} \sum_{k=1} p\big(n - kl(i+j)\big) = \sum_{k=1}^{[n/(i+j)]} \sigma(k) \cdot p\big(n - k(i+j)\big). \quad \square$$

Гипотеза 1. Пусть α_0 — корень определителя $\det \Theta_n(\alpha)$. Тогда найдутся λ, μ, такие что $J_\lambda(\alpha_0) = J_\mu(\alpha_0)$.

Гипотеза 2. Пусть $\alpha_0 = -i/j$ — корень определителя $\det \Theta_n(\alpha)$. Тогда $J_\lambda(\alpha_0) = J_\mu(\alpha_0)$ тогда и только тогда, когда с учётом кратностей совпадают два множества чисел: $\{ia'(s) + jl'(s) \mid s \in \lambda\}$ и $\{ia'(s) + jl'(s) \mid s \in \mu\}$.

3. Некоторые столбцы матрицы $\Theta_n(\alpha)$

Формула (6), полученная Р. Стенли [6], даёт элементы первого столбца матрицы $\Theta_n(\alpha)$. Приведём комбинаторное доказательство этой формулы.

Доказательство. Обозначив через $\pi(\sigma)$ разбиение, задающее цикловой тип перестановки σ, преобразуем правую часть доказываемой формулы:

$$\sum_{\pi \vdash n} \frac{n!}{z_\pi} \varepsilon_\pi p_\pi = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon_\sigma \cdot p_{\pi(\sigma)} = \sum_{\sigma \in \mathrm{A}_n} p_{\pi(\sigma)} - \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n \setminus \mathrm{A}_n} p_{\pi(\sigma)}.$$

Каждой перестановке σ можем поставить в соответствие ориентированный граф на n пронумерованных вершинах, в котором ребро из вершины i в вершину j проводится тогда и только тогда, когда $\sigma(i) = j$. Раскраской такого графа назовём такое сопоставление каждой вершине «цвета» — числа от 1 до k, что вершины в одном цикле имеют одинаковый цвет.

Имеет место взаимно-однозначное соответствие между раскрасками графа σ и способами раскрыть скобки (то есть выбрать по одному слагаемому из каждой скобки) в степенном многочлене p_σ: каждому циклу графа соответствует некоторая скобка, из которой выбирается степень x_i, где i — цвет вершин цикла.

Рассмотрим произвольную перестановку и какую-нибудь её раскраску, использующую менее n различных цветов. Возьмём наименьшее i, такое что есть вершины такого же цвета, что и i, и выберем из них вершину с наименьшим номером j. Тогда поставим в соответствие раскраске перестановки σ раскраску перестановки $\sigma \cdot (i, j)$, в которой все вершины имеют те же цвета. Это отображение является инволюцией, тем самым мы нашли взаимно-однозначное соответствие между раскрасками чётных и нечётных перестановок, содержащих менее n цветов. При этом, так как при таком соответствии цвета вершин сохраняются, при раскрытии скобок соответствующие мономы сократятся.

В итоге останутся только раскраски тождественной перестановки, в которых все цвета различны. Для каждого набора цветов их будет $n!$ штук. Таким образом,

$$\sum_{\pi\vdash n}\frac{n!}{z_\pi}\varepsilon_\pi p_\pi=\sum_{\sigma\in\mathrm{A}_n}p_{\pi(\sigma)}-\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n\setminus A_n}p_{\pi(\sigma)}=n!\,m_{[1^n]}.$$

Остаётся заметить, что по свойствам (P2) и (P3) многочленов Джека

$$J_{[1^n]}(\alpha)=h_{[1^n]}(\alpha)m_{[1^n]}=n!\,m_{[1^n]}.$$

Таким образом, формула доказана. □

Докажем формулу для элементов второго столбца матрицы характеров Джека. Начнём со вспомогательной леммы.

Лемма 2. *Для каждого* $n\in\mathbb{N}$ *выполнено равенство*

$$\sum_{\pi\vdash n}\frac{\alpha^{l(\pi)}}{z_\pi}=\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha+k-1). \tag{16}$$

Доказательство. Из равенств $\langle J_\lambda,\,J_\lambda\rangle=h_\lambda(\alpha)h'_\lambda(\alpha)$ при $\lambda=[1^n]$,

$$J_{[1^n]}(\alpha)=\sum_{\pi\vdash n}\frac{n!}{z_\pi}\varepsilon_\pi p_\pi,\quad h_{[1^n]}(\alpha)=n!,\quad h'_{[1^n]}(\alpha)=\prod_{k=1}^{n}(\alpha+k-1)$$

получаем

$$\sum_{\pi\vdash n}\frac{(n!)^2}{z_\pi}\alpha^{l(\pi)}=n!\prod_{k=1}^{n}(\alpha+k-1),$$

что равносильно (16). □

Замечание 3. Формулу (16) можно также вывести из эквивалентности двух определений чисел Стирлинга первого рода $c(n,k)$:

1) $c(n,k)$ — число перестановок в группе S_n, представленных в виде произведения k независимых циклов, поэтому
$$\sum_{\pi\vdash n}\frac{n!\,\alpha^{l(\pi)}}{z_\pi}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l(\pi)=k}|C_\pi|\alpha^k=\sum_{k=0}^{n}c(n,k)\alpha^k;$$

2) $$\prod_{k=1}^{n}(\alpha+k-1)=\sum_{k=1}c(n,k)\alpha^k.$$

Теорема 3. *При* $n\geqslant 2$ *справедлива следующая формула*:

$$\theta_\mu^{[2,1^{n-2}]}(\alpha)=\frac{(n-2)!}{z_\mu}\,\varepsilon_\mu(m_1(\mu)(\alpha+n-1)-n\alpha).$$

Доказательство. По формуле (6) имеем

$$J_{[1^n]}(\alpha)=\sum_{\pi\vdash n}\frac{n!}{z_\pi}\varepsilon_\pi p_\pi.$$

В частности,

$$m_{[1^n]}=\sum_{\pi\vdash n}\frac{1}{z_\pi}\varepsilon_\pi p_\pi. \tag{17}$$

Из свойств (P1)—(P3) многочленов Джека имеем

$$J_{[2,1^{n-2}]}(\alpha) = h_{[2,1^{n-2}]}(\alpha)\left(m_{[2,1^{n-2}]} - \frac{\langle m_{[1^n]},\, m_{[2,1^{n-2}]}\rangle}{\langle m_{[1^n]},\, m_{[1^n]}\rangle} m_{[1^n]}\right). \tag{18}$$

По определению крюковых многочленов (1) имеем

$$h_{[2,1^{n-2}]}(\alpha) = (n-2)!\,(\alpha+n-1) = (n-2)!\alpha + (n-1)!.$$

Далее,

$$\begin{aligned} m_{[2,1^{n-2}]} &= x_1^2 x_2 \ldots x_{n-1} + \ldots = \\ &= (x_1x_2\ldots x_{n-1}+\ldots)(x_1+x_2+\ldots+x_k) - n(x_1x_2\ldots x_n+\ldots) = \\ &= m_{[1^{n-1}]}p_1 - n\cdot m_{[1^n]}, \end{aligned}$$

а с учётом формулы (17)

$$m_{[2,1^{n-2}]} = \sum_{\rho\vdash n-1}\frac{1}{z_\rho}\varepsilon_{[\rho,1]}p_{[\rho,1]} - n\sum_{\pi\vdash n}\frac{1}{z_\pi}\varepsilon_\pi p_\pi. \tag{19}$$

С учётом равенств (17) и (19), получаем

$$\langle m_{[1^n]},\, m_{[1^n]}\rangle = \sum_{\pi\vdash n}\frac{\alpha^{l(\pi)}}{z_\pi}, \tag{20}$$

$$\langle m_{[1^n]},\, m_{[2,1^{n-2}]}\rangle = \sum_{\rho\vdash n-1}\frac{\alpha^{l([\rho,1])}}{z_\rho} - n\sum_{\pi\vdash n}\frac{\alpha^{l(\pi)}}{z_\pi}. \tag{21}$$

Подставляя (17), (19), (20) и (21) в (18), с учётом формулы (16) получаем

$$\begin{aligned} &J_{[2,1^{n-2}]}(\alpha) = \big((n-2)!\,\alpha + (n-1)!\big) \\ &\times\left(\sum_{\rho\vdash n-1}\frac{1}{z_\rho}\varepsilon_{[\rho,1]}p_{[\rho,1]} - n\alpha\sum_{\pi\vdash n}\frac{1}{z_\pi}\varepsilon_\pi p_\pi - \frac{\sum\limits_{\rho\vdash n-1}\frac{\alpha^{l([\rho,1])}}{z_\rho} - n\sum\limits_{\pi\vdash n}\frac{\alpha^{l(\pi)}}{z_\pi}}{\sum\limits_{\pi\vdash n}\frac{\alpha^{l(\pi)}}{z_\pi}}\sum_{\pi\vdash n}\frac{1}{z_\pi}\varepsilon_\pi p_\pi\right) = \\ &= (n-2)!\,(\alpha+n-1)\left(\sum_{\rho\vdash n-1}\frac{1}{z_\rho}\varepsilon_{[\rho,1]}p_{[\rho,1]} - \frac{\sum\limits_{\rho\vdash n-1}\frac{\alpha^{l([\rho,1])}}{z_\rho}}{\sum\limits_{\pi\vdash n}\frac{\alpha^{l(\pi)}}{z_\pi}}\sum_{\pi\vdash n}\frac{1}{z_\pi}\varepsilon_\pi p_\pi\right) = \\ &= (n-2)!\left((\alpha+n-1)\sum_{\rho\vdash n-1}\frac{1}{z_\rho}\varepsilon_{[\rho,1]}p_{[\rho,1]} - n\alpha\sum_{\pi\vdash n}\frac{1}{z_\pi}\varepsilon_\pi p_\pi\right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $z_{[\nu,1]} = z_\nu\cdot m_1([\nu,1])$, окончательно получаем

$$\theta_\mu^{[2,1^{n-2}]}(\alpha) = \frac{(n-2)!}{z_\mu}\varepsilon_\mu\big(m_1(\mu)(\alpha+n-1) - n\alpha\big).$$

Теорема доказана. □

Следствие 2. *При $n \geqslant 2$ справедлива следующая формула для характеров Джека*:

$$\theta_{\mu}^{[n-1,1]}(\alpha) = \frac{(n-2)!}{z_{\mu}} \alpha^{n-l(\mu)-1}(m_1(\mu)(1+(n-1)\alpha)-n).$$

Доказательство. Применим формулу (5) к $\lambda = [2, 1^{n-2}]$. Тогда $\lambda^{\mathrm{T}} = [n-1, 1]$, поэтому

$$\theta_{\mu}^{[n-1,1]}(\alpha) = \varepsilon_{\mu} \alpha^{n-l(\mu)} \theta_{\mu}^{[2,1^{n-2}]}(\alpha^{-1}) = \\ = \frac{(n-2)!}{z_{\mu}} \alpha^{n-l(\mu)-1}(m_1(\mu)(1+(n-1)\alpha)-n). \quad \square$$

4. Матрицы перехода $M(J(\alpha), m)$ и $M(m, p)$

Для удобства будем иногда нумеровать многочлены не разбиениями, а натуральными числами с сохранением лексикографического порядка. Например: $m_1 = m_{[1^n]}, \ldots, m_{p(n)} = m_{[n]}$.

Рассмотрим подробнее матрицу перехода $S(\alpha) = M(J(\alpha), m)$. Введём обозначения:

$$\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_j) = (u_1, \ldots, u_j)^{\mathrm{T}} (u_1, \ldots, u_j) \text{ —}$$

матрица Грама набора векторов $\{u_1, \ldots, u_{i_j}\}$,

$$\mathrm{gram}(u_1, \ldots, u_j) = \det \mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_j) \text{ —}$$

её грамиан.

Лемма 3. *Верна формула*

$$\mathrm{gram}(m_1, \ldots, m_j) = \frac{\prod\limits_{i \leqslant j} h_i'(\alpha)}{\prod\limits_{i \leqslant j} h_i(\alpha)}.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{Gram}(m_1, \ldots, m_d) = (S(\alpha)^{-1})^{\mathrm{T}} \,\mathrm{Gram}\big(J_1(\alpha), \ldots, J_d(\alpha)\big) S(\alpha)^{-1}.$$

Так как матрица $S(\alpha)^{-1}$ верхнетреугольная, то наборы векторов

$$m' = \{m_1, \ldots, m_j\} \quad \text{и} \quad J'(\alpha) = \{J_1(\alpha), \ldots, J_j(\alpha)\}$$

порождают одно подпространство и матрица перехода $M(J', m') = S'(\alpha)^{-1}$ между ними — угловая клетка размера $j \times j$ матрицы $S(\alpha)^{-1}$. Итак,

$$\mathrm{Gram}(m_1, \ldots, m_j) = (S'(\alpha)^{-1})^{\mathrm{T}} \,\mathrm{Gram}\big(J_1(\alpha), \ldots, J_j(\alpha)\big) S'(\alpha)^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{gram}(m_1, \ldots, m_j) = \frac{\prod\limits_{i \leqslant j} \langle J_i(\alpha), J_i(\alpha)\rangle}{\Big(\prod\limits_{i \leqslant j} h_i(\alpha)\Big)^2} = \frac{\prod\limits_{i \leqslant j} h_i(\alpha) h_i'(\alpha)}{\Big(\prod\limits_{i \leqslant j} h_i(\alpha)\Big)^2} = \frac{\prod\limits_{i \leqslant j} h_i'(\alpha)}{\prod\limits_{i \leqslant j} h_i(\alpha)}. \quad \square$$

Предложение 2. *Верны следующие равенства:*

(1) $\operatorname{gram}(m_1,\dots,m_d)=\alpha^{\sum\limits_{\lambda\vdash n} l(\lambda)}$;

(2) $\operatorname{gram}(m_1,\dots,m_{p(n)-1})=\dfrac{1}{n!}\alpha^{\sum\limits_{\lambda\vdash n} l(\lambda)-n}\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k\alpha+1)\quad (n\geqslant 2)$;

(3) $\operatorname{gram}(m_1)=\dfrac{1}{n!}\prod\limits_{k=0}^{n-1}(\alpha+k)$;

(4) $\operatorname{gram}(m_1,m_2)=\dfrac{1}{n!(n-2)!}\alpha(2\alpha+n-2)\prod\limits_{k=0}^{n-2}(\alpha+k)\prod\limits_{k=0}^{n-3}(\alpha+k)\quad (n\geqslant 2)$.

Доказательство. Формула (1) вытекает из предложения 1.

Докажем (2).

$$\operatorname{gram}(m_1,\dots,m_{p(n)-1})=\frac{\prod\limits_{i\leqslant n}h'_i(\alpha)}{\prod\limits_{i\leqslant n}h_i(\alpha)}\cdot\frac{h_{[n]}}{h'_{[n]}}=\alpha^{\sum\limits_{\lambda\vdash n} l(\lambda)}\cdot\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k\alpha+1)}{n!\,\alpha^n}=$$
$$=\frac{1}{n!}\alpha^{\sum\limits_{\lambda\vdash n} l(\lambda)-n}\prod_{k=0}^{n-1}(k\alpha+1).$$

Докажем (3).

$$\operatorname{gram}(m_1)=\frac{h'_{[1^n]}}{h_{[1^n]}}=\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha+k).$$

Докажем (4).

$$\operatorname{gram}(m_1,m_2)=\frac{h'_{[1^n]}}{h_{[1^n]}}\cdot\frac{h'_{[2,1^{n-2}]}}{h_{[2,1^{n-2}]}}=\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha+k)\cdot\frac{\alpha(2\alpha+n-2)\prod\limits_{k=0}^{n-3}(\alpha+k)}{(n-2)!(\alpha+n-1)}=$$
$$=\frac{1}{n!(n-2)!}\alpha(2\alpha+n-2)\prod_{k=0}^{n-2}(\alpha+k)\prod_{k=0}^{n-3}(\alpha+k).\qquad\square$$

Также разложим грамиан по последней строке:

$$\operatorname{gram}(m_1,\dots,m_j)=\sum_{i\leqslant j}\langle m_j,m_i\rangle\overline{\operatorname{gram}}^{(i)}(m_1,\dots,m_j),$$

где

$$\overline{\operatorname{gram}}^{(i)}(m_1,\dots,m_j)=$$
$$=(-1)^{i+j}|(m_1,\dots,m_{i-1},m_i,m_{i+1},\dots,m_{j-1})^{\mathrm T}(m_1,\dots,m_{i-1},m_{i+1},\dots,m_j)|=$$
$$=\begin{cases}\operatorname{gram}(m_1,\dots,m_{j-1}), & \text{если } i=j,\\ -|(m_1,\dots,m_{i-1},m_i,m_{i+1},\dots,m_{j-1})^{\mathrm T}\times & \\ \quad\times(m_1,\dots,m_{i-1},m_j,m_{i+1},\dots,m_{j-1})|, & \text{если } i<j.\end{cases}$$

Получим формулу для элементов матрицы $S(\alpha)=(s_{ij})$ над главной диагональю. Напомним, что $s_{ii}=h_i(\alpha)$ и $s_{ij}=0$ при $i>j$.

Теорема 4. *Для элементов s_{ij} матрицы $S(\alpha)$ имеет место следующая формула при $i < j$:*

$$s_{ij} = \frac{\prod\limits_{k\leqslant j} h_k(\alpha)}{\prod\limits_{k<j} h'_k(\alpha)} \cdot \overline{\mathrm{gram}}^{(i)}(m_1, \ldots, m_j) = h'_j(\alpha) \cdot \frac{\overline{\mathrm{gram}}^{(i)}(m_1, \ldots, m_j)}{\mathrm{gram}(m_1, \ldots, m_j)}.$$

Доказательство. По свойствам (P2) и (P3) многочленов Джека

$$\frac{J_j(\alpha)}{h_j} = m_j - \sum_{i<j} \nu_{ij} m_i. \tag{22}$$

Также это значит, что свойство (P1) $\langle J_i(\alpha), J_j(\alpha)\rangle = 0$ при $i < j$ равносильно тому, что $\langle m_i, J_j(\alpha)/h_j\rangle = 0$ при $i < j$. Получаем систему линейных уравнений относительно коэффициентов ν_{ij}:

$$\begin{cases} \langle m_1, m_1\rangle \nu_{1j} + \langle m_1, m_2\rangle \nu_{2j} + \ldots + \langle m_1, m_{j-1}\rangle \nu_{j-1j} = \langle m_1, m_j\rangle, \\ \langle m_2, m_1\rangle \nu_{1j} + \langle m_2, m_2\rangle \nu_{2j} + \ldots + \langle m_2, m_{j-1}\rangle \nu_{j-1j} = \langle m_2, m_j\rangle, \\ \quad \vdots \\ \langle m_{j-1}, m_1\rangle \nu_{1j} + \langle m_{j-1}, m_2\rangle \nu_{2j} + \ldots + \langle m_{j-1}, m_{j-1}\rangle \nu_{j-1j} = \langle m_{j-1}, m_j\rangle. \end{cases}$$

Записывая решение по методу Крамера, получаем, что

$$\nu_{ij} = \frac{-\overline{\mathrm{gram}}^{(i)}(m_1, \ldots, m_j)}{\mathrm{gram}(m_1, \ldots, m_{j-1})} = -\frac{\prod\limits_{k<j} h_k(\alpha)}{\prod\limits_{k<j} h'_k(\alpha)} \overline{\mathrm{gram}}^{(i)}(m_1, \ldots, m_j). \tag{23}$$

Последний переход выполнен согласно лемме 3. Подставляя теперь (23) в (22), получаем утверждение теоремы. □

Перейдём к матрице $M(m, p)$. Введём следующее обозначение:

$$[p_\pi] m_\lambda = \varepsilon_\lambda \frac{\varepsilon_\pi}{z_\pi} l_{\pi\lambda}$$

или, равносильно,

$$m_\lambda = \sum_{\pi\vdash n} \varepsilon_\lambda \frac{\varepsilon_\pi}{z_\pi} l_{\pi\lambda} p_\pi.$$

Согласно формуле (6)

$$l_{\pi[1^n]} = 1,$$

иными словами,

$$m_{[1^n]} = \sum_{\pi\vdash n} \varepsilon_{[1^n]} \frac{\varepsilon_\pi}{z_\pi} p_\pi = \sum_{\pi\vdash n} \frac{\varepsilon_\pi}{z_\pi} p_\pi.$$

Предложение 3. *Для любого разбиения $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_k]$ имеем*

$$[p_\pi] m_{[\lambda_1,\ldots,\lambda_{k-1}]} p_{\lambda_k} = \varepsilon_\lambda \frac{\varepsilon_\pi}{z_\pi} \lambda_k m_{\lambda_k}(\pi) l_{[\pi-\lambda_k][\lambda-\lambda_k]}.$$

Доказательство. Утверждение следует из формулы

$$[p_\pi]m_{[\lambda_1,\ldots,\lambda_{k-1}]}p_{\lambda_k} = [p_{[\pi-\lambda_k]}]m_{[\lambda-\lambda_k]} = \varepsilon_{[\lambda-\lambda_k]}\frac{\varepsilon_{[\pi-\lambda_k]}}{z_{[\pi-\lambda_k]}}l_{[\pi-\lambda_k][\lambda-\lambda_k]}$$

с учётом равенств $\varepsilon_\mu = \varepsilon_{[\mu-\lambda_k]}\cdot(-1)^{\lambda_k+1}$ и $z_\mu = z_{[\mu-\lambda_k]}\cdot\lambda_k m_{\lambda_k}(\mu)$. □

Предложение 4. *Для любых разбиений $\lambda = [\lambda_1,\ldots,\lambda_k]$ и π верно рекуррентное соотношение на коэффициенты $l_{\pi\lambda}$*

$$m_{\lambda_k}(\lambda)l_{\pi\lambda} = \lambda_k m_{\lambda_k}(\pi)l_{[\pi-\lambda_k][\lambda-\lambda_k]} + \\ + \sum_{\lambda_j} m_{\lambda_j+\lambda_k}([\lambda_1,\ldots,\lambda_j+\lambda_k])l_{\pi[\lambda_1,\ldots,\lambda_j+\lambda_k,\ldots,\lambda_{k-1}]}$$

с начальными условиями

$$l_{\pi[n]} = \begin{cases} n, & \text{если } \pi = [n], \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим разложение произведения $m_{[\lambda_1,\ldots,\lambda_{k-1}]}p_{\lambda_k}$ в базисе из мономиальных многочленов:

$$m_{[\lambda_1,\ldots,\lambda_{k-1}]}p_{\lambda_k} = m_{\lambda_k}(\lambda)m_\lambda + \sum_{\lambda_j} m_{\lambda_j+\lambda_k}([\lambda_1,\ldots,\lambda_j+\lambda_k])m_{[\lambda_1,\ldots,\lambda_j+\lambda_k,\ldots,\lambda_{k-1}]},$$

$$m_{\lambda_k}(\lambda)m_\lambda = m_{[\lambda_1,\ldots,\lambda_{k-1}]}p_{\lambda_k} - \sum_{\lambda_j} m_{\lambda_j+\lambda_k}([\lambda_1,\ldots,\lambda_j+\lambda_k])m_{[\lambda_1,\ldots,\lambda_j+\lambda_k,\ldots,\lambda_{k-1}]}.$$

Переходя к коэффициенту при p_π, с учётом утверждения 3 имеем

$$m_{\lambda_k}(\lambda)\varepsilon_\lambda\frac{\varepsilon_\pi}{z_\pi}l_{\pi\lambda} = \varepsilon_\lambda\frac{\varepsilon_\pi}{z_\pi}\lambda_k m_{\lambda_k}(\pi)l_{[\pi-\lambda_k][\lambda-\lambda_k]} + \sum_{\lambda_j}\varepsilon_\lambda\frac{\varepsilon_\pi}{z_\pi}l_{\pi[\lambda_1,\ldots,\lambda_j+\lambda_k,\ldots,\lambda_{k-1}]}.$$

Сокращая левую и правую части на $\varepsilon_\lambda(\varepsilon_\pi/z_\pi)$, получаем доказываемое утверждение. □

Предложение 5. *Для любых разбиений $\lambda,\pi \vdash n$*

1) $l_{\pi\lambda} \geqslant 0$,
2) $l_{\pi\lambda} \neq 0$ *тогда и только тогда, когда* $\pi \geqslant_R \lambda$.

Доказательство. Первое неравенство следует из того, что все коэффициенты рекурренты из предложения 4 и начальные условия неотрицательны.

Второе утверждение докажем двойной индукцией: внешняя индукция — по n, внутренняя — по лексикографическому порядку разбиений от старших к младшим. Базы $n = 1$ и $\lambda = [n]$ очевидны.

Пусть $\lambda = [\lambda_1,\ldots,\lambda_k]$. Достаточно заметить, что $\pi \geqslant_R \lambda$ эквивалентно $[\pi-\lambda_k] \geqslant_R [\lambda-\lambda_k]$ при $\lambda_k \in \pi$, иначе найдётся j, для которого $\pi \geqslant_R [\lambda_1,\ldots,\lambda_j+\lambda_k,\ldots,\lambda_{k-1}]$, и утверждение следует из вида рекурренты и неотрицательности коэффициентов $l_{\pi\lambda}$. □

Предложение 6. *Коэффициенты $l_{\pi\lambda}$ целые.*

Доказательство. Проведём двойную индукцию, как в предыдущем доказательстве. Базы $n = 1$ и $\lambda = [n]$ очевидны.

Представим произвольное разбиение λ в виде $[\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k^m]$, где $\lambda_i > \lambda_k$ для всех $i < k$. Имеем $m_{[\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1}]} m_{[\lambda_k^m]} = m_\lambda + \dots$, где на месте многоточия стоят мономиальные многочлены от более старших в лексикографическом порядке разбиений. При переходе к коэффициенту при p_π и сокращении на $\varepsilon_\lambda(\varepsilon_\pi/z_\pi)$ коэффициенты будут целыми по предположению индукции. Нужно установить то же самое для левой части равенства. Имеем

$$m_{[\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1}]} m_{[\lambda_k^m]} = \sum_{\pi_1} \varepsilon_{[\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1}]} \frac{\varepsilon_{\pi_1}}{z_{\pi_1}} l_{\pi_1[\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1}]} p_{\pi_1} \cdot \sum_{\pi_2} \varepsilon_{[\lambda_k^m]} \frac{\varepsilon_{\pi_2}}{z_{\pi_2}} l_{\pi_2[\lambda_k^m]} p_{\pi_2}.$$

Коэффициенты $l_{\pi_1[\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1}]}$ и $l_{\pi_2[\lambda_k^m]} p_{\pi_2}$ целые по предположению индукции, поэтому достаточно показать, что $z_{[\pi_1,\pi_2]}$ делится на $z_{\pi_1} z_{\pi_2}$:

$$\frac{z_{[\pi_1,\pi_2]}}{z_{\pi_1} z_{\pi_2}} = \frac{\prod\limits_i i^{m_i([\pi_1,\pi_2])} m_i([\pi_1,\pi_2])!}{\prod\limits_i i^{m_i(\pi_1)} m_i(\pi_1)! \prod\limits_i i^{m_i(\pi_2)} m_i(\pi_2)!} = \prod_i C_{m_i(\pi_1)+m_i(\pi_2)}^{m_i(\pi_1)}. \qquad \square$$

Предложение 7. *Пусть $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_k, 1^s]$, $\lambda_i > 1$. Тогда верно рекуррентное соотношение на коэффициенты $l_{\pi\lambda}$*

$$\begin{aligned} m_{\lambda_k}(\lambda) l_{\pi\lambda} = &- \sum_{r \leqslant \lambda_k - 1} r m_r(\pi) l_{[\pi - r][\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1},1^{s+\lambda_k-r}]} - \\ &- \sum_{r \leqslant \lambda_k - 1} \sum_{\lambda_j} m_{\lambda_j + r}([\lambda_1, \dots, \lambda_j + r]) l_{\pi[\lambda_1,\dots,\lambda_j+r,\dots,\lambda_{k-1},1^{s+\lambda_k-r}]} + \\ &+ (s + \lambda_k) l_{\pi[\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1},1^{s+\lambda_k}]} \end{aligned}$$

с начальными условиями $l_{\pi[1^n]} = 1$.

Доказательство. Как и в доказательстве предложения 4, разложим произведения многочленов по мономиальному базису:

$$\begin{aligned} m_{\lambda_k}(\lambda) m_\lambda = &\, m_{[\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1},1^{s+1}]} p_{\lambda_k - 1} - \\ &- \sum_{\lambda_j} m_{\lambda_j + \lambda_k - 1}([\lambda_1, \dots, \lambda_j + \lambda_k - 1]) m_{[\lambda_1,\dots,\lambda_j+\lambda_k-1,\dots,\lambda_{k-1},1^{s+1}]} - \\ &- m_{\lambda_k - 1}([\lambda_k - 1, 1^{s+1}]) m_{[\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1},\lambda_k-1,1^{s+1}]}. \end{aligned}$$

Перейдём к коэффициенту при p_π:

$$\begin{aligned} m_{\lambda_k}(\lambda) \varepsilon_\lambda \frac{\varepsilon_\pi}{z_\pi} l_{\pi\lambda} = &-(\lambda_k - 1) m_{\lambda_k - 1}(\pi) \varepsilon_\lambda \frac{\varepsilon_\pi}{z_\pi} l_{[\pi - (\lambda_k - 1)][\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1},1^{s+1}]} - \\ &- \sum_{\lambda_j} m_{\lambda_j + \lambda_k - 1}([\lambda_1, \dots, \lambda_j + \lambda_k - 1]) \varepsilon_\lambda \frac{\varepsilon_\pi}{z_\pi} l_{\pi[\lambda_1,\dots,\lambda_j+\lambda_k-1,\dots,\lambda_{k-1},1^{s+1}]} + \\ &+ \varepsilon_\lambda \frac{\varepsilon_\pi}{z_\pi} m_{\lambda_k - 1}([\lambda_k - 1, 1^{s+1}]) l_{\pi[\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1},\lambda_k-1,1^{s+1}]}. \end{aligned}$$

Сокращая $\varepsilon_\lambda(\varepsilon_\pi/z_\pi)$ и итерируя последнее слагаемое, получим требуемую формулу. $\square$

Введём обозначение

$$\Xi_k(\pi) = \sum_{\pi_i \geqslant k} \pi_i = \sum_{r \geqslant k} r m_r(\pi).$$

Теорема 5. *Имеют место следующие формулы для коэффициентов* $l_{\pi\lambda}$:

(1) $l_{\pi[\lambda_1, 1^{n-\lambda_1}]} = \Xi_{\lambda_1}(\pi)$ *при* $\lambda_1 > 1$,

(2) $l_{\pi[\lambda_1, \lambda_2, 1^{n-\lambda_1-\lambda_2}]} = \Xi_{\lambda_1}(\pi)(\Xi_{\lambda_2}(\pi) - \lambda_1) - \sum\limits_{k=1}^{\lambda_2-1} \Xi_{\lambda_1+k}(\pi)$ *при* $\lambda_1 > \lambda_2 > 1$,

(3) $l_{\pi[\lambda_1^2, 1^{n-2\lambda_1}]} = C^2_{\Xi_{\lambda_1}(\pi)} - \sum\limits_{k=1}^{\lambda_1-1} \dfrac{\Xi_{\lambda_1+k}(\pi) + \Xi_{\lambda_1}(\pi)}{2}$ *при* $\lambda_1 > 1$.

Доказательство. Для доказательства (1) воспользуемся предложением 7:

$$l_{\pi[\lambda_1, 1^{n-\lambda_1}]} = -\sum_{r \leqslant \lambda_1 - 1} r m_r(\pi) + (n - \lambda_1 + \lambda_1) = \sum_{r \geqslant \lambda_1} r m_r(\pi).$$

Докажем (2). Имеем

$$\begin{aligned}
&l_{\pi[\lambda_1, \lambda_2, 1^{n-\lambda_1-\lambda_2}]} = \\
&\quad = -\sum_{r \leqslant \lambda_2 - 1} r m_r(\pi) \Xi_{\lambda_1}([\pi - r]) - \sum_{r \leqslant \lambda_2 - 1} \Xi_{\lambda_1 + r}(\pi) + (n - \lambda_1)\Xi_{\lambda_1}(\pi) = \\
&\quad = -\Xi_{\lambda_1}(\pi) \sum_{r \leqslant \lambda_2 - 1} r m_r(\pi) - \sum_{r \leqslant \lambda_2 - 1} \Xi_{\lambda_1 + r}(\pi) + (n - \lambda_1)\Xi_{\lambda_1}(\pi) = \\
&\quad = \Xi_{\lambda_1}(\pi)\Big((n - \lambda_1) - \big(n - \Xi_{\lambda_2}(\pi)\big)\Big) - \sum_{r \leqslant \lambda_2 - 1} \Xi_{\lambda_1 + r}(\pi) = \\
&\quad = \Xi_{\lambda_1}(\pi)(\Xi_{\lambda_2}(\pi) - \lambda_1) - \sum_{r \leqslant \lambda_2 - 1} \Xi_{\lambda_1 + r}(\pi).
\end{aligned}$$

Докажем (3). Аналогично предыдущему,

$$\begin{aligned}
2l_{\pi[\lambda_1^2, 1^{n-2\lambda_1}]} &= \Xi_{\lambda_1}(\pi)(\Xi_{\lambda_1}(\pi) - \lambda_1) - \sum_{r \leqslant \lambda_1 - 1} \Xi_{\lambda_1 + r}(\pi) = \\
&= \Xi_{\lambda_1}(\pi)(\Xi_{\lambda_1}(\pi) - 1) - \sum_{r \leqslant \lambda_1 - 1} \big(\Xi_{\lambda_1 + r}(\pi) + \Xi_{\lambda_1}(\pi)\big). \quad \square
\end{aligned}$$

Литература

[1] Dołęga M., Féray V. Gaussian fluctuations of Young diagrams and structure constants of Jack characters. — 2015. — `arXiv:1402.4615v3`.

[2] Goulden I. P., Jackson D. M. Connection coefficients, matchings, maps and combinatorial conjectures for Jack symmetric functions // Proc. Amer. Math. Soc. — 1996. — Vol. 348, no. 3. — P. 873—892.

[3] Jack H. A class of symmetric polynomials with a parameter // Proc. Roy. Soc. Edinburgh (A). — 1970. — Vol. 69. — P. 1—18.

[4] Kanunnikov A. L., Vassilieva E. A. On the Matchings—Jack conjecture for Jack connection coefficients indexed by two single part partitions // Electron. J. Combin. — 2016. — Vol. 23, no. 1.

[5] Macdonald I. G. Symmetric Functions and Hall Polynomials. — New York: Oxford Univ. Press, 1995.

[6] Stanley R. P. Some combinatorial properties of Jack symmetric functions // Adv. Math. — 1989. — Vol. 77, no. 1. — P. 76—115.