

О ниль-элементах и идемпотентах в простых коммутативных унитарных 3-мерных алгебрах

В. И. ГЛИЗБУРГ

Московский городской педагогический университет
e-mail: glizburg@mail.ru

Ж. М. ОНЕРБЕК

Международный университет «Астана», Казахстан
e-mail: onerbek.93@mail.ru

С. В. ПЧЕЛИНЦЕВ

Финансовый университет при Правительстве РФ
e-mail: pchelintsev@mail.ru

УДК 512.554.5

Ключевые слова: простая 3-мерная алгебра, коммутативная алгебра, выделенная алгебра, ниль-элемент, идемпотент, изотоп.

Аннотация

Изучаются простые 3-мерные коммутативные унитарные алгебры, содержащих ниль-элементы индекса 3, в которых отсутствуют ниль-элементы индекса 2. Доказано, что каждая такая алгебра зависит либо от одного, либо от двух параметров. Для каждой из параметрических алгебр найдены их идемпотенты и ниль-элементы при некоторых естественных ограничениях на параметры. Кроме того, изучаются идемпотенты и ниль-элементы в одном изотопе некоторой специальной алгебры.

Abstract

V. I. Glizburg, Zh. M. Onerbek, S. V. Pchelintsev, On nil-elements and idempotents in the simple three-dimensional commutative unital algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 3, pp. 27–53.

We study simple 3-dimensional commutative unital algebras containing nil-elements of index 3 in which nil-elements of index 2 are absent. It is proved that each such algebra depends on either one or two parameters. For each of the parametric algebras we find their idempotents and nil-elements under some natural restrictions on the parameters. In addition, we study idempotents and nil-elements in one isotope of some special algebra.

1. Введение

Классификация алгебр малой размерности в различных многообразиях является одной из интересных проблем и постоянно привлекает внимание как источник примеров. Не претендуя на сколько-либо широкий охват статей, относящихся к данной проблематике, отметим некоторые из них.

Фундаментальная и прикладная математика, 2025, том 25, № 3, с. 27–53.
© 2025 Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»

Так, Х. Петерссон [16] дал классификацию двумерных алгебр над любым полем. И. Кайгородов и Ю. Волков [14] изучали с различных точек зрения 2-мерные алгебры над алгебраически замкнутым полем. Хорошо известны результаты о классификации бинарно лиевых алгебр малых размерностей [2, 3, 12]. К. Сили [17] изучал вырождения 6-мерных нильпотентных алгебр Ли. И. Кайгородов и О. Шашков [13] описали комплексные 3-мерные ниль-алгебры и, как следствие, получили все вырождения в многообразии комплексных 3-мерных ниль-алгебр.

В [7] были классифицированы трёхмерные антидендриформные алгебры. Доказано, что если ассоциативная алгебра имеет ненулевой идемпотентный элемент, то не существует совместимой структуры антидендриформной алгебры, связанной с ассоциативными алгебрами. В [11] была дана характеристика алгебр, порождённых идемпотентами, и указан критерий того, что конечномерная алгебра порождается идемпотентами.

Напомним, что алгебра называется *простой*, если она имеет ненулевое умножение и не содержит собственных идеалов. Классификация простых алгебр является важнейшей задачей структурной теории. Для конечномерных алгебр она решена в различных классах: ассоциативных алгебр, алгебр Ли, альтернативных, йордановых, правоальтернативных алгебр, алгебр Мальцева, бинарно лиевых алгебр и других. Известны также результаты о структуре простых бесконечномерных альтернативных алгебр (Р. Брак, Е. Клейнфелд), правоальтернативных алгебр с единицей (В. Г. Скосырский), йордановых алгебр (Е. И. Зельманов) (см. обзор [4]).

В 1942 г. А. А. Алберт [8] ввёл понятие изотопии. Алгебра называется *изотопно простой*, если всякий её изотоп является простой алгеброй. Простая алгебра с единицей является изотопно простой. Интерес к изучению изотопно простых алгебр связан с теоремой Брака о композиционном ряде [9]: *всякая конечномерная алгебра A обладает изотопом B , в котором существует композиционный ряд*

$$B = B_0 \triangleright B_1 \triangleright B_2 \triangleright \dots \triangleright B_k = 0,$$

где $B_{i+1} \triangleleft B_i$ и фактор-алгебры B_i/B_{i+1} , $i = \overline{0, k-1}$, либо изотопно просты, либо 1-мерные алгебры с нулевым умножением.

В той же работе [9] Р. Брак доказал, что над алгебраически замкнутым полем не существует 2-мерных изотопно простых алгебр и всякая 1-мерная изотопно простая алгебра изотопна основному полю. Известно [15], что каждая простая 3-мерная антикоммутативная алгебра изотопна алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2$ бесследных матриц второго порядка.

Положим $x^1 = x$ и определим по индукции $x^{n+1} = x^n x$. Элемент x называется *ниль-элементом индекса n* , $x^n = 0$ и $x^{n-1} \neq 0$. *Ниль-рангом* алгебры называется максимальное число линейно независимых ниль-элементов индекса 2.

Можно доказать, что простые 3-мерные коммутативные алгебры ниль-ранга $r \in \{1, 2, 3\}$ изотопны тогда и только тогда, когда их ранги совпадают. Для

алгебр ниль-ранга 3 результат опубликован в [15]; для алгебр ниль-ранга 1 и 2 статьи готовятся к печати.

В [1, 5, 6, 10] изучались изотопы простых и первичных алгебр в различных многообразиях алгебр, близких к ассоциативным.

В предлагаемой работе изучается класс $\mathcal{C}$ простых 3-мерных коммутативных унитарных алгебр, содержащих ниль-элементы, в которых, однако, отсутствуют ниль-элементы индекса 2. Если не оговорено противное, термин $\mathcal{C}$ -алгебра означает, что рассматривается алгебра из класса $\mathcal{C}$.

В силу ограничений на размерность $\mathcal{C}$ -алгебра содержит ниль-элемент индекса 3.

Основная гипотеза заключается в следующем: любые две $\mathcal{C}$ -алгебры изотопны. Для решения этой задачи, как, впрочем, и задачи об изоморфизме, необходима информация о ниль-элементах и идемпотентах $\mathcal{C}$ -алгебр. Отметим, кстати, что класс простых 3-мерных коммутативных унитарных алгебр без ниль-элементов не является изотопно циклическим, поскольку алгебра E^* из раздела 2 не является алгеброй с делением.

Данная работа состоит из восьми разделов, включая введение. Основному содержанию работы посвящены разделы 2–7. В разделе 2 доказывается, что $\mathcal{C}$ -алгебра изоморфна одной из алгебр E_τ или $G(\lambda, \mu)$:

$$E_\tau = \langle 1, e, x \mid e^2 = e, xe = \tau x, x^2 = e - \tau 1 \rangle, \quad \tau \in F;$$

$$G(\lambda, \mu) = \langle 1, x, y \mid x^2 = y, xy = 0, y^2 = \lambda 1 + x + \mu y \rangle, \quad \lambda, \mu \in F.$$

В разделе 3 доказано, что эти алгебры просты, только если $\tau \neq 0; 1$ и $\lambda \neq 0$. Там же приведён пример простой алгебры, содержащей ниль-элементы индекса 2 и 3.

В разделе 4 изучаются ниль-элементы и идемпотенты в простой алгебре E_τ . Доказано, что в такой алгебре нет ниль-элементов индекса 2. Если $\tau^2 - \tau + 1 \neq 0$, то любые два ниль-элемента простой алгебры E_τ пропорциональны. Доказано также, что простая алгебра E_τ содержит шесть нетривиальных идемпотентов, если $\tau \neq 1/2$; алгебра $E_{1/2}$ содержит два нетривиальных идемпотента. Заметим, что $E_\tau \in \mathcal{C}$ при любом $\tau \neq 0; 1$.

В разделе 5 аналогичные результаты доказаны для алгебр типа $G(\lambda, \mu)$ в двух частных случаях $\mu = 0; 1$:

$$G_\lambda = \langle 1, x, y \mid x^2 = y, xy = 0, y^2 = \lambda 1 + x \rangle,$$

$$G'_\lambda = \langle 1, x, y \mid x^2 = y, xy = 0, y^2 = \lambda 1 + x + y \rangle,$$

при определённых ограничениях на параметр λ . Там же указан критерий того, что простая алгебра $G(\lambda, \mu)$, обладает ниль-унитарным базисом и не содержит ниль-элементов индекса 2. В частности, доказано, что $G(\lambda, \mu) \in \mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda(64\lambda^3 + 16\lambda^2\mu^2 - 8\lambda\mu + 1) \neq 0.$$

Алгебры G_λ и G'_λ имеют ровно шесть нетривиальных идемпотентов при некоторых естественных ограничениях на параметр λ (см. предложения 5.4 и 5.5).

В разделах 6 и 7 изучаются алгебра $E \cong E_{1/2}$ и один её стандартный изотоп E^* . Доказано, что алгебра E имеет ниль-элемент индекса 3 и нетривиальный идемпотент, но не имеет идемпотентного базиса, а её изотоп E^* имеет идемпотентный базис и не содержит ниль-элементов индекса 3. Заметим, что алгебры E и E^* не имеют ниль-элементов индекса 2.

Таким образом, возможна следующая ситуация: в алгебре имеется ниль-элемент индекса 3, но таких элементов нет в изотопе. Кроме того, у алгебры может быть идемпотентный базис, а в изотопе такого базиса нет. Эти факты указывают на трудности, связанные с изучением C -алгебр и их изотопов.

Полученные результаты предполагается использовать при классификации C -алгебр с точностью до изоморфизма и изотопии соответственно.

В конце работы приведён перечень основных вопросов, возникающих при изучении алгебр из указанного класса.

Отметим также, что при проведении вычислений использовалась компьютерная программа Scientific WorkPlace.

2. Алгебры с ниль-элементами индекса 3

Всюду ниже, если не оговорено противное, C обозначает простую 3-мерную коммутативную алгебру с единицей 1, в которой нет ниль-элементов индекса 2. Основное поле F предполагается алгебраически замкнутым характеристики, отличной от 2 и 3, и отождествляется с подалгеброй $F1$ алгебры C . Через $F^\times$ обозначается множество ненулевых скаляров из F .

Поскольку алгебра C трёхмерна, то она является *кубической*, т. е. для любого $a \in C$ найдутся подходящие скаляры $\beta_i \in F$, такие что

$$a^3 + \beta_1 a^2 + \beta_2 a + \beta_3 = 0.$$

Если алгебра C квадратична, то она йорданова и, значит, изоморфна йордановой алгебре симметрической билинейной невырожденной формы. Если же она не является квадратичной, то она порождается одним элементом и, следовательно, не может быть алгеброй с ассоциативными степенями (иначе она ассоциативна и является полем — расширением степени 3 основного поля F , что невозможно, поскольку оно алгебраически замкнуто).

2.1. Энгелевость ниль-элементов индекса 3

Лемма 1. Пусть C — трёхмерная коммутативная алгебра с единицей, $x \in C$ — ниль-элемент индекса 3 и $y := x^2$. Тогда $(1, x, y)$ — аддитивный базис алгебры C , такой базис называется стандартным. Для любого $\theta \in F^\times$ новый набор

$$(1, x', y'), \quad \text{где } x' = \theta x, \quad y' = \theta^2 y,$$

также является стандартным базисом алгебры C .

Доказательство. Если $1, x, y$ линейно зависимы, то $1 = \alpha x + \beta y$ для подходящих $\alpha, \beta \in F$. Умножая обе части этого равенства на x , получаем $x = \alpha x^2 = \alpha y$ и аналогично $y = x^2 = \alpha xy = 0$, что невозможно. Тем самым доказано, что $(1, x, y)$ — аддитивный базис.

Если $x' = \theta x$, то x' — ниль-элемент индекса 3 и

$$y' := \theta^2 y = \theta^2 x^2 = (\theta x)^2 = x'^2,$$

т. е. $(1, x', y')$ также стандартный базис алгебры C . $\square$

Лемма 2. Пусть C — трёхмерная коммутативная алгебра с единицей. Всякий ниль-элемент $x \in C$ индекса 3 является энгелевым того же индекса, т. е. оператор правого умножения R_x нильпотентен индекса 3.

Доказательство. В силу леммы 1 набор $(1, x, y)$ является стандартным базисом в C . Кроме того,

$$1R_x^3 = x^3 = 0, \quad xR_x^3 = (xy)R_x^2 = 0, \quad yR_x^3 = (xy)R_x^2 = 0.$$

Лемма доказана. $\square$

2.2. Алгебры вида $G(\lambda, \varepsilon, \mu)$

Лемма 3. Алгебра C изоморфна алгебре вида

$$G(\lambda, \varepsilon, \mu) = \langle 1, x, y \mid x^2 = y, \quad xy = 0, \quad y^2 = \lambda 1 + \varepsilon x + \mu y \rangle,$$

где $\varepsilon = 0; 1$.

Доказательство. Пусть $x \in C$ — ниль-элемент индекса 3, $y := x^2$. Тогда в силу леммы 1 набор $(1, x, y)$ образует стандартный базис в C . Пусть $y^2 = \lambda_1 1 + \lambda_2 x + \lambda_3 y$. Если $\lambda_2 = 0$, то $y^2 = \lambda_1 1 + \lambda_3 y$, значит, алгебра C имеет вид $G(\lambda_1, 0, \lambda_3)$.

Если же $y^2 = \lambda_1 1 + \lambda_2 x + \lambda_3 y$ и $\lambda_2 \neq 0$, то положим $x' = \theta x$, $y' = \theta^2 y$. Тогда $(1, x', y')$ — стандартный базис по лемме 1. Кроме того,

$$y'^2 = \theta^4 y^2 = \theta^4 \lambda_1 1 + \theta^3 \lambda_2 x' + \theta^2 \lambda_3 y'.$$

Выбирая θ так, что $\lambda_2 \theta^3 = 1$, получим изоморфизм алгебры C и алгебры вида $G(\lambda', 1, \mu')$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. Алгебра $G(\lambda, 0, 0)$, $\lambda \neq 0$, изоморфна алгебре E , которую назовём выделенной:

$$E := \langle 1, x, y \mid x^2 = y, \quad xy = 0, \quad y^2 = 1 \rangle.$$

Доказательство. Пусть $(1, x, y)$ — стандартный базис для алгебры $G(\lambda, 0, 0)$. Возьмём $\theta \in F$ так, что $\theta^4 = \lambda$. Тогда $(1, x' := \theta^{-1}x, y' := \theta^{-2}y)$ — стандартный базис по лемме 1 и $y'^2 = \theta^{-4}y^2 = \theta^{-4}\lambda 1 = 1$, т. е. $G(\lambda, 0, 0) \cong E$. $\square$

Если $\tau \in F$, то положим

$$E_\tau := \langle 1, e, x \mid e^2 = e, \quad xe = \tau x, \quad x^2 = e - \tau 1 \rangle.$$

Лемма 5. Выделенная алгебра E изоморфна алгебре $E_{1/2}$.

Доказательство. В алгебре E введём элементы $x' = x/\sqrt{2}$, $e = (y+1)/2$. Тогда

$$e^2 = \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = \frac{y^2 + 2y + 1}{4} = \frac{y+1}{2} = e,$$

$$x'e = \frac{x}{\sqrt{2}} \frac{y+1}{2} = \frac{xy+x}{2\sqrt{2}} = \frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}x',$$

значит, $x'e = (1/2)x'$, и $x'^2 = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y = e - \frac{1}{2}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. Алгебра $G(\lambda, 0, \mu)$, $\lambda \neq 0$, не содержащая ниль-элементов индекса 2, изоморфна алгебре E_τ .

Доказательство. Докажем, что для подходящих скаляров p, q элемент $e = p + qy$, $q \neq 0$, является идемпотентом в алгебре $G(\lambda, 0, \mu)$. В силу лемм 4 и 5 можно считать, что $\mu \neq 0$. Если $e = e^2$, то

$$p + qy = e = e^2 = (p + qy)^2 = p^2 + 2pqy + q^2y^2 =$$

$$= p^2 + 2pqy + q^2(\lambda + \lambda_3y) = q^2\lambda + p^2 + (q^2\mu + 2pq)y.$$

Значит, $p = q^2\lambda + p^2$, $q = q^2\mu + 2pq$. Итак, $e = p + qy$ является идемпотентом тогда и только тогда, когда

$$p = q^2\lambda + p^2, \quad p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}q\mu.$$

Далее,

$$0 = q^2\lambda + p^2 - p = q^2\lambda + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}q\mu\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}q\mu\right) = \frac{1}{4}q^2\mu^2 + q^2\lambda - \frac{1}{4}.$$

Уравнение

$$\frac{1}{4}q^2\mu^2 + q^2\lambda - \frac{1}{4} = 0$$

имеет решение $q = 1/(\sqrt{4\lambda + \mu^2})$, если $4\lambda + \mu^2 \neq 0$. Если же $4\lambda + \mu^2 = 0$, то равенство $y^2 = \lambda 1 + \mu y$ принимает вид

$$0 = y^2 - \lambda 1 - \mu y = y^2 + \left(\frac{1}{4}\mu^2\right) 1 - \mu y = \left(y - \frac{\mu}{2}1\right)^2,$$

откуда вытекает наличие ниль-элемента $y - (\mu/2)1$ индекса 2, что невозможно по условию.

Итак, элемент $e = p1 + qy$ для подходящих скаляров p и $q \neq 0$ является идемпотентом. Тогда $x(e - p1) = qxy = 0$, значит, $xe = px$. Пусть $\gamma^2 = q$. Полагая $x' = \gamma x$, имеем $x'^2 = e - p1$, $x'e = px'$. Следовательно, алгебра $G(\lambda, 0, \mu)$ изоморфна алгебре E_p . Лемма доказана. $\square$

Сделаем следующее очевидное замечание, которым в дальнейшем будем пользоваться без дополнительных пояснений. Пусть A — алгебра с базисом $(e_i, i = 1, n)$;

$$g = \sum_i p_i e_i, \quad g^2 = \sum_i q_i e_i.$$

Элемент θg , $\theta \in F^\times$, является идемпотентом в алгебре A тогда и только тогда, когда векторы $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ и $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ пропорциональны (обозначение $\vec{p} \parallel \vec{q}$), т. е.

$$\frac{p_1}{q_1} = \dots = \frac{p_n}{q_n}.$$

Кроме того, если такой скаляр θ существует, то он находится однозначно.

Лемма 7. Алгебра $G(\lambda, \mu) := G(\lambda, 1, \mu)$, $\lambda \neq 0$, содержит нетривиальный идемпотент.

Доказательство. Докажем, что при определённых числах p и q имеется нетривиальный идемпотент вида $\pi := \alpha(1 + px + qy)$. Вычислим

$$\begin{aligned} (1 + px + qy)^2 &= p^2y + 2px + q^2(\lambda + x + \mu y) + 2qy + 1 = \\ &= (1 + q^2\lambda)1 + (2p + q^2)x + (2q + q^2\mu + p^2)y. \end{aligned}$$

Элемент π является идемпотентом тогда и только тогда, когда справедливы равенства

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{1 + q^2\lambda} - \frac{p}{2p + q^2} = \frac{p + q^2 - \lambda p q^2}{(1 + \lambda q^2)(2p + q^2)}, \\ 0 &= \frac{1}{1 + q^2\lambda} - \frac{q}{2q + q^2\mu + p^2} = \frac{p^2 - \lambda q^3 + \mu q^2 + q}{(1 + \lambda q^2)(p^2 + \mu q^2 + 2q)}. \end{aligned}$$

Итак, должны быть выполнены равенства

$$p + q^2 - \lambda p q^2 = 0, \quad p^2 - \lambda q^3 + \mu q^2 + q = 0.$$

Будем подбирать q так, чтобы $\lambda q^2 - 1 \neq 0$. Тогда из первого равенства находим $p = q^2/(\lambda q^2 - 1)$ и, подставляя это значение во второе равенство, получаем

$$f(q) := -\lambda^3 q^6 + \lambda^2 \mu q^5 + 3\lambda^2 q^4 - 2\lambda \mu q^3 + q^3 - 3\lambda q^2 + \mu q + 1 = 0.$$

Уравнение $f(q) = 0$ разрешимо в силу алгебраической замкнутости поля F . Пусть оно имеет корень q_0 (ясно, что $q_0 \neq 0$). Проверим, что $\lambda q_0^2 - 1 \neq 0$. В самом деле, если $\lambda q_0^2 = 1$, то $0 = f(q_0) = q_0^3$, противоречие.

Следовательно, можно подобрать числа α, p, q так, что в алгебре $G(\lambda, \mu)$ найдётся нетривиальный идемпотент вида $\alpha(1 + px + qy)$, где $\alpha, p, q \in F$. $\square$

Из лемм 3–7 вытекает следующий результат.

Теорема 1. Пусть простая коммутативная 3-мерная алгебра C с единицей содержит ниль-элемент индекса 3 и не содержит ниль-элементов индекса 2. Тогда она обязательно содержит нетривиальный идемпотент.

3. Простота алгебр вида $G(\lambda, \varepsilon, \mu)$

3.1. Пример простой 3-мерной коммутативной алгебры, содержащей ниль-элементы индекса 2 и 3

Напомним, что

$$G(\lambda, 0, \mu) = \langle 1, x, y \mid x^2 = y, \ xy = 0, \ y^2 = \lambda 1 + \mu y \rangle.$$

Предложение 3.1. Алгебра $C := G(\lambda, 0, \mu)$ является простой при $\lambda \neq 0$. Алгебра $G(-1, 0, 2)$ содержит ниль-элементы индекса 2 и 3.

Доказательство. Пусть I — собственный идеал в C , т. е. I отличен от 0 и от всей алгебры C .

1. Докажем сначала, что I не может содержать ни одного из базисных векторов $1, x, y$. Очевидно, что $1 \notin I$. Если $x \in I$, то $y = x^2 \in I$. Если $y \in I$, то $-\lambda 1 = \mu y - y^2 \in I$. Далее сравнение понимается по модулю I .

2. Докажем теперь, что I не может содержать вектора вида $p1 + qx + ry$, где ровно два скаляра из трёх, p, q, r , отличны от нуля. Если $1 + px \equiv 0$, то $0 \equiv (1 + px)y = y$, что противоречит пункту 1.

Аналогично рассматривается случай $1 + ry \equiv 0$. Имеем $0 \equiv (1 + ry)x = x$. Пусть $x + ry \equiv 0$. Тогда $0 \equiv (x + ry)x = y$.

3. Докажем, что I не может содержать векторов вида $u = 1 + qx + ry$ с ненулевыми скалярами q, r . Если $u \equiv 0$, то $0 \equiv (1 + qx + ry)x = x + qy$, что противоречит пункту 2.

Наконец, при $\lambda = -1, \mu = 2$ имеем, что $y - 1$ и x — ниль-элементы индекса 2 и 3 соответственно. Лемма доказана. $\square$

3.2. Простота алгебр E_τ и $G(\lambda, \mu)$

Напомним, что

$$E_\tau = \langle 1, e, x \mid e^2 = e, \ xe = \tau x, \ x^2 = e - \tau 1 \rangle.$$

Заметим, что алгебра E_0 не является простой, поскольку 1-мерное подпространство $\langle e \rangle$, порождённое e , является идеалом.

Алгебра E_1 также не является простой, поскольку 1-мерное пространство $\langle 1 - e \rangle$ является её идеалом:

$$(1 - e)e = e - e^2 = 0, \quad (1 - e)x = x - ex = 0.$$

Лемма 8. Алгебра $C := E_\tau$ является простой, только если $\tau \neq 0; 1$.

Доказательство. Пусть $\tau \neq 0; 1$ и I — собственный идеал в C , т. е. I отличен от 0 и от всей алгебры C . Далее сравнение понимается по модулю I .

1. Докажем сначала, что I не может содержать ни одного из базисных векторов $1, e, x$. Очевидно, что $1 \notin I$. Если $e \equiv 0$, то $\tau x = ex \equiv 0, x \equiv 0$.

Если $x \equiv 0$, то $e - \tau 1 \equiv 0, (1 - \tau)e \equiv 0, e \equiv 0$.

2. Докажем теперь, что I не может содержать вектора вида $p1 + qe + rx$, где ровно два скаляра из трёх, p, q, r , отличны от нуля. Если $1 + qe \equiv 0$, то $0 \equiv (1 + qe)e = (1 + q)e$. Значит, в силу пункта 1 можно считать, что $q = -1$, тогда $1 - e \equiv 0$. После умножения обеих частей сравнения на x , получаем, что $0 \equiv (1 - e)x = x - \tau x = (1 - \tau)x$, откуда следует, что $x \equiv 0$.

Пусть $e + rx \equiv 0$. Тогда $0 \equiv (e + rx)e = e + r\tau x$, значит, $r(1 - \tau)x = (e + rx) - (e + r\tau x) \equiv 0$, что невозможно в силу пункта 1.

Пусть теперь $1 + rx \equiv 0$. Тогда $0 \equiv (1 + rx)e = e + r\tau x$. Как только что было доказано, этого быть не может.

3. Докажем, что I не может содержать векторов вида $u = 1 + qe + rx$ с ненулевыми скалярами q, r . Если $u \equiv 0$, то $0 \equiv (1 + qe + rx)e = (1 + q)e + r\tau x$, что противоречит пункту 2. Лемма доказана. $\square$

Напомним, что

$$G(\lambda, \mu) = \langle 1, x, y \mid x^2 = y, xy = 0, y^2 = \lambda 1 + x + \mu y \rangle.$$

Лемма 9. Алгебра $C := G(\lambda, \mu)$, $\lambda \neq 0$, является простой.

Доказательство. Пусть I — собственный идеал в C , т. е. I отличен от 0 и от всей алгебры C . Далее сравнение понимается по модулю I .

1. Докажем сначала, что I не может содержать ни одного из базисных векторов $1, x, y$. Очевидно, что $1 \notin I$. Если $x \equiv 0$, то $y = x^2 \equiv 0$. Если $y \equiv 0$, то $\lambda 1 + x \equiv 0$, $\lambda x \equiv \lambda x + y = (\lambda 1 + x)x \equiv 0$, $x \equiv 0$.

2. Докажем теперь, что I не может содержать вектора вида $p1 + qx + ry$, где ровно два скаляра из трёх, p, q, r , отличны от нуля. Если $1 + qx \equiv 0$, то $0 \equiv (1 + qx)y = y$, что противоречит пункту 1.

Аналогично рассматривается случай $1 + ry \equiv 0$. Имеем $0 \equiv (1 + ry)x = x$.

Пусть $x + ry \equiv 0$. Тогда $0 \equiv (x + ry)x = y$.

3. Докажем, что I не может содержать векторов вида $u = 1 + qx + ry$ с ненулевыми скалярами q, r . Если $u \equiv 0$, то $0 \equiv (1 + qx + ry)x = x + qy$, что противоречит пункту 2. Лемма доказана. $\square$

4. Ниль-элементы и идемпотенты в алгебре E_τ

Напомним, что

$$E_\tau = \langle 1, e, x \mid e^2 = e, xe = \tau x, x^2 = e - \tau 1 \rangle.$$

4.1. Ниль-элементы индекса 2 в алгебре E_τ

Лемма 10. Алгебра E_τ , $\tau \neq 0; 1$, не содержит ниль-элементов индекса 2.

Доказательство. Сначала будем искать ниль-элемент индекса 2 в виде $t := 1 + pe + qx$, где $p, q \in F^\times$. Поскольку $t^2 = 0$, то

$$\begin{aligned} 0 = t^2 &= (1 + pe + qx)^2 = 1 + p^2e^2 + q^2x^2 + 2pe + 2qx + 2pqex = \\ &= 1 + p^2e + q^2(e - \tau 1) + 2pe + 2qx + 2pq\tau x = (1 - q^2\tau)1 + (p^2 + q^2 + 2p)e + (2q + 2pq\tau)x. \end{aligned}$$

Следовательно, набор скаляров (p, q) является решением системы

$$1 = q^2\tau, \quad p^2 + q^2 + 2p = 0, \quad 2q + 2pq\tau = 0.$$

Поскольку $q \neq 0$, то $1 = q^2\tau$, $p^2 + q^2 + 2p = 0$, $1 + p\tau = 0$, $\tau = q^{-2}$, $\tau = -p^{-1}$, откуда следует, что $p = -q^2$ и

$$0 = p^2 + q^2 + 2p = q^4 + q^2 - 2q^2 = q^4 - q^2 = q^2(q^2 - 1).$$

Значит, $q^2 = 1$ и $\tau = 1$, что невозможно.

Легко проверить, что при $p, q \in F^\times$ элементы $e, x, 1 + pe, 1 + qx, e + qx$ не являются ниль-элементами индекса 2. Например, для элемента $e + qx$ имеем

$$0 = (e + qx)^2 = e^2 + q^2x^2 + 2qex = e + q^2(e - \tau 1) + 2q\tau x = (-q^2\tau)1 + (1 + q^2)e + 2q\tau x.$$

Тогда коэффициенты при 1, e, x равны 0, что невозможно. Для остальных элементов проверка ещё проще. $\square$

4.2. Ниль-элементы индекса 3 в алгебре E_τ

Определение 1. Базис $(1, x_1, x_2)$ алгебры назовём *ниль-унитальным*, если x_1, x_2 являются ниль-элементами индекса 3.

Теорема 2. Если $\tau^2 - \tau + 1 \neq 0$, то любые два ниль-элемента простой алгебры E_τ пропорциональны. Если $\tau^2 - \tau + 1 = 0$, то в простой алгебре E_τ существует ниль-унитальный базис.

Доказательство. В силу лемм 10 и 2 достаточно понять, что если $R_t^3 = 0$, то элементы t и x пропорциональны. Заметим, что оператор R_t в алгебре ниль-потентен тогда и только тогда, когда его характеристический многочлен имеет вид X^3 . Итак, допустим, что для элемента t вида

$$(1) \ t = 1 + pe + qx, \quad (2) \ t = e + qx, \quad (3) \ t = 1 + pe, \quad (4) \ t = 1 + qx$$

характеристический многочлен оператора R_t равен X^3 . Рассмотрим последовательно указанные случаи.

(1) Вычислим оператор R_t для $t = 1 + pe + qx$:

$$\begin{aligned} 1(1 + pe + qx) &= 1 + pe + qx, & e(1 + pe + qx) &= (1 + p)e + q\tau x, \\ x(1 + pe + qx) &= x + p\tau x + q(e - \tau) = -q\tau + qe + (1 + p\tau)x, \end{aligned}$$

значит,

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & p & q \\ 0 & 1 + p & q\tau \\ -q\tau & q & 1 + p\tau \end{pmatrix}$$

и его характеристический многочлен имеет вид $X^3 + (-p - p\tau - 3)X^2 + \dots$. Тогда

$$p = -\frac{3}{\tau + 1}, \quad R_t = \begin{pmatrix} 1 & -3/(\tau + 1) & q \\ 0 & (\tau - 2)/(\tau + 1) & q\tau \\ -q\tau & q & -(2\tau - 1)/(\tau + 1) \end{pmatrix}$$

и характеристический многочлен оператора R_t равен

$$X^3 - \frac{3(\tau^2 - \tau + 1)}{(\tau + 1)^2}X + \frac{-3q^2\tau^3 + 3q^2\tau + 2\tau^2 - 5\tau + 2}{(\tau + 1)^2}.$$

Поскольку коэффициент при X равен 0, то $\tau^2 = \tau - 1$ и числитель свободного члена имеет вид

$$\begin{aligned} -3q^2\tau^3 + 3q^2\tau + 2\tau^2 - 5\tau + 2 &= \\ &= -3q^2\tau(\tau - 1) + 3q^2\tau + 2(\tau - 1) - 5\tau + 2 = -3\tau(q^2\tau - 2q^2 + 1). \end{aligned}$$

Учитывая, что свободный член характеристического многочлена должен быть равен 0, получаем, что $q^2\tau - 2q^2 + 1 = 0$, $q^2(2 - \tau) = 1$, или $q^2 = 1/(2 - \tau) = 1$. Значит, если $\tau^2 = \tau - 1$, то можно найти пары $(p, \pm q)$, которые приводят к непропорциональным ниль-элементам индекса 3 вида $1 + pe + qx$.

(2) Пусть $t = e + qx$. Тогда

$$\begin{aligned} 1(e + qx) &= e + qx, \quad e(e + qx) = e + q\tau x, \\ x(e + qx) &= qx^2 + ex = q(e - \tau) + x = -q\tau + qe + \tau x, \\ R_t &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & q \\ 0 & 1 & q\tau \\ -q\tau & q & \tau \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и характеристический многочлен оператора R_t равен $X^3 - (\tau + 1)X^2 + \tau X + \dots$, противоречие, ибо $\tau \neq 0$.

(3) Пусть $t = 1 + pe$. Тогда

$$\begin{aligned} 1(1 + pe) &= 1 + pe, \quad e(1 + pe) = (1 + p)e, \quad x(1 + pe) = x + p\tau x = (p\tau + 1)x, \\ R_t &= \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ 0 & 1 + p & 0 \\ 0 & 0 & p\tau + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и характеристический многочлен R_t имеет вид $X^3 + (-p - p\tau - 3)X^2 + \dots$. Значит, $p = -3/(\tau + 1)$, и тогда при этом значении p

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & -3/(\tau + 1) & 0 \\ 0 & (\tau - 2)/(\tau + 1) & 0 \\ 0 & 0 & -(2\tau - 1)/(\tau + 1) \end{pmatrix}$$

и характеристический многочлен оператора R_t равен

$$X^3 - \frac{3(\tau^2 - \tau + 1)}{(\tau + 1)^2}X + \frac{(\tau - 2)(2\tau - 1)}{(\tau + 1)^2} \neq X^3,$$

поскольку если коэффициент при X равен 0, то τ иррационально и свободный член характеристического многочлена отличен от 0.

(4) Пусть $t = 1 + qx$. Тогда

$$\begin{aligned} 1(1 + qx) &= 1 + qx, & e(1 + qx) &= e + q\tau\tau x, \\ x(1 + qx) &= q(e - \tau 1) + x = -q\tau 1 + qe + x, \end{aligned}$$

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & q\tau \\ -q\tau & q & 1 \end{pmatrix}$$

и характеристический многочлен оператора R_t имеет вид $(X - 1)^3$ — противоречие. $\square$

4.3. Идемпотенты в алгебре E_τ

Теорема 3. В простой алгебре E_τ при $\tau \neq 1/2$ имеются ровно шесть нетривиальных идемпотентов.

Доказательство. Всюду в этом доказательстве $p, q \in F^\times$. Найдём сначала идемпотенты, пропорциональные элементу $1 + pe + qx$. Имеем

$$\begin{aligned} (1 + pe + qx)^2 &= 1 + p^2e^2 + q^2x^2 + 2pe + 2qx + 2pqex = \\ &= 1 + p^2e + q^2e - q^2\tau + 2pe + 2qx + 2pq\tau x = \\ &= (1 - q^2\tau) + (p^2 + q^2 + 2p)e + 2q(1 + p\tau)x. \end{aligned}$$

Значит, существование ненулевого идемпотента вида $\theta(1 + pe + qx)$ эквивалентно тому, что пара (p, q) является решением системы

$$\begin{cases} 0 = \frac{1 - q^2\tau}{1} - \frac{p^2 + q^2 + 2p}{p} = \frac{p^2 + pq^2\tau + p + q^2}{p}, \\ 0 = \frac{1 - q^2\tau}{1} - \frac{2q(1 + p\tau)}{q} = -q^2\tau - 2p\tau - 1. \end{cases}$$

Числитель первого уравнения перепишем в виде $(p^2 + p) + (p\tau + 1)q^2$.

Покажем, что $p\tau + 1 \neq 0$. В противном случае $p\tau + 1 = 0$ и из равенства $(p^2 + p) + (p\tau + 1)q^2 = 0$ следует, что $p = -1$, значит, $\tau = 1$, что невозможно, поскольку алгебра E_τ простая.

Итак, $p\tau + 1 \neq 0$, и тогда из первого уравнения находим q^2 :

$$q^2 = -\frac{p^2 + p}{p\tau + 1}.$$

Подставляя это значение q^2 во второе уравнение системы, получаем

$$-q^2\tau - 2p\tau - 1 = \frac{p^2 + p}{p\tau + 1}\tau - 2p\tau - 1 = -\frac{2p^2\tau^2 - p^2\tau + 2p\tau + 1}{p\tau + 1}.$$

Следовательно, $q^2 = -(p^2 + p)/(p\tau + 1)$ и p является корнем квадратного уравнения $(2\tau^2 - \tau)p^2 + (2\tau)p + 1 = 0$. Его дискриминант равен $(2\tau)^2 - 4(2\tau^2 - \tau) = 4\tau(1 - \tau) \neq 0$, значит, существуют два значения p и для каждого из них

можно найти два значения q , т. е. имеются ровно четыре идемпотента вида $\theta(1 + pe + qx)$.

Докажем, что имеется один идемпотент, пропорциональный элементу $1 + pe$:

$$(1 + pe)^2 = 1 + p^2e + 2pe = 1 + (p^2 + 2p)e.$$

Тогда аналогично предыдущему

$$0 = \frac{1}{1} - \frac{p^2 + 2p}{p} = -p - 1,$$

откуда получаем ещё один идемпотент $1 - e$.

Легко убедиться, что не существует нетривиальных идемпотентов, пропорциональных элементам вида $1 + qx$ и $e + qx$.

Наконец, замечая, что e — единственный идемпотент из множества $F^\times e$, а множество $F^\times x$ не содержит идемпотентов, получаем все шесть нетривиальных идемпотентов.

Теорема доказана. $\square$

Позже в разделе 6 мы докажем, что алгебра $E_{1/2}$ имеет ровно два нетривиальных идемпотента.

5. Ниль-элементы и идемпотенты в $G(\lambda, \mu)$

Напомним, что

$$G(\lambda, \mu) = \langle 1, x, y \mid x^2 = y, xy = 0, y^2 = \lambda 1 + x + \mu y \rangle.$$

Выделим два частных случая алгебр указанного вида:

$$\begin{aligned} G_\lambda &:= G(\lambda, 0) = \langle 1, x, y \mid x^2 = y, xy = 0, y^2 = \lambda 1 + x \rangle, \\ G'_\lambda &:= G(\lambda, 1) = \langle 1, x, y \mid x^2 = y, xy = 0, y^2 = \lambda 1 + x + y \rangle. \end{aligned}$$

Докажем, что существует простая коммутативная 3-мерная алгебра C с базисом $(1, u, v)$, где u, v — ниль-элементы индекса 3; такой базис называется *ниль-унитарным*.

5.1. Ниль-элементы индекса 2 в алгебре $G(\lambda, \mu)$

Предложение 5.1. Алгебра $G(\lambda, \mu)$, $\lambda \neq 0$, не содержит ниль-элементов индекса 2 тогда и только тогда, когда

$$64\lambda^3 + 16\lambda^2\mu^2 - 8\lambda\mu + 1 \neq 0. \quad (5.1)$$

Доказательство. 1. Выясним, при каких условиях алгебра $G(\lambda, \mu)$, $\lambda \neq 0$, имеет ниль-элемент индекса 2, пропорциональный элементу $t = 1 + px + qy$:

$$\begin{aligned} t^2 &= (1 + px + qy)^2 = p^2y + 2px + q^2(\lambda 1 + x + \mu y) + 2qy + 1 = \\ &= (1 + q^2\lambda)1 + (q^2 + 2p)x + (p^2 + 2q + q^2\mu)y. \end{aligned}$$

Значит, $t^2 = 0$ тогда и только тогда, когда

$$1 + q^2\lambda = 0, \quad q^2 + 2p = 0, \quad p^2 + 2q + q^2\mu = 0.$$

Отсюда вытекает, что $q^2 = -1/\lambda$, $p = -(1/2)q^2 = 1/(2\lambda)$. Мы получаем, что числа λ, μ удовлетворяют равенству

$$64\lambda^3 + 16\lambda^2\mu^2 - 8\lambda\mu + 1 = 0.$$

Легко проверить, что других ниль-элементов индекса 2 алгебра $G(\lambda, \mu)$ не содержит. Для полноты изложения приведём необходимые вычисления.

$$2. (1 + px)^2 = p^2y + 2px + 1 \neq 0.$$

$$3. (1 + qy)^2 = q^2(\lambda + x + \mu y) + 2qy + 1 = (1 + q^2\lambda) + q^2x + q(q\mu + 2)y \neq 0.$$

$$4. (x + qy)^2 = q^2(\lambda + x + \mu y) + y = q^2\lambda + q^2x + (1 + q^2\mu)y \neq 0.$$

Предложение доказано. $\square$

Следствие 1.

1. Алгебра G_λ не содержит ниль-элементов индекса 2 тогда и только тогда, когда $64\lambda^3 + 1 \neq 0$.
2. Алгебра G'_λ не содержит ниль-элементов индекса 2 тогда и только тогда, когда $64\lambda^3 + 16\lambda^2 - 8\lambda + 1 \neq 0$.

Доказательство. Соотношение (5.1) при $\mu = 0$ принимает вид $64\lambda^3 + 1 = 0$, а при $\mu = 1$ соотношение (5.1) имеет вид $64\lambda^3 + 16\lambda^2 - 8\lambda + 1 \neq 0$. $\square$

5.2. Ниль-элементы индекса 3 в алгебре $G(\lambda, \mu)$

Предложение 5.2. Алгебра $G(\lambda, \mu)$, $\lambda\mu \neq 0$, обладает ниль-унитальным базисом и не содержит ниль-элементов индекса 2 тогда и только тогда, когда выполнена система соотношений

$$\begin{cases} 27\lambda^3 + 18\lambda^2\mu^2 + 3\lambda\mu^4 - \mu^3 = 0, \\ 64\lambda^3 + 16\lambda^2\mu^2 - 8\lambda\mu + 1 \neq 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Доказательство. В силу предложения 5.1 в алгебре $G(\lambda, \mu)$, $\lambda \neq 0$, нет ниль-элементов индекса 2 тогда и только тогда, когда выполнено соотношение (5.1). Для поиска всех ниль-элементов индекса 3 согласно лемме 2 достаточно понять, для каких элементов t вида

$$(1) \ t = 1 + px + qy, \quad (2) \ t = x + qy, \quad (3) \ t = 1 + px, \quad (4) \ t = 1 + qy$$

при условии $pq \neq 0$ характеристический многочлен оператора R_t равен X^3 . Итак, допустим, что для элемента t характеристический многочлен оператора R_t равен X^3 .

(1) Вычислим оператор R_t для $t = 1 + px + qy$:

$$1(1 + px + qy) = +1 + px + qy, \quad 1(1 + px + qy) = +1 + px + qy,$$

$$y(1 + px + qy) = y + q(\lambda + x + \mu y) = q\lambda + qx + (1 + q\mu)y,$$

значит,

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & p & q \\ 0 & 1 & p \\ q\lambda & q & (1 + q\mu) \end{pmatrix}$$

и характеристический многочлен оператора R_t имеет вид $X^3 + (-q\mu - 3)X^2 + \dots$. Тогда $q = -3/\mu$,

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & p & -3/\mu \\ 0 & 1 & p \\ -3\lambda/\mu & -3/\mu & -2 \end{pmatrix}$$

и характеристический многочлен оператора R_t равен

$$X^3 + \left(\frac{3p}{\mu} - \frac{9\lambda}{\mu^2} - 3\right)X + \left(\frac{18\lambda}{\mu^2} - \frac{3p}{\mu} - \frac{3\lambda}{\mu} \left(\frac{3}{\mu} - p^2\right) + 2\right).$$

Тогда $p = (\mu^2 + 3\lambda)/\mu$ и выполнено равенство

$$\left(\frac{18\lambda}{\mu^2} - \frac{3p}{\mu} - \frac{3\lambda}{\mu} \left(\frac{3}{\mu} - p^2\right) + 2\right) = 0. \quad (5.3)$$

Подставляя в (5.3) значение $p = (\mu^2 + 3\lambda)/\mu$, получаем равенство

$$27\lambda^3 + 18\lambda^2\mu^2 + 3\lambda\mu^4 - \mu^3 = 0.$$

При выполнении указанного равенства, связывающего параметры λ и μ , в алгебре имеются ниль-элементы индекса 3 вида x и $x' := 1 + px + qy$, значит, алгебра имеет ниль-унитарный базис $(1, x, x')$.

Покажем, что в алгебре $G(\lambda, \mu)$, $\lambda\mu \neq 0$, при условии, что выполнено соотношение (5.1), нет нильпотентных элементов вида (2)–(4), где $pq \neq 0$.

(2) Пусть $t = x + qy$. Тогда

$$\begin{aligned} 1(x + qy) &= x + qy, & x(x + qy) &= y, \\ y(x + qy) &= q(\lambda + x + \mu y) = q\lambda + qx + q\mu y, \end{aligned}$$

$$R_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1q \\ q\lambda & q & q\mu \end{pmatrix}$$

и характеристический многочлен оператора R_t равен

$$X^3 - q\mu X^2 + (-q^2\lambda - q)X - q\lambda \neq X^3,$$

поскольку свободный член ненулевой.

(3) Пусть $t = 1 + px$. Тогда

$$1(1 + px) = 1 + px, \quad x(1 + px) = +x + py, \quad (1 + px) = y,$$

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и характеристический многочлен R_t равен $(X - 1)^3 \neq X^3$.

(4) Пусть $t = 1 + qy$. Тогда

$$\begin{aligned} 1(1 + qy) &= 1 + qy, & x(1 + qy) &= x, \\ y(1 + qy) &= q(\lambda + x + \mu y) + y = q\lambda + qx + (1 + q\mu)y, \end{aligned}$$

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & q \\ q\lambda & q & (1 + q\mu) \end{pmatrix}$$

и характеристический многочлен R_t имеет вид $X^3 + (-q\mu - 3)X^2 + \dots$. Значит, $q = -3/\mu$,

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/\mu \\ 0 & 1 & -3/\mu \\ -3\lambda/\mu & -3/\mu & -2 \end{pmatrix}$$

и характеристический многочлен R_t имеет вид $X^3 + (-9\lambda/\mu^2 - 3)X + (9\lambda/\mu^2 + 2) \neq X^3$, поскольку $(-9\lambda/\mu^2 - 3) + (9\lambda/\mu^2 + 2) = -1$. Предложение доказано. $\square$

Следствие 1 и анализ приведённого доказательства предложения 5.2 показывают, что верно следующее утверждение.

Предложение 5.3. Алгебра G_λ не содержит непропорциональных ниль-элементов тогда и только тогда, когда $\lambda(64\lambda^3 + 1) \neq 0$.

Из предложения 5.2 немедленно вытекает следствие 2.

Следствие 2. В алгебре $G(\lambda, \mu)$, $\lambda\mu \neq 0$, всякие два ниль-элемента пропорциональны тогда и только тогда, когда выполнены ограничения

$$\begin{cases} \eta_1(\lambda, \mu) := 27\lambda^3 + 18\lambda^2\mu^2 + 3\lambda\mu^4 - \mu^3 \neq 0, \\ \eta_2(\lambda, \mu) := 64\lambda^3 + 16\lambda^2\mu^2 - 8\lambda\mu + 1 \neq 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Полагая $\mu = 1$ в следствии 2, получаем следствие 3.

Следствие 3. В алгебре G'_λ всякие два ниль-элемента пропорциональны тогда и только тогда, когда выполнены соотношения

$$\begin{cases} 27\lambda^3 + 18\lambda^2 + 3\lambda - 1 \neq 0, \\ 64\lambda^3 + 16\lambda^2 - 8\lambda + 1 \neq 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Из предложения 5.2 следует, что существует бесконечное множество простых алгебр нулевого ниль-ранга, обладающих ниль-унитальным базисом.

Эти результаты являются основанием для следующего определения.

Определение 2. Алгебра из класса $\mathcal{C}$ называется *ниль-линейной*, если в ней любые два ниль-элемента индекса 3 пропорциональны.

Из теоремы 2, следствий 1 и 3 и предложения 5.3 вытекают следующие примеры ниль-линейных алгебр:

- 1) E_τ , где $\tau^2 - \tau + 1 \neq 0$,

- 2) G_λ , где $\lambda(64\lambda^3 + 1) \neq 0$,
- 3) G'_λ , где λ удовлетворяет системе (5.5).

5.3. Идемпотенты в алгебрах G_λ и G'_λ

Предложение 5.4. Если алгебра G_λ ниль-линейна, то она имеет шесть нетривиальных идемпотентов; кроме того, она имеет идемпотентный базис.

Доказательство. Пусть $(1, x, y)$ — стандартный базис алгебры G_λ . Допустим, что $g := p + qx + ry$, $p, q, r \in F$, — ненулевой идемпотент в алгебре

$$G_\lambda = \langle 1, x, y \mid x^2 = y, xy = 0, y^2 = \lambda 1 + x \rangle.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} (p + qx + ry)^2 &= p^2 + q^2y + r^2(\lambda 1 + x) + 2pqx + 2pry = \\ &= (p^2 + r^2\lambda) + (r^2 + 2pq)x + (q^2 + 2pr)y, \end{aligned}$$

то набор (p, q, r) является решением системы

$$\begin{cases} r^2\lambda + p^2 - p = 0, \\ r^2 + (2p - 1)q = 0, \\ q^2 + (2p - 1)r = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

1. Пусть $p = 0$. Тогда из первого уравнения системы (5.6) получаем $r = 0$, но тогда из второго уравнения следует $q = 0$. Значит, в этом случае нет нетривиальных идемпотентов.

2. Пусть $p \neq 0$. Тогда $qr \neq 0$, иначе получается тривиальный идемпотент. Из второго и третьего уравнений находим p :

$$p = \frac{q - r^2}{2q}, \quad p = \frac{r - q^2}{2r}.$$

$q^3 - r^3 = 0$. Значит, система (5.6) равносильна системе

$$\begin{cases} r^2\lambda + p^2 - p = 0, \\ p = \frac{q - r^2}{2q}, \\ r = \omega q, \\ \omega^3 = 1. \end{cases} \quad (5.7)$$

Подставляя в первое уравнение значения $p = (q - r^2)/(2q)$ и $r = \omega q$ и умножая полученное равенство на 4, имеем $q^2\omega^4 + 4\lambda q^2\omega^2 - 1 = 0$, значит,

$$\begin{cases} \omega(1 + 4\lambda\omega)q^2 = 1, \\ p = \frac{1}{2}(1 - q\omega^2), \\ r = \omega q, \\ \omega^3 = 1. \end{cases} \quad (5.8)$$

Эта система имеет шесть решений, поскольку $\lambda \neq -(\omega/2)^2$; если $\lambda \neq -(\omega/2)^2$, то $64\lambda^3 + 1 = 0$, что противоречит предложению 5.3. Предложение доказано. $\square$

Предложение 5.5. Если алгебра G'_λ ниль-линейна, то она имеет шесть нетривиальных идемпотентов; кроме того, она имеет идемпотентный базис.

Доказательство. Пусть $(1, x, y)$ — стандартный базис алгебры G'_λ . Допустим, что $g := p + qx + ry$, $p, q, r \in F$, — ненулевой идемпотент в алгебре

$$G'_\lambda = \langle 1, x, y \mid x^2 = y, xy = 0, y^2 = \lambda 1 + x + y \rangle.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} (p + qx + ry)^2 &= p^2 + q^2y + r^2(\lambda 1 + x + y) + 2pqx + 2pry = \\ &= (p^2 + r^2\lambda) + (r^2 + 2pq)x + (q^2 + r^2 + 2pr)y, \end{aligned}$$

то набор (p, q, r) является решением системы

$$\begin{cases} r^2\lambda + p^2 - p = 0, \\ r^2 + (2p - 1)q = 0, \\ q^2 + r^2 + (2p - 1)r = 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

1. Пусть $p = 0$. Тогда из первого уравнения системы (5.9) получаем $r = 0$, но тогда из второго уравнения следует $q = 0$. Значит, в этом случае нет нетривиальных идемпотентов.

2. Пусть $p \neq 0$. Тогда $qr \neq 0$, иначе получается тривиальный идемпотент. Из второго и третьего уравнений находим p :

$$p = \frac{q - r^2}{2q}, \quad p = \frac{-r + r^2 + q^2}{2r},$$

тогда

$$0 = \frac{q - r^2}{2q} - \frac{-r + r^2 + q^2}{2r} = \frac{q^3 + qr^2 - r^3}{2qr}.$$

Значит, система (5.6) равносильна системе

$$\begin{cases} r^2\lambda + p^2 - p = 0, \\ p = \frac{q - r^2}{2q}, \\ r = \tau q, \\ \tau^3 - \tau^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Следовательно,

$$\begin{cases} r^2\lambda + p^2 - p = 0, \\ p = \frac{1 - \tau^2 q}{2}, \\ r = \tau q, \\ \tau^3 - \tau^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Подставляя в первое уравнение значения $p = (1 - \tau^2 q)/2$ и $r = \tau q$ и умножая полученное равенство на 4, имеем $q^2 \tau^4 + 4\lambda q^2 \tau^2 - 1 = 0$, значит,

$$\begin{cases} \tau^2(\tau^2 + 4\lambda)q^2 = 1, \\ p = \frac{1 - \tau^2 q}{2}, \\ r = \tau q, \\ \tau^3 - \tau^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

Заметим, что $\tau^2 + 4\lambda \neq 0$. В самом деле, если $\tau^2 + 4\lambda = 0$, то $\lambda = -(\tau/2)^2$ и значение многочлена $64\lambda^3 + 16\lambda^2 - 8\lambda + 1$ в точке $\lambda = -(\tau/2)^2$ равно 0:

$$-t^6 + t^4 + 2t^2 + 1 = -(t^2 + 1)^2 + t(t^2 + 1) + 2t^2 + 1 = t(-t^3 + t^2 + 1) = 0.$$

Значит, система (5.12) имеет шесть решений. Предложение доказано. $\square$

5.4. Идемпотенты в алгебрах $G(\lambda, \mu)$

Предложение 5.6. Если алгебра $G(\lambda, \mu)$ ниль-линейна, то она имеет:

- а) четыре нетривиальных идемпотента, если $4\mu^3 + 27 = 0$;
- б) шесть нетривиальных идемпотентов, если $4\mu^3 + 27 \neq 0$;

кроме того, она в любом случае имеет идемпотентный базис.

Доказательство. Пусть $(1, x, y)$ — стандартный базис алгебры $C := G(\lambda, \mu)$. Допустим, что $g := p + qx + ry$, $p, q, r \in F$, — ненулевой идемпотент в алгебре

$$C = \langle 1, x, y \mid x^2 = y, xy = 0, y^2 = \lambda 1 + x + \mu y \rangle.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} (p + qx + ry)^2 &= p^2 + q^2 y + r^2(\lambda 1 + x + \mu y) + 2pqx + 2pry = \\ &= (p^2 + r^2 \lambda)1 + (r^2 + 2pq)x + (r^2 \mu + q^2 + 2pr)y, \end{aligned}$$

то набор (p, q, r) является решением системы

$$\begin{cases} r^2 \lambda + p^2 - p = 0, \\ r^2 + (2p - 1)q = 0, \\ r^2 \mu + q^2 + (2p - 1)r = 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

1. Если $p = 0$, то из первого уравнения системы (5.13) получаем $r = 0$, но тогда из третьего уравнения следует $q = 0$. Значит, в этом случае нет тривиальных идемпотентов.

2. Пусть $p \neq 0$. Тогда $qr \neq 0$, иначе, как легко видеть, g — тривиальный идемпотент. Из второго и третьего уравнений находим p :

$$p = \frac{q - r^2}{2q}, \quad p = -\frac{r^2 \mu - r + q^2}{2r},$$

и

$$0 = \frac{q - r^2}{2q} + \frac{r^2\mu - r + q^2}{2r} = \frac{q^3 + \mu qr^2 - r^3}{2qr}.$$

Значит, система (5.13) равносильна системе

$$\begin{cases} r^2\lambda + p^2 - p = 0, \\ p = \frac{q - r^2}{2q}, \\ q^3 + \mu qr^2 - r^3 = 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

Подставляя $q = tr$ во второе и третье уравнения, имеем

$$\begin{cases} r^2\lambda + p^2 - p = 0, \\ p = \frac{t - r}{2t}, \\ t^3 + \mu t - 1 = 0, \\ q = tr. \end{cases} \quad (5.15)$$

Подставляя в первое уравнение $p = (t - r)/(2t)$ и умножая полученное равенство на $4t^2$, получаем

$$\begin{cases} r^2(4t^2\lambda + 1) - t^2 = 0, \\ p = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{t}\right), \\ t^3 + \mu t - 1 = 0, \\ q = tr. \end{cases} \quad (5.16)$$

Положим $\lambda = \theta^2$. Докажем, что $4t^2\lambda + 1 \neq 0$. Допустим, от противного, что $4t^2\lambda + 1 = 0$. Тогда $t = i/(2\theta)$. Подставляя это значение в третье уравнение, имеем

$$0 = t^3 + \mu t - 1 = -\frac{8\theta^3 - 4i\mu\theta^2 + i}{8\theta^3},$$

значит, $8\theta^3 - 4i\mu\theta^2 + i$ и $\mu = (1 - 8i\theta^3)/(4\theta^2)$. Прямая проверка показывает, что пара

$$\left(\lambda = \theta^2, \mu = \frac{1 - 8i\theta^3}{4\theta^2}\right)$$

является корнем многочлена из системы (5.5):

$$\eta_2(\lambda, \mu) = 64\lambda^3 + 16\lambda^2\mu^2 - 8\lambda\mu + 1.$$

Тем самым получено противоречие с условием ниль-линейности алгебры.

Многочлен $t^3 + \mu t - 1$ не имеет кратных корней (взаимно прост со своей производной) тогда и только тогда, когда $4\mu^3 + 27 \neq 0$.

В любом случае многочлен $t^3 + \mu t - 1$ имеет два различных корня t_1, t_2 , поскольку вторая производная многочлена $t^3 + \mu t - 1$ равна $6t$. Для корня t_1 находятся значения параметров (p, q, r) и получаются два идемпотента:

$$g_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_1}{t_1}\right) + t_1 r_1 x + r_1 y, \quad g'_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_1}{t_1}\right) - t_1 r_1 x - r_1 y,$$

где r_1 — фиксированный многочлен $\xi(r) := r^2(4t_1^2\lambda + 1) - t_1^2 = 0$. Заметим, что $g_1 + g'_1 = 1$. Наконец, набор идемпотентов $(1, g_1, g_2)$ образует базис, поскольку

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_1 & t_1 r_1 & r_1 \\ p_2 c & t_2 r_2 & r_2 \end{vmatrix} = r_1 r_2 (t_1 - t_2) \neq 0. \quad \square$$

6. Алгебра E и её свойства

Определение 3. Аддитивный базис $(1, e, g)$ трёхмерной алгебры назовём *идемпотентным*, если e, g являются (нетривиальными) идемпотентами.

Теорема 4. Выделенная алгебра E является простой, имеет ровно два нетривиальных идемпотента. В частности, в ней нет идемпотентного базиса.

Доказательство. Простота алгебры E вытекает из леммы 8.

Найдём все нетривиальные идемпотенты алгебры E .

1. Пусть $p, q \in F^\times$. Условие пропорциональности

$$(1 + px + qy) \parallel (1 + px + qy)^2 = (1 + q^2) + 2px + (2q + p^2)y$$

эквивалентно системе

$$\begin{cases} 0 = \frac{1 + q^2}{1} - \frac{2p}{p} = q^2 - 1, \\ 0 = \frac{2p}{p} - \frac{2q + p^2}{q} = -\frac{p^2}{q}, \end{cases}$$

откуда $p = 0$, противоречие.

2. Пусть $e := x + qy$, $q \neq 0$. Допустим, что

$$(x + qy) \parallel (x + qy)^2 = q^2 + y,$$

таких идемпотентов нет.

3. Пусть $e := 1 + px$, $p \neq 0$. Допустим, что

$$(1 + px) \parallel (1 + px)^2 = 1 + 2px + p^2y,$$

таких идемпотентов нет.

4. Пусть $e := 1 + qy$, $q \neq 0$. Допустим, что

$$(1 + qy) \parallel (1 + qy)^2 = 1 + q^2 + 2qy,$$

тогда получаем следующие два идемпотента: $(1 + y)/2$ и $(1 - y)/2$. Тем самым доказано, что алгебра E не имеет идемпотентного базиса. $\square$

7. Алгебра E^* и её свойства

7.1. Изотопы Алберта

В 1942 г. Алберт [8] ввёл понятие изотопа. Напомним, что линейные алгебры $(A, \cdot)$ и $(B, \circ)$ над основным полем F называются *изотопными*, если существует тройка $\Lambda = (\varphi, \psi, \xi)$ линейных изоморфизмов $A \rightarrow B$, удовлетворяющих условию $x^\varphi \circ y^\psi = (x \cdot y)^\xi$ для любых $x, y \in A$.

При этом тройка изоморфизмов Λ называется *изотопией*. Обычным образом определяется композиция изотопий $\Lambda = (\varphi, \psi, \xi): A \rightarrow A'$ и $\Lambda' = (\varphi', \psi', \xi'): A' \rightarrow A''$, а именно $\Lambda\Lambda' = (\varphi\varphi', \psi\psi', \xi\xi'): A \rightarrow A''$; композиция изотопий является изотопией. Отношение изотопии является отношением эквивалентности, причём более широким, чем отношение изоморфизма.

Пусть $f, g: A \rightarrow A$ — обратимые линейные операторы на алгебре $(A, \cdot)$. Определим алгебру $A^* = A^{(f,g)}$ на том же линейном пространстве A относительно нового умножения $x * y = x^f y^g$ для любых $x, y \in A$. Алгебра A^* называется *главным изотопом* алгебры A .

Если $\Lambda = (\varphi, \psi, \xi): A \rightarrow B$ — изотопия алгебр, то главный изотоп $B^* = B^{(\xi^{-1}\varphi, \xi^{-1}\psi)}$ алгебры B изоморфен алгебре A . В самом деле, отображение $\xi: A \rightarrow B^*$ является изоморфизмом, поскольку для любых $x, y \in A$ верно

$$x^\xi * y^\xi = (x^\xi)^{\xi^{-1}\varphi} \circ (y^\xi)^{\xi^{-1}\psi} = x^\varphi \circ y^\psi = (x \cdot y)^\xi.$$

Итак, две алгебры изотопны тогда и только тогда, когда одна из них изоморфна главному изотопу другой. В частности, если алгебры A и B унитарны и изотопны, то главный изотоп B^* также унитарен.

Определение 4. Элемент a алгебры A называется *R -обратимым*, если оператор $R_a: x \mapsto xa$ правого умножения на элемент a обратим (невырожден). Заметим, что обратный оператор R_a^{-1} , вообще говоря, не является оператором правого умножения.

Теорема Алберта. Если изотоп $A^* = A^{(\varphi, \psi)}$ унитарен, то существуют элементы $g, h \in A$, такие что $\varphi R_g, \psi L_h = 1_A$.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 11. Пусть C — алгебра и $C^* = C^{(\sigma\varphi, \varphi)}$, $\sigma \in F^\times$, — её стандартный изотоп. Тогда ниль-ранги этих алгебр совпадают.

К сожалению, для ниль-элементов индекса 3 аналога этой леммы нет; при переходе к изотопу могут появляться или пропадать ниль-элементы индекса 3.

7.2. Один изотоп E^* выделенной алгебры E

Рассмотрим в алгебре $E = \langle 1, x, y \mid x^2 = y, xy = 0, y^2 = 1 \rangle$ элемент $c = 1 + 2y$ и вычислим в стандартном базисе $(1, x, y)$ матрицу оператора R_c :

$$1c = 1 + 2y, \quad xc = x(1 + 2y) = x + 2xy = x, \quad yc = y(1 + 2y) = 2 + y.$$

Итак,

$$R_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(R_c) = -3.$$

Положим

$$\varphi := R_c^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим образы базисных элементов при отображении φ :

$$\begin{aligned} 1^\varphi &= (1, 0, 0) \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(-1, 0, 2) = \frac{1}{3}(-1 + 2y), \\ x^\varphi &= (0, 1, 0) \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} = (0, 1, 0) = x, \\ y^\varphi &= (0, 0, 1) \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(2, 0, -1) = \frac{1}{3}(2 - y). \end{aligned}$$

Рассмотрим стандартный изотоп $E^* = E^{(\varphi, \varphi)}$ относительно произведения $u * v = u^\varphi v^\varphi$. Единицей в нём является элемент

$$e := c^2 = (1 + 2y)^2 = 4y^2 + 4y + 1 = 5 + 4y, \quad 1 = \frac{1}{5}(e - 4y).$$

Вычислим произведения элементов x и y в изотопе:

$$\begin{aligned} x * x &= x^\varphi x^\varphi = x^2 = y, \quad x * y = x^\varphi y^\varphi = x \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}y \right) = \frac{2}{3}x, \\ y * y &= y^\varphi y^\varphi = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}y \right)^2 = \frac{5}{9} - \frac{4}{9}y = \frac{5}{9}(e - 4y) - \frac{4}{9}y = \frac{1}{9}e - \frac{8}{9}y. \end{aligned}$$

После переобозначения $a := x$, $b := y$ получаем, что изотоп E^* изоморфен алгебре, для которой сохраним введённые обозначения

$$E^* = \left\langle 1, a, b \mid a^2 = b, \quad ab = \frac{2}{3}a, \quad b^2 = \frac{1}{9} - \frac{8}{9}b \right\rangle.$$

7.3. Наличие идемпотентного базиса в алгебре E^*

Лемма 12. Алгебра E^* имеет идемпотентный базис.

Доказательство. Докажем, что существуют нетривиальные идемпотенты вида $\theta(1 + pa + qb)$:

$$\begin{aligned}
(1 + pa + qb)^2 &= a^2p^2 + 2abpq + 2ap + b^2q^2 + 2bq + 1 = \\
&= bp^2 + \frac{4}{3}apq + 2ap + \left(\frac{1}{9} - \frac{8}{9}b\right)q^2 + 2bq + 1 = \\
&= \left(1 + \frac{1}{9}q^2\right) + \left(2p + \frac{4}{3}pq\right)a + \left(p^2 - \frac{8}{9}q^2 + 2q\right)b.
\end{aligned}$$

Наличие идемпотента указанного вида равносильно разрешимости системы

$$\begin{cases} 0 = \frac{1 + (1/9)q^2}{1} - \frac{2p + (4/3)pq}{p} = \frac{1}{9}q^2 - \frac{4}{3}q - 1, \\ 0 = \frac{1 + (1/9)q^2}{1} - \frac{p^2 - (8/9)q^2 + 2q}{q} = -\frac{1}{9q}(9p^2 - q^3 - 8q^2 + 9q), \end{cases} \quad (7.1)$$

Поскольку многочлены $(1/9)q^2 - (4/3)q - 1$ и $-q^3 - 8q^2 + 9q$ взаимно просты, то система (7.1) имеет решение (p, q) с ненулевыми компонентами.

Легко проверить, что элемент $(9/10)(1 + b)$ также является идемпотентом:

$$\left(\frac{9}{10}(1 + b)\right)^2 - \frac{9}{10}(1 + b) = \frac{81}{100}b^2 + \frac{18}{25}b - \frac{9}{100} = \frac{81}{100}\left(\frac{1}{9} - \frac{8}{9}b\right) + \frac{18}{25}b - \frac{9}{100} = 0.$$

Лемма доказана. $\square$

7.4. Отсутствие ниль-элементов в алгебре E^*

Лемма 13. Алгебра E^* не содержит ниль-элементов.

Доказательство. Заметим, что в алгебре E^* нет ниль-элементов индекса 2. Это немедленно вытекает из лемм 5 и 11.

Допустим, что алгебра E^* содержит ниль-элемент. Тогда его индекс ниль-потентности равен 3 и этот элемент имеет вид γt , $\gamma \neq 0$, и для элемента t возможны следующие шесть случаев ($pq \neq 0$):

$$\begin{aligned}
(1) \ t &= a, & (2) \ t &= b, & (3) \ t &= 1 + pa, \\
(4) \ t &= 1 + qb, & (5) \ t &= a + qb, & (6) \ t &= 1 + pa + qb.
\end{aligned}$$

Рассмотрим последовательно эти случаи. В первых двух случаях имеем:

$$\begin{aligned}
(1) \ 1R_a^3 &= a^2a = ba = \frac{2}{3}a \neq 0, \\
(2) \ 1R_b^3 &= b^2b = \left(\frac{1}{9} - \frac{8}{9}b\right)b = \frac{1}{9}b - \frac{8}{9}\left(\frac{1}{9} - \frac{8}{9}b\right) = \frac{73}{81}b - \frac{8}{81} \neq 0.
\end{aligned}$$

Считая $p, q \neq 0$, вычислим характеристический многочлен оператора R_t для каждого из случаев (3)–(6).

$$(3) \ a(1 + pa) = a + pb, \quad b(1 + pa) = b + abp = \frac{2}{3}pa + b.$$

В этом случае оператор R_t задаётся матрицей

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & \frac{2}{3}p & 1 \end{pmatrix},$$

а его характеристический многочлен имеет вид $X^3 - 3X^2 + \dots$. Мы получили противоречие, поскольку характеристический многочлен нильпотентного оператора, действующего в 3-мерном пространстве, равен X^3 .

$$(4) \quad 1(1 + qb) = 1 + qb, \quad a(1 + qb) = \frac{1}{3}a + qa = \frac{1}{3}(2q + 3)a,$$

$$b(1 + qb) = qb^2 + b = \frac{2}{3}pa + b = q\left(\frac{1}{9} - \frac{8}{9}b\right) = \frac{1}{9}q + \left(1 - \frac{8}{9}q\right)b.$$

Оператор R_t задаётся матрицей

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & q \\ 0 & (2/3)q + 1 & 0 \\ (1/9)q & 0 & 1 - (8/9)q \end{pmatrix},$$

а его характеристический многочлен равен

$$X^3 + (2q - 3)X^2 - \left(\frac{17}{9}q^2 - 4q + 3\right)X + \left(\frac{2}{27}q^3 + \frac{17}{9}q^2 + 2q - 1\right).$$

Поскольку его характеристический многочлен равен X^3 , то $q = 2/3$. Но тогда оператор и его характеристический многочлен имеют вид

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5/6 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad X^3 - \frac{33}{4}X + \frac{17}{2},$$

противоречие.

$$(5) \quad 1(a + qb) = a + qb, \quad a(a + qb) = \frac{2}{3}qa + b,$$

$$b(a + qb) = qb^2 + ab = q\left(\frac{1}{9} - \frac{8}{9}\right)b + \frac{2}{3}a = \frac{1}{9}q + \frac{2}{3}a - \frac{8}{9}qb.$$

Оператор R_t задаётся матрицей

$$R_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & q \\ 0 & (2/3)q & 1 \\ (1/9)q & 2/3 & -(8/3)q \end{pmatrix},$$

его характеристический многочлен равен

$$X^3 + 2qX^2 + \left(-\frac{17}{9}q^2 - \frac{2}{3}\right)X + \frac{1}{27}q(2q^2 - 3).$$

Тогда $q = 0$ и характеристический многочлен принимает вид $X^3 - (2/3)X -$ противоречие.

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & 1(1 + pa + qb) = 1 + pa + qb, \\
 & a(1 + pa + qb) = a + pb + \frac{2}{3}qa = \left(1 + \frac{2}{3}q\right)a + pb, \\
 & b(1 + pa + qb) = b + qb^2 + abp = b + \left(\frac{1}{9} - \frac{8}{9}\right)q + \frac{2}{3}ap = \\
 & = \frac{1}{9}q + \frac{2}{3}pa + \left(1 - \frac{8}{9}q\right)b.
 \end{aligned}$$

Оператор R_t задаётся матрицей

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & p & q \\ 0 & 1 + (2/3)q & p \\ (1/9)q & (2/3)p & 1 - (8/9)q \end{pmatrix},$$

его характеристический многочлен имеет вид $X^3 + ((2/9)q - 3)X^2 + \dots$. Тогда $q = 27/2$ и характеристический многочлен равен

$$X^3 - \left(\frac{2}{3}p^2 + \frac{525}{4}\right)X + \frac{625}{2} - \frac{5}{6}p^2,$$

значит, он отличен от X^3 . □

Из лемм 12, 13 и теоремы 4 вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Существует стандартный изотоп E^* алгебры E , обладающий свойствами:*

- 1) *изотоп E^* имеет идемпотентный базис,*
- 2) *в изотопе E^* отсутствуют ниль-элементы.*

Заметим, что в самой алгебре E существуют ниль-элементы, но нет идемпотентного базиса.

8. Открытые вопросы

Перечислим основные вопросы, возникающие при изучении простых алгебр, не содержащих ниль-элементов индекса 2.

1. Верно ли, что каждый унитарный коммутативный изотоп алгебры вида E является стандартным.
2. Классифицировать алгебры E_τ , $E_{\tau'}$, $G(\lambda, \mu)$ и $G(\lambda', \mu')$ с точностью до изоморфизма (изотопии). Заметим, что алгебры E_τ и $E_{1-\tau}$ изоморфны; достаточно в алгебре E_τ рассмотреть элементы $x' = ix$, $e' = 1 - e$ и их попарные произведения.

3. Найти условия, при которых каждая из простых алгебр E_τ и $G(\lambda, \mu)$ обладает идемпотентным базисом.
4. Найти все ниль-элементы и идемпотенты стандартных изотопов алгебр E_τ и $G(\lambda, \mu)$.
5. Пусть C — простая коммутативная унитарная 3-мерная алгебра. Верно ли, что если в ней нет ниль-элементов, то она имеет нетривиальный идемпотент (идемпотентный базис).

Литература

- [1] Борисова Л. Р., Глизбург В. И., Пчелинцев С. В. Односторонние изотопы конечно-мерных алгебр // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2021. — Т. 23, вып. 4. — С. 3—16.
- [2] Кузьмин Е. Н. Алгебры Мальцева размерности пять над полем характеристики нуль // *Алгебра и логика.* — 1970. — Т. 9, № 6. — С. 691—700.
- [3] Кузьмин Е. Н. О бинарно лиевых алгебрах малых размерностей // *Алгебра и логика.* — 1998. — Т. 37, № 3. — С. 320—328.
- [4] Кузьмин Е. Н., Шестаков И. П. Неассоциативные структуры // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления.* — 1990. — Т. 57. — С. 179—266.
- [5] Пчелинцев С. В. Изотопы альтернативных алгебр характеристики, отличной от 3 // *Изв. РАН. Сер. матем.* — 2020. — Т. 84, № 5. — С. 197—210.
- [6] Пчелинцев С. В. Центральные изотопы $(-1, 1)$ -алгебр // *Сиб. матем. журн.* — 2021. — Т. 62, № 4. — С. 830—844.
- [7] Abdurasulov K., Adashev J., Normatov Z., Solijonova Sh. Classification of three-dimensional anti-dendriform algebras. — [arXiv:2404.00981\[math.RA\]](https://arxiv.org/abs/2404.00981).
- [8] Albert A. A. Non-associative algebras. I. Fundamental concepts and isotopy // *Ann. Math. (2).* — 1942. — Vol. 43, no. 4. — P. 685—707.
- [9] Bruck R. H. Some results in the theory of linear non-associative algebras // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1944. — Vol. 56. — P. 141—199.
- [10] Glizburg V. I., Pchelintsev S. V. Isotopes of simple algebras of arbitrary dimension // *Asian-Eur. J. Math.* — 2020. — 2050108.
- [11] Wei Hu, Zhankui Xiao. A characterization of algebras generated by idempotents // *J. Pure Appl. Algebra.* — 2021. — Vol. 225, no. 9. — P. 106693
- [12] Jacobson N. *Lie Algebras.* — New York: Dover, 1979.
- [13] Kaygorodov I., Shashkov O. Degenerations of nilalgebras // *Commun. Math. Res.* — 2025. — Vol. 41, no. 1. — P. 9—24.
- [14] Kaygorodov I., Volkov Y. The variety of two-dimensional algebras over an algebraically closed field // *Can. J. Math.* — 2019. — Vol. 71, no. 4. — P. 819—842.
- [15] Krylov A. A., Pchelintsev S. V. The isotopically simple algebras with a nil-basis // *Commun. Algebra.* — 2020. — Vol. 48, no. 4. — P. 1697—1712.
- [16] Petersson H. The classification of two-dimensional nonassociative algebras // *Results Math.* — 2000. — Vol. 37, no. 1-2. — P. 120—154.
- [17] Seeley C. Degenerations of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over $\mathbb{C}$ // *Commun. Algebra.* — 1990. — Vol. 18. — P. 3493—3505.

