

Автоморфизмы алгебр инцидентности

П. А. КРЫЛОВ

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет
e-mail: krylov@math.tsu.ru*

А. А. ТУГАНБАЕВ

*Национальный исследовательский университет МЭИ,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: tuganbaev@gmail.com*

УДК 512.552

Ключевые слова: алгебра инцидентности, автоморфизм, внутренний автоморфизм.

Аннотация

Изучаются автоморфизмы алгебры инцидентности $I(X, R)$, где X — предпорядоченное множество, R — алгебра над некоторым коммутативным кольцом T . При некоторых довольно общих предположениях установлено, что всякий автоморфизм такой алгебры является произведением четырёх автоморфизмов, строение которых можно считать известным.

Abstract

P. A. Krylov, A. A. Tuganbaev, Automorphisms of incidence algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 3, pp. 81—111.

We study automorphisms of the incidence algebra $I(X, R)$, where X is a preordered set and R is an algebra over some commutative ring T . Under some fairly general assumptions, it is established that every automorphism of such an algebra is a product of four automorphisms, the structure of which can be considered known.

1. Введение

Данная работа посвящена автоморфизмам алгебры инцидентности $I(X, R)$ для произвольного предпорядоченного множества X и произвольной алгебры R над некоторым коммутативным кольцом T . Используется и развивается подход, хорошо зарекомендовавший себя при описании автоморфизмов колец формальных матриц с нулевыми идеалами следа в [15, 17—19]: алгебра инцидентности записывается как расщепляющееся расширение некоторого идеала M с помощью некоторого подкольца L . Иными словами, имеет место прямое разложение $I(X, R) = L \oplus M$. Здесь L — произведение колец квадратных матриц над R , а M — произведение групп прямоугольных матриц над R . Отметим, что идеал M лежит в радикале Джекобсона кольца

$I(X, R)$, в то время как в случае кольца формальных матриц M — нильпотентный идеал. Автоморфизмы алгебры $I(X, R)$ представляются определёнными матрицами порядка 2 относительно прямой суммы $L \oplus M$. Это очень помогает при изучении автоморфизмов алгебры $I(X, R)$. Подобная техника также показала себя эффективной при описании дифференцирований колец инцидентности в [22].

С начальным этапом исследований автоморфизмов колец инцидентности можно ознакомиться по [26]. Автоморфизмы колец инцидентности рассматривались и в дальнейшем. Обратим внимание на кохомологическую интерпретацию группы автоморфизмов кольца инцидентности в [8]. Работа [5] содержит весьма полный обзор с формулировкой основных известных на момент подготовки этой работы результатов об автоморфизмах колец инцидентности. В [4, 13] изучаются так называемые мультипликативные автоморфизмы алгебр инцидентности (замечание о мультипликативных автоморфизмах есть в конце раздела 7).

Алгебры инцидентности ввёл Дж.-К. Рота в своей известной работе [23] как инструмент для решения некоторых проблем комбинаторики и прежде всего для изучения унифицированным образом обобщений формулы обращения Мёбиуса в теории чисел. Со временем алгебры инцидентности сами по себе, независимо от их приложений в комбинаторике и других областях математики, оказались содержательным алгебраическим объектом. Им посвящено множество работ, в том числе [26].

Если X — конечное множество, то кольцо $I(X, R)$ изоморфно определённому подкольцу матричного кольца $M(n, R)$. Кольцо $I(X, R)$ с конечным множеством X часто называют *кольцом структуральных матриц* (см., например, [7]). Известно [24], что кольцо структуральных матриц представимо в виде кольца блочных треугольных матриц и, таким образом, является одним из видов колец формальных матриц.

В данной работе мы рассматриваем только ассоциативные кольца с ненулевой единицей.

Если S — некоторое кольцо (или алгебра), то $U(S)$ — его *группа обратимых элементов*, $C(S)$ — его *центр* и $J(S)$ — *радикал Джекобсона*, $M(n, S)$ — обычное кольцо всех матриц размера $n \times n$ со значениями в S , $M(n \times t, S)$ — группа всех прямоугольных матриц размера $n \times t$ со значениями в S .

$\text{Aut } S$ — *группа автоморфизмов* алгебры S , $\text{In}(\text{Aut } S)$ — *подгруппа внутренних автоморфизмов*, $\text{Out } S$ — *группа внешних автоморфизмов* алгебры S , т. е. $\text{Out } S$ — это фактор-группа $\text{Aut } S / \text{In}(\text{Aut } S)$.

Пусть X — некоторое предпорядоченное множество. Через $\text{Aut } X$, $\text{In}(\text{Aut } X)$ и $\text{Out } X$ обозначаются *группа автоморфизмов* множества X , *подгруппа его внутренних автоморфизмов* и *группа внешних автоморфизмов* множества X соответственно.

Через $I(X, R)$ обозначаем алгебру (можно говорить «кольцо») инцидентности предпорядоченного множества X над алгеброй R .

Пусть R ещё одно кольцо, A — R - S -бимодуль и α, γ — автоморфизмы колец R и S соответственно. Можно задать новую структуру бимодуля на A , положив

$$x \circ a = \alpha(x)a, \quad a \circ y = a\gamma(y) \quad \text{для всех } x \in R, y \in S, a \in A.$$

Обычно этот бимодуль обозначается через ${}_{\alpha}A_{\gamma}$.

Полупрямое произведение групп A и B обозначается через $A \rtimes B$.

2. Кольца инцидентности

Кратко изложим некоторые первоначальные сведения о предупорядоченных множествах (детали можно найти в [26]).

Пусть X — произвольное множество и $\leq$ — рефлексивное и транзитивное отношение на X . В таком случае система $\langle X, \leq \rangle$ называется *предупорядоченным множеством*, $\leq$ — *предпорядок* на X . Если отношение $\leq$ ещё и антисимметрично, то $\langle X, \leq \rangle$ — *частично упорядоченное множество*.

Считаем далее, что $\langle X, \leq \rangle$ — предупорядоченное множество. Для любых элементов $x, y \in X$ через $[x, y]$ обозначим подмножество $\{z \in X \mid x \leq z \leq y\}$. Оно называется *интервалом* в X . Интервал вида $[x, x]$ будем обозначать через $[x]$. Отметим два полезных свойства интервалов:

- а) для любых $y, z \in [x]$ имеем равенство $[y, z] = [x]$;
- б) если $x < y$, то для произвольных элементов $s \in [x]$ и $t \in [y]$ верно, что $s < t$.

Зададим на X бинарное отношение $\sim$, положив

$$x \sim y \iff x \leq y \text{ и } y \leq x.$$

Ясно, что $\sim$ — отношение эквивалентности на X . Соответствующие классы эквивалентности имеют вид $[x]$ для всевозможных $x \in X$. Из свойства б) вытекает, что отношение предпорядка $\leq$ согласовано с отношением эквивалентности $\sim$. Следовательно, на фактор-множестве $\bar{X} = X/\sim$ появляется индуцированное отношение $\leq$, причём $\langle \bar{X}, \leq \rangle$ — частично упорядоченное множество.

С предупорядоченным множеством X , а также с частично упорядоченным множеством $\bar{X}$ можно ассоциировать ориентированный граф (возникающие при этом петли не учитываем). Удобнее исходить из множества $\bar{X}$, а когда нужно, рассматриваем $\bar{X}$ как простой граф, соотнесённый ориентированному графу $\bar{X}$. При этом будем использовать такие стандартные понятия теории графов, как *компонента связности*, *полупуть* и его *длина*.

Договоримся, что все интервалы в X конечны. В таком случае X называют *локально конечным* предупорядоченным множеством. Условимся в дальнейшем обозначать через x элементы частично упорядоченного множества $\bar{X}$, т. е. классы эквивалентности вида $[x]$. Иными словами, для обозначения класса $[x]$ будем использовать какой-то его представитель. Такая договорённость не приведёт

к путанице. В конкретной ситуации всегда ясно об элементах какого именно множества ($\bar{X}$ или X) идёт речь.

Пусть далее буква R обозначает алгебру над некоторым коммутативным кольцом T . Правда, само кольцо T почти не используется явно.

Алгебра инцидентности представляет собой некоторое кольцо функций. Пусть $\langle X, \leq \rangle$ — произвольное локально конечное предпорядоченное множество. Положим

$$I(X, R) = \{f: X \times X \rightarrow R \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \not\leq y\}.$$

Функции складываются поточечно. Произведение функций f и g из $I(X, R)$ задаётся формулой

$$(fg)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) \cdot g(z, y) \quad (1)$$

для каждого $x, y \in X$. Для любых $t \in T$ и $x, y \in X$ ещё полагаем $(tf)(x, y) = tf(x, y)$. В результате получаем T -алгебру $I(X, R)$, называемую *алгеброй инцидентности* или *кольцом инцидентности* предпорядоченного множества X над кольцом R . В дальнейшем конкретную алгебру $I(X, R)$ обозначаем буквой K .

Введём некоторые специальные функции из $I(X, R)$. Для данного $x \in X$ положим $e_{[x]}(t, t) = 1$ для всех $t \in [x]$ и $e_{[x]}(z, y) = 0$ для оставшихся пар (z, y) . Система $\{e_{[x]} \mid x \in X\}$ состоит из попарно ортогональных центральных в L идемпотентов (кольцо L определено в следующем абзаце). В соответствии с нашим соглашением будем писать e_x вместо $e_{[x]}$.

Определим подкольцо L и идеал M в K . Положим

$$L = \{f \in K \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \not\sim y\}$$

и

$$M = \{f \in K \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \sim y\}.$$

Имеем прямую сумму T -модулей $K = L \oplus M$, т. е. кольцо K — расщепляющееся расширение идеала M с помощью подкольца L . Идеал M естественным образом считаем L - L -бимодулем. Кроме того, M — неунитальная алгебра.

Идеал M лежит в радикале Джекобсона алгебры K . Следовательно, элемент $1 + d$ обратим в K для всякого $d \in M$ (см. [26, теорема 1.2.3], теорему 2.2 и следствие 2.3).

Пусть дан произвольный интервал $[x]$. Обозначим через $R_{[x]}$ множество функций $f \in K$, для которых $f(z, y) = 0$, если $z \not\leq x$ или $y \not\leq x$. Как и в случае идемпотентов e_x , пишем R_x вместо $R_{[x]}$. Справедливы равенства

$$R_x = e_x A e_x = e_x L e_x.$$

Закключаем, что R_x — кольцо с единицей e_x . Если перейти к ограничениям функций из K на $[x] \times [x]$, то фактически R_x — это алгебра всех функций $[x] \times [x] \rightarrow R$ с поточечным сложением и произведением типа свёртки, как в (1). Выберем какую-либо нумерацию интервала $[x]$: $[x] = \{x_1, \dots, x_n\}$. После

этого если функции $f \in R_x$ поставить в соответствие матрицу $(f(x_i, x_j))$, то придём к изоморфизму алгебр $R_x \cong M(n, R)$. Возьмём теперь два различных интервала $[x]$, $[y]$ и положим

$$M_{xy} = \{f \in K \mid f(s, t) = 0, \text{ если } s \not\sim x \text{ или } t \not\sim y\}.$$

Тогда $M_{xy} = e_x A e_y$, и значит, M_{xy} является R_x - R_y -бимодулем.

Уточним, что $M_{xy} = 0$, если $x \not\leq y$, а при $x < y$ существует канонический изоморфизм

$$M_{xy} \cong M(n \times m, R), \quad n = |[x]|, \quad m = |[y]|,$$

относительно указанных выше изоморфизмов $R_x \cong M(n, R)$ и $R_y \cong M(m, R)$. После отождествлений всех алгебр R_x с $M(n, R)$ и бимодулей M_{xy} с $M(n \times m, R)$ становится ясно, что действия колец R_x и R_y на M_{xy} будут обычными умножениями матриц. Ясно также, что M_{xy} есть L - L -бимодуль. Действие L на M_{xy} сводится к действию R_x слева и R_y справа. Ещё раз обратим внимание, что под индексами в R_x и M_{xy} подразумеваем $[x]$ и $[x][y]$ соответственно (см. выше).

Произведение $\prod_{x, y \in X} M_{xy}$ обладает структурой L - L -бимодуля. Именно, если $f \in L$, $(g_{xy}) \in \prod_{x, y \in X} M_{xy}$, то

$$f(g_{xy}) = (f_x g_{xy}) \quad \text{и} \quad (g_{xy})f = (g_{xy} f_y),$$

где $f_x = e_x f e_x$ и $f_y = e_y f e_y$.

Определим теперь в бимодуле $\prod_{x, y \in X} M_{xy}$ умножение посредством формулы

$$(g_{xy}) \cdot (h_{xy}) = (d_{xy}),$$

где $d_{xy} = \sum_{x \leq z \leq y} g_{xz} \cdot h_{zy}$, после чего этот бимодуль становится (неунитальной) алгеброй.

Предложение 2.1. Существуют канонические изоморфизмы алгебр $L \cong \prod_{x \in X} R_x$, а также L - L -бимодулей и алгебр $M \cong \prod_{x, y \in X} M_{xy}$.

Доказательство. Определим отображение $\omega: L \rightarrow \prod_{x \in X} R_x$, полагая $\omega(f) = (f_x)$ для каждого $f \in L$, где $f_x = e_x f e_x$. Тогда ω — изоморфизм алгебр. Отображение $\varepsilon: M \rightarrow \prod_{x, y \in X} M_{xy}$, $\varepsilon(g) = (g_{xy})$, где $g_{xy} = e_x g e_y$, будет изоморфизмом L - L -бимодулей и алгебр. $\square$

В дальнейшем мы не будем различать соответствующие объекты относительно изоморфизмов ω и ε .

Будет полезна информация об обратимых элементах алгебры K (см. [17, 20, 26]).

Теорема 2.2. Следующие утверждения о функции f из K равносильны:

- 1) f — обратимая функция;

2) если $f = g + h$, где $g \in L$, $h \in M$, то функция g обратима в L .

Следствие 2.3. Для любого элемента $h \in M$ элемент $1 + h$ обратим.

Каждый обратимый элемент ν алгебры K даёт её автоморфизм μ_ν согласно правилу $\mu_\nu(a) = \nu^{-1}a\nu$. Такой автоморфизм называется *внутренним автоморфизмом*, определяемым элементом ν . Все внутренние автоморфизмы образуют нормальную подгруппу $\text{In}(\text{Aut } K)$ группы $\text{Aut } K$. Через $\text{In}_1(\text{Aut } K)$ ($\text{In}_0(\text{Aut } K)$) будем обозначать подгруппу внутренних автоморфизмов алгебры K , определяемых обратимыми элементами вида $1 + d$, $d \in M$ (соответственно обратимыми элементами алгебры L). Первая подгруппа является нормальной в $\text{Aut } K$. Используя полупрямое разложение $U(K) = (1 + M) \rtimes U(L)$, можно убедиться в существовании разложения

$$\text{In}(\text{Aut } K) = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \text{In}_0(\text{Aut } K).$$

(см. также [17, раздел 4]).

3. Два условия на алгебру K

До конца работы пользуемся всеми обозначениями и учитываем все соглашения, принятые выше относительно предпорядоченного множества X и алгебры инцидентности $I(X, R)$. Обозначаем последнюю через K .

Специально напомним, что алгебра K является расщепляющимся расширением: $K = L \oplus M$, где L и M — подкольцо и идеал соответственно, определённые в разделе 2.

Возьмём произвольный автоморфизм φ алгебры K . Как каждый аддитивный эндоморфизм, φ может быть представлен матрицей

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$$

относительно прямого разложения $K = L \oplus M$. Здесь

$$\alpha: L \rightarrow L, \quad \beta: M \rightarrow M, \quad \gamma: M \rightarrow L, \quad \delta: L \rightarrow M —$$

T -модульные гомоморфизмы и

$$\varphi(x + y) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha(x) + \gamma(y)) + (\delta(x) + \beta(y))$$

для всех $x \in L$ и $y \in M$. Мы будем рассматривать только «треугольный» случай, когда $\gamma = 0$ для любого автоморфизма φ . При таком предположении можно получить содержательную информацию о группе $\text{Aut } K$. В любом случае все результаты для треугольного случая применимы к подгруппе автоморфизмов, матрицы которых имеют вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем мы не будем различать автоморфизм φ и соответствующую ему матрицу. Иногда мы для краткости говорим о «треугольном автоморфизме» φ , если

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix},$$

и о «диагональном автоморфизме» φ , если

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} -$$

некоторый автоморфизм алгебры K . Используя то, что φ сохраняет произведение, нетрудно проверить равенства

$$\begin{aligned} \alpha(xz) &= \alpha(x)\alpha(z), \quad \delta(xz) = \delta(x)\alpha(z) + \alpha(x)\delta(z) + \delta(x)\delta(z), \quad \beta(y y') = \beta(y)\beta(y'), \\ \beta(xy) &= \alpha(x)\beta(y) + \delta(x)\beta(y), \quad \beta(yx) = \beta(y)\alpha(x) + \beta(y)\delta(x) \end{aligned} \quad (2)$$

для всех $x, z \in L$ и $y, y' \in M$.

Отображения α и β являются биекциями. Поэтому α — автоморфизм алгебры L и β — автоморфизм алгебры M (как неунитальной алгебры). Верно и обратное. Пусть $\alpha: L \rightarrow L$, $\beta: M \rightarrow M$, $\delta: L \rightarrow M$ — отображения с перечисленными выше свойствами. Тогда преобразование алгебры K , задаваемое матрицей

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha(x) + (\delta(x) + \beta(y)), \quad x \in L, \quad y \in M,$$

является её автоморфизмом.

Определим один групповой гомоморфизм и несколько групп автоморфизмов. Пусть $f: \text{Aut } K \rightarrow \text{Aut } L$ — такой гомоморфизм, что $f(\varphi) = \alpha$ для каждого автоморфизма

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}.$$

Пусть Λ — подгруппа диагональных автоморфизмов,

$$C = \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Lambda \mid \alpha R_x = R_x \text{ для каждого } x \in X \right\}.$$

Обозначим через Ψ нормальную подгруппу в $\text{Aut } K$, состоящую из автоморфизмов вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

а через Ψ_0 подгруппу всех внутренних автоморфизмов, соответствующих обратимым центральным элементам кольца L . Здесь Ψ_0 — нормальная подгруппа в Ψ . Пусть Ω — образ гомоморфизма f и

$$\Omega_1 = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha R_x = R_x \text{ для всех } x \in X\}.$$

Наконец, обозначим через Φ нормальную подгруппу

$$\left\{ \varphi \in \text{Aut } K \mid \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}, \alpha \in \text{In}(\text{Aut } L) \right\}$$

группы $\text{Aut } K$.

Информация о введённых группах очень важна для понимания строения группы $\text{Aut } K$.

В проблеме описания и вычисления группы $\text{Aut } K$ можно выделить следующие направления исследований.

1. Вычисление нормальной подгруппы Φ .
2. Вычисление нормальной подгруппы Ψ .
3. Вычисление группы Ω .

Сформулируем два условия на алгебру K (см. также [17, разделы 8, 9; 18]).

- I. Для любого $\varphi \in \text{Aut } K$ верно равенство $\varphi M = M$, т. е. всякий автоморфизм является треугольным.

Автоморфизмы могут «передвигать» кольца R_x и бимодули M_{xy} . Укажем одно условие, устраняющее такое явление.

- II. Для любого $\varphi \in \text{Aut } K$ и каждого $x \in X$ справедливо включение $\varphi(e_x) \in e_y + M$ для некоторого $y \in X$.

Теперь введём несколько условий на произвольное кольцо S .

Определение 3.1.

1. Кольцо S называется *неразложимым*, если 1 — его единственный ненулевой центральный идемпотент.
2. Идемпотент e кольца S называется *полуцентральной*, если $(1-e)Se = 0$. Кольцо S называется *сильно неразложимым*, если 1 — его единственный ненулевой полуцентральный идемпотент [3].

Кольцо матриц над неразложимым кольцом само неразложимо. Сильно неразложимое кольцо не изоморфно никакому кольцу формальных матриц

$$\begin{pmatrix} A & N \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Соберём вместе несколько условий на кольцо S :

- (1) S — неразложимое кольцо;
- (2) S — сильно неразложимое кольцо;
- (3) фактор-кольцо $S/J(S)$ неразложимо;

- (4) для любого идемпотента $e \in S$ из равенства $(1 - e)Se = 0$ следует равенство $eS(1 - e) = 0$;
- (5) для любых ортогональных идемпотентов $e, f \in S$ из равенства $fSe = 0$ следует равенство $eSf = 0$.

Между данными условиями имеются такие соотношения:

$$(5) \implies (4), \quad (3) \implies (2) \implies (1)$$

(см. лемму 3.8).

Будет очень полезной информация о действии изоморфизмов, в частности автоморфизмов, на произведении неразложимых колец. Сформулируем и докажем один факт общего характера.

Лемма 3.2. Пусть даны произведения колец $S = \prod_{j \in J} S_j$ и $R = \prod_{i \in I} R_i$, причём все кольца S_j и R_i неразложимы. Если $\alpha: S \rightarrow R$ — произвольный кольцевой изоморфизм, то для каждого $j \in J$ найдётся такой индекс $i \in I$, что $\alpha S_j = R_i$.

Доказательство. Пусть f_j и e_i — единичные элементы колец S_j и R_i соответственно. Возьмём какой-то индекс $\ell \in J$. Тогда $\alpha(f_\ell) = (e_p) \in R$, где p пробегает некоторое подмножество $P \subseteq I$ (мы учли неразложимость колец R_i). Значит, α отображает S_ℓ в $\prod_{p \in P} R_p$. Если сужение α на S_ℓ не является изоморфизмом, то найдётся элемент $y \in S$, имеющий нулевую компоненту в S_ℓ и такой, что $\alpha(y) \in \prod_{p \in P} R_p$ и $\alpha(y) \neq 0$. Однако тогда из $f_\ell y = 0$ вытекает равенство $\alpha(f_\ell)\alpha(y) = 0$. Последнее равенство противоречиво, поскольку $\alpha(f_\ell)$ — единичный элемент кольца $\prod_{p \in P} R_p$. Заключаем, что $\alpha|_{S_\ell}$ — изоморфизм. В силу неразложимости кольца S_ℓ это возможно только при $|P| = 1$. $\square$

Верен симметричный аналог леммы 3.2 для изоморфизма α^{-1} . Поэтому существует биекция $\tau: J \rightarrow I$, для которой $\alpha(f_j) = e_{\tau(j)}$ и $\alpha(S_j) = R_{\tau(j)}$, $j \in J$.

Следствие 3.3. В ситуации леммы 3.2 изоморфизм α действует на произведении $\prod_{j \in J} S_j$ по координатам.

Доказательство. Поясним утверждение следствия. Пусть $\alpha: S \rightarrow R$ — изоморфизм и $\tau: J \rightarrow I$ — биекция, которую индуцирует α . Возьмём какой-то элемент $y = (y_j) \in S$ и запишем $\alpha(y) = (x_i) \in R$. Под по координатным действием понимается, что $\alpha(y_j) = x_{\tau(j)}$ для каждого $j \in J$.

Итак, пусть $y = (y_j) \in S$ и $\alpha(y) = (x_i) \in R$. Возьмём произвольный индекс $\ell \in J$ и запишем разложения $S = S_\ell \oplus \prod_{j \neq \ell} S_j$ и $R = R_{\tau(\ell)} \oplus \prod_{i \neq \tau(\ell)} R_i$. Далее запишем $y = y_\ell + a$, где $a \in \prod_{j \neq \ell} S_j$, и

$$\alpha(y) = \alpha(y_\ell) + \alpha(a), \quad \text{где } \alpha(y_\ell) \in R_{\tau(\ell)}.$$

Достаточно убедиться, что $\alpha(a) \in \prod_{i \neq \tau(\ell)} R_i$. В противном случае имеем соотношение $e_{\tau(\ell)}\alpha(a) \neq 0$, откуда получаем $\alpha^{-1}(e_{\tau(\ell)}\alpha(a)) = f_\ell a \neq 0$, что противоречиво. $\square$

Обратимся теперь к автоморфизмам кольца S , равного $\prod_{j \in J} S_j$, где все кольца S_j неразложимы. Получается, что автоморфизмы этого кольца «переставляют» кольца S_j . Опираясь на это, выделим (правда, неканоническим способом) в группе $\text{Aut } S$ подгруппу, изоморфную некоторой группе биекций множества J . Для этого разобьём множество колец S_j ($j \in J$) на классы эквивалентности относительно изоморфизма колец. Автоматически получаем также разбиение множества J .

Пусть P — какой-то класс эквивалентности в J . Зафиксируем некоторый элемент из P и обозначим его цифрой 1. Для каждого $s \in P$ выберем некоторый изоморфизм $\varepsilon_{s1}: S_1 \rightarrow S_s$, причём ε_{11} — тождественный автоморфизм кольца S_1 . Далее полагаем $\varepsilon_{1s} = \varepsilon_{s1}^{-1}$ и $\varepsilon_{pq} = \varepsilon_{p1} \cdot \varepsilon_{1q}: S_q \rightarrow S_p$ для всех $p, q \in P$.

Пусть σ — некоторая биекция множества P . Определим автоморфизм α_σ алгебры $\prod_{q \in P} S_q$, считая, что α_σ действует на S_q как изоморфизм $\varepsilon_{\sigma(q)q}$. После этого ясно, что $(\alpha_\sigma)^{-1} = \alpha_{\sigma^{-1}}$. Если τ ещё одна биекция множества P , то справедливо равенство $\alpha_{\tau\sigma} = \alpha_\tau \alpha_\sigma$. Поэтому соответствие $\sigma \rightarrow \alpha_\sigma$ является изоморфным вложением группы биекций множества P в группу $\text{Aut}\left(\prod_{q \in P} S_q\right)$.

Обозначим образ этого вложения через Σ_P . Теперь положим $\Sigma = \prod_P \Sigma_P$, где P пробегает все введённые выше классы эквивалентности множества J . Группа автоморфизмов Σ кольца S изоморфна некоторой группе биекций множества J . Это в точности те биекции, которые оставляют на месте каждый класс эквивалентности P множества J . отождествляем Σ с этой группой биекций, т. е. считаем, что $\alpha_\tau = \tau$.

Определим ещё одну подгруппу группы $\text{Aut } S$. Пусть

$$\Gamma = \{\mu \in \text{Aut } S \mid \mu S_j = S_j \text{ для всякого } j \in J\}.$$

Здесь Γ — нормальная подгруппа группы $\text{Aut } S$ и $\Gamma \cap \Sigma = \langle 1 \rangle$. Возьмём произвольный автоморфизм $\varphi \in \text{Aut } S$. В силу леммы 3.2 φ индуцирует биекцию τ множества индексов J . При этом верно включение $\varphi \alpha_\tau^{-1} \in \Gamma$. Обозначив $\varphi \alpha_\tau^{-1}$ через μ , получим $\varphi = \mu \alpha_\tau$, где $\mu \in \Gamma$, $\alpha_\tau \in \Sigma$.

Все недавно сказанное оформим в виде такого утверждения.

Следствие 3.4. *Группа $\text{Aut } S$ равна полупрямому произведению $\Gamma \rtimes \Sigma$, где $\Gamma = \prod_{j \in J} \text{Aut } S_j$, Σ — некоторая группа биекций множества J . Кроме того, существует изоморфизм $\text{Out } S \cong \prod_{j \in J} \text{Out } S_j \rtimes \Sigma$.*

Сформулируем результат Г. Адзумаи, на который будем неоднократно ссылаться.

Теорема 3.5 [2]. Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $e_1^*, \dots, e_n^*$ — две системы попарно ортогональных идемпотентов некоторого кольца S , таких что $e_i - e_i^* \in J(S)$ для каждого i . Тогда существует внутренний автоморфизм μ кольца S со свойством $\mu(e_i) = e_i^*$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть опять $K = I(X, R)$ — алгебра инцидентности, записанная как расщепляющееся расширение $L \oplus M$. В оставшейся части раздела рассмотрим условия (I) и (II) для алгебры K . Они тесно связаны между собой.

Лемма 3.6. Для алгебры инцидентности K справедливы следующие утверждения.

1. Из выполнения условия (II) вытекает выполнение условия (I).
2. Для неразложимого кольца R условия (I) и (II) равносильны.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Допустим, напротив, что существует такой автоморфизм φ алгебры K , что $\varphi M \not\subseteq M$. Возьмём какой-то элемент $a \in M$, для которого $\varphi(a) = b \notin M$. Выберем идемпотент e_y со свойством $e_y b e_y \neq 0$. На основании условия (II) имеем $\varphi^{-1}(e_y) = e_x + d$ для некоторых $x \in X$ и $d \in M$. Из теоремы 3.5 следует, что существует внутренний автоморфизм μ со свойством $\mu(e_x + d) = e_x$. Можно записать $\mu\varphi^{-1}(e_y) = e_x$. В итоге приходим к невозможным соотношениям

$$0 \neq \mu\varphi^{-1}(e_y b e_y) = e_x \mu(a) e_x = 0.$$

Делаем вывод, что условие (I) действительно выполняется.

Докажем утверждение 2. Возьмём произвольный автоморфизм

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$$

алгебры K и какой-то идемпотент e_x . Ввиду леммы 3.2 $\alpha(e_x) = e_y$ для некоторого y . Поэтому получаем

$$\varphi(e_x) = \alpha(e_x) + \delta(e_x) = e_y + \delta(e_x) \in e_y + M. \quad \square$$

Выделим некоторые ситуации, когда выполняется одно из условий (I) и (II).

Лемма 3.7. Если все кольца R_x удовлетворяют условию (5), то для алгебры K выполняется условие (I).

Доказательство. Допустим противное. Пусть φ — автоморфизм алгебры K , для которого $\varphi M \not\subseteq M$. Тогда $\varphi(a) = b \notin M$, где $a \in M$. Найдётся такой идемпотент e_y , что $e_y b e_y \neq 0$. Запишем $\varphi^{-1}(e_y) = f + m$, где $f^2 = f \in L$, $m \in M$, причём $f \neq 0$. Пусть внутренний автоморфизм μ переводит $f + m$ в f (теорема 3.5). Тогда $(\mu\varphi^{-1})(e_y) = f$. Представим f в виде $f = (f_x)$, $f_x \in R_x$, как условились в разделе 2.

Положим $S = fKf$. Ограничение отображения $\mu\varphi^{-1}$ на R_y является кольцевым изоморфизмом

$$R_y = e_y K e_y \rightarrow f K f = S.$$

Так как $e_y b e_y \neq 0$, то $f \mu(a) f \neq 0$. Поэтому $f_x \mu(a) f_z \neq 0$ для некоторых x, z , таких что $x \not\sim z$. Следовательно,

$$f_x K f_z \neq 0, \quad f_x K f_z = f_x f K f f_z = f_x S f_z \neq 0,$$

причём $f_x, f_z \in S$. Так как $S \cong R_y$, то по условию (5) также $f_z S f_x \neq 0$. Следовательно, $e_z K e_x \neq 0$ и $z < x$. Значит, $e_x K e_z = 0$ и $f_x S f_z = 0$. Получено противоречие. $\square$

В связи с доказанной леммой появляется естественный вопрос: для каких колец R кольцо матриц $M(n, R)$ удовлетворяет условию (5) для всех $n \geq 2$? Ответ положителен в каждом из следующих случаев:

- (а) R — локальное кольцо;
- (б) R — область главных левых (или правых) идеалов;
- (в) R — коммутативное дедекиндово кольцо.

Эти кольца объединяет то, что конечно порождённые модули над ними являются образующими.

Из лемм 3.7 и 3.6 вытекает, что если R — одно из перечисленных колец, то для алгебры $I(X, R)$ выполняются условия (I) и (II).

Прежде чем перейти к условию (II), сформулируем один простой результат.

Лемма 3.8. Пусть S — произвольное кольцо. Если фактор-кольцо $S/J(S)$ неразложимое, то S — сильно неразложимое и, в частности, неразложимое кольцо.

Доказательство. Допустим, что существует ненулевой идемпотент $e \neq 1$ со свойством $(1 - e)Se = 0$. Кольцо S можно отождествить с кольцом формальных матриц

$$\begin{pmatrix} eSe & eS(1 - e) \\ 0 & (1 - e)S(1 - e) \end{pmatrix}.$$

Это приводит к кольцевому изоморфизму

$$S/J(S) \cong eSe/J(eSe) \oplus (1 - e)S(1 - e)/J((1 - e)S(1 - e)),$$

что противоречит неразложимости кольца $S/J(S)$. $\square$

Лемма 3.9. Если фактор-кольцо $R/J(R)$ неразложимо, то для кольца K условие (II) справедливо.

Доказательство. Фактор-кольцо $R_x/J(R_x)$ неразложимо для всякого $x \in X$.

Принимая во внимание равенство $J(K) = J(L) \oplus M$ (нужно учесть материал раздела 2), можно отождествить фактор-кольца $K/J(K)$ и $L/J(L)$. Отождествим последнее кольцо с произведением $\prod_{x \in X} R_x/J(R_x)$.

Зафиксируем автоморфизм $\varphi \in \text{Aut } K$. Пусть $\bar{\varphi}$ — автоморфизм алгебры $K/J(K)$ или $L/J(L)$, индуцированный автоморфизмом φ . В силу леммы 3.2 для каждого идемпотента e_x найдётся идемпотент e_y со свойством $\bar{\varphi}(\bar{e}_x) = \bar{e}_y$, где черта над e_x (e_y) обозначает смежный класс относительно $J(R_x)$ (соответственно $J(R_y)$) или, эквивалентно, относительно $J(K)$.

Возвращаясь в кольцо K , получаем равенство $\varphi(e_x) = e_y + a + b$, где $a \in J(L)$, $b \in M$, и $e_y + a$ — идемпотент в L . Далее запишем $a = c + d$, $c \in R_y$, $d \in \prod_{z \not\sim y} R_z$.

Так как $d \in J(L)$ и d — идемпотент, то $d = 0$. Из $c \in J(R_y)$ заключаем, что $e_y + c$ — идемпотентный и обратимый элемент в R_y . Следовательно, $e_y + c = e_y$ и $c = 0$. Таким образом, доказано, что $\varphi(e_x) = e_y + b$, причём $b \in M$, что и требовалось. $\square$

В конце раздела ответим на закономерный вопрос: какие условия на кольца R и $I(X, R)$ являются наиболее общими и приемлемыми для вычисления группы $\text{Aut } K$, где $K = I(X, R)$?

На самом деле таким условием можно назвать условие (II). Действительно, если оно выполняется, то выполняется и условие (I) (лемма 3.6), т. е. все автоморфизмы алгебры K будут треугольными. Условие (II) также позволяет прогнозировать характер действия автоморфизмов на кольцах R_x и бимодулях M_{xy} . Под этим понимается следующее. Пусть

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \in \text{Aut } K.$$

Даже когда кольца R_x разложимы и невозможно применить лемму 3.2 к произведению $\prod_{x \in X} R_x$, условие (II) гарантирует следующее. Для любого $x \in X$ существует такое $y \in X$, что $\alpha(e_x) = e_y$ и $\alpha R_x = R_y$, а это позволит использовать автоморфизмы частично упорядоченного множества $\bar{X}$. Пусть ещё $\delta = 0$, т. е. φ — диагональный автоморфизм. Тогда для каждой пары x, y , $x \not\sim y$, имеем $\beta M_{xy} = M_{st}$, где $e_s = \alpha(e_x)$ и $e_t = \alpha(e_y)$.

Укажем две основные ситуации, когда выполняется условие (II).

1. Фактор-кольцо $R/J(R)$ неразложимо (лемма 3.9).

Напомним, что тогда по лемме 3.8 кольца R и R_x также неразложимы.

2. Справедливо условие (I) и кольцо R неразложимо (лемма 3.6).

С учётом лемм 3.7, 3.9 и текста после доказательства леммы 3.7 составим список колец R , для которых алгебра $I(X, R)$ удовлетворяет условию (II):

- (a) R — локальное кольцо;
- (b) R — область главных левых (или правых) идеалов;
- (c) R — коммутативное дедекиндово кольцо;
- (d) X — частично упорядоченное множество и R не имеет ненулевых идемпотентов, кроме 1;
- (e) такое кольцо R , что фактор-кольцо $R/J(R)$ неразложимо (локальные кольца относятся и к (e)).

Соглашение. В разделах 4, 6 и 7 считаем, что алгебра K , равная $I(X, R)$, удовлетворяет условию (II). Например, это будет так, если R — одно из колец, поименованных в пунктах (a)–(e).

4. Основные изоморфизмы и разложения для группы $\text{Aut } K$

По-прежнему пусть K обозначает некоторую алгебру инцидентности $I(X, R)$, записанную, как в начале раздела 2, в виде $K = L \oplus M$. Возьмём произвольный автоморфизм

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$$

алгебры K (все её автоморфизмы являются треугольными в силу только что принятого соглашения и леммы 3.6). Здесь $\alpha \in \text{Aut } L$. Для каждого $x \in X$ найдётся такой y , что $\alpha(e_x) = e_y$ (это установлено в конце предыдущего раздела). Если $s \neq x$ и $\alpha(e_s) = e_t$, то из $e_x e_s = 0$ следует $e_y e_t = 0$ и $y \neq t$. Пусть теперь $z \in X$. Принимая во внимание, что

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ * & * \end{pmatrix},$$

находим $\alpha(e_z)^{-1} = e_u$ для какого-то $u \in X$, откуда вытекает $\alpha(e_u) = e_z$. Делаем вывод, что α индуцирует биекцию $\tau: \bar{X} \rightarrow \bar{X}$, $x \rightarrow y$. На самом деле τ — автоморфизм частично упорядоченного множества $\bar{X}$. Убедимся в этом.

Пусть $x, y \in X$ и $x < y$. Тогда $M_{xy} = e_x M e_y \neq 0$. Выберем внутренний автоморфизм μ , для которого

$$\mu(e_{\tau(x)}) + \delta(e_x) = e_{\tau(x)}, \quad \mu(e_{\tau(y)}) + \delta(e_y) = e_{\tau(y)}$$

(теорема 3.5). Можно записать равенства

$$\mu\varphi(M_{xy}) = \mu\varphi(e_x)M\mu\varphi(e_y) = e_{\tau(x)}Me_{\tau(y)} = M_{\tau(x)\tau(y)} \neq 0,$$

откуда получаем $\tau(x) < \tau(y)$.

Наоборот, если дано, что $\tau(x) < \tau(y)$, то аналогично можно получить $x < y$. Итак, $\tau \in \text{Aut } \bar{X}$. При этом соответствие $\varphi \rightarrow \tau$ будет групповым гомоморфизмом $p: \text{Aut } K \rightarrow \text{Aut } \bar{X}$. Удобно вместо τ писать τ_α . Также есть гомоморфизм $r: \Omega \rightarrow \text{Aut } \bar{X}$, $\alpha \rightarrow \tau_\alpha$ (группа Ω определена в начале раздела 3). Заметим, что $\alpha(e_x) = e_{\tau_\alpha(x)}$ для всякого $x \in X$.

Итак, если дан автоморфизм

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix},$$

то автоморфизм α «переставляет» кольца R_x . А если φ — диагональный автоморфизм, то можно точно указать действие β на бимодулях M_{xy} .

Предложение 4.1. Для автоморфизма

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$$

алгебры K имеют место следующие утверждения.

1. Автоморфизм α алгебры L переставляет кольца R_x в соответствии с некоторым автоморфизмом τ частично упорядоченного множества $\bar{X}$.
2. Если $\delta = 0$, т. е. φ — диагональный автоморфизм, то автоморфизм β L - L -бимодуля M переставляет бимодули M_{xy} в соответствии с автоморфизмом τ . Кроме того, сужение β на M_{xy} является изоморфизмом бимодулей $M_{xy} \rightarrow M_{\tau(x)\tau(y)}$ (относительно кольцевых изоморфизмов $\alpha|_{R_x} : R_x \rightarrow R_{\tau(x)}$, $\alpha|_{R_y} : R_y \rightarrow R_{\tau(y)}$).

Напомним о равенстве в конце раздела 3

$$\text{In}(\text{Aut } K) = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \text{In}_0(\text{Aut } K),$$

а также о том, что группы, фигурирующие в следующей теореме, появились в начале раздела 3. Утверждение 1 следующей теоремы можно интерпретировать как возможность диагонализировать любой автоморфизм алгебры K .

Теорема 4.2. Пусть алгебра K удовлетворяет равенству (II). Справедливы следующие равенства.

1. $\text{Aut } K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \Lambda$.
2. $\text{Ker } f = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \Psi$.
3. $\Phi = \text{In}(\text{Aut } K) \cdot \Psi = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes (\text{In}_0(\text{Aut } K)) \cdot \Psi$.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Возьмём автоморфизм $\varphi \in \text{Aut } K$, и пусть τ — автоморфизм множества $\bar{X}$, соответствующий φ (он введён в начале этого раздела). Образует элемент $v = (v_{st})$ в K , где

$$v_{st} = \varphi(e_{\tau^{-1}(t)})(s, t) \text{ для любых } s, t \in X.$$

Отметим, что $ve_x = \varphi(e_{\tau^{-1}(x)})e_x$ при всяком $x \in X$. Имеем $v_{tt} = 1$, и значит, элемент v обратим в K (теорема 2.2 или следствие 2.3).

Итак, для каждого $z \in X$ есть равенство $ve_{\tau(z)} = \varphi(e_z)e_{\tau(z)}$. Также справедливо равенство $\varphi(e_z)v = \varphi(e_z)e_{\tau(z)}$. Таким образом, имеем

$$\varphi(e_z)v = ve_{\tau(z)}, \quad v^{-1}\varphi(e_z)v = e_{\tau(z)}.$$

Пусть μ — внутренний автоморфизм, определяемый элементом v . Тогда

$$\mu \in \text{In}_1(\text{Aut } K), \quad \mu\varphi(e_z) = e_{\tau(z)} \text{ для всякого } z \in X.$$

Полагая $\gamma = \mu\varphi$, получаем $\varphi = \mu^{-1}\gamma$, где $\mu^{-1} \in \text{In}_1(\text{Aut } K)$, $\gamma \in \Lambda$.

Проверим, что $\text{In}_1(\text{Aut } K) \cap \Lambda = \langle 1 \rangle$. Пусть $\nu \in \text{In}_1(\text{Aut } K) \cap \Lambda$ и ν определяется элементом $1 + d$, где $d \in M$. Тогда

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

для некоторого γ . Для произвольного элемента $a \in L$ имеем

$$\nu(a) = (1 + d')a(1 + d) = a + d'a + ad + d'ad,$$

где $1 + d'$ — обратный элемент к $1 + d$. Значит, $d'a + ad + d'ad = 0$. В частности,

$$d'e_x + e_xd + d'e_xd = 0, \quad e_xd'e_x + e_xd + e_xd'e_xd = e_xd = 0$$

для всякого $x \in X$. Поэтому $d = 0$. Таким образом, $\nu = 1$. Можно утверждать, что полупрямое разложение из утверждения 1 действительно имеет место.

Равенство из утверждения 2 получается из утверждения 1 и включения $\text{In}_1(\text{Aut } K) \subseteq \text{Ker } f$.

Докажем утверждение 3. Из разложения в утверждении 1 находим, что $\Phi = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes (\Phi \cap \Lambda)$. Осталось проверить, что $\Phi \cap \Lambda = \text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \Psi$. Достаточно показать, что левая часть лежит в правой части. Пусть

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Phi \cap \Lambda,$$

где $\alpha \in \text{In}(\text{Aut } L)$. Если α определяется элементом $v \in U(L)$, то пусть μ — внутренний автоморфизм, определяемый этим же элементом v . Полагая $\psi = \mu^{-1}\varphi$, находим $\mu\psi = \varphi$, где $\mu \in \text{In}_0(\text{Aut } K)$, $\psi \in \Psi$. $\square$

Соберём вместе несколько интересных и полезных равенств и изоморфизмов.

Предложение 4.3. Верны следующие равенства и изоморфизмы.

1. $\Psi \cap \text{In}(\text{Aut } K) = \Psi \cap \text{In}_0(\text{Aut } K) = \Psi_0$.
2. $\Lambda / (\text{In}_0(\text{Aut } K)) \cdot \Psi \cong \Omega / \text{In}(\text{Aut } L)$, $C / \text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \Psi \cong \Omega_1 / \text{In}(\text{Aut } L)$.
3. $\Phi / \text{Ker } f \cong \text{In}_0(\text{Aut } K) / \Psi_0$.
4. $\Phi / \text{In}(\text{Aut } K) \cong \Psi / \Psi_0$.
5. $\Lambda / C \cong \Omega / \Omega_1$.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Убедимся в справедливости неочевидного включения $\Psi \cap \text{In}(\text{Aut } K) \subseteq \Psi_0$. Возьмём какой-то автоморфизм $\mu = \mu_1\mu_0$, где $\mu \in \Psi$, $\mu_1 \in \text{In}_1(\text{Aut } K)$, $\mu_0 \in \text{In}_0(\text{Aut } K)$. Пусть μ_1 определяется элементом $1 + d$, $d \in M$, а μ_0 определяется элементом $v \in U(L)$. Тогда μ определяется элементом $v + vd$, а μ^{-1} определяется элементом $v^{-1} + d'$, где $d' \in M$.

Для любого элемента $a \in L$ имеем

$$\mu(a) = v^{-1}av + (v^{-1}avd + d'av + d'avd).$$

Так как $\mu \in \Psi$, то $v^{-1}av = a$ и $av = va$, откуда следует, что $v \in C(L)$. Выражение в скобках равно нулю. Так же как в конце доказательства утверждения 1 теоремы 4.2 можно получить, что $d = 0$, откуда следует, что $\mu_1 = 1$ и $\mu = \mu_0$. А поскольку v — обратимый центральный элемент, то $\mu \in \Psi_0$.

Докажем утверждение 2. Отметим, что всегда верно включение $\text{In}(\text{Aut } L) \subseteq \Omega$. Обозначим через π канонический эпиморфизм $\Omega \rightarrow \Omega / \text{In}(\text{Aut } L)$. Ядро гомоморфизма $\pi f|_{\Lambda}: \Lambda \rightarrow \Omega / \text{In}(\text{Aut } L)$ равно $\Phi \cap \Lambda$ и, следовательно, равно $\text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \Psi$ (см. доказательство утверждения 3 теоремы 4.2).

Докажем утверждения 3, 4, 5. Учитывая теорему 4.2 и пункт 1, можно записать изоморфизмы

$$\Phi / \text{Ker } f \cong (\text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \Psi) / \Psi \cong \text{In}_0(\text{Aut } K) / \Psi_0 \cong \text{In}(\text{Aut } L).$$

Затем имеем

$$\Phi / \text{In}(\text{Aut } K) = (\text{In}(\text{Aut } K) \cdot \Psi) / \text{In}(\text{Aut } K) \cong \Psi / \Psi_0.$$

Также несложно доказать изоморфизм из пункта 5. $\square$

Сформулируем основной результат о строении группы $\text{Aut } K$.

Теорема 4.4. Пусть алгебра K удовлетворяет равенству II.

(а) Справедливы следующие изоморфизмы.

$$1. \text{Aut } K / \text{Ker } f \cong \Omega \cong \Lambda / \Psi \text{ и } C / \Psi \cong \Omega_1.$$

$$2. \text{Aut } K / \Phi \cong \Omega / \text{In}(\text{Aut } L).$$

(b) В $\text{Out } K$ есть такая нормальная подгруппа H , что

$$H \cong \Psi / \Psi_0, \quad \text{Out } K / H \cong \Omega / \text{In}(\text{Aut } L).$$

(с) Если верно равенство $\Psi = \Psi_0$, то

$$\Phi = \text{In}(\text{Aut } K), \quad \text{Out } K \cong \Omega / \text{In}(\text{Aut } L).$$

Доказательство. Докажем утверждение (а). Изоморфизмы пунктов 1 и 2 непосредственно вытекают из теоремы 4.2 и предложения 4.3.

Докажем утверждение (b). Возьмём $\Phi / \text{In}(\text{Aut } K)$ в качестве подгруппы H . Всё, что нужно, получается из предложения 4.3 и изоморфизма пункта 2.

Докажем утверждение (с). Если $\Psi = \Psi_0$, то имеем равенство $\Phi = \text{In}(\text{Aut } K)$ на основании теоремы 4.2. $\square$

Можно сделать следующий вывод: если удастся найти строение групп Ψ и Ω , то строение групп $\text{Aut } K$ и $\text{Out } K$ будет в определённом смысле известно.

В конце раздела приведём различную информацию о действии автоморфизмов на бимодуле M .

Предложение 4.5. Диагональные автоморфизмы действуют на произведении $M = \prod_{x,y \in X} M_{xy}$ по координатам.

Доказательство. Пусть

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} -$$

диагональный автоморфизм. Для любых $x, y \in X$, $x < y$, и любого $m = (m_{xy}) \in M$ имеем равенства

$$\varphi(m_{xy}) = \beta(m_{xy}) = \beta(e_x m e_y) = \alpha(e_x) \beta(m) \alpha(e_y) = e_{\tau(x)} \beta(m) e_{\tau(y)} \in M_{\tau(x)\tau(y)},$$

где τ — автоморфизм частично упорядоченного множества $\bar{X}$, индуцируемый α (см. предложение 4.1 и текст перед ним). С другой стороны, запишем

$$\varphi(m) = (n_{xy}) \in \prod_{x,y \in X} M_{xy}.$$

Нужно убедиться, что $\varphi(m_{xy}) = \beta(m_{xy}) = n_{\tau(x)\tau(y)}$ для любых неэквивалентных $x, y \in X$ (ср. со следствием 3.3).

Не будем выписывать все детали дальнейших рассуждений. Они основаны на наличии для любых неэквивалентных $x, y \in X$ прямых разложений бимодуля M ,

$$M = M_{xy} \oplus N_{xy}, \quad \text{где } N_{xy} = \prod_{s \not\sim x \text{ или } t \not\sim y} M_{st},$$

и второго аналогичного разложения $M = M_{\tau(x)\tau(y)} \oplus N_{\tau(x)\tau(y)}$. $\square$

5. О группе $\text{Aut } X$

Приведём ряд фактов о группе автоморфизмов $\text{Aut } X$ предпорядоченного множества $\langle X, \leq \rangle$. Некоторые обозначения и терминология, касающиеся множества X , есть в разделе 2. В частности, $\sim$ — отношение эквивалентности на X , $\bar{X}$ — это фактор-множество $X / \sim$, которое является частично упорядоченным множеством.

Каждый автоморфизм $\tau \in \text{Aut } X$ индуцирует автоморфизм $\bar{\tau} \in \text{Aut } \bar{X}$. Это приводит к групповому гомоморфизму $k: \text{Aut } X \rightarrow \text{Aut } \bar{X}$. Автоморфизм $\tau \in \text{Aut } X$ называется *внутренним*, если он переводит в себя каждый интервал вида $[x]$, $x \in X$. Все внутренние автоморфизмы образуют нормальную подгруппу $\text{In}(\text{Aut } X)$ в группе $\text{Aut } X$. Фактор-группа $\text{Aut } X / \text{In}(\text{Aut } X)$ называется *группой внешних автоморфизмов* множества X и обозначается $\text{Out } X$.

Ядро гомоморфизма k совпадает с $\text{In}(\text{Aut } X)$, а образ k лежит в подгруппе G , равной

$$\{p \in \text{Aut } \bar{X} \mid |[x]| = |p([x])| \text{ для любого } x \in X\}.$$

Определим (неканоническим образом) гомоморфизм $j: G \rightarrow \text{Aut } X$. Для этого разобьём множество всех интервалов вида $[x]$ на классы равномошных интервалов. Пусть J — один из таких классов. Зафиксируем в J какой-то интервал $[z]$. Затем для каждого интервала $[x] \in J$ выберем биекцию $\varepsilon_{[x],[z]}: [z] \rightarrow [x]$, причём $\varepsilon_{[z],[z]}$ — тождественное отображение. Далее полагаем

$$\varepsilon_{[z],[x]} = \varepsilon_{[x],[z]}^{-1}, \quad \varepsilon_{[x],[y]} = \varepsilon_{[x],[z]} \varepsilon_{[z],[y]}$$

и то же самое делаем с каждым классом равномошных множеств. Возьмём произвольный автоморфизм $q \in G$. Пусть τ_q — такое отображение $X \rightarrow X$, что на интервале $[x]$ из какого-то класса J отображение τ_q совпадает с $\varepsilon_{q([x]),[x]}$. Тогда $\tau_q \in \text{Aut } X$ и соответствие $q \rightarrow \tau_q$, $q \in G$, является гомоморфизмом $j: G \rightarrow \text{Aut } X$. При этом верно равенство $kj = 1_G$, откуда следует совпадение групп $\text{Im } k$ и G . Поэтому мы можем отождествить эти группы с $\text{Out } X$ и затем с $\text{Im } j$, т. е. с определённой (но неканоническим образом) подгруппой в $\text{Aut } X$. Таким образом, справедлив следующий факт.

Предложение 5.1. *Имеет место (неканоническое) полупрямое разложение групп $\text{Aut } X = \text{In}(\text{Aut } X) \rtimes \text{Out } X$.*

Записанный результат и рассуждения перед ним идейно близки к рассмотрению после доказательства следствия 3.3.

Исходя из связных компонент предпорядоченного множества X , можно получить другое разложение группы $\text{Aut } X$. Пусть X_i ($i \in I$) — все попарно различные связные компоненты множества X . Разобьём множество всех связных компонент на классы эквивалентности относительно изоморфизма предпорядоченных множеств X_i . Также получаем соответствующее разбиение множества I . По существу, таким же образом, как в ситуации с произведением колец $\prod_{j \in J} S_j$

после доказательства следствия 3.3, можно определить (неканоническим образом) некоторую группу автоморфизмов Σ_X множества X . Она изоморфна группе тех биекций множества I , которые оставляют на месте каждый его класс эквивалентности. Определим ещё нормальную подгруппу

$$\Gamma_X = \{\sigma \in \text{Aut } X \mid \sigma X_i = X_i \text{ для всякого } i \in I\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 5.2. *Имеют место полупрямые разложения*

$$\text{Aut } X = \Gamma_X \rtimes \Sigma_X, \quad \text{где } \Gamma_X = \prod_{i \in I} \text{Aut } X_i, \quad \text{Out } X = \prod_{i \in I} \text{Out } X_i \rtimes \Sigma_X.$$

А как разбиение множества X на связные компоненты влияет на строение кольца $I(X, R)$? Следующий результат позволит применять к группе $\text{Aut } K$ следствие 3.3.

Предложение 5.3. *Неразложимость кольца $I(X, R)$ эквивалентна неразложимости кольца R и связности множества X .*

Доказательство. Необходимость условий предложения проверить нетрудно.

Проверим достаточность. Допустим, что кольцо $I(X, R)$ разложимо в нетривиальную прямую сумму идеалов, и пусть g, h — центральные идемпотенты, соответствующие этому разложению. Учитывая теорему 3.5, можно считать, что $g, h \in L$ (напомним о разложении $K = L \oplus M$). Как в разделе 2 (см. предложение 2.1), запишем $g = (g_x)$ и $h = (h_x)$, где $g_x, h_x \in R_x$. Ввиду неразложимости кольца R имеем, что $g_x = 1$ либо $g_x = 0$ при любом x и то же самое верно для h_x . Положим $Y = \{x \mid g_x = 1\}$ и $Z = \{x \mid h_x = 1\}$. Тогда $Y \cap Z = \emptyset$ и $Y \cup Z = \bar{X}$. Из $gMh = 0 = hMg$ следует, что $e_y M e_z = 0 = e_z M e_y$ для любых $y \in Y, z \in Z$. Следовательно, y и z не сравнимы в $\bar{X}$. Но существование таких подмножеств Y и Z противоречит связности X . $\square$

Разбиение множества X на связные компоненты X_i после отождествления приводит к равенству $K = I(X, R) = \prod_{i \in I} I(X_i, R)$. Из следствия 3.4 и предложения 5.3 получаем следующее утверждение.

Предложение 5.4. *Пусть R — неразложимое кольцо. Тогда имеется полупрямое разложение*

$$\text{Aut } K = \Gamma_K \rtimes \Sigma_K, \quad \text{где } \Gamma_K = \prod_{i \in I} \text{Aut}(I(X_i, R)).$$

Также имеет место изоморфизм

$$\text{Out } K \cong \prod_{i \in I} \text{Out } K_i \rtimes \Sigma_K, \quad \text{где } K_i = I(X_i, R).$$

Таким образом, при изучении колец инцидентности $I(X, R)$ до некоторой степени можно ограничиться случаем связного множества X .

В начале предыдущего раздела введены гомоморфизмы $p: \text{Aut } K \rightarrow \text{Aut } \bar{X}$ и $r: \Omega \rightarrow \text{Aut } \bar{X}$. Более важно то, что группа $\text{Aut } X$ естественным образом вкладывается в группу $\text{Aut } K$. Пусть $\tau \in \text{Aut } X$. Определим отображение $\xi_\tau: K \rightarrow K$, полагая $\xi_\tau(f)(x, y) = f(\tau(x), \tau(y))$ для любых $f \in K$ и $x, y \in X$. Тогда ξ_τ — автоморфизм, и соответствие $\tau \rightarrow \xi_\tau$ будет изоморфным вложением групп $t: \text{Aut } X \rightarrow \text{Aut } K$. Отождествляем τ с ξ_τ . Автоморфизмы вида ξ_τ назовём *порядковыми*. Также верно равенство $pt = k$.

Ограничение гомоморфизма f на $\text{Out } X$ есть вложение $\text{Out } X \rightarrow \Omega$ и $\text{Out } X \cap \Omega_1 = \langle 1 \rangle$ (группы Λ , C , Ω и Ω_1 появились в разделе 3).

Нельзя утверждать, что подгруппа $\text{Out } X$ будет полупрямым множителем в Λ или Ω (а эта ситуация очень характерна). Препятствие кроется в том, что могут найтись изоморфные кольца R_x и R_y , матрицы из которых имеют разные порядки. В разделе 7 мы вернёмся к этому обстоятельству и укажем, как можно устранить это препятствие при одном предположении.

6. Группы Ω и Ω_1

В конце раздела 3 было зафиксировано условие (II) на кольцо K , где $K = I(X, R)$. Считаем, что K удовлетворяет этому условию.

Группа Ω и её нормальная подгруппа Ω_1 были введены в разделе 3. После доказательства теоремы 4.4 подчёркнута целесообразность вычисления групп Ω и Ψ для понимания строения группы $\text{Aut } K$. Группа Ω_1 — это ядро гомоморфизма $r: \Omega \rightarrow \text{Aut } \bar{X}$ (см. начало раздела 4), так что фактор-группа Ω/Ω_1 вкладывается в группу $\text{Aut } \bar{X}$. В предыдущем разделе мы договорились рассматривать группу $\text{Out } X$ как подгруппу в $\text{Aut } K$ и Ω , и при этом $\Omega_1 \cap \text{Out } X = \langle 1 \rangle$. Важно выяснить, когда $\Omega = \Omega_1 \rtimes \text{Out } X$. Этот вопрос будет затронут в разделе 7. Если в следствии 3.4 в качестве кольца S взять L , то получим разложение $\text{Aut } L = \Gamma \rtimes \Sigma$. Ясно, что $\Omega_1 \subseteq \Gamma$. Именно на подгруппу Ω_1 мы обратим здесь внимание.

Запишем следующие вопросы о строении группы Ω_1 .

1. Какие автоморфизмы из Γ принадлежат Ω_1 ?
2. Какое строение у групп Ω_1 и $\Omega_1/\text{In}(\text{Aut } L)$?

В связи с вопросом 2 полезно обратиться к теореме 4.4.

Будет дан ответ на первый вопрос и в ряде случаев на второй вопрос.

Докажем один факт общего характера. Он обобщает следующий результат (см. [9, гл. 2, предложение 5.2]).

Пусть H — некоторая алгебра, α и γ — её автоморфизмы. Изоморфизм H - H -бимодулей $H \rightarrow {}_{\alpha}H_{\gamma}$ существует в точности тогда, когда $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм. Определение бимодуля ${}_{\alpha}H_{\gamma}$ есть в разделе 1.

Для натуральных чисел k и ℓ положим

$$P = M(k, R), \quad Q = M(\ell, R), \quad H = M(c, R), \quad \text{где } c = \text{НОК}(k, \ell),$$

и, наконец, $V = M(k \times \ell, R)$. Пусть ещё $\ell' = c/k$, $k' = c/\ell$.

Кольцо H можно представить в виде кольца блочных матриц двумя способами: как кольцо блочных матриц над P порядка ℓ' и как кольцо блочных матриц над Q порядка k' . Оно также является P - Q -бимодулем блочных матриц над V размера $\ell' \times k'$.

Пусть α и γ — автоморфизмы алгебр P и Q соответственно. Они индуцируют автоморфизмы $\bar{\alpha}$ и $\bar{\gamma}$ алгебры H . Именно, $\bar{\alpha}(A) = (\alpha(a_{ij}))$ для любой матрицы $A = (a_{ij}) \in H$, $a_{ij} \in P$, и аналогично для $\bar{\gamma}$. Автоморфизмы $\bar{\alpha}$ и $\bar{\gamma}$ называют *кольцевыми (блочными) автоморфизмами*. Обозначаем их просто α и γ . Это соглашение уже действует в следующем предложении.

Предложение 6.1. *Если $\alpha \in \text{Aut } P$ и $\gamma \in \text{Aut } Q$, то изоморфизм P - Q -бимодулей $V \rightarrow {}_{\alpha}V_{\gamma}$ существует в точности тогда, когда $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм алгебры H .*

Доказательство. Пусть дан изоморфизм P - Q -бимодулей $\beta: V \rightarrow {}_{\alpha}V_{\gamma}$. Изоморфизм β индуцирует изоморфизм H - H -бимодулей $\bar{\beta}: H \rightarrow {}_{\alpha}H_{\gamma}$, $\bar{\beta}(A) = (\beta(A_{ij}))$ для каждой матрицы $A = (A_{ij})$ из H . Подразумевается, что матрица A представлена в указанном выше блочном виде, т. е. A_{ij} — блоки размера $\ell' \times k'$. Следовательно, $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм алгебры H .

Теперь допустим, что $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм алгебры H . Значит, существует изоморфизм H - H -бимодулей $\beta: H \rightarrow {}_{\alpha}H_{\gamma}$.

Пусть $e_1, \dots, e_{\ell'}$ и $f_1, \dots, f_{k'}$ — диагональные матричные единицы, соответствующие двум блочным разбиениям матриц из H . Справедливы равенства

$$\alpha(e_i) = e_i \quad (i = 1, \dots, \ell') \quad \text{и} \quad \gamma(f_j) = f_j \quad (j = 1, \dots, k').$$

Отсюда можно вывести, что β индуцирует A - B -бимодульный изоморфизм $e_i H f_j \rightarrow A(e_i H f_j)_B$, где $A = e_i H e_i$, $B = f_j H f_j$. Иными словами, β фактически индуцирует P - Q -бимодульный изоморфизм $V \rightarrow {}_{\alpha}V_{\gamma}$. $\square$

Обратим внимание на такое обстоятельство. Автоморфизм α из Γ лежит в Ω_1 в точности тогда, когда найдётся преобразование β алгебры M , являющееся одновременно её автоморфизмом и L - L -бимодульным изоморфизмом $M \rightarrow {}_{\alpha}M_{\alpha}$. А это равносильно выполнению равенства

$$\beta(cd) = \beta(c)\beta(d), \tag{3}$$

где $c \in M_{xz}$, $d \in M_{zy}$, $x < z < y$, и равенств

$$\beta(ac) = \alpha(a)\beta(c), \quad \beta(db) = \beta(d)\alpha(b), \tag{4}$$

где $a \in R_x$, $c, d \in M_{xy}$, $b \in R_y$ (нужно принять во внимание формулы перед предложением 2.1, а также предложение 4.5 о покоординатном действии автоморфизмов).

Пусть n_x — порядок матриц из кольца R_x , $x \in X$. Положим $c_{xy} = \text{НОК}(n_x, n_y)$ для всех таких $x, y \in X$, что $x < y$. Через H_{xy} обозначим кольцо матриц $M(c_{xy}, R)$. Оно является кольцом блочных матриц над кольцами R_x и R_y , а также будет R_x - R_y -бимодулем блочных матриц над M_{xy} . Автоморфизмы колец R_x и R_y считаем кольцевыми (блочными) автоморфизмами кольца H_{xy} .

Теорема 6.2. Автоморфизм $\alpha = (\alpha_x)$ алгебры $L = \prod_{x \in X} R_x$ принадлежит группе Ω_1 в точности тогда, когда $\alpha_x^{-1} \alpha_y$ — внутренний автоморфизм алгебры H_{xy} для всех таких $x, y \in X$, что $x < y$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\alpha \in \Omega_1$. Значит, существует автоморфизм

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

алгебры K , где β — L - L -бимодульный изоморфизм $M \rightarrow {}_\alpha M_\alpha$. Ограничение β на M_{xy} будет R_x - R_y -бимодульным изоморфизмом $M_{xy} \rightarrow {}_{\alpha_x}(M_{xy})_{\alpha_y}$. Согласно предложению 6.1

$$\alpha_x^{-1} \alpha_y \in \text{In}(\text{Aut } H_{xy}).$$

Докажем достаточность. По предложению 6.1 имеется R_x - R_y -бимодульный изоморфизм $\beta_{xy}: M_{xy} \rightarrow {}_{\alpha_x}(M_{xy})_{\alpha_y}$, где $x < y$. Определим отображение

$$\beta = (\beta_{xy}): M \rightarrow M, \quad (d_{xy}) \rightarrow (\beta_{xy}(d_{xy})), \quad \text{где } (d_{xy}) \in M = \prod_{x, y \in X} M_{xy}.$$

Здесь β — L - L -бимодульный изоморфизм $M \rightarrow {}_\alpha M_\alpha$ (это можно проверить с помощью равенств (4)). Для того чтобы преобразование

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

алгебры $K = L \oplus M$ было её автоморфизмом, осталось убедиться в том, что β — автоморфизм алгебры M , а для этого достаточно проверить справедливость равенства (3).

Зафиксируем три таких элемента x, y, z , что $x < z < y$. Введём в использование ещё одно кольцо матриц. Положим $H = M(d, R)$, где $d = \text{НОК}(n_x, n_z, n_y)$. Кольцо H является кольцом блочных матриц над каждым из колец H_{xz} , H_{zy} , H_{xy} , R_x , R_z , R_y . Его также можно рассматривать как бимодуль блочных матриц над каждым из бимодулей M_{xz} , M_{zy} , M_{xy} .

Мы считаем автоморфизмы α_x , α_z и α_y кольцевыми (блочными) автоморфизмами алгебры H . Мы рассматриваем изоморфизмы β_{xz} , β_{zy} и β_{xy} как бимодульные (блочные) изоморфизмы $H \rightarrow {}_{\alpha_x} H_{\alpha_z}$, $H \rightarrow {}_{\alpha_z} H_{\alpha_y}$ и $H \rightarrow {}_{\alpha_x} H_{\alpha_y}$ (т. е. тоже сохраняем старые обозначения). Произведения $\alpha_x^{-1} \alpha_z$, $\alpha_z^{-1} \alpha_y$ и $\alpha_x^{-1} \alpha_y$ —

внутренние автоморфизмы алгебры H . Они индуцируют (в смысле предложения 6.1) те же бимодульные изоморфизмы β_{xz} , β_{zy} и β_{xy} , что и записанные выше.

Эти бимодульные изоморфизмы действуют следующим образом (см. [17, раздел 2]). Существуют обратимые матрицы $u, v, w \in H$ (они соответствуют записанным выше внутренним автоморфизмам), такие что справедливы равенства

$$\begin{aligned}\beta_{xz}(a) &= \alpha_x(a)\alpha_x(u) = \alpha_x(u)\alpha_z(a), \\ \beta_{zy}(b) &= \alpha_z(b)\alpha_z(v) = \alpha_z(v)\alpha_y(b), \\ \beta_{xy}(c) &= \alpha_x(c)\alpha_x(w) = \alpha_x(w)\alpha_y(c)\end{aligned}$$

при всех $a, b, c \in H$.

Проверим, что в H выполняется равенство

$$\beta_{xy}(cd) = \beta_{xz}(c)\beta_{zy}(d) \quad (5)$$

для любых $c, d \in H$. Обратим внимание на равенство $w = vu$ (надо ещё помнить, что элементы u, v, w находятся с точностью до обратимых центральных элементов). Имеем равенства

$$\beta_{xy}(cd) = \alpha_x(cd)\alpha_x(w) = \alpha_x(c)\alpha_x(d)\alpha_x(v)\alpha_x(u).$$

Также справедливы равенства

$$\begin{aligned}\beta_{xz}(c)\beta_{zy}(d) &= \alpha_x(c)\alpha_x(u)\alpha_z(d)\alpha_z(v) = \\ &= \alpha_x(c)\alpha_x(d)\alpha_x(u)\alpha_z(v) = \alpha_x(c)\alpha_x(d)\alpha_x(v)\alpha_x(u).\end{aligned}$$

Равенство (5) установлено. Умножение матриц в нём производится в блочном виде, откуда следует выполнение равенства (3). $\square$

Оставшаяся часть раздела посвящена проблеме строения группы Ω_1 (вопрос 2 в начале раздела). Эта проблема кажется довольно сложной. Одновременно мы получаем информацию о строении группы C . Последняя определена в разделе 3. Группа C состоит из тех диагональных автоморфизмов

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

алгебры K , что $\alpha_x R_x = R_x$ для всех $x \in X$.

Напомним, что n_x — это порядок матриц из кольца R_x (символ n_x появился перед теоремой 6.2). Пусть натуральное число k таково, что всякое n_x кратно k . Например, k может быть наибольшим общим делителем всех чисел n_x , либо равняться единице. Отметим, что в дальнейших рассмотрениях можно было бы ограничиться случаем, когда $k = 1$. Для этого нужно представить кольцо $I(X, R)$ в виде некоторого кольца «блочных» функций.

Обозначим через P кольцо матриц $M(k, R)$. Любой автоморфизм ε кольца P даёт кольцевой (блочный) автоморфизм ε_x кольца R_x . Далее получаем

автоморфизм $\varepsilon_L = (\varepsilon_x)$ кольца L . Автоморфизм ε также индуцирует блочный автоморфизм ε_M алгебры M и L - L -бимодуля M . В результате получаем автоморфизм

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_L & 0 \\ 0 & \varepsilon_M \end{pmatrix}$$

алгебры K . Мы будем называть автоморфизмы ε_L , ε_M и $\bar{\varepsilon}$ *кольцевыми (блочными) автоморфизмами, индуцированными автоморфизмом ε* .

Обозначим через D подгруппу всех кольцевых автоморфизмов алгебры L . Той же буквой D обозначим подгруппу всех кольцевых автоморфизмов алгебры K . Обе эти подгруппы канонически изоморфны группе $\text{Aut } P$. При этом $D \subseteq \Omega_1$ в $\text{Aut } L$, $D \subseteq C$ и $D \cap \Psi = \langle 1 \rangle$ в $\text{Aut } K$. Далее пусть D_0 — подгруппа в D , которая изоморфна $\text{In}(\text{Aut } P)$. Тогда $D/D_0 \cong \text{Out } P$ и справедлива следующая лемма.

Лемма 6.3. *Имеют место равенства*

$$D_0 = D \cap \text{In}(\text{Aut } L) \text{ в } \text{Aut } L,$$

$$D_0 = D \cap \text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \Psi = D \cap \text{In}_0(\text{Aut } K) \text{ в } \text{Aut } K.$$

Справедливо также равенство $\Psi_0 D_0 = \Psi D \cap \text{In}_0(\text{Aut } K)$.

Запишем следующее условие (*) для алгебры K .

Для всякого $\alpha = (\alpha_x) \in \Omega_1$ любой автоморфизм α_x есть произведение в $\text{Aut } R_x$ внутреннего и кольцевого (блочного) автоморфизмов. (*)

Условие (*) выполняется, если R — локальное кольцо или область главных левых (правых) идеалов [18, следствие 10.5].

Фактор-группу $C/\text{In}_0(\text{Aut } K)$ удобно обозначить $\text{Out}_0 K$ (это объясняется тем, что группа $\text{Out } K$ фактически равна $\Lambda/\text{In}_0(\text{Aut } K)$; см. также предложение 4.3).

Напомним, что в разделе 2 мы договорились рассматривать предпорядоченное множество X как ориентированный граф.

Теорема 6.4. *Пусть X — связное множество и алгебра K удовлетворяет условиям (II) и (*). Имеют место следующие равенства и изоморфизмы.*

1. (a) $\Omega_1 = \text{In}(\text{Aut } L) \cdot D$;
 (b) $\Omega_1 / \text{In}(\text{Aut } L) \cong \text{Aut } P$;
 (c) $C = \text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \Psi \cdot D$.
2. Группа $\text{Out}_0 K$ содержит нормальную подгруппу H , изоморфную Ψ/Ψ_0 , а фактор-группа $\text{Out}_0 K/H$ изоморфна $\Omega_1 / \text{In}(\text{Aut } L)$, т. е. она изоморфна группе $\text{Out } P$.

Доказательство. Докажем равенство 1 (a). Возьмём произвольный автоморфизм $\alpha = (\alpha_x) \in \Omega_1$. По условию для каждого $x \in X$ можно записать

$\alpha_x = \mu_x \rho_x$, где μ_x — внутренний автоморфизм, ρ_x — кольцевой (блочный) автоморфизм кольца матриц R_x . Образует автоморфизмы $\mu = (\mu_x)$ и $\rho = (\rho_x)$ кольца L и получим равенство $\alpha = \mu\rho$ в группе Γ . Поскольку $\alpha, \mu \in \Omega_1$, то $\rho \in \Omega_1$. Пусть ρ_x индуцируется автоморфизмом $\varepsilon_x \in \text{Aut } P$, $x \in X$. Сейчас мы покажем, что фактически можно сделать так, что $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ для всех $x, y \in X$. В связи с этим заметим, что любой автоморфизм ρ_x можно очевидным образом считать кольцевым автоморфизмом для всякого кольца R_y в том смысле, что ε_x индуцирует какой-то кольцевой автоморфизм кольца R_y .

Зафиксируем некоторый элемент $t \in X$. Пусть $x \in X$. Выберем в X путь из t в x . Используя индукцию по длине полупути, можно убедиться, что $\rho_x = \nu_x \rho_t$, где ν_x — некоторый внутренний кольцевой автоморфизм кольца R_x .

Дадим небольшие пояснения. Равенства вида $\rho_p = \nu_p \rho_q$, получающиеся при указанных выше способах рассуждений, возникают в кольце H_{pq} (см. теорему 6.2). Если положить $c = \text{НОК}(n_t, n_{z_1}, \dots, n_{z_m}, n_x)$, где $z_1, z_2, \dots, z_m$ — вершины выбранного полупути из t в x , то все появляющиеся кольцевые автоморфизмы можно считать автоморфизмами алгебры $M(c, R)$. Поэтому можно считать их автоморфизмами любого кольца R_x . Как следствие получаем $\nu_x \in \text{Aut } R_x$.

Возвращаясь в начало доказательства, находим, что $\alpha_x = \mu_x \rho_x = \mu_x \nu_x \rho_t$ для всякого $x \in X$. Положим $\gamma = (\mu_x \nu_x)$ и $\rho = (\rho_t)$. Тогда $\alpha = \gamma\rho$, где $\gamma \in \text{In}(\text{Aut } L)$, $\rho \in D$.

Докажем равенство (b). С учётом леммы 6.3 можно записать следующие равенства и изоморфизмы:

$$\begin{aligned} \Omega_1 / \text{In}(\text{Aut } L) &= (\text{In}(\text{Aut } L) \cdot D) / \text{In}(\text{Aut } L) \cong \\ &\cong D / (D \cap \text{In}(\text{Aut } L)) = D / D_0 \cong \text{Aut } P / \text{In}(\text{Aut } P) = \text{Out } P. \end{aligned}$$

Докажем равенство (c). Пусть

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in C,$$

где $\alpha \in \Omega_1$. Как в пункте (a), запишем $\alpha = \mu\rho$, где μ — внутренний автоморфизм и ρ — кольцевой автоморфизм кольца L . Они индуцируют соответственно внутренний автоморфизм и кольцевой автоморфизм алгебры K . Оставим за ними те же обозначения μ и ρ . Теперь полагаем $\psi = (\mu\rho)^{-1}\varphi$ и получаем равенства

$$\varphi = \mu\rho\psi = \mu\psi'\rho, \quad \text{где } \mu \in \text{In}_0(\text{Aut } K), \quad \psi, \psi' \in \Psi, \quad \rho \in D.$$

Докажем утверждение 2. В качестве подгруппы H возьмём фактор-группу $\text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \Psi / \text{In}_0(\text{Aut } K)$, которая изоморфна Ψ / Ψ_0 в силу предложения 4.3. После этого мы получаем соотношения

$$\begin{aligned} \text{Out}_0 K / H &\cong \text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \Psi \cdot D / \text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \Psi \cong \\ &\cong D / (D \cap \text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \Psi) = D / D_0 \cong \text{Out } P \end{aligned}$$

(нужно также учесть лемму 6.3). $\square$

Соберём вместе ряд частных случаев теоремы 6.4.

Следствие 6.5.

1. Если в теореме 6.4 положить $k = 1$, т. е. $P = R$, то $D \cong \text{Aut } R$.
2. Предположим, что алгебра K такова, что существует число n_s , делящее каждое n_x . Тогда в качестве кольца P можно взять R_s , причём условие (*) будет выполнено. В частности, $D \cong \text{Aut } R_s$.
3. Пусть X — частично упорядоченное множество. Тогда мы попадаем в ситуацию пунктов 1 и 2. Если дополнительно кольцо R коммутативно и учитываются только автоморфизмы R -алгебры K , то $\Omega_1 = \langle 1 \rangle$ и $D = \langle 1 \rangle$.

Доказательство. Утверждения 1 и 3 не нуждаются в доказательстве.

Докажем утверждение 2. Все кольца R_x считаем кольцами блочных матриц над кольцом R_s . Пусть $\alpha = (\alpha_x) \in \Omega_1$. Возьмём произвольный автоморфизм α_x и зафиксируем полупуть из s в x . Аналогично тому, как было проверено равенство из пункта 1 (а) теоремы 6.4, можно получить в некотором кольце $M(c, R)$ равенство $\alpha_x = \mu_x \alpha_s$, где μ_x — внутренний автоморфизм, а α_x, α_s — кольцевые (блочные) автоморфизмы этого кольца. Так как n_s делит все n_z , $z \in X$, то α_s является кольцевым автоморфизмом в R_x . Поэтому $\mu_x \in \text{Aut } R_x$. Итак, $\alpha_x = \mu_x \alpha_s$, где μ_x — внутренний автоморфизм, а α_s — кольцевой автоморфизм кольца R_x . Установили, что условие (*) для кольца P , равного R_s , справедливо. $\square$

Опираясь на предложение 5.4, распространим теорему 6.4 и следствие 6.5 на алгебры инцидентности $I(X, R)$, где X — произвольное предупорядоченное множество.

Как и раньше, пусть $K = I(X, R)$, а X_i ($i \in I$) — все связные компоненты множества X и $K_i = I(X_i, R)$ (алгебры K_i появились в предложении 5.4).

Согласно предложению 5.4 мы располагаем полупрямым разложением

$$\text{Aut } K = \Gamma_K \rtimes \Sigma_K, \quad \text{где } \Gamma_K = \prod_{i \in I} \text{Aut } K_i$$

и Σ_K — некоторая группа биекций множества I . Ещё имеем изоморфизм

$$\text{Out } K \cong \prod_{i \in I} \text{Out } K_i \rtimes \Sigma_K.$$

Не будем выписывать все детали рассуждений. Обратим только внимание на некоторые ключевые моменты. Во-первых, имеем равенство $C = \prod_{i \in I} C_i$, где C_i — подгруппа диагональных автоморфизмов кольца K_i , оставляющих соответствующие кольца R_x неподвижными. Верно включение $C \subseteq \Gamma_K$.

Аналог группы D для произвольного множества X следует определить так. Для каждого $i \in I$ пусть число k_i выбрано так, что всякое n_x кратно k_i , где $x \in X_i$. Затем пусть $P_i = M(k_i, R)$ и D — подгруппа всех кольцевых (блочных)

автоморфизмов кольца K_i . Теперь положим $D = \prod_{i \in I} D_i$, где $D_i \cong \text{Aut } P_i$. Есть также равенство $\Omega_1 = \prod_{i \in I} (\Omega_1)_i$, в котором группа $(\Omega_1)_i$ имеет понятный смысл.

Условие (*) в рассматриваемой более общей ситуации формулируется в следующем виде (**).

Для всякого $i \in I$ и каждого $\alpha = (\alpha_x) \in (\Omega_1)_i$ любой автоморфизм α_x является произведением в $\text{Aut } R_x$ внутреннего автоморфизма и кольцевого (блочного) автоморфизма. (**)

Теорема 6.6. Пусть алгебра K , равная $I(X, R)$, удовлетворяет условиям (II) и (**). В таком случае справедливы следующие равенства и изоморфизмы.

1. (a) $\Omega_1 = \text{In}(\text{Aut } L) \cdot D$;
 (b) $\Omega_1 / \text{In}(\text{Aut } L) \cong \prod_{i \in I} \text{Out } P_i$;
 (c) $C = \text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \Psi \cdot D$.
2. Группа $\text{Out}_0 K$ содержит нормальную подгруппу H , изоморфную Ψ / Ψ_0 , а фактор-группа $\text{Out}_0 K / H$ изоморфна $\Omega_1 / \text{In}(\text{Aut } L)$, т. е. она изоморфна группе $\prod_{i \in I} \text{Out } P_i$. Кроме того, $\text{Out } K / \text{Out}_0 K \cong \Omega / \Omega_1$.

Далее рассмотрим только пункт 2 следствия 6.5 (и то не в самой общей форме).

Следствие 6.7. Пусть K — такая алгебра инцидентности $I(X, R)$, что существует число n_s , делящее каждое n_x . Тогда для каждого $i \in I$ в качестве кольца P_i можно взять R_s и условие (**) будет выполнено. В частности, получаем изоморфизм $D \cong \prod_{|I|} \text{Aut } R_s$.

7. Строение групп $\text{Aut } K$ и $\text{Out } K$

Напомним, что у нас действует соглашение, принятое в конце раздела 3.

Систематизируем некоторые рассуждения, проведённые ранее. В разделе 5 была определена группа внешних автоморфизмов $\text{Out } X$ предпорядоченного множества X . При этом имеет место изоморфизм

$$\text{Out } X \cong G = \{\sigma \in \text{Aut } \bar{X} \mid |[x]| = |[\sigma(x)]| \text{ для всякого } x \in X\}.$$

Затем мы вложили группу $\text{Out } X$ в $\text{Aut } X$ таким способом, что верно равенство

$$\text{Aut } X = \text{In}(\text{Aut } X) \rtimes \text{Out } X.$$

В разделе 5 было отмечено, что всегда существует вложение

$$t: \text{Aut } X \rightarrow \text{Aut } K, \quad \tau \rightarrow \xi_\tau, \quad \text{где } \xi_\tau(f)(x, y) = f(\tau(x), \tau(y)), \quad f \in K, \quad x, y \in X.$$

Отождествляем τ с ξ_τ и $\text{Aut } X$ с образом вложения t . Справедливы соотношения

$$\text{Out } X \subseteq \Lambda \quad \text{и} \quad \text{Out } X \cap C = \langle 1 \rangle.$$

Отображение $ft: \text{Out } X \rightarrow \Lambda$ является мономорфизмом. После отождествления снова получаем соотношения

$$\text{Out } X \subseteq \Omega \text{ и } \text{Out } X \cap \Omega_1 = \langle 1 \rangle$$

(используемые здесь обозначения были введены в разделе 3).

С другой стороны, в разделе 4 появились гомоморфизмы

$$p: \text{Aut } K \rightarrow \text{Aut } \bar{X} \text{ и } r: \Omega \rightarrow \text{Aut } \bar{X}.$$

Правда, от этих гомоморфизмов мало пользы. Дело вот в чем. Пусть

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} -$$

автоморфизм и $\alpha(e_x) = e_y$, как в начале раздела 6. Тогда $R_x \cong R_y$, но не обязательно $n_x = n_y$ (n_x — порядок матриц из кольца R_x ; символ n_x введён перед теоремой 6.2). По этой причине подгруппа $\text{Im } p$ не всегда лежит в группе G , т. е. в $\text{Out } X$ (учитываем отождествления, принятые в разделе 5).

Сейчас мы сформулируем одно условие, при выполнении которого верно включение $\text{Im } p \subseteq \text{Out } X$. Это позволит уточнить строение группы $\text{Aut } K$. Условие заключается в следующем.

Для любых $n, m \in \mathbb{N}$ из $M(n, R) \cong M(m, R)$ следует $n = m$.

Сформулированное условие назовём (n, m) -условием. Например, (n, m) -условию удовлетворяют кольца R из следующего списка: коммутативные кольца, локальные кольца, области главных левых (правых) идеалов.

Выполнение (n, m) -условия гарантирует наличие гомоморфизма

$$p: \text{Aut } K \rightarrow \text{Out } X.$$

Композиция pt действует тождественно на $\text{Out } X$. Следовательно, p расщепляется и мы имеем полупрямое произведение $\text{Aut } K = \text{Ker } p \rtimes \text{Out } X$, где

$$\text{Ker } p = \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \in \text{Aut } K \mid \alpha R_x = R_x \text{ для всех } x \in X \right\}.$$

Также существуют гомоморфизмы

$$ft: \text{Out } X \rightarrow \Omega, \quad r: \Omega \rightarrow \text{Out } X$$

и полупрямое разложение

$$\Omega = \text{Ker } r \rtimes \text{Out } X = \Omega_1 \rtimes \text{Out } X.$$

Действительно, композиция $r(ft)$ действует тождественно на $\text{Out } X$.

Теперь можно записать следующую теорему. Обратим внимание, что перед теоремой 6.4 фактор-группа $C/\text{In}_0(\text{Aut } K)$ была обозначена через $\text{Out}_0 K$.

Теорема 7.1. Пусть алгебра K удовлетворяет условию (II) и (n, m) -условию. Тогда можно сформулировать следующие утверждения.

(а) Имеют место полупрямые разложения

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_1 \rtimes \text{Out } X, \quad \Lambda = C \rtimes \text{Out } X, \\ \text{Aut } K &= \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes C \rtimes \text{Out } X.\end{aligned}$$

(b) Справедливы следующие утверждения.

- (1) Существует изоморфизм $\text{Out } K \cong \text{Out}_0 K \rtimes \text{Out } X$, группа $\text{Out}_0 K$ содержит нормальную подгруппу F , такую что $F \cong \Psi/\Psi_0$ и $(\text{Out}_0 K)/F \cong \Omega_1/\text{In}(\text{Aut } L)$.
- (2) Если $\Psi = \Psi_0$, то $\text{Out } K \cong \Omega_1/\text{In}(\text{Aut } L) \rtimes \text{Out } X$.
- (3) Если $\Omega_1 = \text{In}(\text{Aut } L)$, то $\text{Out } K \cong \Psi/\Psi_0 \rtimes \text{Out } X$.

Вернёмся в ситуацию перед теоремой 6.4. Считаем, что все кольца R являются кольцами блочных матриц над кольцом P , где $P = M(k, R)$ для некоторого $k \geq 1$.

Следствие 7.2. Предположим, что X — связное множество, выполняются условие (*) из раздела 6 и (n, m) -условие. Тогда справедливы следующие равенства и изоморфизмы:

$$\text{Aut } K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes (\text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \Psi \cdot D) \rtimes \text{Out } X, \quad (6)$$

где $D \cong \text{Aut } P$, или, более кратко, $\text{Aut } K = (\text{In}(\text{Aut } K) \rtimes \Psi \cdot D) \rtimes \text{Out } X$;

$$\text{Out } K \cong \Psi/\Psi_0 \rtimes \text{Out } P \rtimes \text{Out } X. \quad (7)$$

Доказательство. Нужные для доказательства (6) равенства вытекают из теорем 6.4 и 7.1.

Докажем (7). На основании теоремы 7.1 достаточно установить изоморфизм $\text{Out}_0 K \cong \Psi/\Psi_0 \rtimes D/D_0$ (надо учесть, что $D/D_0 \cong \text{Out } P$; см. абзац перед леммой 6.3). Принимая во внимание лемму 6.3 и теорему 6.4, запишем ряд равенств и изоморфизмов:

$$\begin{aligned}\text{Out}_0 K &= C/\text{In}_0(\text{Aut } K) = (\text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \Psi \cdot D)/\text{In}_0(\text{Aut } K) \cong \\ &\cong \Psi D/(\Psi D \cap \text{In}_0(\text{Aut } K)) = \Psi D/\Psi_0 D_0 = \\ &= (\Psi \rtimes D)/(\Psi_0 \rtimes D_0) \cong \Psi/\Psi_0 \rtimes D/D_0.\end{aligned} \quad \square$$

Теорема 6.6 переносит теорему 6.4 на случай произвольного (т. е. не обязательно связного) множества X . Сейчас мы поступим аналогично со следствием 7.2. Перед теоремой 6.6 поясняется, как при подобных переносах следует определить группы D и D_0 и что понимается под группой P_i .

Следствие 7.3. Пусть выполняются условие (**) из раздела 6 и (n, m) -условие. Тогда имеют место следующие равенства и изоморфизм:

$$\text{Aut } K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes (\text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \Psi \cdot D) \rtimes \text{Out } X, \quad (8)$$

или, короче, $\text{Aut } K = (\text{In}(\text{Aut } K) \cdot \Psi \cdot D) \rtimes \text{Out } X$;

$$\text{Out } K \cong \Psi/\Psi_0 \rtimes \prod_{i \in I} \text{Out } P_i \rtimes \text{Out } X. \quad (9)$$

Доказательство. При доказательстве (8) всё получается из равенств $\text{Aut } K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes C \rtimes \text{Out } X$, $C = \text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \Psi \cdot D$ и теорем 7.1, 6.6.

Докажем (9). Доказательство следствия 7.2 (2) остаётся верным и в данной более общей ситуации. Нужно только принять во внимание, что теперь мы располагаем изоморфизмом $D/D_0 \cong \prod_{i \in I} \text{Out } P_i$ (здесь I — индексное множество для компонент связности X_i множества X ; см. текст перед теоремой 6.6). $\square$

Предположим, что кольцо R коммутативно. Тогда условия (8) и (9) будут выполнены. Также естественно рассматривать автоморфизмы R -алгебры $I(X, R)$. Если в разделе 6 положить $k_i = 1$ для всех $i \in I$ (числа k_i определены перед теоремой 6.6), то алгебра $I(X, R)$ автоматически будет удовлетворять условию (**). Таким образом, для коммутативного неразложимого кольца R следствие 7.3 приобретает следующий вид.

Следствие 7.4. Пусть R — коммутативное неразложимое кольцо.

(а) Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \text{Aut } K &= \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes (\text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \Psi) \rtimes \text{Out } X = \\ &= (\text{In}(\text{Aut } K) \cdot \Psi) \rtimes \text{Out } X, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{Out } K \cong \Psi/\Psi_0 \rtimes \text{Out } X. \quad (11)$$

(б) Если X — частично упорядоченное множество, то имеют место следующие соотношения [26]:

$$\text{Aut } K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \Psi \rtimes \text{Aut } X, \quad (12)$$

$$\text{Out } K \cong \Psi/\Psi_0 \rtimes \text{Aut } X. \quad (13)$$

Аutomорфизмы из подгрупп Ψ и Ψ_0 обычно называют *мультипликативными* и *дробными* автоморфизмами соответственно. Дробные автоморфизмы совпадают с внутренними мультипликативными автоморфизмами. Статьи [4] и [13] посвящены различным аспектам этих автоморфизмов.

Исследование выполнено за счёт грантов Российского научного фонда № 23-21-00375, <https://rscf.ru/project/23-21-00375> (П. А. Крылов) и № 22-11-00052, <https://rscf.ru/project/22-11-00052> (А. А. Туганбаев).

Литература

- [1] Ánh P. N., van Wyk L. Automorphism groups of generalized triangular matrix rings // Linear Algebra Appl. — 2011. — Vol. 434. — P. 1018–1026.
- [2] Azumaya G. On maximally central algebras // Nagoya Math. J. — 1951. — Vol. 2. — P. 119–150.
- [3] Birkenmeier G. F., Heatherly H. E., Kim J. Y., Park J. K. Triangular matrix representations // J. Algebra. — 2000. — Vol. 230. — P. 558–595.

- [4] Brusamarello R., Fornaroli É. Z., Santulo E. A., jun. Multiplicative automorphisms of incidence algebras // *Commun. Algebra*. — 2015. — Vol. 43, no. 2. — P. 726–736.
- [5] Brusamarello R., Lewis D. W. Automorphisms and involutions on incidence algebras // *Linear Multilinear Algebra*. — 2011. — Vol. 59, no. 11. — P. 1247–1267.
- [6] Coelho S. P. Automorphism groups of certain structural matrix rings // *Commun. Algebra*. — 1994. — Vol. 22. — P. 5567–5586.
- [7] Dăscălescu S., van Wyk L. Do isomorphic structural matrix rings have isomorphic graphs? // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1996. — Vol. 124, no. 5. — P. 1385–1391.
- [8] Drozd Y., Kolesnik P. Automorphisms of incidence algebras // *Commun. Algebra*. — 2007. — Vol. 35, no. 12. — P. 3851–3854.
- [9] Faith C. *Algebra: Rings, Modules and Categories*. — Berlin: Springer, 1973.
- [10] Isaacs I. M. Automorphisms of matrix algebras over commutative rings // *Linear Algebra Appl.* — 1980. — Vol. 31. — P. 215–231.
- [11] Jöndrup S. The group of automorphisms of certain subalgebras of matrix algebras // *J. Algebra*. — 1991. — Vol. 141, no. 1. — P. 106–114.
- [12] Jöndrup S. Automorphisms and derivations of upper triangular matrix rings // *Linear Algebra Appl.* — 1995. — Vol. 221. — P. 205–218.
- [13] Kaigorodov E., Krylov P., Tuganbaev A. On multiplicative automorphisms of incidence algebras // *J. Algebra Its Applications*. — DOI: 10.1142/S0219498825503645.
- [14] Kezlan T. P. A note on algebra automorphisms of triangular matrices over commutative rings // *Linear Algebra Appl.* — 1990. — Vol. 135. — P. 181–184.
- [15] Krylov P. A., Norbosambuev T. D. Automorphisms of formal matrix algebras // *Sib. Mat. Zh.* — 2018. — Vol. 59, no. 5. — P. 1116–1127.
- [16] Krylov P., Tuganbaev A. *Formal Matrices*. — Berlin: Springer, 2017.
- [17] Krylov P. A., Tuganbaev A. A. Automorphism groups of formal matrix rings // *J. Math. Sci.* — 2021. — Vol. 258, no. 2. — P. 222–249.
- [18] Krylov P. A., Tuganbaev A. A. Automorphisms of formal matrix rings. — 2022. — [arXiv:2204.13332v4](#).
- [19] Krylov P. A., Tuganbaev A. A. Formal matrix rings: Automorphisms // *Int. J. Algebra Computation*. — 2023. — Vol. 33, no. 4. — P. 687–698.
- [20] Krylov P. A., Tuganbaev A. A. Incidence rings: automorphisms and derivations. — 2023. — [arXiv:2305.02984v1](#).
- [21] Krylov P. A., Tuganbaev A. A. Additive derivations of incidence algebras // *Beitr. Algebra Geom.* — 2024. — DOI: 10.1007/s13366-024-00770-x.
- [22] Krylov P. A., Tuganbaev A. A. Derivations of incidence algebras // *Mathematics*. — 2024. — Vol. 12, no. 7. — Paper 999.
- [23] Rota G.-C., On the foundations of combinatorial theory. I. Theory of Möbius functions // *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* — 1964. — Vol. 2. — P. 340–368.
- [24] Smith K. C., van Wyk L. An internal characterisation of structural matrix rings // *Commun. Algebra*. — 1994. — Vol. 22, no. 14. — P. 5999–5622.
- [25] Spiegel E. On the automorphisms of incidence algebras // *J. Algebra*. — 2001. — Vol. 239. — P. 615–623.
- [26] Spiegel E., O'Donnell C. J. *Incidence Algebras*. — New York: Marcel Dekker, 1997.

