

Структура и гомоморфизмы микрорасслоений

С. В. ЛЮДКОВСКИЙ

МИРЭА — Российский технологический университет
e-mail: sludkowski@mail.ru

УДК 515.164.35+515.122.4+515.122.55

Ключевые слова: микрорасслоение, структура, гомоморфизм, множественно-открытая топология.

Аннотация

Данная статья посвящена исследованию структуры и гомоморфизмов микрорасслоений. Микрорасслоения являются обобщениями многообразий. Для многообразий известно, когда их семейства гомоморфизмов можно снабдить структурой многообразия, но для микрорасслоений эта проблема ещё не была исследована. В статье изучаются непрерывные гомоморфизмы микрорасслоений, исследуются топологии на семействах гомоморфизмов микрорасслоений и связь между их структурой и микрорасслоениями. Изучаются необходимые и достаточные условия, при которых семейства гомоморфизмов микрорасслоений можно снабдить структурой микрорасслоений.

Abstract

S. V. Ludkovsky, Structure and homomorphisms of microbundles, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 3, pp. 113—134.

This paper is devoted to investigations of a structure and homomorphisms of microbundles. Microbundles are generalizations of manifolds. For manifolds, it was studied when their families of homomorphism can be supplied with the manifold structure, but for microbundles this problem was not yet investigated. Continuous homomorphisms of microbundles are studied. Topologies on families of homomorphisms of microbundles are investigated. Relations of their structure with microbundles are scrutinized. Necessary and sufficient conditions are studied under which families of homomorphism of microbundles can be supplied with a microbundle structure.

1. Введение

Топологические многообразия и геометрические пучки очень важны в математике и её приложениях (см., например, [8, 11, 14—19, 23, 24, 26, 27]). Их обобщениями являются микрорасслоения. Они широко используются в топологии и алгебраической топологии [4, 5, 12, 20, 22, 25]. Имеется несколько работ о микрорасслоениях над $\mathbb{R}^n$ и банаховыми пространствами над $\mathbb{R}$, но над топологическими модулями над кольцами они были изучены мало. Изучение микрорасслоений над топологическими кольцами мотивируется проблемами общей топологии, алгебраической топологии, некоммутативной геометрии, теории

Фундаментальная и прикладная математика, 2025, том 25, № 3, с. 113—134.

© 2025 Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»

представлений, пучков над топологическими группами и групповыми кольцами [1, 2, 10, 11], математической физики. Микрорасслоения имеют более сложную структуру, чем многообразия или топологические многообразия. Для многообразий известно, когда семейства их гомоморфизмов можно снабдить структурой многообразия, но для микрорасслоений эта проблема ещё не была исследована.

Для удобства читателей мы напоминаем некоторые определения и обозначения (их можно найти в [20]).

Замечание I1. Допустим, что $\mathbf{F}$ — топологическое кольцо, такое что его топология $\tau_{\mathbf{F}}$ не является ни дискретной, ни антидискретной. В этом случае $(\mathbf{F}, \tau_{\mathbf{F}})$ называется собственным топологическим кольцом. Топологический левый модуль над $\mathbf{F}$ обозначается $X_{\mathbf{F}}$ или кратко X , если $\mathbf{F}$ оговорено. Кольцо $\mathbf{F}$ предполагается ассоциативным и коммутативным относительно сложения, но может быть некоммутативным или неассоциативным по умножению.

Далее будем писать «кольцо» или «модуль», имея в виду топологическое кольцо или топологический модуль. Их гомоморфизмы предполагаются непрерывными. Окрестности в топологических пространствах, модулях, кольцах предполагаются открытыми, если не будет оговорено что-либо иное. Топологическая терминология используется далее в смысле [9].

Определение I2. Допустим, что выполнены следующие условия:

- (I2.1) заданы топологические пространства A и E ;
- (I2.2) имеются непрерывные отображения $i: A \rightarrow E$ и $p: E \rightarrow A$, такие что $p \circ i = \text{id}$, где $\text{id} = \text{id}_A: A \rightarrow A$ обозначает тождественное отображение, $p \circ i$ — композиция отображений;
- (I2.3) для любого $b \in A$ существуют окрестности U для b и V для $i(b)$, такие что $i(U) \subset V$ и $p(V) \subset U$, и V гомеоморфна $U \times X$, где $h_V: V \rightarrow U \times X$ — гомеоморфизм;
- (I2.4) имеются непрерывные отображения: проекция $\hat{\pi}_1: U \times X \rightarrow U$, инъекция $\iota_0: U \rightarrow U \times X$, также проекция $\hat{\pi}_2: U \times X \rightarrow X$, такие что $\hat{\pi}_1(d, x) = d$, $\iota_0(d) = (d, 0)$ и $\hat{\pi}_2(d, x) = x$ для любых $d \in U$ и $x \in X$; при этом предполагается, что они удовлетворяют тождеству $\hat{\pi}_1 \circ \iota_0|_U = p|_V \circ i|_U$, где $i|_U$ обозначает ограничение i на U .

Говорят, что условия (I2.1)–(I2.4) определяют микрорасслоение $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, \mathbf{F}, X, i, p)$ со слоем $X = X_{\mathbf{F}}$ для $\mathcal{B}$, где A называется базовым пространством, E называется тотальным пространством. Если некоторые данные (например, $\mathbf{F}$ или X) уже введены, то в $\mathcal{B}(A, E, \mathbf{F}, X, i, p)$ их можно опустить для сокращения обозначений.

Ранее в [20] было начато изучение некоторых топологических свойств микрорасслоений. Данная статья посвящена исследованию гомоморфизмов микрорасслоений. Изучаются топологии на семействах гомоморфизмов микрорасслоений, предварительные результаты о них приводятся в теореме 5, предложении 6, следствиях 7–10. Существование канонических микрорасслоений утверждается в предложении 15. Специфическая регулярность микрорасслоений и семейства их гомоморфизмов над топологическими кольцами исследуются в теоремах 12,

22, в теореме 23 сравниваются топологии на них. Примеры 24 иллюстрируют различные типы топологий. Исследуются взаимосвязи структуры семейств гомоморфизмов со структурой микрорасслоений (см. теорему 28). Вложения микрорасслоений изучаются в теореме 30. В теоремах 32–34, 36 рассматриваются индуцированные гомоморфизмы. Исследуются необходимые и достаточные условия, при которых семейства гомоморфизмов микрорасслоений в свою очередь могут быть снабжены структурой микрорасслоения.

Все главные результаты данной статьи получены впервые. Они могут быть использованы для дальнейших исследований в топологии, алгебраической топологии, некоммутативной геометрии, теории представлений, математическом анализе, математической физике и их приложениях.

2. Структура и гомоморфизмы микрорасслоений

Определение 1. Пусть $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}(A_j, E_j, F_j, X_j, i_j, p_j)$ — это микрорасслоение, $j \in \mathbb{N}$. Если $A_2 \subset A_1$, $E_2 \subset E_1$, $F_2 \subset F_1$, $X_2 \subset X_1$, $i_1|_{A_2} = i_2$, $p_1|_{E_2} = p_2$, для любого $b \in A_2$ существуют окрестности U_j точки b в A_j и V_j точки $i_2(b)$ в E_j , такие что выполнены условия (I2.3), (I2.4), $U_2 = U_1 \cap A_2$, $V_2 = V_1 \cap E_2$, $h_{V_1,1}|_{V_2} = h_{V_2,2}$, $\iota_{0,1}|_{U_2} = \iota_{0,2}$, $\hat{\pi}_{1,1}|_{U_2 \times X_2} = \hat{\pi}_{1,2}$, $\hat{\pi}_{2,1}|_{U_2 \times X_2} = \hat{\pi}_{2,2}$, то $\mathcal{B}_2$ называется подмикрорасслоением в микрорасслоении $\mathcal{B}_1$, где $h_{V_j,j}$, $\iota_{0,j}$, $\hat{\pi}_{1,j}$, $\hat{\pi}_{2,j}$ соответствуют $\mathcal{B}_j$.

Если $\mathcal{B}_2$ — это подмикрорасслоение в микрорасслоении $\mathcal{B}_1$, A_2 открыто в A_1 , то положим $\alpha_1 = 1$, а в противном случае $\alpha_1 = 0$; если E_2 открыто в E_1 , то положим $\alpha_2 = 1$, а в противном случае $\alpha_2 = 0$; если F_2 открыто в F_1 , то $\alpha_3 = 1$, в противном случае $\alpha_3 = 0$; если X_2 открыто в X_1 , то $\alpha_4 = 1$, в противном случае $\alpha_4 = 0$. Тогда скажем, что $\mathcal{B}_2$ является β -открытым в $\mathcal{B}_1$, где $\beta = (\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3, 4\alpha_4)$. Аналогично определяется β -замкнутое (β -компактное) подмикрорасслоение $\mathcal{B}_2$ в $\mathcal{B}_1$. Для сокращения обозначений β можно опустить нулевые координаты. Для $\beta = (1, 2, 3, 4)$ кратко можно сказать «открытое (замкнутое, компактное) подмикрорасслоение» вместо « β -открытое (β -замкнутое, β -компактное)».

Допустим, что $q = (b, e, f, x)$ с $b \in A_j$, $e \in E_j$, $f \in F_j$, $x \in X_j$ для фиксированного j , такого что $i_j(b) = e_1 \in E_j$, $p_j(e_1) = b$, а условия (I2.3), (I2.4) для окрестностей U точки b в A_j , V точки e_1 в E_j выполнены, $\hat{\pi}_1 \circ h_V(e) = b$, $\hat{\pi}_2 \circ h_V(e) = x$. Тогда q называется элементом в $\mathcal{B}_j$ и обозначается $q \in \mathcal{B}_j$. Пишут $C_j \subset \mathcal{B}_j$, если для каждого q из того, что $q \in C_j$, вытекает $q \in \mathcal{B}_j$, тогда C_j называется подмножеством в $\mathcal{B}_j$. Положим $C_j = (C_j^1, C_j^2, C_j^3, C_j^4)$, где $C_j^1 \subset A_j$, $C_j^2 \subset E_j$, $C_j^3 \subset F_j$, $C_j^4 \subset X_j$. Если дополнительно C_j — это подмикрорасслоение в $\mathcal{B}_j$, то обозначим это $C_j \subset {}_M\mathcal{B}_j$, то есть существует вложение π из C_j в $\mathcal{B}_j$, такое что $\pi = \text{id}_{C_j}$. В частности, если $C_j = \{q\}$, где $q = (b, i_j(b), 0, 0)$, то это также будет обозначаться $q \in {}_M\mathcal{B}_j$.

Замечание 2. Если подкольцо F_2 открыто в кольце F_1 (или левый F_2 -модуль X_2 открыт в левом F_1 -модуле X_1), то F_2 замкнуто в F_1 (или X_2 замкнуто

в X_1 соответственно) по [11, теорема 5.5], так как F_j (или X_j соответственно) имеет структуру коммутативной топологической группы по сложению. Для топологических пространств (топологических колец или левых модулей) A и B посредством $B^A = C(A, B)$ ($\text{Hom}(A, B)$ соответственно) обозначается семейство всех непрерывных отображений (непрерывных гомоморфизмов соответственно) $f: A \rightarrow B$. Если A и B являются левыми F -модулями, то $\text{Hom}_F(A, B)$ обозначает семейство всех непрерывных лево- F -линейных гомоморфизмов $g: A \rightarrow B$.

Если кольцо F ассоциативно, то, как обычно, $(ab)x = a(bx)$ для любых a, b в F , x в левом F -модуле $X = X_F$. Если кольцо F ассоциативно и коммутативно, то также предполагается, что $a(bx) = b(ax)$ для любых a, b в F , x в X .

Посредством $\text{Hom}(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_k)$ обозначено семейство всех непрерывных гомоморфизмов $\pi_k^n: \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_k$ микрорасслоений, удовлетворяющих условиям (2.1)–(2.5):

$$(2.1) \quad \pi_k^n = (\pi_{1,k}^{1,n}; \pi_{2,k}^{2,n}; \pi_{3,k}^{3,n}; \pi_{4,k}^{4,n}) \text{ с}$$

$$(2.2) \quad \pi_{1,k}^{1,n}: A_n \rightarrow A_k \text{ и } \pi_{2,k}^{2,n}: E_n \rightarrow E_k, \pi_{3,k}^{3,n}: \mathbf{F}_n \rightarrow \mathbf{F}_k \text{ и } \pi_{4,k}^{4,n}: X_n \rightarrow X_k, \text{ где}$$

$$(2.3) \quad \pi_{2,k}^{2,n} \circ i_n = i_k \circ \pi_{1,k}^{1,n} \text{ и } p_k \circ \pi_{2,k}^{2,n} = \pi_{1,k}^{1,n} \circ p_n,$$

$$(2.4) \quad h_k \circ \pi_{2,k}^{2,n} \circ h_n^{-1}(a_n, u_n x_n + v_n y_n) = \\ = \pi_{3,k}^{3,n}(u_n) h_k \circ \pi_{2,k}^{2,n} \circ h_n^{-1}(a_n, x_n) + \pi_{3,k}^{3,n}(v_n) h_k \circ \pi_{2,k}^{2,n} \circ h_n^{-1}(a_n, y_n),$$

$$(2.5) \quad \hat{\pi}_{2,k} \circ h_k \circ \pi_{2,k}^{2,n} = \pi_{4,k}^{4,n} \circ \hat{\pi}_{2,n} \circ h_n \text{ и } \pi_{4,k}^{4,n}(u_n x_n + v_n y_n) = \pi_{3,k}^{3,n}(u_n) \pi_{4,k}^{4,n}(x_n) + \\ + \pi_{3,k}^{3,n}(v_n) \pi_{4,k}^{4,n}(y_n) \text{ для всяких } u_n \text{ и } v_n \text{ в } \mathbf{F}_n, x_n \text{ и } y_n \text{ в } X_n, a_n \in A_n, \\ \text{где } h_n: V_n \rightarrow U_n \times X_n \text{ — это локальный гомеоморфизм для открытого под-} \\ \text{множества } V_n \text{ в } E_n, \text{ соответствующий открытой окрестности } U_n \text{ точки } a_n \\ \text{в } A_n, \text{ где } \pi_{3,k}^{3,n} \text{ — это гомоморфизм колец, то есть } \pi_{3,k}^{3,n}(u_n + v_n) = \pi_{3,k}^{3,n}(u_n) + \\ + \pi_{3,k}^{3,n}(v_n) \text{ и } \pi_{3,k}^{3,n}(u_n v_n) = \pi_{3,k}^{3,n}(u_n) \pi_{3,k}^{3,n}(v_n) \text{ для всяких } u_n \text{ и } v_n \text{ в } \mathbf{F}_n \text{ (см.} \\ \text{также введение или [20]).}$$

Если $F_n = F_k = F$, то

$$\text{Hom}_F(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_k) := \{\pi_k^n \in \text{Hom}(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_k): \pi_{4,k}^{4,n} \in \text{Hom}_F(X_n, X_k)\}.$$

Если $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$ — микрорасслоение, $\tau_A, \tau_E, \tau_F, \tau_X$ — топологии на базовом пространстве A , на тотальном пространстве E , на топологическом кольце F , на топологическом левом F -модуле X соответственно, такие что выполнены условия (I2.1)–(I2.4), то $\tau_{\mathcal{B}} = (\tau_A, \tau_E, \tau_F, \tau_X)$ называется топологией на $\mathcal{B}$.

Если отображение π_1^2 биективно, $\pi_1^2: \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1$ и $(\pi_1^2)^{-1}: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ являются (непрерывными) гомоморфизмами микрорасслоений, то π_1^2 называется изоморфизмом микрорасслоений (в частности, для $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ — автоморфизмом).

Имея $q \in C_l \subset \mathcal{B}_j$ для любого $l \in \Lambda$, по определению 1, естественно получаем $C = \bigcup_{l \in \Lambda} C_l \subset \mathcal{B}_j$ и $P = \bigcap_{l \in \Lambda} C_l \subset \mathcal{B}_j$, где Λ обозначает множество.

Определение 3. Для микрорасслоений $\mathcal{B}_j$ допустим, что $C_j \subset \mathcal{B}_j$, то есть $C_j^1 \subset A_j$, $C_j^2 \subset E_j$, $C_j^3 \subset F_j$, $C_j^4 \subset X_j$. Через $\mathbf{H}(C_j, C_l) = \mathbf{H}_{\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l}(C_j, C_l)$ удобно обозначить семейство всех $\pi_l^j \in \text{Hom}(\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l)$, таких что $\pi_{k,l}^{k,j}(C_j^k) \subset C_l^k$ для любого $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathbf{H}_k(C_j, C_l) := \{\pi_{k,l}^{k,j} : \pi_l^j \in \mathbf{H}(C_j, C_l)\}$. Аналогично если $F_j = F_l$, то $\mathbf{H}_{F_j}(C_j, C_l) = \mathbf{H}_{F_j; \mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l}(C_j, C_l) := \text{Hom}_{F_j}(\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l) \cap \mathbf{H}(C_j, C_l)$. В этом случае собрание всех семейств $\mathbf{H}(C_j, C_l)$ (или $\mathbf{H}_{F_j}(C_j, C_l)$ при $F_j = F_l$) с компактным C_j в $\mathcal{B}_j$ и открытым C_l в $\mathcal{B}_l$ образует предбазу компактно-открытой топологии $\tau_{\text{co}} = \tau_{\text{co}}(\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l)$ на $\text{Hom}(\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l)$ (или на $\text{Hom}_{F_j}(\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l)$ соответственно). Если заданы микрорасслоения $\mathcal{B}_j$ и $\mathcal{B}_l$, то их можно опустить из $\mathbf{H}_{\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l}(C_j, C_l)$ или $\mathbf{H}_{F_j; \mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l}(C_j, C_l)$ ради сокращения обозначений.

Определение 4. Микрорасслоение $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$ является T_k -микрорасслоением тогда и только тогда, когда A, E, F, X являются T_k как топологические пространства, где $k \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 5, 6\}$.

Теорема 5. Если $\mathcal{B}_3$ — подмикрорасслоение в T_2 -микрорасслоении $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_4$ — замкнутое подмикрорасслоение в микрорасслоении $\mathcal{B}_2, F_j$ и X_j — T_0 -пространства, то $\mathbf{H}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4)$ замкнуто в $(\text{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2), \tau_{\text{co}})$. Более того, если $F_1 = F_2 = F_3 = F_4$, то $\mathbf{H}_{F_1}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4)$ замкнуто в $(\text{Hom}_{F_1}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2), \tau_{\text{co}})$.

Доказательство. Пусть C_1 и C_3 компактны в $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_3$ соответственно, C_2 и C_4 открыты в $\mathcal{B}_2$ и $\mathcal{B}_4$ соответственно. С другой стороны, если $\pi_4^3 \in \mathbf{H}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4)$, то согласно определениям 1 и 3 существует гомоморфизм $\pi_2^1 \in \text{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, такой что $\pi_2^1(\mathcal{B}_3) \subset \mathcal{B}_4$ и $\pi_2^1|_{\mathcal{B}_3} = \pi_4^3$. В силу [11, теорема 4.8] и [9, 3.1.10], условий (2.1), (2.2), (2.5) выше (или см. [20]) и определения 1 $C_1^3 C_1^4$ и $C_3^3 C_3^4$ компактны в X_1 и X_3 соответственно, $\pi_{4,4}^{4,3}(C_3^4)$, $\pi_{3,4}^{3,3}(C_3^3) \pi_{4,4}^{4,3}(C_3^4) = \pi_{4,4}^{4,3}(C_3^3 C_3^4)$ и $\pi_{4,2}^{4,1}(C_1^4)$, $\pi_{3,2}^{3,1}(C_1^3) \pi_{4,2}^{4,1}(C_1^4) = \pi_{4,2}^{4,1}(C_1^3 C_1^4)$ компактны в X_4 и X_2 соответственно, где $C_1^3 C_1^4 = \{x \in X_1 : \text{найдутся } u \in C_1^3, y \in C_1^4, \text{ такие что } uy = x\}$. Тогда отсюда вытекает, что $\pi_{3,2}^{3,1}(C_1^3) \subset C_2^3$, $\pi_{4,2}^{4,1}(C_1^4) \subset C_2^4$, $\pi_{4,2}^{4,1}(C_1^3 C_1^4) \subset C_2^3 C_2^4$, $\pi_{3,4}^{3,3}(C_3^3) \subset C_4^3$, $\pi_{4,4}^{4,3}(C_3^4) \subset C_4^4$, $\pi_{4,4}^{4,3}(C_3^3 C_3^4) \subset C_4^3 C_4^4$.

Отметим, что $(\text{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2), \tau_{\text{co}})$ — замкнутое топологическое подпространство в произведении топологических пространств $A_2^{A_1} \times E_2^{E_1} \times F_2^{F_1} \times X_2^{X_1}$, снабжённом топологией тихоновского произведения, где $A_2^{A_1}, E_2^{E_1}, F_2^{F_1}, X_2^{X_1}$ снабжены соответствующими компактно-открытыми топологиями (см. замечание 2 и определение 3). В самом деле, условия (2.1)–(2.5) наложены для непрерывных отображений, $\pi_{1,2}^{1,1}, \pi_{2,2}^{2,1}$ являются непрерывными гомоморфизмами $\pi_{3,2}^{3,1}, \pi_{4,2}^{4,1}$ с непрерывными $i_1, i_2, p_1, p_2, h_1, h_2, \hat{\pi}_{2,1}, \hat{\pi}_{2,2}$. Тогда

$$A_2^{A_1} \setminus A_4^{A_3} = \bigcup \{ \mathbf{H}_1(\{b\}, A_2 \setminus A_4) : b \in A_3 \},$$

$$E_2^{E_1} \setminus E_4^{E_3} = \bigcup \{ \mathbf{H}_2(\{e\}, E_2 \setminus E_4) : e \in E_3 \},$$

$$F_2^{F_1} \setminus \tilde{\mathbf{H}}_3(F_3, F_4) = \bigcup \{ \tilde{\mathbf{H}}_3(\{f\}, F_2 \setminus F_4) : f \in F_3 \},$$

$$X_2^{X_1} \setminus \tilde{\mathbf{H}}_4(X_3, X_4) = \bigcup \{ \tilde{\mathbf{H}}_4(\{x\}, X_2 \setminus X_4) : x \in X_3 \},$$

где $H = H_{B_1, B_2}$, $H_k = H_{k; B_1, B_2}$ для любого k , $\check{H}_3(B_3, F_4) = \{\xi \in \text{Hom}(F_1, F_2) : \xi(B_3) \subset F_4\}$ для любого $B_3 \subset F_3$, $\check{H}_4(P_3, X_4) = \{\eta \in \text{Hom}(X_1, X_2) : \eta(P_3) \subset X_4\}$ для любого $P_3 \subset X_3$, где $F_2^{F_1} = \text{Hom}(F_1, F_2)$, $X_2^{X_1} = \text{Hom}(X_1, X_2)$, где, как обычно, $A \setminus B = \{a \in A : a \notin B\}$ для подмножеств A, B множества Ω . Если $q \in B_3$, $q = (b, e, f, x)$, $b \in A_3$, $e \in E_3$, $f \in F_3$, $x \in X_3$, то одноточечное множество $\{q\}$ очевидно компактно (см. определение 1). Поэтому $H_1(\{b\}, A_2 \setminus A_4)$ открыто в $A_2^{A_1}$, $H_2(\{e\}, E_2 \setminus E_4)$ открыто в $E_2^{E_1}$, $\check{H}_3(\{f\}, F_2 \setminus F_4)$ открыто в $F_2^{F_1}$, $\check{H}_4(\{x\}, X_2 \setminus X_4)$ открыто в $X_2^{X_1}$. Следовательно, $A_2^{A_1} \setminus A_4^{A_3}$ открыто в $A_2^{A_1}$, $E_2^{E_1} \setminus E_4^{E_3}$ открыто в $E_2^{E_1}$, $F_2^{F_1} \setminus \check{H}_3(F_3, F_4)$ открыто в $F_2^{F_1}$, $X_2^{X_1} \setminus \check{H}_4(X_3, X_4)$ открыто в $X_2^{X_1}$ и, следовательно, $A_4^{A_3} \times E_4^{E_3} \times \check{H}_3(F_3, F_4) \times \check{H}_4(X_3, X_4)$ замкнуто в $A_2^{A_1} \times E_2^{E_1} \times F_2^{F_1} \times X_2^{X_1}$. Поэтому $H(B_3, B_4)$ замкнуто в $\text{Hom}(B_1, B_2)$, так как $H(B_3, B_4) = (A_4^{A_3} \times E_4^{E_3} \times \check{H}_3(F_3, F_4) \times \check{H}_4(X_3, X_4)) \cap \text{Hom}(B_1, B_2)$ и $\text{Hom}(B_1, B_2)$ замкнуто в $A_2^{A_1} \times E_2^{E_1} \times F_2^{F_1} \times X_2^{X_1}$. $\square$

Предложение 6. Существует (забывающий) ковариантный функтор $\mathcal{F}$ из категории $\mathcal{M}$ микрорасслоений в категорию $\mathcal{T}$ топологических пространств.

Доказательство. Категория $\mathcal{M}$ имеет семейство объектов $\text{Ob}(\mathcal{M})$, где всякий объект есть микрорасслоение. Для двух микрорасслоений B_1 и B_2 в $\text{Ob}(\mathcal{M})$ существует семейство $\text{Mor}(B_2, B_1) = \text{Hom}(B_2, B_1)$ всех гомоморфизмов из B_2 в B_1 , удовлетворяющих условиям (2.1)–(2.5).

Существует отображение $m: \text{Mor}(B_3, B_2) \times \text{Mor}(B_2, B_1) \rightarrow \text{Mor}(B_3, B_1)$ для любого $B_j \in \text{Ob}(\mathcal{M})$, $j \in \{1, 2, 3\}$, такое что $m(\pi_2^3, \pi_1^2) = \pi_1^2 \circ \pi_2^3 \in \text{Mor}(B_3, B_1)$ для всяких $\pi_2^3 \in \text{Mor}(B_3, B_2)$ и $\pi_1^2 \in \text{Mor}(B_2, B_1)$. Для любого $B_j \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ существует единичный морфизм 1_{B_j} , такой что $1_{B_j} \in \text{Mor}(B_j, B_j)$, $1_{B_1} \circ \pi_1^2 = \pi_1^2 \circ 1_{B_2} = \pi_1^2$ для любого $\pi_1^2 \in \text{Mor}(B_2, B_1)$. Таким образом, $\mathcal{M}$ является категорией.

Для любого микрорасслоения $B \in \text{Ob}(\mathcal{M})$, $B = B(A, E, F, X, i, p)$, можно задать топологическое пространство $A \times E \times F \times X =: P_B$, снабжённое топологией тихоновского произведения. Пусть $\hat{i}: A \rightarrow P_B$ — такое отображение, что $\hat{i}(b) = (b, i(b), 0, \hat{\pi}_2(h_V(i(b))))$ для всякого $b \in A$, где V — окрестность точки $i(b)$ в E , удовлетворяющая условию (I2.3). Пусть также $\hat{p}: P_B \rightarrow A$ — такое отображение, что $p \circ \theta_2 = \hat{p}$, где $\theta_2: P_B \rightarrow E$ — проекция, $\theta_2(b, e, f, x) = e$ для любых $b \in A$, $e \in E$, $f \in F$, $x \in X$. Поэтому из (I2.2) следует, что $\hat{p} \circ \hat{i} = \text{id}$, где $\text{id} = \text{id}_A: A \rightarrow A$ — тождественное отображение. Таким образом, существует отображение $\mathcal{F}: \text{Ob}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{T})$, такое что $\mathcal{F}(B_j) = P_{B_j}$, $j \in \mathbb{N}$, где $\mathcal{T}$ — категория топологических пространств.

Рассмотрим произвольные $\pi_1^2 \in \text{Mor}(B_2, B_1)$, $\pi_2^3 \in \text{Mor}(B_3, B_2)$ для $B_j \in \text{Ob}(\mathcal{M})$, $j \in \mathbb{N}$. Согласно (2.1)–(2.5) имеются непрерывные отображения

$$\begin{aligned} \pi_{1,j}^{1,j+1}: A_{j+1} &\rightarrow A_j, & \pi_{2,j}^{2,j+1}: E_{j+1} &\rightarrow E_j, \\ \pi_{3,j}^{3,j+1}: F_{j+1} &\rightarrow F_j, & \pi_{4,j}^{4,j+1}: X_{j+1} &\rightarrow X_j, \quad j \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \pi_{1,j}^{1,j+1} \circ \pi_{1,j+1}^{1,j+2}: A_{j+2} &\rightarrow A_j, & \pi_{2,j}^{2,j+1} \circ \pi_{2,j+1}^{2,j+2}: E_{j+2} &\rightarrow E_j, \\ \pi_{3,j}^{3,j+1} \circ \pi_{3,j+1}^{3,j+2}: F_{j+2} &\rightarrow F_j, & \pi_{4,j}^{4,j+1} \circ \pi_{4,j+1}^{4,j+2}: X_{j+2} &\rightarrow X_j. \end{aligned}$$

Гомоморфизмы $\pi_k^n: \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_k$ микрорасслоений индуцируют отображения $\tilde{\pi}_k^n: P_{\mathcal{B}_n} \rightarrow P_{\mathcal{B}_k}$ по (2.1), (2.2), где $\tilde{\pi}_k^n = \prod_{l=1}^4 \pi_{l,k}^{l,n}$ обозначает произведение отображений. Из (2.3) следует, что $\tilde{\pi}_j^{j+1} \circ \hat{\iota}_{j+1} = \hat{\iota}_j \circ \pi_{1,j}^{1,j+1}$ и $\hat{p}_j \circ \tilde{\pi}_j^{j+1} = \pi_{1,j}^{1,j+1} \circ \hat{p}_{j+1}$. Условие (2.5) означает, что $\hat{\pi}_{2,j} \circ h_j \circ \pi_{2,j}^{2,j+1} \circ \theta_{2,j+1} = \pi_{4,j}^{4,j+1} \circ \hat{\pi}_{2,j+1} \circ h_{j+1} \circ \theta_{2,j+1}$. Поэтому существует ковариантный функтор $\mathcal{F}$, такой что $\mathcal{F}(\pi_1^2 \circ \pi_2^3) = \mathcal{F}(\pi_1^2) \circ \mathcal{F}(\pi_2^3)$, $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}$, $\mathcal{F}(\pi_j^{j+1}) \in \text{Mor}(\mathcal{F}(\mathcal{B}_{j+1}), \mathcal{F}(\mathcal{B}_j))$. В частности, $\mathcal{F}(\text{id}_{\mathcal{B}_1}) = \text{id}_{\mathcal{F}(\mathcal{B}_1)}: P_{\mathcal{B}_1} \rightarrow P_{\mathcal{B}_1}$, где $\text{id}_Y(y) = y$ для любого $y \in Y$. $\square$

Следствие 7. Пусть $\mathcal{B}$ — микрорасслоение. Тогда $\mathcal{B} — T_i$ -микрорасслоение, где $0 \leq i \leq 3\frac{1}{2}$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}(\mathcal{B}) — T_i$ -пространство.

Следствие 8. Допустим, что $\mathcal{B}$ — микрорасслоение, такое что $\mathcal{F}(\mathcal{B}) — T_i$ -пространство, где $0 \leq i \leq 6$. Тогда $\mathcal{B} — T_i$ -микрорасслоение.

Доказательство. Утверждения следствий 7 и 8 вытекают из [9, теорема 2.3.11] и предложения 6 и определения 4 выше. $\square$

Следствие 9. Подмикрорасслоение $\mathcal{B}_1$ в микрорасслоении $\mathcal{B}_2$ открыто (замкнуто или компактно) тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}(\mathcal{B}_1)$ открыто (замкнуто или компактно соответственно) в $\mathcal{F}(\mathcal{B}_2)$.

Доказательство. Это следует из [9, предложение 2.3.1, следствие 2.3.4, теорема 3.2.4], определения 1 и предложения 6 выше. $\square$

Следствие 10. Если $\pi_1^2: \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1$ — изоморфизм микрорасслоений $\mathcal{B}_2$ и $\mathcal{B}_1$, то $\mathcal{F}(\pi_1^2): \mathcal{F}(\mathcal{B}_2) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{B}_1)$ — гомеоморфизм топологических пространств.

Замечание 11. Имеются гомеоморфизмы $h_f^3: F \rightarrow F$ и $h_x^4: X \rightarrow X$ топологического кольца F и топологического левого F -модуля X , рассматриваемых как топологические пространства, такие что $h_f^3(g) = f + g$, $h_x^4(y) = x + y$ для любых f, g в F , x, y в X . Отметим, что они могут не быть гомоморфизмами в нетривиальных случаях. Поэтому

$$h_{f,x} := (\text{id}_A, \text{id}_E, h_f^3, h_x^4): A \times E \times F \times X \rightarrow A \times E \times F \times X —$$

гомеоморфизм. С другой стороны, $\mathcal{B}(\{b\}, \{i(b)\} \cup \{e\}, 0, 0, i, p)$ — тривиальное подмикрорасслоение в микрорасслоении $\mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$ для любых $b \in A$ и $e \in E$. Тогда с учётом следствия 10 мы положим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\{q\}) &= \\ &= h_{q_3, q_4}(\mathcal{F}(\mathcal{B}(\{q_1\}, \{i(q_1)\} \cup \{q_2\}, 0, 0, i, p))) \setminus h_{q_3, q_4}(\mathcal{F}(\mathcal{B}(\{q_1\}, \{i(q_1)\}), 0, 0, i, p))) \end{aligned}$$

для любого $q \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$, где $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, $q_1 \in A$, $q_2 \in E$, $q_3 \in F$, $q_4 \in X$, и выполняются условия (I2.1)–(I2.4) (см. также определение 1).

Используя это, мы положим, что

$$\mathcal{B}(\{b\}, \{e_1\}, F, \{0\}, i_y, p_y) =: L_y \mathcal{B}(\{b\}, \{e\}, F, \{0\}, i, p)$$

тогда и только тогда, когда $b \in A$, $e \in E$, $e_1 \in E$, $p(e) = b$, $i(b) = e$, $p_y(e_1) = b$, $i_y(b) = e_1$, $\hat{\pi}_2(h_V(e_1)) = y \in X$, $\hat{\pi}_2(h_V(e)) = 0 \in X$, где $\hat{\pi}_2(h_V \circ i_y) = h_y^4 \circ \hat{\pi}_2(h_V \circ i)$, $p_y \circ i_y = \text{id}$, $e \in V$ и выполнены условия (I2.1)–(I2.4), $\mathcal{B}(\{b\}, \{e\}, F, \{0\}, i, p) \subset {}_M \mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$. Отсюда вытекает, что $L_y \circ L_{-y} = L_{-y} \circ L_y = \text{id}_{\mathcal{B}}$. Таким образом, существует вложение $\hat{L}_y: \mathcal{B}(\{b\}, \{e_1\}, F, \{0\}, i_y, p_y) \hookrightarrow \mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$, которое индуцировано оператором сдвига L_{-y} .

Теорема 12. Если микрорасслоение $\mathcal{B}_1$ является $(T_1 \cap T_3)$ -микрорасслоением, то $(\text{Hom}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1), \tau_{\text{co}})$ является $(T_1 \cap T_3)$ -пространством.

Доказательство. Возьмём $\pi_1^2 \in \mathcal{H}(C_2, C_1)$, где C_2 компактно в $\mathcal{B}_2$ и C_1 открыто в $\mathcal{B}_1$. В силу предложения 6 и следствия 9 существует открытое подмножество V в $\mathcal{B}_1$, такое что $\pi_1^2 \in \mathcal{H}(C_2, V)$ и $\text{cl}_Y[\mathcal{H}(C_2, V)] \subset \mathcal{H}(C_2, C_1)$, где $\text{cl}_Y[\mathcal{H}]$ обозначает замыкание $\mathcal{H}$ в $Y = (\text{Hom}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1), \tau_{\text{co}})$; $\text{cl}_{\mathcal{B}_1} V \subset C_1$, так как $\pi_1^2(C_2)$ компактно по [9, теорема 3.1.10]. Мы имеем, что $\pi_1^2(C_2) \subset C_1$ и $\mathcal{B}_1$ есть $(T_1 \cap T_3)$ -микрорасслоение.

Всякому $q \in \mathcal{B}_2$ соответствует $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ с $q_1 \in A_2$, $q_2 \in E_2$, $q_3 \in F_2$, $q_4 \in X_2$, следовательно, $\mathcal{F}(\{q\}) \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_2)$ согласно предложению 6 и замечанию 11. Поэтому для любого $q \in C_2$ существует открытое множество W_q в $\mathcal{B}_1$, такое что $\pi_1^2(q) \in W_q$ и $\text{cl}_{\mathcal{B}_1} W_q \subset C_1$ по следствию 9. Открытое покрытие $\{W_q: q \in C_2\}$ $\pi_1^2(C_2)$ содержит конечное подпокрытие $\{W_{q_1}, \dots, W_{q_n}\}$, где $n \in \mathbb{N}$. Мы положим $W = \bigcup_{k=1}^n W_{q_k}$, следовательно, $\pi_1^2(C_2) \subset W$ и $\text{cl}_{\mathcal{B}_1} W = \bigcup_{k=1}^n \text{cl}_{\mathcal{B}_1} W_{q_k} \subset C_1$. Отсюда вытекает, что $\pi_1^2 \in \mathcal{H}(C_2, W)$ и $\mathcal{H}(C_2, \text{cl}_{\mathcal{B}_1} W) \subset \mathcal{H}(C_2, C_1)$. В силу теоремы 5 $\mathcal{H}(C_2, \text{cl}_{\mathcal{B}_1} W)$ замкнуто, следовательно, $\text{cl}_{\text{Hom}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)} \mathcal{H}(C_2, W) \subset \text{cl}_{\text{Hom}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)} \mathcal{H}(C_2, \text{cl}_{\mathcal{B}_1} W) = \mathcal{H}(C_2, \text{cl}_{\mathcal{B}_1} W) \subset \mathcal{H}(C_2, C_1)$. Отсюда вытекает, что $(\text{Hom}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1), \tau_{\text{co}}) - (T_1 \cap T_3)$ -пространство. $\square$

Следствие 13. Пусть $\mathcal{B}_j$ — микрорасслоение для всякого $j \in \{1, 2, 3\}$, пусть $\pi_1^2 \in \text{Hom}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$ и $\eta(\pi_2^3) := \pi_1^2 \circ \pi_2^3$ для любого $\pi_2^3 \in \text{Hom}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2)$. Тогда $\eta: \text{Hom}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1)$ является непрерывным отображением относительно компактно-открытой топологии на $\text{Hom}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2)$ и $\text{Hom}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1)$.

Доказательство. Если $C_j \subset \mathcal{B}_j$ для любого $j \in \{1, 2, 3\}$, то включение $\pi_1^2(\pi_2^3(C_3)) \subset C_1$ эквивалентно $\pi_2^3(C_3) \subset (\pi_1^2)^{-1}(C_1)$, так как $\pi_{k,1}^{k,2}(\pi_{k,2}^{k,3}(C_3^k)) \subset C_1^k$ эквивалентно $\pi_{k,2}^{k,3}(C_3^k) \subset (\pi_{k,1}^{k,2})^{-1}(C_1^k)$ для любого $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Поэтому $\eta^{-1}(\mathcal{H}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1}(C_3, C_1)) = \mathcal{H}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1}(C_3, (\pi_1^2)^{-1}(C_1))$. $\square$

Определение 14. Допустим, что микрорасслоение $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$ удовлетворяет следующему условию: для любого $e \in E$ существует открытая

окрестность V_e для e в E и открытая окрестность U_b для $b = p(e)$ в A , такие что V_e гомеоморфна $U \times X$, где выполнены условия (I2.1)–(I2.4). Тогда $\mathcal{B}$ называется каноническим микрорасслоением.

Предложение 15. Если $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(A, E_2, F, X, i_2, p_2)$ — микрорасслоение, то существует каноническое микрорасслоение $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(A, E_1, F, X, i_1, p_1)$ с базовой окрестностью, изоморфной $\mathcal{B}_2$, причём $\mathcal{B}_1 \subset_M \mathcal{B}_2$.

Доказательство. Мы положим

$$(15.1) \quad E_1 = \bigcup \{e \in E_2 : \text{найдутся } b \in A, U \in \tau_A, b \in U, V \in \tau_{E_2}, e \in V, \\ \text{найдётся гомеоморфизм } h_V : V \rightarrow U \times X \text{ и выполнены (I2.3) и (I2.4)}\},$$

где τ_A и τ_{E_2} обозначают топологии на A и E_2 соответственно. Поэтому $E_1 \subset E_2$ и $i_2(A) \subset E_1$. Положим $i_2 = i_1$. По определению микрорасслоения $p_2 \circ i_2 = \text{id}_A$, $p_2(E_2) = A$. Снабдим E_1 топологией τ_{E_1} , наследуемой из E_2 , и положим $p_1 = p_2|_{E_1}$. Тогда $p_1 \circ i_1 = \text{id}_A$, $\text{id}_A : A \rightarrow A$, $p_1(E_1) = A$, $p_1|_V \circ i_1|_U = \hat{\pi}_1 \circ \iota_0|_U$ для U и V , таких, как выше в (15.1). Таким образом, условия (I2.1)–(I2.4) выполнены и $\mathcal{B}_1$ — микрорасслоение. Поскольку $A_2 = A_1 = A$, $X_2 = X_1 = X$, $F_2 = F_1 = F$, $E_1 \subset E_2$, то $\mathcal{B}_1$ является подмикрорасслоением в $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_1 \subset_M \mathcal{B}_2$. Из $V_1 = E_1 = V_2$, $g = \text{id}_{V_1}$ и $s = \text{id}_A$ вытекает, что $\mathcal{B}_2$ изоморфна базовой окрестности для $\mathcal{B}_1$ по определению 4 в [20]. $\square$

Определение 16. Пусть X_1 и X_2 — топологические левые F -модули, где F — топологическое кольцо. Семейство всех непрерывных лево- F -линейных гомоморфизмов $f : X_2 \rightarrow X_1$ обозначим $\text{Hom}_F(X_2, X_1)$.

Пусть $q : X_{2,F_2} \rightarrow X_{1,F_1}$ является непрерывным гомоморфизмом, удовлетворяющим (16.1)–(16.3):

$$(16.1) \quad q(x + y) = q(x) + q(y),$$

$$(16.2) \quad q(ax) = g(a)q(x) \text{ для любых } a \in F_2, x \text{ и } y \text{ из } X_2, \text{ где } g = g_q : F_2 \rightarrow F_1 \text{ — это непрерывный гомоморфизм,}$$

$$(16.3) \quad g(a + b) = g(a) + g(b), g(ab) = g(a)g(b) \text{ для любых } a \text{ и } b \text{ из } F_2, \text{ где } X_j = X_{j,F_j} \text{ — топологический левый } F_j\text{-модуль, } F_j \text{ — это топологическое кольцо, } j \in \{1, 2\}.$$

Семейство всех непрерывных гомоморфизмов, удовлетворяющих условиям (16.1)–(16.3) обозначим $\text{Hom}(X_2, X_1)$.

Напомним, что если X является топологическим пространством, δ — непустое семейство непустых подмножеств в X , такое что для любой точки $x \in X$ и любой открытой окрестности U точки x существует $B \in \delta$ с $x \in B \subset U$, то δ называется сетью на X . Сеть δ называется замкнутой (или компактной), если всякий $B \in \delta$ замкнут (или компактен соответственно) в X .

Пусть δ_j — замкнутая (или компактная сеть) на X_j и α_j — замкнутая сеть (или компактная сеть соответственно) на F_j . Тогда $\text{Hom}^{\alpha_2, \delta_2}(X_{2,F_2}, X_{1,F_1})$ — это $\text{Hom}(X_{2,F_2}, X_{1,F_1})$, снабжённое множественно-открытой (или компактно-открытой соответственно) топологией, обозначаемой $\tau(F_2, F_1, X_2, X_1, \alpha_2, \delta_2)$. Аналогично $\text{Hom}_F^{\alpha_2, \delta_2}(X_{2,F}, X_{1,F})$ — это $\text{Hom}_F(X_{2,F}, X_{1,F})$, снабжённое множественно-открытой (или компактно-открытой соответственно) топологией

$\tau(F, X_2, X_1, \alpha_2, \delta_2)$. Если некоторые данные уже заданы, то их можно опустить из обозначений для краткости.

Пусть топологическое кольцо F задано. Далее рассматриваются канонические микрорасслоения, если не будет оговорено что-либо иное. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X_F, i, p)$ — микрорасслоение. Пусть α — семейство подмножеств в $\mathcal{B}$ (в частности, они могут быть подмикрорасслоениями над тем же кольцом F). Непустое семейство δ непустых подмножеств в $\mathcal{B}$ называется α - M -сетью на $\mathcal{B}$, если для всякого $C \in \alpha$ и открытого подмножества $\mathcal{U}$ в $\mathcal{B}$ существует $Q \in \delta$, такое что $C \subset Q \subset \mathcal{U}$.

M -сеть на $\mathcal{B}$ называется α_0 - M -сетью на $\mathcal{B}$, если она удовлетворяет следующему условию: $C \in \alpha_0$ тогда и только тогда, когда найдётся $q \in \mathcal{B}$, $C = \{q\}$ (см. определение 1). α - M -сеть называется γ -замкнутой (или γ -компактной), если всякий её член является γ -замкнутым (или γ -компактным соответственно).

Если $C_k \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{A}_k \subset {}_M\mathcal{B}$, $D_j \subset \mathcal{R}$, $\mathcal{B}_j \subset {}_M\mathcal{R}$, где $\mathcal{A}_k, \mathcal{B}, \mathcal{B}_j, \mathcal{R}$ — микрорасслоения над одним и тем же топологическим кольцом F , $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X_F, i, p)$, $\mathcal{R} = \mathcal{B}(A', E', F, X'_F, i', p')$, $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}(A'_j, E'_j, F, X'_{j,F}, i'_j, p'_j)$, то для $\mathcal{A}_k = \mathcal{B}(A_k, E_k, F, Y_k, i, p)$ мы положим

$$(16.4) \quad \mathcal{A}_1 \uplus \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}(A_1 \cup A_2, E_1 \uplus E_2, F, Y, i, p), \text{ where } A_k \subset A, E_k \subset E, Y_k \subset X \\ \text{для любых } k, Y = \text{cl}_X(Y_1 + Y_2), Y_k = Y_{k,F}, Y = Y_F,$$

$$(16.5) \quad E_1 \uplus E_2 = \bigcup \{h_V^{-1}((U_1 \cup U_2) \times Y) : b \in A_1 \cup A_2, U_j \subset A_j, U_j \subset U, \\ i(b) \in V, j \in \{1, 2\}\}, \text{ где выполнены условия (I2.1)–(I2.4). В част-} \\ \text{ности, } H(L_y \mathcal{B}(\{b\}, \{e\}, F, \{0\}, i, p), \mathcal{B}_j) \text{ можно также кратко обозначить} \\ H((b, y), \mathcal{B}_j).$$

Лемма 17. Пусть $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{B}_j$ будут такими же, как в определении 16. Тогда

$$(17.1) \quad H(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = H(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_1) \cap H(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_2);$$

$$(17.2) \quad H_F(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = H_F(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_1) \cap H_F(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_2).$$

Более того, если X' полно как топологическая коммутативная группа, то

$$(17.3) \quad H(\mathcal{A}_1 \uplus \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_j) = H(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_j) \cap H(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_j) \text{ и}$$

$$(17.4) \quad H_F(\mathcal{A}_1 \uplus \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_j) = H_F(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_j) \cap H_F(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_j).$$

Доказательство. Мы рассмотрим $\mathcal{R} = \mathcal{B}(A', E', F, X', i', p')$ и $Y'_{1,2} = X'_{1,F} \cap X'_{2,F}$, где $X'_{j,F} \subset X'_F$ и $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}(A'_j, E'_j, F, X'_{j,F}, i'_j, p'_j) \subset {}_M\mathcal{R}$ для любого j , следовательно, $FY'_{1,2} \subset Y'_{1,2}$, и $Y'_{1,2}$ является коммутативной группой, следовательно, $Y'_{1,2}$ является топологическим левым F -модулем. Пусть $A'_{1,2} = A'_1 \cap A'_2$ и $E'_{1,2} = E'_1 \cap E'_2$. Тогда $p'_j \circ i'_j|_{A'_{1,2}} = \text{id}|_{A'_{1,2}}$, $i'_j|_{A'_j} = i'_j|_{A'_j}$, $p'_j|_{E'_j} = p'_j|_{E'_j}$ для любого $j \in \{1, 2\}$, следовательно, $p'_1|_{E'_{1,2}} = p'_2|_{E'_{1,2}}$, $i'_1|_{A'_{1,2}} = i'_2|_{A'_{1,2}}$. Если $b_j \in A'_j$, $i'_j(b'_j) = e'_j \in E'_j$, $e'_j \in V'_j$, $h_{V'_j}: V'_j \rightarrow U'_j \times X'_j$ — это гомеоморфизм, где U'_j открыто в A'_j для любого j , то $h_{V'_j}|_{V'_j} = h_{V'_j}$, $V'_j \subset V'$, $V'_{1,2} = V'_1 \cap V'_2$, $h_{V'}|_{V'_{1,2}}: V'_{1,2} \rightarrow U'_{1,2} \times Y'_{1,2}$ — гомеоморфизм и выполнены условия (I2.1)–(I2.4), так как $(U'_1 \times X'_1) \cap (U'_2 \times X'_2) = U'_{1,2} \times Y'_{1,2}$, где $U'_{1,2} = U'_1 \cap U'_2$. Поэтому $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(A'_{1,2}, E'_{1,2}, F, Y'_{1,2}, i', p') \subset {}_M\mathcal{R} = \mathcal{B}(A', E', F, X', i', p')$. Отсюда

вытекает, что $H(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = H(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_1) \cap H(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_2)$ и $H_F(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = H_F(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_1) \cap H_F(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_2)$.

Выполняется включение $\mathcal{A}_1 \uplus \mathcal{A}_2 \subset {}_M\mathcal{B}$. Из [20, определение 26, теорема 27] следует, что $f(\mathcal{A}_k) \subset {}_M\mathcal{B}_j$. Если $\pi \in \text{Hom}(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_j)$ для любого $k \in \{1, 2\}$, то $\pi_1^1(A_1 \cup A_2) = \pi_1^1(A_1) \cup \pi_1^1(A_2) \subset A'_j$, где $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}(A'_j, E'_j, F, X'_j, i'_j, p'_j) \subset {}_M\mathcal{R}$. С другой стороны, $\pi_3^3(F) \subset F$, $\pi_4^4(Y_1) \subset X'$ и $\pi_4^4(Y_2) \subset X'$, следовательно, имеется непрерывное продолжение $\pi_4^4(Y) \subset X'$ [9, 11], так как $\pi_4^4 \in \text{Hom}(Y_j, X')$ для любого $j \in \{1, 2\}$, и X' полна как топологическая коммутативная группа, где $Y = \text{cl}_X(X_1 + X_2)$. Поэтому $\pi_2^2(E_1 \uplus E_2) \subset E'$, следовательно, $\pi(\mathcal{A}_1 \uplus \mathcal{A}_2) \subset \mathcal{R}$. Таким образом, из $\pi \in H(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_j) \cap H(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_j)$ вытекает, что $\pi \in H(\mathcal{A}_1 \uplus \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_j)$.

Обратно, если $\pi \in H(\mathcal{A}_1 \uplus \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_j)$, то $\pi|_{\mathcal{A}_k} \in H(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_j)$ для любого $k \in \{1, 2\}$, так как $\mathcal{A}_k \subset {}_M\mathcal{A}_1 \uplus \mathcal{A}_2$. Таким образом, $H(\mathcal{A}_1 \uplus \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_j) = H(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_j) \cap H(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_j)$, и аналогично $H_F(\mathcal{A}_1 \uplus \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_j) = H_F(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_j) \cap H_F(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_j)$. $\square$

Определение 18. Топология на $\text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ называется M -множественно- (β, γ) -открытой топологией, если существует β -замкнутая M -сеть α на $\mathcal{B}$, такая что $\{H(C_k, D_j) : C_k \in \alpha, D_j \text{ является } \gamma\text{-открытым подмножеством в } \mathcal{R}\}$ — предбаза топологии $\tau_{\alpha, \beta, \gamma}$. Тогда $\text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$, снабжённая топологией $\tau_{\alpha, \beta, \gamma}$, будет обозначаться $\text{Hom}_{\alpha, \beta, \gamma}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$. Если $\beta = (1, 2, 3, 4)$ или $\gamma = (1, 2, 3, 4)$, то они могут быть опущены для сокращения обозначений.

Замечание 19. Если $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X_F, i, p)$ и $\mathcal{R} = \mathcal{B}(A', E', F', X'_{F'}, i', p')$ являются микрорасслоениями, $B \subset \mathcal{B}$, $C \subset \mathcal{B}$, $D \subset \mathcal{R}$, $G \subset \mathcal{R}$, то из определения 3 следует, что

$$(19.1) \quad H_{\mathcal{B}, \mathcal{R}}(C, D \cap G) = H_{\mathcal{B}, \mathcal{R}}(C, D) \cap H_{\mathcal{B}, \mathcal{R}}(C, G),$$

$$(19.2) \quad H_{\mathcal{B}, \mathcal{R}}(B \cup C, D) = H_{\mathcal{B}, \mathcal{R}}(B, D) \cap H_{\mathcal{B}, \mathcal{R}}(C, D).$$

Более того, если для микрорасслоений $\mathcal{B}$ и $\mathcal{R}$ кольца одинаковы, $F = F'$, то

$$(19.3) \quad H_{F; \mathcal{B}, \mathcal{R}}(C, D \cap G) = H_{F; \mathcal{B}, \mathcal{R}}(C, D) \cap H_{F; \mathcal{B}, \mathcal{R}}(C, G),$$

$$(19.4) \quad H_{F; \mathcal{B}, \mathcal{R}}(B \cup C, D) = H_{F; \mathcal{B}, \mathcal{R}}(B, D) \cap H_{F; \mathcal{B}, \mathcal{R}}(C, D).$$

Следствие 20. Пусть $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(A_1, E_1, F_1, X_1, i_1, p_1)$ — микрорасслоение, где $X_1 = X_{1, F_1}$. Пусть F_2 — топологическое кольцо, $X_2 = X_{2, F_2}$ — топологический левый F_2 -модуль и $f = (\pi_{3,2}^{3,1}, \pi_{4,2}^{4,1}) : X_1 \rightarrow X_2$ — инъективный гомоморфизм, такой что $\pi_{3,2}^{3,1} : F_1 \rightarrow F_2$ — гомоморфизм колец, $\pi_{4,2}^{4,1} : X_1 \rightarrow X_2$, $\pi_{4,2}^{4,1}(u_1 x_1 + v_1 y_1) = \pi_{3,2}^{3,1}(u_1) \pi_{4,2}^{4,1}(x_1) + \pi_{3,2}^{3,1}(v_1) \pi_{4,2}^{4,1}(y_1)$ для всяких u_1, v_1 в F_1 , x_1, y_1 в X_1 . Тогда существуют микрорасслоение $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(A_2, E_2, F_2, X_2, i_2, p_2)$ и инъективный гомоморфизм $\pi_2^1 : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$, где $A_2 = A_1$.

Доказательство. В силу [20, теорема 32] существуют микрорасслоение $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(A_2, E_2, F_2, X_2, i_2, p_2)$ и гомоморфизм $\pi_2^1 : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$, удовлетворяющие условиям (2.1)–(2.5), такие что $\pi_{1,2}^{1,1} = \text{id}_{A_1}$, где $A_2 = A_1$. Очевидно, что если f инъективен, то π_2^1 инъективен, так как $\pi_{1,2}^{1,1} = \text{id}_{A_1}$, и $\pi_{2,2}^{2,1}$ инъективен согласно [20, (32.2)–(32.5)] и (2.3), (2.4). $\square$

Определение 21. Пусть X — топологическое пространство, пусть F — топологическое кольцо, $r \in F$, $r \neq 0$. Если для любого $q \neq s$ в X существует непрерывное отображение $\mu: F \rightarrow X$, такое что $\mu(0) = s$, $\mu(r) = q$, то X называется (F, r) -линейно связным.

Топологический левый F -модуль $X = X_F$ называется вполне (F, r) -регулярным тогда и только тогда, когда для любого $x \neq 0$ в X существует $\psi \in \text{Hom}_F(X, X)$, такое что $\psi(x) = r$, $X = (Fx) + \text{Ker}(\psi)$, $(Fx) \cap \text{Ker}(\psi) = \{0\}$, где $r \neq 0$, $r \in F$, r фиксировано, F и X нетривиальны. Микрорасслоение $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$ называется вполне (F, r) -регулярным тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ есть T_1 и для любого замкнутого подмножества G в $\mathcal{B}$ и для любого $q \in \mathcal{B}$, $q \notin G$, существует $\varphi_{G,q} = \varphi \in \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$, такое что $\varphi(G) = \{(0, 0, 0, 0)\}$, $\varphi(q) = (0, r, q_3, r)$, и X вполне (F, r) -регулярен, где $\mathcal{F} = \mathcal{B}(0, F, F, F, i_F, p_F)$ с $i_F(v) = v$ и $p_F(v) = v$ для любого $v \in F$, где $r \neq 0$, $r \in F$, $0 \in F$, r фиксировано.

Микрорасслоение $\mathcal{R}$ называется $(\mathcal{F}, r)$ -линейно связным, если для любых $q \neq s$ с $s_3 = 0$ и $s_4 = 0$ в $\mathcal{R}$ существует $\mu_{q,s} = \mu \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{R})$, такой что $\mu(0, 0, 0, 0) = s$ и $\mu(0, r, q_3, r) = q$, где $r \neq 0$, $r \in F$, r фиксировано, $s = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ (см. замечание 11). Если F унитарно и $r = 1$, то кратко также будем писать « F -линейно связное» и «вполне F -регулярное» вместо « (F, r) -линейно связное» и «вполне (F, r) -регулярное» соответственно.

Теорема 22. Микрорасслоение $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$ вполне (F, r) -регулярно тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(A, A, F, 0, i_2, p_2)$ и X вполне (F, r) -регулярны, где $i_2 = \text{id}_A$, $p_2 = \text{id}_A$, $X = X_F$.

Доказательство. Из условий данной теоремы следует, что $\mathcal{B}_2$ изоморфно подмикрорасслоению $\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}(A, i(A), F, 0, i, p|_{i(A)})$ в $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_3 \subset_M \mathcal{B}_1$, существует изоморфизм $\pi_3^2: \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_3$, так как $p \circ i = \text{id}_A: A \rightarrow A$. Для любого $b \in A$ существуют открытая окрестность U_b точки b в A и открытая окрестность V_b точки $i(b)$ в E и гомеоморфизм $h_{V_b}: V_b \rightarrow U_b \times X$, где $X = X_F$, согласно (I2.3). Поэтому $V_b \setminus \{i(b)\}$ открыто в E , так как $\mathcal{B}_1$ — T_1 -микрорасслоение. Следовательно, $\mathcal{B}_3$ замкнуто в $\mathcal{B}_1$, причём $i_3 = i$, $p_3 = p|_{i(A)}$, $E_3 = i(A)$.

Если $\mathcal{B}_1$ вполне (F, r) -регулярно, то из определения 21 вытекает, что $\mathcal{B}_3$ вполне (F, r) -регулярно, следовательно, $\mathcal{B}_2$ вполне (F, r) -регулярно.

Обратно, пусть $\mathcal{B}_2$ и X вполне (F, r) -регулярны, $\mathcal{G} = \mathcal{B}(A_4, E_4, F, Y_F, i_4, p_4)$ является замкнутым подмикрорасслоением в $\mathcal{B}_1$, $q \in \mathcal{B}_1$, $q \notin \mathcal{G}$, где $i_4 = i|_{A_4}$, $p = p|_{E_4}$, $A_4 \hookrightarrow A$, $E_4 \hookrightarrow E$, $Y_F \hookrightarrow X_F$.

В силу [20, теорема 32] и следствия 20 существует непрерывный сюръективный гомоморфизм $\pi_3^1: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_3$, индуцированный $f = (\text{id}_F, \pi_{4,3}^{4,1})$, причём $\pi_{1,3}^{1,1} = \text{id}_A$, где $\pi_{4,3}^{4,1}(x) = 0$ для любого $x \in X$. Если $A_4 \neq A$, $q_1 \notin A_4$, где $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, то из вполне (F, r) -регулярности $\mathcal{B}_3$, используя π_3^1 , мы выводим, что существует $\varphi \in \text{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{F})$, такой что $\varphi(\mathcal{G}) = \{(0, 0, 0, 0)\}$ и $\varphi(q) = (0, r, q_3, r)$. Если $q_1 \in A_4$, то существует гомеоморфизм $h_{V_{q_1}}(q_2) = q_4$, такой что q_4 отлично от нуля, $q_4 \in X \setminus Y$ согласно (I2.3), (I2.4), так как $q \notin \mathcal{G}$.

По определению 21 существует $\psi \in \text{Hom}_F(X, X)$, такой что $\psi(q_4) \neq 0$, $X = (Fq_4) + \text{Ker}(\psi)$ и $(Fq_4) \cap \text{Ker}(\psi) = \{0\}$. Отметим, что $(q_1, i(q_1), q_3, 0) \in \mathcal{B}_3$. Из $f = (\text{id}_F, \psi)$, [20, теорема 32], замечания 11 и следствия 20 вытекает, что существует $\varphi \in \text{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{F})$, такой что $\varphi(\mathcal{G}) = \{(0, 0, 0, 0)\}$ и $\varphi(q) = (0, r, q_3, r)$. $\square$

Теорема 23. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X_F, i, p)$ и $\mathcal{R} = \mathcal{B}(A', E', F, Y_F, i', p')$ — вполне (F, r) -регулярные микрорасслоения, и пусть $\mathcal{R}$ также (F, r) -линейно связно. Пусть α и δ — замкнутые M -сети на $\mathcal{B}$. Тогда $\tau_\alpha \subset \tau_\delta$ для M -множественно-открытых топологий на $\text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ тогда и только тогда, когда для любой $C \in \alpha$ существуют $C_1, \dots, C_n$ в δ , $n \in \mathbb{N}$, такие что $C \subset C_1 \cup \dots \cup C_n$.

Доказательство. Допустим, что для любого $C \in \alpha$ существуют $C_1, \dots, C_n$, $n \in \mathbb{N}$, в δ , такие что $C \subset C_1 \cup \dots \cup C_n$. Тогда из определений 1, 16, 18 и замечаний 11, 19 следует, что $\tau_\alpha \subset \tau_\delta$. Обратно, допустим, что $\tau_\alpha \subset \tau_\delta$. Согласно условиям данной теоремы микрорасслоение $\mathcal{R}$ является (F, r) -линейно связным. Пусть $q \in \mathcal{R}$, $s \in \mathcal{R}$ с $s_3 = 0$, $s_4 = 0$, $q \neq s$, $(q_1, q_2) \neq (s_1, s_2)$. Тогда существует $\mu = \mu_{q,s} \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{R})$, такой что $s = \mu(0, 0, 0, 0)$ и $q = \mu(0, r, q_3, r)$ согласно определению 21. Возьмём $C \in \alpha$ и открытое подмикрорасслоение $\mathcal{G} = \mathcal{B}(A_0, E_0, F, X_{0,F}, i_0, p_0)$ в $\mathcal{R}$ такими, что $s \in \mathcal{G}$ и $q' = (q_1, q_2, q'_3, q_4) \notin \mathcal{G}$ для любого $q'_3 \in F$, где $i_0 = i'|_{A_0}$, $p_0 = p'|_{E_0}$. Поэтому $\text{H}(C, \mathcal{G})$ является окрестностью для $\psi \in \text{Hom}_\delta(\mathcal{B}, \mathcal{R})$, такой что $\psi(\mathcal{B}) = (s_1, s_2, 0, 0)$ с $\psi_1^1(A) = \{s_1\}$, $\psi_2^2(E) = \{s_2\}$, $\psi_3^3(F) = \{0\}$, $\psi_4^4(X_F) = \{0\}$, где $s_1 \in A$, $s_2 \in E$, $i(s_1) = s_2$.

Из условия $\tau_\alpha \subset \tau_\delta$ следует, что существуют $C_1, \dots, C_n$ в δ , $n \in \mathbb{N}$, открытые подмножества $D_1, \dots, D_n$ в $\mathcal{R}$, такие что $P \subset \text{H}(C, \mathcal{G})$, $\psi \in P$, $P := \text{H}(C_1, D_1) \cap \dots \cap \text{H}(C_n, D_n)$. Допустим, что существует $g \in C$, $g \notin \mathcal{J}$, где $\mathcal{J} := C_1 \cup \dots \cup C_n$. Микрорасслоение $\mathcal{B}$ вполне (F, r) -регулярно, следовательно, существует $\varphi \in \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$, такой что $\varphi(\mathcal{J}) = \{(0, 0, 0, 0)\}$ и $\varphi(g) = (0, r, g_3, r)$. Тогда $\mu \circ \varphi \in P$, $\mu \circ \varphi \notin \text{H}(C, \mathcal{G})$ приводит к противоречию. Таким образом, $C \subset \mathcal{J}$. $\square$

Примеры 24.

1. Пусть $\mathcal{B}$ — T_1 -микрорасслоение, и пусть p — замкнутая M -сеть, состоящая из всех замкнутых подмножеств C в $\mathcal{B}$ вида $C = C_1 \cup \dots \cup C_n$, где $C_j \in \alpha_0$ для любого j , $n \in \mathbb{N}$, с $\beta = (1, 2, 3, 4)$ (см. определения 1, 18, замечания 2, 19). Тогда $\text{Hom}_{p,\beta,\gamma}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ снабжено топологией $\tau_{p,\beta,\gamma}$, которая естественно называется M -точечно γ -открытой топологией и обозначается $\tau_{p,\gamma}$. Для $\gamma = \{1, 2, 3, 4\}$ будем говорить о M -точечно-открытой топологии и использовать обозначения $\text{Hom}_p(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ и τ_p .
2. Если c — β -замкнутая M -сеть, состоящая из всех β -компактных подмножеств в $\mathcal{B}$, то $\tau_{\text{co},\beta,\gamma}$ — M - β -компактная γ -открытая топология на $\text{Hom}_{\text{co},\beta,\gamma}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ или, кратко, компактно-открытая топология для $\beta = \gamma = \{1, 2, 3, 4\}$.
3. Пусть $\mathcal{B}^\tau = \mathcal{B}(A, E, F, X_F, i, p)$ — микрорасслоение с топологиями τ_A на A , τ_E на E , τ_F на F , τ_X на X . Допустим, что ξ_A — топология на A , более сильная, чем τ_A , $\tau_A \subset \xi_A$. Тогда существует слабейшая топология ξ_E на

множестве E , такая что $\tau_E \subset \xi_E$, отображение $i: (A, \xi_A) \rightarrow (E, \xi_E)$ непрерывно, для любого $b \in A$ существует открытая окрестность $U_{b,\xi} \in \xi_A$ точки b и открытая окрестность $V_{b,\xi} \in \xi_E$ точки $i(b)$ и гомеоморфизм $h_{V_{b,\xi}}: V_{b,\xi} \rightarrow U_{b,\xi} \times X$, где $\xi_F = \tau_F$, $\xi_X = \tau_X$. Тогда существует микрорасслоение $\mathcal{B}^\xi$ с базовым пространством (A, ξ_A) , тотальным пространством (E, ξ_E) для топологического кольца (F, τ_F) и топологического левого F -модуля (X_F, τ_X) , такое что $\text{id} = \pi: \mathcal{B}^\xi \rightarrow \mathcal{B}^\tau$ — непрерывный гомоморфизм, где $\pi_1^1 = \text{id}_A$, $\pi_2^2 = \text{id}_E$, $\pi_3^3 = \text{id}_F$, $\pi_4^4 = \text{id}_X$.

4. Для микрорасслоений $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X_F, i, p)$ и $\mathcal{R} = \mathcal{B}(A', E', F, X'_F, i', p')$ допустим, что $\xi_A = d_A$ — это дискретная топология на A . Тогда $\text{Hom}(\mathcal{B}^d, \mathcal{R})$ содержится в $\Omega_{\mathcal{B}, \mathcal{R}} := A'^A \times E'^E \times \text{Hom}(F, F) \times \text{Hom}(X, X')$ и последнее пространство содержится в $\Upsilon_{\mathcal{B}, \mathcal{R}} := A'^A \times E'^E \times F^F \times X'^X$, где, как обычно, $S^\Lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$, $S_\lambda = S$ для любого $\lambda \in \Lambda$, S — топологическое пространство, S^Λ снабжено топологией тихоновского произведения. Поэтому топология тихоновского произведения на $\Upsilon_{\mathcal{B}, \mathcal{R}}$ индуцирует топологию на $\text{Hom}(\mathcal{B}^d, \mathcal{R})$, которая обозначена $t_y = t_y(\mathcal{B}, \mathcal{R})$.
5. Сильнейшая (т. е. наиболее тонкая топология) M -множественно- (β, γ) -открытая топология на $\text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ обозначена $\pi_{\beta, \gamma}$. Таким образом, $\tau_{\alpha, \beta, \gamma} \subset \pi_{\beta, \gamma}$ (см. также определение 18).

Следствие 25. Пусть $\mathcal{B}$ и $\mathcal{R}$ — T_1 -микрорасслоения. Тогда $\text{Hom}_p(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ всюду плотно в $\text{Hom}_{t_y}(\mathcal{B}^d, \mathcal{R})$.

Доказательство. Утверждение следует из примеров 24 3 и 4 и определения 18, так как $C_p(A, A')$ плотно в A'^A , где $C_p(A, A')$ обозначает пространство всех непрерывных отображений из A в A' , снабжённое точечно-открытой топологией. $\square$

Следствие 26. Допустим, что выполнены условия теоремы 23 и α является замкнутой M -сетью на $\mathcal{B}$. Тогда $\tau_{p, \gamma} \subset \tau_{\alpha, \gamma}$.

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 23 и примера 24 1. $\square$

Определение 27. Если α — β -замкнутая M -сеть на микрорасслоении $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X_F, i, p)$, такая что для любых $\mathcal{G} \in \alpha$, $\mathcal{H} \subset_M \mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$, β -замкнутых в $\mathcal{B}$, выполняется $\mathcal{H} \in \alpha$, то α называется наследственно β -замкнутой M -сетью (см. также определение 16, где $\mathcal{B}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ заданы над одним и тем же топологическом кольцом F).

Для микрорасслоения $\mathcal{R} = \mathcal{B}(A', E', F, X'_F, i', p')$ семейство η , состоящее из γ -открытых подмножеств, называется γ -открытой M -базой, если для любого γ -открытого подмножества $\mathcal{K}$ в $\mathcal{R}$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{R}$, существует семейство $\{\mathcal{A}_\lambda \in \eta: \lambda \in \Lambda\}$, где Λ — такое множество, что $\mathcal{K} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$. Семейство ζ , состоящее из γ -открытых подмножеств в $\mathcal{R}$, называется γ -открытой M -предбазой, если семейство $\{\mathcal{A}_1 \cap \dots \cap \mathcal{A}_n \neq \emptyset: n \in \mathbb{N}, \text{ для каждого } j \in \{1, \dots, n\} \mathcal{A}_j \in \zeta\}$ является γ -открытой M -базой для $\mathcal{R}$.

Теорема 28. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$ и $\mathcal{R} = \mathcal{B}(A', E', F, X', i', p')$ — T_2 -микрорасслоения, топологическое кольцо F коммутативно и ассоциативно, X и X' — это топологические левые F -модули. Тогда $(\text{Hom}_F(\mathcal{B}, \mathcal{R}), \tau_{\text{co}})$ — T_2 -микрорасслоение, $(\text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{R}), \tau_{\text{co}})$ — T_2 -топологическое пространство.

Доказательство. Отметим, что для T_2 -топологических пространств J и K топологическое пространство $\mathcal{C}(J, K)$ всех непрерывных отображений из J в K , снабжённое компактно-открытой топологией τ_{co} является T_2 -пространством (см. [13, § 44.I, замечание 1]). Поэтому $\text{Hom}_F(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ и $\text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ относительно топологии τ_{co} являются T_2 -топологическими пространствами.

Остаётся доказать, что $\text{Hom}_F(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ можно снабдить структурой микрорасслоения. Мы напомним, что для любых f, g в $\text{Hom}_F(X, X')$, x и y в X , a и b в F тождества

$$\begin{aligned} f(ax + by) &= af(x) + bf(y), & (f + g)(x) &= f(x) + g(x), & (bf)(x) &= b(f(x)), \\ (a + b)f(x) &= af(x) + bf(x), & (ab)f(x) &= a(bf(x)), \\ b(f(x)) &= bf(x), & af(bx) &= a(bf(x)) \end{aligned}$$

влекут, что $\text{Hom}_F(X, X')$ — левый F -модуль, так как X и X' — левые F -модули и F — коммутативное ассоциативное кольцо.

В силу [21, теорема 1.1.7] $(\mathcal{C}(X, X'), \tau_{\text{co}})$ имеет структуру аддитивной коммутативной топологической группы. Из включения $\text{Hom}_F(X, X') \subset \mathcal{C}(X, X')$ и доказательства выше следует, что $(\text{Hom}_F(X, X'), \tau_{\text{co}})$ также имеет структуру аддитивной коммутативной топологической группы.

Для топологического левого F -модуля X' умножение $F \times X' \rightarrow X'$ (совместно) непрерывно, причём для любой открытой окрестности U' для 0 в X' существуют открытая окрестность V' для 0 в X' и открытая окрестность S для 0 в F , такие что $SV' \subset U'$. Для базы $B_d(F)$ открытых окрестностей для d в F и $e \in F$ $B_d(F) + e$ — база открытых окрестностей для $d + e$ в F . Для базы $B_y(X')$ открытых окрестностей элемента y в X' и z в X' $B_y(X') + z$ — база открытых окрестностей для $y + z$ в X' . Отметим, что для любого $b_0 \in F$ и для любой открытой окрестности U'_1 нуля в X' существует открытая окрестность V'_{b_0} нуля в X' , такая что $b_0 V'_{b_0} \subset U'_1$. С другой стороны, для любого $y_0 \in X'$ и для любой открытой окрестности U'_2 нуля в X' существует открытая окрестность S_{y_0} нуля в F , такая что $S_{y_0} y_0 \subset U'_2$. Тогда

$$(28.1) \quad (b_0 + S_1)(y_0 + V'_1) = b_0 y_0 + S_1 V'_1 + b_0 V'_1 + S_1 y_0 \subset b_0 y_0 + U' + U'_1 + U'_2$$

для $S_1 = S \cap S_{y_0}$, $V_1 = V'_{b_0} \cap V'$. Пусть Q — открытая окрестность нуля в X' и W — компактное подмножество в F . Для любого $b \in W$ существует открытая окрестность J_b элемента b в F и открытая окрестность P_b нуля в X' , такие что $J_b P_b \subset Q$ согласно (28.1) с U' , U'_1 , U'_2 , такими что $U' + U'_1 + U'_2 \subset Q$, так как X' является топологическим левым F -модулем. Открытое покрытие $\{J_b : b \in W\}$ имеет конечное подпокрытие $\{J_{b_j} : j = 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{j=1}^n J_{b_j} \supset W$. Тогда

$P = \bigcap_{j=1}^n P_{b_j}$ — это открытая окрестность нуля в X' . Поэтому $\left(\bigcup_{j=1}^n J_{b_j}\right)P \subset Q$, следовательно, $WP \subset Q$.

Для любых f, g в $\text{Hom}_F(X, X')$, таких что $f - g \in H_4(B, P)$, существуют открытые в $(\text{Hom}_F(X, X'), \tau_{\text{co}})$ подмножества Ω_f, Ω_g , такие что $\Omega_f - \Omega_g \subset H_4(B, P)$, следовательно, $W(\Omega_f - \Omega_g) \subset H_4(B, WP) \subset H_4(B, Q)$, так как $(f - g)(WB) = W(f - g)(B)$ в силу левой F -линейности f и g . Отсюда вытекает, что $(\text{Hom}_F(X, X'), \tau_{\text{co}})$ является топологическим левым F -модулем. Сходно доказывается, что если Y — топологический левый F -модуль, то $(C(A, Y), \tau_{\text{co}})$ — топологический левый F -модуль, где $(b_1 y_1 + b_2 y_2)(a) = b_1 y_1(a) + b_2 y_2(a)$ для любых b_1, b_2 в F , y_1, y_2 в $C(A, Y)$, $a \in A$. В частности, можно взять $Y = (\text{Hom}_F(X, X'), \tau_{\text{co}})$.

Далее рассмотрим

$$\text{Hom}_F(E, E') := \{\pi_2^2: \pi = (\pi_1^1, \pi_2^2, \text{id}_F, \pi_4^4) \in \text{Hom}_F(\mathcal{B}, \mathcal{R})\}.$$

Для любого $f \in C(A, A')$ положим $\tilde{i}(f) = i' \circ f \circ p$, следовательно, $\tilde{i}(f) \in C(E, E')$. Для любого $g \in C(E, E')$ зададим $\tilde{p}(g) = p' \circ g \circ i$, тогда $\tilde{p}(g) \in C(A, A')$.

Если $f \in C(A, A')$ и $g = \tilde{i}(f)$, то $g \in C(E, E')$ как композиция $g = i' \circ f \circ p$ непрерывных отображений. Пусть C^2 компактно в E , V' открыто в E' и для них $g \in M(C^2, V') := \{t \in C(E, E'): t(C^2) \subset V'\}$. Тогда $p(C^2) = C^1$ компактно в A по [9, теорема 3.1.10]. Для U' , открытого в A' , такого что $V' \supset i'(U')$, выполнено включение $\tilde{i}(M(C^1, U')) \subset M(C^2, V')$, где $M(C^1, U') = \{s \in C(A, A'): s(C^1) \subset U'\}$, $f \in M(C^1, U')$, $\tilde{i}(f) = g$. В силу [9, предложение 1.4.1] отображение $\tilde{i}$ непрерывно из $(C(A, A'), \tau_{\text{co}})$ в $(C(E, E'), \tau_{\text{co}})$. Аналогично если $g \in C(E, E')$, $f = \tilde{p}(g)$, C^1 — компактное подмножество в A , U' — открытое подмножество в A' , V' — открытое подмножество в E' , такие что $U' \supset p'(V')$, $g \in M(C^2, V')$, $C^2 = i(C^1)$, то $\tilde{p}(M(C^2, V')) \subset M(C^1, U')$. Снова по [9, теорема 3.1.10, предложение 1.4.1] отображение $\tilde{p}$ непрерывное из $(C(E, E'), \tau_{\text{co}})$ в $(C(A, A'), \tau_{\text{co}})$.

Заметим, что $\tilde{p} \circ \tilde{i}(f) = p' \circ i' \circ f \circ p \circ i = f$ для любого $f \in C(A, A')$. Если $f_1 \neq f_2$ в $C(A, A')$, то $f_1 \circ p \neq f_2 \circ p$ в $C(E, A')$, и следовательно, $i' \circ f_1 \circ p \neq i' \circ f_2 \circ p$ в $C(E, E')$. Поэтому $\tilde{i}(f_1) \neq \tilde{i}(f_2)$.

Из условия (2.3) следует, что

$$(28.2) \quad \pi_1^1 = p' \circ \pi_2^2 \circ i$$

для любого $\pi \in \text{Hom}_F(\mathcal{B}, \mathcal{R})$, так как $p' \circ i' = \text{id}_{A'}$. Из условия (2.4) вытекает, что

$$(28.3) \quad h' \circ \pi_2^2 \circ h^{-1}(a, ux + vy) = uh' \circ \pi_2^2 \circ h^{-1}(a, x) + vh' \circ \pi_2^2 \circ h^{-1}(a, y)$$

для любых u и v в F , x и y в X , $a \in A$, так как $\pi_3^3 = \text{id}_F$ в рассматриваемом случае, где $h' = h'_{V'}$ для $\mathcal{R}$, $h = h_V$ для $\mathcal{B}$. Из условия (2.5) вытекает, что $\hat{\pi}'_2 \circ h' \circ \pi_2^2 = \pi_4^4 \circ \hat{\pi}_2 \circ h$, где $\hat{\pi}_2: U \times X \rightarrow X$, $\hat{\pi}'_2: U' \times X' \rightarrow X'$ по (2.4), следовательно,

$$(28.4) \quad \hat{\pi}'_2 \circ h' \circ \pi_2^2 \circ h^{-1} = \pi_4^4 \circ \hat{\pi}_2,$$

где $\pi_4^4(ux + vy) = u\pi_4^4(x) + v\pi_4^4(y)$ для любых x и y в X , u и v в F , $\hat{\pi}_2(d, x) = x$ для всяких $d \in U$ и $x \in X$.

Поскольку $\mathcal{B}$ и $\mathcal{R}$ являются T_2 , то $X \setminus \{0\}$ открыто в X , $X' \setminus \{0\}$ открыто в X' . С помощью локальных гомеоморфизмов $h_V: V \rightarrow U \times X$ и $h'_{V'}: V' \rightarrow U' \times X'$ для $\mathcal{B}$ и $\mathcal{R}$ соответственно, из (I2.2), (I2.3) следует, что $i(A)$ замкнуто в E , $i'(A')$ замкнуто в E' .

Пусть $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(A, E_1, F, X', i_1, p_1) - T_2$ -микрорасслоением. Из (28.2)–(28.4) вытекает, что всякая $g \in \mathcal{C}(A, A')$ индуцирует $\pi \in \text{Hom}_F(\mathcal{B}_1, \mathcal{R})$, такой что $\pi_1^1 = g$, $\pi_3^3 = \text{id}_F$, $\pi_4^4 = \text{id}_{X'}$, $\pi = (\pi_1^1, \pi_2^2, \pi_3^3, \pi_4^4)$, где $\text{id}_{X'}(y) = y$ для всякого $y \in X'$, так как $\{V_{1, i_1(b)}: b \in A\}$ — открытое покрытие для E_1 , $\{V'_{i'(b')}: b' \in A'\}$ — открытое покрытие для E' , где $h_{1, V_{1, i_1(b)}}: V_{1, i_1(b)} \rightarrow U_b \times X'$ — гомеоморфизм для $\mathcal{B}_1$, U_b — открытая окрестность точки b в A , $V_{1, i_1(b)}$ — открытая окрестность точки $i_1(b)$ в E_1 (см. условие (I2.3)). Отсюда и из доказательства выше вытекает, что существует отображение $\zeta: \mathcal{C}(A, A') \rightarrow \text{Hom}_F(\mathcal{B}_1, \mathcal{R})$, такое что $\zeta(g) = (g, \pi_2^2, \text{id}_F, \text{id}_{X'})$. Условия (2.1)–(2.5) влекут, что если $\pi = (\pi_1^1, \pi_2^2, \text{id}_F, \pi_4^4) \in \text{Hom}_F(\mathcal{B}, \mathcal{R})$, то $\pi_4^4 \in \text{Hom}_F(X, X')$. С использованием ζ , композиции гомоморфизмов, [20, теорема 32] и следствия 20 (с $G = F$ и $X_G = X'$, $X_F = X$) мы выводим, что

$$(28.5) \quad \text{Hom}_F(X, X') = \{(\text{id}_F, \pi_4^4): \pi = (\pi_1^1, \pi_2^2, \text{id}_F, \pi_4^4) \in \text{Hom}_F(\mathcal{B}, \mathcal{R})\}.$$

Для любого $q = (q^1, q^2, q^3, q^4) \in \mathcal{B}$ и $s = (s^1, s^2, s^3, s^4) \in \mathcal{R}$ согласно условиям (I2.2)–(I2.4)

$$(28.6) \quad p \circ i(q^1) = q^1, \quad p' \circ i'(s^1) = s^1,$$

$$(28.7) \quad \iota_0(q^1) = (q^1, 0), \quad \iota'_0(s^1) = (s^1, 0),$$

$$(28.8) \quad \hat{\pi}_1(q^1, x) = q^1, \quad \hat{\pi}_2(q^1, x) = x \text{ для любого } x \in X, \quad \hat{\pi}_1 \circ h_{V_{i(q^1)}}(q^2) = q^1,$$

$$\hat{\pi}_2 \circ h_{V_{i(q^1)}}(q^2) = q^4, \quad \hat{\pi}'_1(s^1, y) = s^1, \quad \hat{\pi}'_2(s^1, y) = y \text{ для любого } y \in X',$$

$$\hat{\pi}'_1 \circ h'_{V'_{i'(s^1)}}(s^2) = s^1, \quad \hat{\pi}'_2 \circ h'_{V'_{i'(s^1)}}(s^2) = s^4,$$

где $\hat{\pi}_1$, $\hat{\pi}_2$, ι_0 , $h_{V_{i(q^1)}}$ соответствует $\mathcal{B}$, $\hat{\pi}'_1$, $\hat{\pi}'_2$, ι'_0 , $h'_{V'_{i'(s^1)}}$ соответствует $\mathcal{R}$, где $h_{V_{i(q^1)}}: V_{i(q^1)} \rightarrow U_{q^1} \times X$, $h'_{V'_{i'(s^1)}}: V'_{i'(s^1)} \rightarrow U'_{s^1} \times X'$ являются гомеоморфизмами, $V_{i(q^1)}$ — открытая окрестность точки $i(q^1)$ в E , U_{q^1} — открытая окрестность для q^1 в A , аналогично $V'_{i'(s^1)}$ — открытая окрестность точки $i'(s^1)$ в E' , U'_{s^1} — открытая окрестность точки s^1 в A' . Поэтому для любых $B \subset \mathcal{B}$, $D \subset \mathcal{R}$, $g \in \mathcal{H}(B, D)$ из (28.4) следует, что $\hat{\pi}'_2 \circ h'_{V'} \circ g_2^2(B^2 \cap V) = g_4^4 \circ \hat{\pi}_2 \circ h_V(B^2 \cap V) \subset D^4$, так как $\hat{\pi}_2 \circ h_V(B^2 \cap V) \subset B^4$, $\hat{\pi}'_2 \circ h'_{V'}(D^2 \cap V') \subset D^4$. Отметим также, что $\hat{\pi}_1 \circ h_V(B^2 \cap V) = B^1 \cap U$, $\hat{\pi}'_1 \circ h'_{V'}(D^2 \cap V') = D^1 \cap U'$ по (28.6)–(28.8), так как $i(U) \subset V$ и $i'(U') \subset V'$. В силу [9, теоремы 3.4.1, 3.4.7] и (28.3)–(28.5) выше существует изоморфизм

$$\xi_{U, U'}: (\text{Hom}_F(U \times X, U' \times X'), \tau_{\text{co}}) \rightarrow (\Upsilon_{U, U'}, \tau_{\text{co}})$$

с

$$\begin{aligned} \Upsilon_{U, U'} = \{f = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}(U, U' \times \text{Hom}_F(X, X')): \\ f_1 \in \mathcal{C}(U, U'), \quad f_2 \in \mathcal{C}(U, \text{Hom}_F(X, X'))\}, \end{aligned}$$

такой что $\Upsilon_{U,U'} \subset C(U, U') \times C(U, \text{Hom}_F(X, X'))$ для любых U , открытого в A , и U' , открытого в A' . Для B , компактного в $\mathcal{B}$, и D , открытого в $\mathcal{R}$, мы положим

$$\tilde{V} = \left\{ \pi_2^2: \pi_2^2 = \nabla_{b \in B^1, b' \in D^1} (h'_{V'_{i'(b')}})^{-1} \circ g_2^2 \circ h_{V_{i(b)}} \Big|_{V_{i(b)} \cap ((g_2^2)^{-1}(U'_{b'} \times X'))}, \right. \\ \left. g_2^2 \in \xi_{A,A'}^{-1}(\Xi(B^1, D^1)) \right\}$$

с

$$\Xi(B^1, D^1) = \{f = (f_1, f_2) \in \Upsilon_{A,A'}: f_1 \in M(B^1, D^1), f_2 \in C(A, \text{Hom}_F(X, X'))\},$$

где ∇ обозначает комбинацию отображений (см. [9, предложение 2.1.1]), так как

$$(h'_{V'_{i'(b')}})^{-1} \circ g_2^2 \circ h_{V_{i(b)}} \Big|_P = (h'_{V'_{i'(b'_1)}})^{-1} \circ g_2^2 \circ h_{V_{i(b_1)}} \Big|_P$$

с

$$P = P_{b,b',b_1,b'_1}(g_2^2) = V_{i(b)} \cap ((g_2^2)^{-1}(U'_{b'} \times X')) \cap V_{i(b_1)} \cap ((g_2^2)^{-1}(U'_{b'_1} \times X'))$$

для любых b и b_1 в A , b' и b'_1 в A' , таких что $P \neq \emptyset$. Поэтому для $\pi \in \mathbf{H}_{F,\mathcal{B},\mathcal{R}}(B, D)$ мы получаем, что $\pi_1^1 \in M(B^1, D^1) =: \tilde{U}$, $\tilde{i}(\pi_1^1) = \pi_2^2 \in \tilde{V}$ и существует гомеоморфизм $\tilde{h}_{\tilde{V}}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{U} \times C(A, \text{Hom}_F(X, X'))$. Тогда мы положим $\tilde{\pi}_1(\tilde{d}, \tilde{x}) = \tilde{d}$, $\tilde{\pi}_2(\tilde{d}, \tilde{x}) = \tilde{x}$, $\tilde{i}_0(\tilde{d}) = (\tilde{d}, 0)$, $\tilde{i}(\tilde{d}) = \tilde{h}_{\tilde{V}}^{-1}(\tilde{d}, 0)$ для всяких $\tilde{d} \in M(B^1, D^1)$ и $\tilde{x} \in C(A, \text{Hom}_F(X, X'))$. Поэтому $\tilde{\pi}_1 \circ \tilde{i}_0|_{\tilde{U}} = \tilde{p}|_{\tilde{U}} \circ \tilde{i}|_{\tilde{U}}$. Таким образом, $(\text{Hom}_F(\mathcal{B}, \mathcal{R}), \tau_{\text{co}})$ изоморфно микрорасслоению $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A_1, E_1, F, X_1, \tilde{i}, \tilde{p})$, где $A_1 = C(A, A')$, $E_1 = \text{Hom}_F(E, E')$, $X_1 = C(A, \text{Hom}_F(X, X'))$ в компактно-открытой топологии на них. $\square$

Определение 29. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$ и $\mathcal{R} = \mathcal{B}(A', E', F', i', p')$ — микрорасслоения и $P \subset \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$, $P = \{\pi_\lambda \in \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{R}): \lambda \in \Lambda\}$, где Λ — множество. Пусть $\mu_P \in \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$ с $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(A_1, E_1, F_1, X_1, i_1, p_1)$ будет задано по формуле

$$\mu_P((b, e, f, x)) = \{(\pi_{1,\lambda}^1(b), \pi_{2,\lambda}^2(e), \pi_{3,\lambda}^3(f), \pi_{4,\lambda}^4(x)): \lambda \in \Lambda\}$$

для любого $(b, e, f, x) \in \mathcal{B}$, где $A_1 = A'^\Lambda$, $E_1 = E'^\Lambda$, $F_1 = F'^\Lambda$, $X_1 = X'^\Lambda$, где Y^Λ снабжено топологией тихоновского произведения для пространства Y . Говорят, что P отделяет элементы в $\mathcal{B}$ от замкнутых множеств (или подмикрорасслоений), если для любого замкнутого подмножества C (или подмикрорасслоения) в $\mathcal{B}$ и $q \in \mathcal{B} \setminus C$ существует $\pi_\lambda \in P$, такое что $\pi_\lambda(q) \notin \text{cl}_{\mathcal{R}} \pi_\lambda(C)$, где $\text{cl}_{\mathcal{R}} \pi_\lambda(C)$ обозначает замыкание для $\pi_\lambda(C)$ в $\mathcal{R}$. Тогда P отделяет элементы в $\mathcal{B}$, если для любых $q \neq s$ в $\mathcal{B}$ существует $\pi_\lambda \in P$, такое что $\pi_\lambda(q) \neq \pi_\lambda(s)$.

Теорема 30. Допустим, что $P \subset \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{R}$ — T_1 -микрорасслоения, P отделяет элементы в $\mathcal{B}$ от замкнутых множеств (см. определение 29). Тогда $\mu_P: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_1$ — вложение.

Доказательство. В силу [20, теоремы 27, 29] $\mathcal{R}^\Lambda$ изоморфно $\mathcal{B}_1$, где $\mathcal{R}^\Lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{R}_\lambda$, $\mathcal{R}_\lambda = \mathcal{R}$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Возьмём открытое в $\mathcal{B}$ подмножество W

и $q \in W$. Тогда существует $\pi_\lambda \in P$, такое что $\pi_\lambda(q) \notin \text{cl}_{\mathcal{R}}\pi_\lambda(\mathcal{B} \setminus W)$ по условиям данной теоремы. Пусть $S = \mathcal{R} \setminus \text{cl}_{\mathcal{R}}\pi_\lambda(\mathcal{R} \setminus W)$, и пусть $T = \rho_\lambda^{-1}(S)$, где $\rho_\lambda \in \text{Hom}(\mathcal{R}, \mathcal{B}_1)$ индуцировано изоморфизмом $\mathcal{R}^\Lambda$ с $\mathcal{B}_1$ и гомоморфизмом проекции из $\mathcal{R}^\Lambda$ на $\mathcal{R}_\lambda$. Возьмём $s \in \mathcal{B}$, такое что $\mu_P(s) \in T$. Тогда $s \in \pi_\lambda^{-1}(S)$ и $\pi_\lambda^{-1}(S) = \mathcal{B} \setminus \pi_\lambda^{-1}(\text{cl}_{\mathcal{R}}\pi_\lambda(\mathcal{B} \setminus W)) \subset W$. Это влечёт, что $T \cap \mu_P(\mathcal{B})$ является открытой окрестностью для $\mu_P(q)$ и $T \cap \mu_P(\mathcal{B}) \subset \mu_P(W)$, следовательно, $\mu_P(W)$ открыто в $\mu_P(\mathcal{B})$. $\square$

Определение 31. Пусть $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ — микрорасслоения, для любого j $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}(A_j, E_j, F_j, X_j, i_j, p_j)$. Для любых $\pi_2^1 \in \text{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, $\pi_3^2 \in \text{Hom}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$ мы положим $\Phi(\pi_2^1, \pi_3^2) = \pi_3^2 \circ \pi_2^1$. Тогда $(\pi_3^2)_*(\pi_2^1) = \pi_3^2 \circ \pi_2^1$ и $(\pi_2^1)^*(\pi_3^2) = \pi_3^2 \circ \pi_2^1$ называются индуцированными гомоморфизмами, где $(\pi_3^2)_*: \text{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$ и $(\pi_2^1)^*: \text{Hom}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$.

Теорема 32. Пусть $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ — T_2 -микрорасслоения, α_1 — компактная M -сеть на $\mathcal{B}_1$ и α_2 — замкнутая M -сеть, образующая базу окрестностей на $\mathcal{B}_2$. Тогда отображение $\Phi: \text{Hom}_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times \text{Hom}_{\alpha_2}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) \rightarrow \text{Hom}_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$ непрерывно.

Доказательство. Выберем произвольное $C \in \alpha_1$ и D , открытое в $\mathcal{B}_3$, $\pi_2^1 \in \text{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, $\pi_3^2 \in \text{Hom}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$, такие что $\Phi(\pi_2^1, \pi_3^2) \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(C, D)$. Поэтому $\pi_3^2(\pi_2^1(C)) \subset D$ и $\pi_2^1(C) \subset (\pi_3^2)^{-1}(D)$. Отметим, что для любого $q \in \pi_2^1(C)$ существует $B_q \in \alpha_2$, такое что $q \in \text{Int}_{\mathcal{B}_2}(B_q)$ и $B_q \subset (\pi_3^2)^{-1}(D)$, где

$$\text{Int}_{\mathcal{B}_2}(B_q) = \{s \in \mathcal{B}_2: s \in (\text{Int}_{A_2}(B_q^1), \text{Int}_{E_2}(B_q^2), \text{Int}_{F_2}(B_q^3), \text{Int}_{X_2}(B_q^4))\},$$

$B_q = (B_q^1, B_q^2, B_q^3, B_q^4)$, $\text{Int}_P S$ обозначает внутренность для S в топологическом пространстве P при $S \subset P$ (см. определения 1, 18 и замечание 2). В силу [9, теорема 3.1.10] $\pi_2^1(C)$ компактно, следовательно, существуют $q_1, \dots, q_n$ в $\pi_2^1(C)$,

$n \in \mathbb{N}$, такие что $\pi_2^1(C) \subset \bigcup_{i=1}^n \text{Int}_{\mathcal{B}_2} B_{q_i} =: W$. Это влечёт, что $(\pi_2^1, \pi_3^2) \in \Upsilon$, где

$$\Upsilon := \mathcal{H}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(C, W) \times \left(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{H}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(B_{q_i}, D) \right) \text{ и } \Phi(\Upsilon) \subset \mathcal{H}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(C, D). \quad \square$$

Теорема 33. Пусть $\pi_3^2 \in \text{Hom}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$. Если α_1 является замкнутой M -сетью на $\mathcal{B}_1$, то $(\pi_3^2)_*: \text{Hom}_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \rightarrow \text{Hom}_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$ непрерывно.

Доказательство. Возьмём произвольное $C \in \alpha_1$ и D , открытое в $\mathcal{B}_3$, $C \subset \mathcal{B}_1$, $D \subset \mathcal{B}_3$. Тогда $\pi_2^1 \in (\pi_3^2)^{-1}(\mathcal{H}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(C, D))$ тогда и только тогда, когда $\pi_3^2(\pi_2^1(C)) \subset D$. Последнее включение эквивалентно тому, что $\pi_2^1 \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(C, (\pi_3^2)^{-1}(D))$. Таким образом, $(\pi_3^2)^{-1}(\mathcal{H}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(C, D)) = \mathcal{H}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(C, (\pi_3^2)^{-1}(D))$. $\square$

Теорема 34. Пусть $\pi_3^2 \in \text{Hom}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$ — вложение микрорасслоения $\mathcal{B}_2$ в микрорасслоение $\mathcal{B}_3$. Пусть α_1 — замкнутая M -сеть на $\mathcal{B}_1$. Тогда $(\pi_3^2)_*: \text{Hom}_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \rightarrow \text{Hom}_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$ — вложение.

Доказательство. Поскольку π_3^2 является инъекцией, то $(\pi_3^2)_*$ — инъекция, то есть $(\pi_3^2)_*(\xi) \neq (\pi_3^2)_*(\eta)$ для любого $\xi \neq \eta$ в $\text{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, так как существует $s \in \mathcal{B}_1$, такое что $\xi(s) \neq \eta(s)$. Возьмём произвольное $C \in \alpha_1$ и B , открытое

в $\mathcal{B}_2$, $C \subset \mathcal{B}_1$, $B \subset \mathcal{B}_2$, такие что $H_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(C, B)$ принадлежит предбазе топологии τ_{α_1} на $\text{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. Существует D , открытое в $\mathcal{B}_3$, $D \subset \mathcal{B}_3$, такое что $D \cap \pi_3^2(\mathcal{B}_2) = \pi_3^2(B)$, так как π_3^2 — вложение микрорасслоения $\mathcal{B}_2$ в микрорасслоение $\mathcal{B}_3$. Поэтому $(\pi_3^2)^{-1}(H_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(C, D)) = H_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(C, (\pi_3^2)^{-1}(D)) = H_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(C, B)$, следовательно, $(\pi_3^2)_*(H_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(C, B)) = H_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(C, D) \cap (\pi_3^2)_*(\text{Hom}_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2))$. $\square$

Определение 35. Гомоморфизм микрорасслоений $\pi_2^1: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ является почти сюръективным (почти на), если $\pi_2^1(\mathcal{B}_1)$ плотно в $\mathcal{B}_2$, то есть $\pi_{1,2}^{1,1}(A_1)$ плотно в A_2 , $\pi_{2,2}^{2,1}(E_1)$ плотно в E_2 , $\pi_{3,2}^{3,1}(F_1)$ плотно в F_2 , $\pi_{4,2}^{4,1}(X_1)$ плотно в X_2 .

Теорема 36. Допустим, что $\pi_2^1 \in \text{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, где $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ являются T_2 -микрорасслоениями.

- (i) Если π_2^1 почти сюръективный, то $(\pi_2^1)^*$ — инъекция.
- (ii) Если α_1 — замкнутая M -сеть на $\mathcal{B}_1$, $\text{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$ разделяет элементы в $\mathcal{B}_1$ и $(\pi_2^1)^*: \text{Hom}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) \rightarrow \text{Hom}_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$ почти сюръективный, то π_2^1 — инъекция.

Доказательство. Возьмём произвольные ξ и η в $\text{Hom}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$ такими, что $(\pi_2^1)^*(\xi) = (\pi_2^1)^*(\eta)$. Для любого $s \in \pi_2^1(\mathcal{B}_1)$ существует $q = q_s \in \mathcal{B}_1$, такое что $\pi_2^1(q) = s$, следовательно, $\xi(s) = (\pi_2^1)^*(\xi)(q) = (\pi_2^1)^*(\eta)(q) = \eta(s)$. Тогда $\xi = \eta$, так как $\pi_2^1(\mathcal{B}_1)$ плотно в $\mathcal{B}_2$ и так как $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ и $\mathcal{B}_3$ являются T_2 -микрорасслоениями.

Выберем произвольные $s_1 \neq s_2$ в $\mathcal{B}_1$. Поскольку $\text{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$ разделяет элементы в $\mathcal{B}_1$, то существует $\xi \in \text{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$, такое что $\xi(s_1) \neq \xi(s_2)$. Выберем дизъюнктные открытые окрестности W_1 и W_2 для $\xi(s_1)$ и $\xi(s_2)$ в $\mathcal{B}_3$ соответственно. Они существуют, так как $\mathcal{B}_3$ является T_2 -микрорасслоением. Поэтому $H_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(\{s_1\}, W_1) \cap H_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(\{s_2\}, W_2) =: \Psi$ — открытая окрестность для ξ в $\text{Hom}_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$. Существует η в $\text{Hom}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$, такое что $(\pi_2^1)^*(\eta) \in \Psi$, так как $(\pi_2^1)^*$ является почти сюръективным. Тогда $\eta(\pi_2^1(s_1)) \in W_1$ и $\eta(\pi_2^1(s_2)) \in W_2$, следовательно, $\pi_2^1(s_1) \neq \pi_2^1(s_2)$. $\square$

Заключение 37. Результаты данной статьи можно использовать для дальнейшего исследования топологической структуры микрорасслоений, семейств их непрерывных гомоморфизмов, их приложений в геометрии, абстрактном гармоническом анализе, математической физике, динамических системах, других ветвях математики, информатике и анализе потоков информации, моделировании систем для определения несанкционированных доступов [3–5, 7, 10–12, 22, 26], а также для изучения операторных пучков, пучков групп, пучков колец, слоений многообразий или микрорасслоений [1, 2, 10, 25].

Литература

- [1] Арнаутков В. И., Водичар М. И., Главацкий С. Т., Михалёв А. В. Конструкция топологических колец и модулей. — Кишинёв: Штиинца, 1988.

- [2] Арнаутков В. И., Водичар М. И., Михалёв А. В. Введение в теорию топологических колец и модулей. — Кишинёв: Штиинца, 1981.
- [3] Дхут А., Назаров А. Н., Воронков И. М. Модель GP SVM для беспроводной системы обнаружения вторжений // Russian Technol. J. — 2022. — Vol. 10, no. 6. — P. 20–27.
- [4] Федорчук В. В. Вялые отображения, многозначные ретракции и функторы // УМН. — 1986. — Т. 41, № 6. — С. 121–159.
- [5] Федорчук В. В., Чигогидзе А. Ч. Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия. — М.: Наука, 1992.
- [6] Щепин Е. В. Функторы и несчётные степени компактов // УМН. — 1981. — Т. 36, № 3. — С. 3–62.
- [7] Arakelov G. G., Gribov A. V., Mikhalev A. V. Applied homomorphic cryptography: examples // J. Math. Sci. — 2019. — Vol. 237, no. 3. — P. 353–361.
- [8] Bourbaki N. Algebra. — Berlin: Springer, 1989
- [9] Engelking R. General Topology. — Berlin: Heldermann, 1989
- [10] Fell J. M. G., Doran R. S. Representations of $\ast$ -Algebras, Locally Compact Groups, and Banach $\ast$ -Algebraic Bundles. Vols. 1, 2. — Boston: Academic Press, 1988.
- [11] Hewitt E., Ross K. A. Abstract Harmonic Analysis. Vols. 1, 2. — Berlin: Springer, 1963.
- [12] Kuiper N. H., Lashof R. K. Microbundles and bundles // Invent. Math. — 1966. — Vol. 1. — P. 1–17.
- [13] Kuratowski K. Topology. Vols. 1, 2. — New York: Academic Press, 1968.
- [14] Liang H., Huang S.-Q. Duality of topological modules over normed rings // Topol. Its Appl. — 2018. — Vol. 243. — P. 124–134.
- [15] Ludkovsky S. V. Stochastic processes and anti-derivational equations on non-Archimedean manifolds // Int. J. Math. Math. Sci. — 2004. — Vol. 31, no. 1. — P. 1633–1651.
- [16] Ludkovsky S. V. Line antiderivations over local fields and their applications // Int. J. Math. Math. Sci. — 2005. — Vol. 2005, no. 2. — P. 263–309.
- [17] Ludkovsky S. V. Quasi-invariant and pseudo-differentiable measures with values in non-Archimedean fields on a non-Archimedean Banach space // J. Math. Sci. — 2005. — Vol. 128, no. 6. — P. 3428–3460.
- [18] Ludkovsky S. V. Differentiability of functions: approximate, global and differentiability along curves over non-Archimedean fields // J. Math. Sci. — 2009. — Vol. 157, no. 2. — P. 311–366.
- [19] Ludkovsky S. V. Quasi-Invariant and Pseudo-Differentiable Measures in Banach Spaces. — New York: Nova Sci. Publ., 2009.
- [20] Ludkovsky S. V. Microbundles over topological rings // Topol. Its Appl. — 2019. — Vol. 260. — P. 126–138.
- [21] McCoy R. A., Ntantu I. Topological Properties of Spaces of Continuous Functions. — Berlin: Springer, 1988. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1315).
- [22] Milnor J. Microbundles // Topology. — 1964. — Vol. 3, Suppl. 1. — P. 53–80.
- [23] Van Rooij A. C. M. Non-Archimedean Functional Analysis. — New York: Marcel Dekker, 1978.
- [24] Schikhof W. H. Ultrametric Calculus. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.

- [25] Sulanke R., Wintger P. Differentialgeometrie und Faserbündel. — Basel: Birkhäuser, 1972.
- [26] Xuan W.-F., Song Y.-K., Shi W.-X. Chain conditions and star covering properties // Topol. Its Appl. — 2019. — Vol. 255. — P. 148—156.
- [27] Weil A. Basic Number Theory. — Berlin: Springer, 1973.