

Множества Мандельброта и их обрамления, множества Жюлиа и структура неподвижных точек полиномов третьей степени

В. С. СЕКОВАНОВ

Костромской государственный университет
e-mail: sekovanovvs@yandex.ru

Л. Б. РЫБИНА

Костромская государственная сельскохозяйственная академия
e-mail: larisa.rybina.2014@mail.ru

И. В. ШАПОШНИКОВА

Сургутский государственный университет
e-mail: i-v-sh@mail.ru

УДК 517.988.5

Ключевые слова: множество Мандельброта, обрамление множества Мандельброта, множество Жюлиа, заполняющее множество Жюлиа, неподвижная точка, лемниската, эпициклоида, окружность, критическая точка, обрамление множества Мандельброта.

Аннотация

В статье продолжены исследования Р. Кроновера и Д. Милнора, Х.-О. Пайтгена и П. Х. Рихтера и авторов. С помощью математических методов и компьютерных экспериментов выявлены обрамления множеств Мандельброта четырёх семейств полиномов третьей степени комплексной переменной. Установлена связь между обрамлениями множеств Мандельброта семейств функций $f_1(z) = z^3 + cz$, $f_2(z) = z^3 + cz^2$, $f_3(z) = z^3 + c$, $f_4(z) = z^3 + cz^2 + z$ с замечательными кривыми — лемнискатой, эпициклоидой и окружностью. Разработаны алгоритмы построения обрамлений множеств Мандельброта рассматриваемых семейств функций. Разработаны алгоритмы построения множеств Мандельброта данных семейств функций.

Abstract

V. S. Sekovanov, L. B. Rybina, I. V. Shaposhnikova, Mandelbrot sets and their frames, Julia sets and the structure of fixed points of third-degree polynomials, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 3, pp. 135—159.

This paper continues the research of R. Cronover, D. Milnor, H.-O. Peitgen, P. H. Richter, and the authors. Using mathematical methods and computer experiments, the Mandelbrot set framings of four families of third degree polynomials of a complex variable are revealed. The connection between the frames of Mandelbrot sets of the functions $f_1(z) = z^3 + cz$, $f_2(z) = z^3 + cz^2$, $f_3(z) = z^3 + c$, $f_4(z) = z^3 + cz^2 + z$ with remarkable curves (lemniscate, epicycloid, and circle) is established. Algorithms for constructing the frames of Mandelbrot sets of the considered families of functions are developed. Algorithms for constructing Mandelbrot sets of the given families of functions are developed.

В настоящее время активно развивается и находит применение в различных областях человеческих знаний новое направление науки — голоморфная динамика. Важнейшими составляющими данной дисциплины являются множества Жюлиа, структура неподвижных точек, множества Мандельброта и их обрамления. Данным математическим объектам посвящены многочисленные исследования, среди которых укажем [1–20].

Отметим, что форма множества Жюлиа зависит от структуры неподвижных точек порождающей его функции. Доминирующими фигурами множеств Мандельброта являются их обрамления, которые исследовались Р. Кроновером [1], Д. Милнором [3], Х.-О. Пайтгеном и П. Х. Рихтером [4] и автором [14].

Р. Кроновер показал, что обрамлением множества Мандельброта семейства функций $f_1(z) = z^2 + c$ является область, ограниченная кардиоидой.

Д. Милнор показал, что обрамлением множества Мандельброта для семейства функций $f_2(z) = z^2 + cz$ являются области, ограниченные касающимися окружностями.

Х.-О. Пайтген и П. Х. Рихтер показали [4], что точки $c = -0,1226 \pm 0,7449i$ будут центрами самых больших почек множества Мандельброта семейства функций $f_1(z) = z^2 + c$ — таких множеств, каждая точка c которых обладает тем свойством, что третья итерация функции $f_1(z) = z^2 + c$ имеет неподвижную притягивающую точку.

В [12] выявлены обрамления множеств Мандельброта четырёх семейств полиномов второй степени.

В данной статье мы продолжим указанные выше исследования в следующих направлениях:

- а) выявим структуру неподвижных точек полиномов

$$f_1(z) = z^3 + cz, \quad f_2(z) = z^3 + cz^2, \quad f_3(z) = z^3 + c, \quad f_4(z) = z^3 + cz^2 + z$$

и построим при соответствующих значениях параметра c их заполняющие множества Жюлиа;

- б) выявим множества Мандельброта и обрамления множеств Мандельброта для семейств функций

$$f_1(z) = z^3 + cz, \quad f_2(z) = z^3 + cz^2, \quad f_3(z) = z^3 + c, \quad f_4(z) = z^3 + cz^2 + z$$

и построим эти множества с помощью компьютерных программ;

- в) установим связь между обрамлениями множеств Мандельброта и замечательными кривыми: лемнискатой, эписциклоидой, окружностями и другими линиями.

Сначала рассмотрим структуру неподвижных точек семейств полиномов третьей степени

$$f_1(z) = z^3 + cz, \quad f_2(z) = z^3 + cz^2, \quad f_3(z) = z^3 + c, \quad f_4(z) = z^3 + cz^2 + z,$$

исследуем для данных функций множества Мандельброта M_1, M_2, M_3, M_4 и их обрамления, изучим заполняющие множества Жюлиа данных функций K_1, K_2 ,

K_3, K_4 , границу которых будут представлять множества Жюлиа $j(f_1), j(f_2), j(f_3), j(f_4)$.

Если функция $f_i(z)$, $i = 1, 2, 3, 4$, имеет три неподвижные притягивающие точки, будем писать **(PPP)**, если одну неподвижную притягивающую точку и две нейтральные неподвижные точки — **(PNN)**. Аналогично определяются случаи **(POO)**, **(NNN)**, **(NOO)**, **(OOO)** и другие.

Совокупность возможных триад при определённых значениях параметра мы будем считать структурой неподвижных точек рассматриваемого семейства функций. Например, структура неподвижных точек семейства функций $f_1(z) = z^3 + cz$ будет состоять из следующих триад: **(POO)**, **(ONN)**, **(PPO)**, **(NNN)**, **(NOO)**, **(OOO)** (см. табл. 1).

Замечание. Мы не различаем триады, имеющие равное число одинаковых неподвижных точек, например триады **(POO)** и **(OPO)**.

Отметим, что от структуры неподвижных точек зависят форма множества Жюлиа и наличие бассейнов притяжения неподвижных точек (при данном значении c).

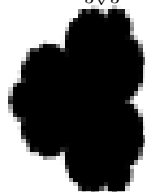
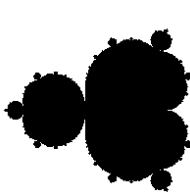
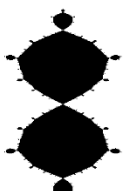
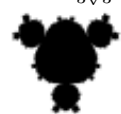
В табл. 1 указывается структура неподвижных точек указанных выше функций и строятся соответствующие заполняющие множества Жюлиа. Отметим, что знак $+$ означает наличие компонента структуры неподвижных точек у соответствующей функции. Знак $-$ в табл. 1 означает отсутствие указанной триады в структуре неподвижных точек для соответствующих функций $f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z)$.

Ниже мы покажем, что ни у одной из функций $f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z)$

- 1) нет трёх неподвижных притягивающих точек (невозможен случай **(PPP)**);
- 2) нет двух неподвижных притягивающих точек и одной неподвижной нейтральной точки (невозможен случай **(PPN)**).

Таблица 1. Заполняющие множества Жюлиа при данных значениях параметра c

№	z_1	z_2	z_3	$f_1 = z^3 + cz$ $f_1(z)$ и $j(f_1)$	$f_2 = z^3 + cz^2$ $f_2(z)$ и $j(f_2)$	$f_3 = z^3 + c$ $f_3(z)$ и $j(f_3)$	$f_4 = z^3 + cz^2 + z$ $f_4(z)$ и $j(f_4)$
1	P	P	P	—	—	—	—
2	P	P	N	—	—	—	—
3	P	O	O	$+$ $z^3 + \frac{1}{2}z$ 	$+$ $z^3 - \frac{3}{2}iz^2$ 	$+$ z^3 	—

4	O	N	N	$+$ $z^3 + 2z$ 	$-$	$+$ $z^3 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$ 	$+$ $z^3 + 2z^2 + z$ 
5	P	P	O	$+$ $z^3 + \frac{3}{2}z$ 	$+$ $z^3 - \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)iz^2$ 	$-$	$-$
6	N	N	N	$+$ $z^3 + z$ 	$-$	$-$	$+$ $z^3 + z$ 
7	N	O	O	$+$ $z^3 - z$ 	$-$	$+$ $z^3 + \frac{4i}{3\sqrt{3}}$ 	$-$
8	O	O	O	$+$ $z^3 - 3z$	$-$	$+$ $z^3 - 6$	$-$

9	N	N	P	—	$+$ $z^3 - 2iz^2$ 	—	$+$ $z^3 + iz^2 + z$ 
10	P	N	O	—	$+$ $z^3 - (\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}})iz^2$ 	—	—

Рассмотрим функцию $f_2(z) = z^3 + cz^2$. Для краткости изложения положим $f(z) = f_2(z)$. Корнями уравнения $f(z) = z$ будут числа

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}, \quad z_3 = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4}}{2}.$$

Найдём критические точки функции. Имеем $(f(z))' = 3z^2 + 2cz$. Решая уравнение $3z^2 + 2cz = 0$, получаем критические точки

$$u_1 = 0, \quad v_1 = -\frac{2}{3}c$$

функции $f(z)$.

Выясним значение производных в неподвижных точках. Поскольку $\lambda_1 = f'(z_1) = 0$, то точка z_1 сверхпритягивающая. Проведя соответствующие вычисления, получим

$$\lambda_2 = f'(z_2) = 3 \left(\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} \right)^2 + 2c \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} = \frac{c^2}{2} - \frac{c\sqrt{c^2 + 4}}{2} + 3.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \lambda_2 = f'(z_2) &= 3 \left(\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} \right)^2 + 2c \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} = \\ &= \frac{3}{4}c^2 - \frac{6c + \sqrt{c^2 + 4}}{4} + \frac{3}{4}c^2 + \frac{12}{4} - \frac{4c^2}{4} + \frac{4\sqrt{c^2 + 4}}{4} = \frac{c^2}{2} - \frac{c\sqrt{c^2 + 4}}{2} + 3. \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\lambda_3 = f'(z_3) = 3 \left(\frac{-c - \sqrt{c^2 + 4}}{2} \right)^2 + 2c \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4}}{2} = \frac{c^2}{2} + \frac{c\sqrt{c^2 + 4}}{2} + 3.$$

Вычислим индексы неподвижных точек. Имеем $1/(1 - \lambda_1) = 1$. Найдём значение $1/(1 - \lambda_2)$:

$$\frac{1}{1 - \lambda_2} = \frac{1}{\frac{c\sqrt{c^2 + 4}}{2} - \frac{c^2}{2} - 2} = \frac{2}{c\sqrt{c^2 + 4} - (\sqrt{c^2 + 4})^2} = \frac{2}{\sqrt{c^2 + 4}(c - \sqrt{c^2 + 4})}.$$

Найдём $1/(1 - \lambda_2)$ вторым способом, используя формулу вычисления вычета для полюса первого порядка (точки z_2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \lambda_2} &= i(f, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z - f(z)} = - \oint \frac{dz}{z \left(z - \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} \right) \left(z - \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4}}{2} \right)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{-1}{z \left(z - \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4}}{2} \right)} = - \frac{1}{\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} \left(\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} - \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4}}{2} \right)} = \\ &= \frac{-1}{\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} \sqrt{c^2 + 4}} = \frac{1}{\frac{c - \sqrt{c^2 + 4}}{2} \sqrt{c^2 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{c^2 + 4}(c - \sqrt{c^2 + 4})} \end{aligned}$$

согласно [3]. Аналогично находим

$$\frac{1}{1 - \lambda_3} = \frac{1}{-\frac{c\sqrt{c^2 + 4}}{2} - \frac{c^2}{2} - 2} = \frac{-2}{\sqrt{c^2 + 4}(c + \sqrt{c^2 + 4})}.$$

Найдём сумму $1/(1 - \lambda_2)$ и $1/(1 - \lambda_3)$:

$$\frac{1}{1 - \lambda_2} + \frac{1}{1 - \lambda_3} = \frac{2c + 2\sqrt{c^2 + 4} - 2c + 2\sqrt{c^2 + 4}}{\sqrt{c^2 + 4}(c^2 - c^2 - 4)} = -1.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{1 - \lambda_1} + \frac{1}{1 - \lambda_2} + \frac{1}{1 - \lambda_3} = 0,$$

что согласуется с формулой

$$\sum_{z=f(z)} i(f, z) = 0$$

для полиномов (сумма индексов в конечных неподвижных точках для полиномиального отображения равна нулю [3]), где $1/(1 - \lambda) = i(f, z)$, если $\lambda = f'(z_1) \neq 1$.

Поясним сказанное. Функция $1/(z - f(z))$ имеет три полюса первого порядка, которые являются изолированными особыми точками.

Отметим, что

$$i(f, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z - f(z)},$$

где интеграл берётся по окружности достаточно малого радиуса ε : $|z - z_2| = \varepsilon$.

Покажем теперь, что полином $f(z) = z^3 + cz^2$ степени 3 имеет по крайней мере одну отталкивающую или одну параболическую неподвижную точку, т. е. что функция $f(z) = z^3 + cz^2$ не имеет трёх притягивающих неподвижных точек.

Заметим сначала, что сумма $1/(1 - \lambda) + 1/(1 - \bar{\lambda})$ является вещественным числом. Следуя [3], покажем, что неравенство

$$1 < \frac{1}{1 - \lambda} + \frac{1}{1 - \bar{\lambda}}$$

выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \lambda} \right),$$

где $\lambda = f'(z)$, $\lambda \neq 1$. Пусть $\lambda = x + iy$ и

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \lambda} \right) = \frac{1 - x}{(1 - x)^2 + y^2} > \frac{1}{2}.$$

Вещественные части комплексных чисел $1/(1 - \lambda)$ и $1/(1 - \bar{\lambda})$ совпадают. Следовательно,

$$\frac{1}{1 - \lambda} + \frac{1}{1 - \bar{\lambda}} = \frac{2 - 2x}{(1 - x)^2 + y^2} > 1.$$

Обратно, пусть

$$\frac{1}{1 - \lambda} + \frac{1}{1 - \bar{\lambda}} = \frac{2 - 2x}{(1 - x)^2 + y^2} > 1.$$

Тогда

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \lambda} \right) = \frac{1 - x}{(1 - x)^2 + y^2} > \frac{1}{2}.$$

Теперь покажем, что неравенство

$$1 < \frac{1}{1 - \lambda} + \frac{1}{1 - \bar{\lambda}}$$

равносильно неравенству $\lambda\bar{\lambda} < 1$. Заметим, что $(1 - \lambda)(1 - \bar{\lambda}) = (x - 1)^2 + y^2 > 0$. Умножив обе части неравенства

$$1 < \frac{1}{1 - \lambda} + \frac{1}{1 - \bar{\lambda}}$$

на положительное число $(1 - \lambda)(1 - \bar{\lambda})$, получим $1 - \lambda - \bar{\lambda} + \lambda\bar{\lambda} < 1 - \lambda - \bar{\lambda} + 1$. Из последнего неравенства получим, что $\lambda\bar{\lambda} < 1$. Если выполняется неравенство $\lambda\bar{\lambda} < 1$, то

$$(1 - \lambda)(1 - \bar{\lambda}) = 1 - \bar{\lambda} - \lambda + \lambda\bar{\lambda} < 1 - \bar{\lambda} + 1 - \lambda.$$

Разделив левую и правую части последнего неравенства на положительную величину $(1 - \lambda)(1 - \bar{\lambda})$, получим неравенство

$$1 < \frac{1}{1 - \lambda} + \frac{1}{1 - \bar{\lambda}}.$$

Заметим, что точка z функции $f(z)$ будет неподвижной притягивающей тогда и только тогда, когда $\lambda\bar{\lambda} < 1$. Таким образом, неподвижная точка z_0 с мультипликатором $\lambda \neq 1$ ($f'(z_0) = \lambda$) является притягивающей тогда и только тогда, когда её индекс

$$i(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z - f(z)} = \frac{1}{1 - \lambda}$$

удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re}(i(f, z_0)) > 1/2$.

Теперь покажем, что у функции имеется по крайней мере одна отталкивающая или одна нейтральная неподвижная точка. Предположим противное, т. е. что все неподвижные точки притягивающие. Тогда

$$\sum_{z_i=f(z_i)} \operatorname{Re}(i(f, z_i)) > 3/2,$$

в силу того что $\operatorname{Re}(i(f, z_i)) > 1/2$ для каждой неподвижной точки. Это противоречит тому, что

$$\sum_{z_i=f(z_i)} i(f, z_i) = 0.$$

Следовательно, предположение неверно и утверждение доказано.

Рассмотрим теперь функцию $f_1(z)$ с производной $(f_1(z))' = 3z^2 + c$. Предположим противное, т. е. что все неподвижные точки $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{1-c}$, $z_3 = -\sqrt{1-c}$ данной функции притягивающие. Положим $c_1 = (f(z_1))' = c$, $c_2 = (f(z_2))' = 3 - 2c$, $c_3 = (f(z_3))' = 3 - 2c$. Тогда будем иметь $|c_1| < 1$, $|c_2| < 1$, $|c_3| < 1$. Значит, $c_i \in \mathbb{D}$, $i = 1, 2, 3$, где $\mathbb{D}$ — единичный открытый круг радиуса 1 с центром в начале координат. Следовательно, $1 - c_i \in 1 + \mathbb{D}$, $i = 1, 2, 3$. Заметим, что круг $1 + \mathbb{D}$ при отображении $f(z) = 1/z$ переходит в полуплоскость $\operatorname{Re}(z) > 1/2$. Следовательно,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - c_i}\right) > \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Покажем, что

$$\frac{1}{1 - c_1} + \frac{1}{1 - c_2} + \frac{1}{1 - c_3} = 0.$$

Согласно [3]

$$\frac{1}{1 - c_i} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z - z^3 - cz},$$

где интегрирование проводится в положительном направлении вдоль маленького замкнутого контура, окружающего неподвижную точку z_i , $i = 1, 2, 3$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - c_1} &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z - z^3 - cz} = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z(z^2 + c - 1)} = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z(z - \sqrt{c-1})(z + \sqrt{c-1})} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{(z - \sqrt{c-1})(z + \sqrt{c-1})} = \frac{1}{c-1}. \end{aligned}$$

Продолжим вычисления применительно к точке z_2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-c_2} &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z-z^3-cz} = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z(z^2+c-1)} = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z(z+\sqrt{c-1})(z+\sqrt{c-1})} = \lim_{z \rightarrow \sqrt{c-1}} \frac{-1}{z(z+\sqrt{c-1})} = -\frac{1}{2(c-1)}. \end{aligned}$$

Аналогично найдём

$$\frac{1}{1-c_3} = -\frac{1}{2(c-1)}.$$

Замечаем, что

$$\frac{1}{1-c_1} + \frac{1}{1-c_2} + \frac{1}{1-c_3} = 0.$$

Последнее равенство противоречит неравенству (1). Следовательно, наше предположение, что функция $f_1(z) = z^3 + cz$ имеет три неподвижные притягивающие точки, оказалось ошибочным.

Таким образом, функция $f_1(z)$ должна иметь по крайней мере одну параболическую неподвижную точку или одну отталкивающую неподвижную точку. Аналогично можно доказать, что функции $f_3(z)$, $f_4(z)$ не могут иметь трёх неподвижных притягивающих точек.

Определим структуру неподвижных точек z_1, z_2, z_3 функции $f_1(z) = z^3 + cz$ для некоторых значений параметра c .

Как уже отмечалось, будем считать, что если функция $f_i(z)$, $i = 1, 2, 3, 4$, при некотором значении параметра c имеет, например, три неподвижных притягивающих точки, то она удовлетворяет условию (**PPP**).

Покажем, что при $c = 2$ функция $f_1(z) = z^3 + cz$ удовлетворяет условию (**ONN**), т. е. имеет одну отталкивающую неподвижную точку и две неподвижные нейтральные точки. Действительно, данная функция имеет три неподвижные точки $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, причём $|(f_1(z_1))'| = 2$, $|(f_1(z_2))'| = 1$, $|(f_1(z_3))'| = 1$. Таким образом, выполняется условие (**ONN**).

Рассмотрим функцию $f_1(z) = z^3 + (1/2)z$. Проверим, удовлетворяет ли она условию (**ООР**). Имеем $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{1/2}$, $z_3 = -\sqrt{1/2}$ и $|(f_1(z_1))'| = 1/2$, $|(f_1(z_2))'| = 2$, $|(f_1(z_3))'| = 2$.

Рассмотрим функцию $f_1(z) = z^3 + (3/2)z$. Проверим, удовлетворяет ли она условию (**ОРР**). Имеем $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{-1/2}$, $z_3 = -\sqrt{-1/2}$ и $|(f_2(z_1))'| = 3/2$, $|(f_2(z_2))'| = 0$, $|(f_2(z_3))'| = 0$.

Покажем, что функция $f_1(z) = z^3 + cz$ не может иметь двух нейтральных и одной притягивающей неподвижной точек. Действительно, неподвижными точками у функции $f_1(z)$ будут точки $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{1-c}$, $z_3 = -\sqrt{1-c}$; $(f_1(z))' = 3z^2 + c$. Заметим, что $|(f_1(z_1))'| = |c|$, $|(f_1(z_2))'| = |(f_1(z_3))'| = |3-2c|$. Возможны два случая:

- 1) $|c| < 1$, $|3-2c| = 1$;
- 2) $|c| = 1$, $|3-2c| = 1$, $|3-2c| < 1$.

Второй случай не имеет места. Рассмотрим первый случай. Имеем $1 < 3 - 2|c| \leq |3 - 2c| = 1$, что невозможно.

Очевидно, что и случай **(NPP)** для функции $f_1(z)$ невозможен. Действительно одновременно не могут выполняться соотношения $|c| < 1$, $|3 - 2c| = 1$, $|3 - 2c| < 1$. Поскольку не могут выполняться одновременно ни соотношения $|c| < 1$, $|3 - 2c| = 1$, $|3 - 2c| > 1$, ни соотношения $|c| = 1$, $|3 - 2c| < 1$, $|3 - 2c| > 1$, то случай **(NPO)** для функции $f_1(z)$ также невозможен.

Определим структуру неподвижных точек z_1, z_2, z_3 функции $f_2(z) = z^3 + cz^2$ для некоторых значений параметра c .

Поскольку у данной функции $z_1 = 0$ — неподвижная точка, при любом значении параметра c притягивающая, то случаи **(NOO)**, **(NNN)**, **(NNO)**, **(OOO)** отпадают, их можно не рассматривать. Доказательство отсутствия триады **(PPP)** полностью повторяет доказательство, проведённое для случая **(PPP)** функции $f_1(z)$.

Покажем, что у функции $f_2(z) = z^3 + cz^2$ нет двух притягивающих неподвижных точек и одной нейтральной неподвижной точки. Неподвижными точками являются $z_1 = 0$, z_2 и z_3 — корни уравнения $z^2 + cz - 1 = 0$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что точки z_1, z_2 притягивающие, а точка z_3 нейтральная. Поскольку неподвижная точка $z_1 = 0$ — притягивающая точка при любом значении c , то точка z_2 притягивающая, а точка z_3 нейтральная (или наоборот). Замечаем, что $z_2 z_3 = -1$ и $(f_2(z_2))' = z_2^2 + 2$. Действительно, если точка z — ненулевая неподвижная точка, то имеет место равенство $z^3 + cz^2 = z$. Следовательно, $z^2 + cz = 1$. Поскольку $(f_2(z))' = 3z^2 + 2cz$, то $(f_2(z))' = z^3 + 2$.

Предположим, что $|z_2| < 1$. Поскольку для ненулевых неподвижных точек z имеет место равенство $z^2 + cz = 1$, то мы получим, что $|(f_2(z_2))'| = |z_2^2 + 2| > 2 - |z_2^2| > 1$ и точка z_2 отталкивающая, что невозможно. Если же $|z_2| > 1$, то $|z_3| = 1/|z_2| < 1$, и следовательно, точка z_3 — отталкивающая неподвижная точка, что также невозможно.

Наконец, если $|z_2| = 1$, то $|z_3| = 1$, причём $z_3 \neq i$ (i не является неподвижной точкой $f_2(z)$) и $|(f_2(z_3))'| = |z_3^2 + 2| > 1$, поскольку вещественная часть комплексного числа $z_3^2 + 2$ больше 1, и мы приходим к противоречию. Таким образом, случай **(PPN)** невозможен.

При $c = -(\sqrt{2} + 1/\sqrt{2})$ функция $f_2(z) = z^3 - (\sqrt{2} + 1/\sqrt{2})iz^2$ имеет две притягивающие неподвижные точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \sqrt{2}i$ и одну отталкивающую неподвижную точку $z_3 = (\sqrt{2}/2)i$. Действительно, $(f_2(z_2))' = 3(-2) - 2(\sqrt{2} + 1/\sqrt{2})\sqrt{2}i^2 = 0$. Нетрудно проверить, что $(f_2(z_3))' = 3/2$. Таким образом, для функции $f_2(z)$ при $c = \sqrt{2} + 1/\sqrt{2}$ имеет место случай **(PRO)**.

Проверим, что для функции $f_2(z) = z^3 - (\sqrt{3} + 1/\sqrt{3})iz^2$ имеет место случай **(PNO)**. Имеем $(f_2(z))' = 3z^2 - 2(\sqrt{3} + 1/\sqrt{3})iz$. Находим неподвижные точки данной функции: $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{3}i$, $z_3 = i/\sqrt{3}$. Значения модуля производной в данных точках равны $|(f_2(z_1))'| = 0$, $|(f_2(z_2))'| = 1$, $|(f_2(z_3))'| = 5/3$.

Проверим, что для функции $f_2(z) = z^3 - 2iz^2$ имеет место случай **(PNN)**. Имеем $(f_2(z))' = 3z^2 - 4iz$. Находим неподвижные точки данной функции: $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = i$. Значения модуля производной в данных точках равны $|(f_2(z_1))'| = 0$, $|(f_2(z_2))'| = 1$, $|(f_2(z_3))'| = 1$.

Проверим, что для функции $f_2(z) = z^3 - (3/2)z^2$ имеет место случай **(POO)**. Имеем $(f_2(z))' = 3z^2 - 3z$. Находим неподвижные точки данной функции: $z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $z_3 = -1/2$. Значения модуля производной в данных точках равны $|(f_2(z_1))'| = 0$, $|(f_2(z_2))'| = 6$, $|(f_2(z_3))'| = 9/4$.

Исследуем теперь структуру неподвижных точек функции $f_3(z) = z^3 + c$. Для $f_3(z)$ найдём значение параметра c , при котором выполняется условие **(ONN)**. Каждая неподвижная точка $f_3(z)$ удовлетворяет уравнению

$$z^3 - z + c = 0. \quad (2)$$

Пусть z_1, z_2, z_3 — корни данного уравнения. Согласно формулам Виета получим равенства

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0, \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = -1, \\ z_1 z_2 z_3 = -c. \end{cases} \quad (3)$$

Очевидно, что z_1, z_2 и z_3 являются и неподвижными точками функции $f_3(z)$.

Пусть для определённости точки z_1, z_2 нейтральные, а точка z_3 отталкивающая. Тогда $|z_1| = 1/\sqrt{3}$, $|z_2| = 1/\sqrt{3}$, $|z_3| > 1/\sqrt{3}$. Заметим, что

$$|z_3| \leq |z_1| + |z_2| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Имеем

$$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1 z_2 + 2z_1 z_3 + 2z_2 z_3 = 0.$$

Воспользовавшись равенством $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = -1$, получим $2z_1 z_2 + 2z_1 z_3 + 2z_2 z_3 = -2$. Следовательно, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 2$. Если $|z_3| < 2/\sqrt{3}$, то получим

$$2 = |z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| \leq |z_1^2| + |z_2^2| + |z_3^2| < \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 2.$$

Выявлено противоречие: $2 < 2$.

Таким образом, должно выполняться равенство $|z_3| = 2/\sqrt{3}$.

Поскольку $-z_3 = z_1 + z_2$, с геометрической точки зрения комплексное число $-z_3$ есть вектор, который является суммой двух векторов z_1 и z_2 . Длины данных векторов являются сторонами треугольника. Так как длина одной стороны треугольника равна сумме длин двух других его сторон, то треугольник вырождается в отрезок и угол между z_1 и z_2 равен нулю (если бы между z_1 и z_2 угол был равен 180 градусов то было бы $-z_3 = z_1 + z_2 = 0$, что невозможно). Итак, пусть $z_1 = z_0$, $z_2 = z_0$. Тогда $z_3 = -2z_0$.

Поскольку $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = -1$, имеем $z_0 z_0 - z_0 \cdot 2z_0 - 2z_0 z_0 = -1$. Отсюда находим, что $z_0^1 = 1/\sqrt{3}$, $z_0^2 = 1/\sqrt{3}$. Заметим, что

$$\left(z - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(z + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = z^3 - z + \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Таким образом, $f(z) = z^3 + 2/(3\sqrt{3})$ и точка $z_0^1 = 1/\sqrt{3}$ — параболическая неподвижная точка, а точка $z_0^3 = -2/\sqrt{3}$ — отталкивающая неподвижная точка. Действительно,

$$|f'(z_0^1)| = \left| 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \right| = 1.$$

Таким образом, $z_0^1 = z_0^2 = 1/\sqrt{3}$ — параболические неподвижные точки.

Поскольку

$$|f'(z_0^3)| = \left| 3 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \right| = \left| 3 \cdot \frac{4}{3} \right| = 4 > 1,$$

точка $z_0^3 = -2/\sqrt{3}$ — отталкивающая неподвижная точка. Наши рассуждения позволяют указать ещё одну функцию, удовлетворяющую условию (**ONN**).

Таким образом, было показано, что функция $f_3(z) = z^3 + c$ при $c = 2/(3\sqrt{3})$ имеет две параболические и одну отталкивающую неподвижные точки.

Для $f_3(z)$ найдём значение параметра c , при котором выполняется условие (**NOO**). Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что z_2, z_3 — отталкивающие, а z_1 — параболическая неподвижные точки. Имеем

$$|z_1| > \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad |z_2| > \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad |z_3| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Приведём пример, удовлетворяющий данным условиям. Предположим, что число $z_1 = i/\sqrt{3}$ является корнем уравнения $z^3 - z + c = 0$. Тогда

$$c = \frac{i}{\sqrt{3}} - \left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{4i}{3\sqrt{3}}$$

и выражение $z^3 - z + 4i/(3\sqrt{3})$ должно делиться на $z - i/\sqrt{3}$ без остатка. Проведя необходимые действия, получим

$$z^3 - z + \frac{4i}{3\sqrt{3}} = \left(z - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) \left(z^2 + \frac{i}{\sqrt{3}}z - \frac{4}{3}\right).$$

Корни уравнения $z_{2,3}$ находим из уравнения

$$z^2 + \frac{i}{\sqrt{3}}z - \frac{4}{3} = 0.$$

Получаем

$$z_{2,3} = \frac{\frac{-i}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Непосредственная проверка показывает, что данная функция удовлетворяет условию (**NOO**).

Покажем, что для функции $f_3(z)$ наличие трёх неподвижных нейтральных точек невозможно, т. е. отсутствует случай (**NNN**). Предположим противное: все три неподвижные точки z_1 , z_2 и z_3 нейтральные. Тогда получим

$$|z_1| = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad |z_2| = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad |z_3| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Заметим, что

$$|c| = |z_1 z_2 z_3| = |z_1| |z_2| |z_3| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Из определения неподвижной точки z_i ($i = 1, 2, 3$) имеем

$$z_i^3 - z_i + c = 0, \quad z_i^3 - z_i = -c, \quad |z_i - z_i^3| = |c|.$$

Следовательно, для каждого $i = 1, 2, 3$ получим

$$\frac{1}{3\sqrt{3}} = |c| = |z_i - z_i^3| \geq |z_i| - |z_i^3| = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

что невозможно. Таким образом, нет такого c , что функция $f(z) = z^3 + c$ будет иметь три нейтральные неподвижные точки. Установлено, что случай (**NNN**) места не имеет.

Покажем, что случай (**PPO**) не имеет места для функции $f_3(z)$. Предположим противное: точки z_1 , z_2 притягивающие, а точка z_3 отталкивающая. Имеем

$$|z_1| < \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad |z_2| < \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad |z_3| > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Из первого уравнения системы (3) имеем

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0, \quad z_3 = -z_1 - z_2.$$

Следовательно, $|z_3| = |-z_1 - z_2| = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ и $|z_3| \leq |z_1| + |z_2|$.

Выразим также z_2 из первого уравнения системы (3):

$$z_2 = -z_1 - z_3, \quad z_2^2 = -z_1 z_2 - z_2 z_3.$$

С другой стороны, из второго уравнения системы (3) получаем

$$-z_1 z_2 - z_2 z_3 = 1 + z_1 z_3.$$

Таким образом, имеем

$$z_2^2 = 1 + z_1 z_3, \quad |z_2^2| = |1 + z_1 z_3| \geq |1| - |z_1| |z_3|.$$

Поскольку $|z_1| < 1/\sqrt{3}$, $|z_3| < 2/\sqrt{3}$, то $-|z_1| |z_3| > -2/3$. Имеем $1 - |z_1| |z_3| > 1 - 2/3$, $1 - |z_1| |z_3| > 1/3$, $|z_2^2| > 1/3$. Однако

$$|z_2^2| = |z_2| |z_2| < \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Выявлено противоречие: $1/3 < |z_2^2|$ и $|z_2^2| > 1/3$. Следовательно, нет такого c , что функция $f(z) = z^3 + c$ будет иметь две притягивающие и одну отталкивающую неподвижные точки.

Покажем от противного, что случай, когда z_1, z_2 притягивающие, z_3 параболическая, невозможен. Если описываемое имеет место, то $|z_1| < 1/\sqrt{3}$, $|z_2| < 1/\sqrt{3}$, $|z_3| = 1/\sqrt{3}$ и

$$\begin{aligned} |-1| = |z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3| &\leq |z_1 z_2| + |z_1 z_3| + |z_2 z_3| = |z_1| \cdot |z_2| + |z_1| \cdot |z_3| + |z_2| \cdot |z_3| < \\ &< \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1. \end{aligned}$$

Выявлено противоречие: $|-1| < 1$. Следовательно, нет такого c , что отображение $f(z) = z^3 + c$ будет иметь две притягивающие точки и одну параболическую точку.

Покажем от противного, что и случай (**NPO**) невозможен. Предположим, что z_1 — нейтральная точка, z_2 — притягивающая точка, z_3 — отталкивающая точка. Тогда $|z_1| = 1/\sqrt{3}$, $|z_2| < 1/\sqrt{3}$, $|z_3| > 1/\sqrt{3}$. Из первого уравнения системы (3) выразим z_3 :

$$\begin{aligned} z_3 &= -z_1 - z_2, \quad |z_3| \leq |z_1| + |z_2| < \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ (z_1 + z_2 + z_3)^2 &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1 z_2 + 2z_1 z_3 + 2z_2 z_3 = 0. \end{aligned}$$

Пользуясь вторым уравнением системы (3), $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = -1$, получаем $2z_1 z_2 + 2z_1 z_3 + 2z_2 z_3 = -2$ и $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 2$. Следовательно,

$$2 = |z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| \leq |z_1^2| + |z_2^2| + |z_3^2| < \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 2,$$

что невозможно.

Аналогично можно установить, что случай (**PNN**) не реализуется.

Замечание. Множество Жюлиа для функции $f_3(z) = z^3 - 6$ не помещено в табл. 1, поскольку оно сильно разряжено и значительно удалено от начала координат (однако данное множество существует и является бесконечным!).

Определим структуру неподвижных точек z_1, z_2, z_3 функции $f_4(z) = z^3 + cz^2 + z$ для некоторых значений параметра c .

Неподвижными точками у функции $f_4(z)$ будут точки $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = -c$; $(f_4(z))' = 3z^2 + 2cz + 1$. Заметим, что $|(f_4(z_1))'| = 0$, $|(f_4(z_2))'| = 0$, $|(f_4(z_3))'| = |c^2 - 1|$.

Поскольку у данной функции точки $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = -c$ неподвижные, то при любом значении параметра c точки z_1, z_2 нейтральные. Следовательно, случаи (**PPP**), (**PPN**), (**PPO**), (**NOO**), (**OOO**), (**POO**), (**PNO**) отпадают и их можно не рассматривать.

Покажем, что функция $f_4(z) = z^3 + iz^2 + z$ имеет две нейтральные и одну притягивающую неподвижные точки, т. е. для данной функции $f_4(z)$ выполняется условие (**NNP**). Неподвижными у функции $f_4(z)$ будут точки $z_1 = 0$, $z_2 = 0$,

$z_3 = -i$; $(f_4(z))' = 3z^2 + 2iz + 1$. Заметим, что $|(f_4(z_1))'| = 1$, $|(f_4(z_2))'| = 1$, а $|(f_4(z_3))'| = 0$.

Покажем, что функция $f_4(z) = z^3 + 2z^2 + z$ имеет две нейтральные и одну отталкивающую неподвижные точки, т. е. для данной функции $f_4(z)$ выполняется условие (NNO). Неподвижными точками $f_4(z)$ будут точки $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = -2$; $(f_4(z))' = 3z^2 + 4z + 1$. Заметим, что $|(f_4(z_1))'| = 1$, $|(f_4(z_2))'| = 1$, $|(f_4(z_3))'| = 5 > 1$.

Очевидно, что функция $f_4(z) = z^3 + z$ имеет три совпадающие нейтральные неподвижные точки $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$, т. е. выполняется условие (NNN).

Множества Мандельброта семейств полиномов третьей степени

Каждый полином третьей степени $P_c(z)$ имеет две критические точки $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2$, поскольку его производная — полином второй степени. Будем считать, что данные критические точки не являются неподвижными. Пусть $D_{\tilde{z}_1}$ — множество, состоящее из точек c комплексной плоскости, для которых орбита точки $\tilde{z}_1$ ограничена, а $D_{\tilde{z}_2}$ — множество, состоящее из точек c комплексной плоскости, для которых орбита точки $\tilde{z}_2$ ограничена. Тогда под множеством Мандельброта данного семейства полиномов мы будем понимать множество M_c равное $M_c = D_{\tilde{z}_1} \cup D_{\tilde{z}_2}$.

Множества Мандельброта функций $f_i(z)$, $i = 1, 2, 3, 4$, изображены на рис. 1—4.



Рис. 1. Множество Мандельброта семейства функций $f_1(z) = z^3 + cz$



Рис. 2. Множество Мандельброта семейства функций $f_2(z) = z^3 + cz^2$

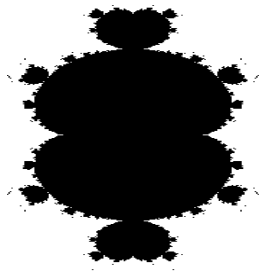


Рис. 3. Множество Мандельброта семейства функций $f_3(z) = z^3 + c$

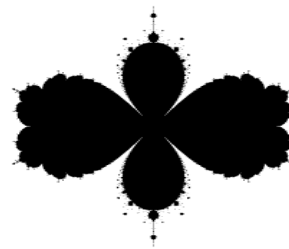


Рис. 4. Множество Мандельброта семейства функций $f_4(z) = z^3 + cz^2 + z$

- Для функции $f_1(z) = z^3 + cz$ критическими точками являются точки $\tilde{z}_{1,2} = \pm \sqrt{-c/3}$ (рис. 1).
- Для функции $f_2(z) = z^3 + cz^2$ критическими точками являются точки $\tilde{z}_1 = 0, \tilde{z}_2 = -(2/3)c$ (рис. 2).
- Для функции $f_3(z) = z^3 + c$ критической точкой является $\tilde{z}_1 = 0$ (рис. 3).
- Для функции $f_4(z) = z^3 + cz^2 + z$ критическими точками являются точки $\tilde{z}_{1,2} = \sqrt{(-2c \pm \sqrt{4c^2 - 12})/6}$ (рис. 4).

Приведём универсальную компьютерную программу построения множеств Мандельброта (для функции $f_4(z)$).

```

program pr;
uses graphabc;
var
  {i, j, k, }iterlim, height, width: integer;
  dx, dy, x_max, x_min, y_max, y_min, kef, scall: real;
  z, c, temp: complex;
  col: integer;
function f(z, c: complex): complex;
begin
  result := z*z*z+c*z*z+z;
end;
function distance(arg1: complex; arg2: complex): real;
begin
  result:= sqrt(sqr(arg1.real - arg2.real) +
               sqr(arg1.imaginary - arg2.imaginary));
end;
begin
  width := 800; height := 800;
  setwindowsize(width, height); iterlim := 50;
  scall := 4 ;
  if (width >= height) then
  begin
    kef := width / height;
    x_min := scall * -kef; x_max := scall * kef;
    y_min := scall * -1; y_max := scall;
  end
  else
  begin
    kef := height / width; x_min := scall * -1; x_max := scall;
    y_min := scall * -kef; y_max := scall * kef;
  end;
  dx := (x_max - x_min) / width;
  dy := (y_max - y_min) / height;

```

```

lockdrawing;
for i: integer := 1 to width do
for j: integer := 1 to height do
begin
c := cplx((x_min + i * dx), (y_min + j * dy));
z := (-2*c-sign(c.Real)*sqrt(4*c*c-12))/6;
temp := z;
try
for k: integer := 1 to iterlim do
z := f(z, c);
if (distance(z, temp) < 2) then
setpixel( i, j, clwhite)
else
setpixel(i, j, clblack);
except
setpixel(i, j, clblack);
end;
end;
unlockdrawing;
Line(0, height div 2, width, height div 2, clGray);
Line(width div 2, 0, width div 2, height, clGray);
for var i := - Trunc(scall) to Trunc(scall) do
begin
Line(Round((i - x_min) / dx), height div 2 - 10,
      Round((i - x_min) / dx), height div 2 + 10, clGray);
TextOut(Round((i - x_min) / dx), height div 2, i);
Line(width div 2 - 10, Round((i - y_min) / dy),
      width div 2 + 10, Round((i - y_min) / dy), clGray);
TextOut(width div 2, Round((i - y_min) / dy), -i);
end;
writeln('drawing completed in ', milliseconds / 1000,
        ' seconds');
sleep(20000);
end.

```

Универсальность программы состоит в том, что, заменяя в ней семейство функций и их критические точки на новые, мы построим соответствующее им новое множество Мандельброта.

Множества Мандельброта являются индикаторами сопутствующих множеств Жюлиа. Именно: если мы возьмём точку c , принадлежащую множеству Мандельброта семейства функций $f_i(z)$, $i = 1, 2, 3, 4$, то сопутствующее множество Жюлиа соответствующей функции $f_i(z)$, $i = 1, 2, 3, 4$, при данном значении c будет связным (рис. 5 для функции $f_3(z) = z^3 + c$). Если же точка c не будет принадлежать множеству Мандельброта семейства функций $f_i(z)$,

$i = 1, 2, 3, 4$, то сопутствующее множество Жюлиа соответствующей функции $f_i(z)$, $i = 1, 2, 3, 4$, при данном значении c не будет связным (рассыплется в пыль, рис. 6 для функции $f_3(z) = z^3 + c$).

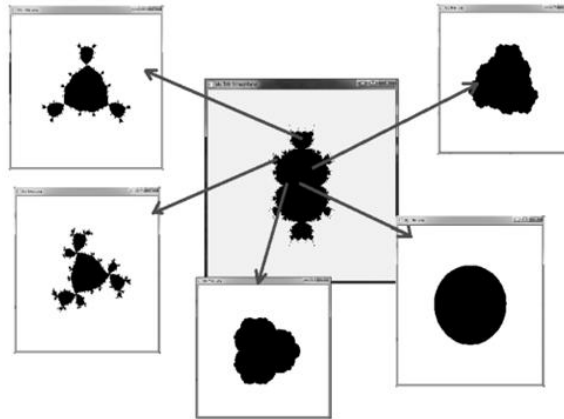


Рис. 5. Множество Мандельброта и сопутствующие множества Жюлиа для функции $f_3(z) = z^3 + c$, когда c принадлежит множеству Мандельброта

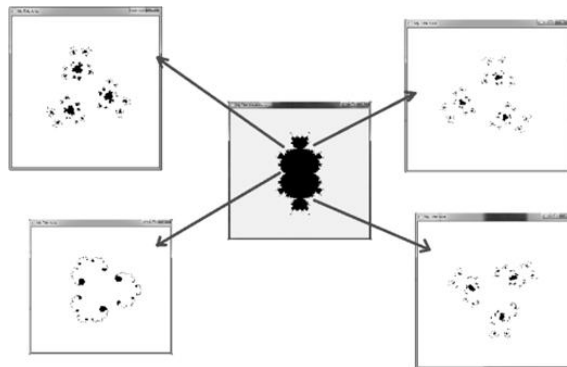


Рис. 6. Множество Мандельброта и сопутствующие множества Жюлиа для функции $f_3(z) = z^3 + c$, когда c не принадлежит множеству Мандельброта

На рис. 5 стрелки указывают, какие заполняющие множества Жюлиа соответствуют выделенным точкам, находящимся в множестве Мандельброта функции $f_3(z) = z^3 + c$.

На рис. 6 стрелки указывают, какие заполняющие множества Жюлиа соответствуют выделенным точкам, находящимся за пределами множества Мандельброта функции $f_3(z) = z^3 + c$.

Множества Мандельброта являются сложнейшими математическими объектами.

Обрамления множества Мандельброта семейств полиномов третьей степени

Определение. Под обрамлением множества Мандельброта M_c семейства полиномов $P_c(z)$ будем называть его подмножество, для каждой точки c из которого полином $P_c(z)$ имеет притягивающую неподвижную точку.

В [1, 4] показано, что обрамлением множества Мандельброта функции $f_3(z) = z^2 + c$ является внутренность кардиоиды, задаваемой уравнением $c = (1/2)e^{i\Theta} - (1/4)e^{2i\Theta}$, $\Theta \in [0, 2\pi]$.

Д. Милнор показал в [3], что обрамлением первого порядка множества Мандельброта функции $f_1(z) = z^2 + cz$ является внутренность множества $(2 + \mathbb{D}) \cup \mathbb{D}$, где $\mathbb{D}$ — единичный открытый круг радиуса единица с центром в начале координат.

Д. Милнор отмечает, что очень важной частью комплексной динамики является изучение параметризованных семейств отображений, которые лишь вскользь упоминаются в исследованиях до начала XXI века. Говоря о голоморфной динамике, Д. Милнор указывает, что данная область исследований обширна и быстро развивается [3].

Предложение. Обрамлением множества Мандельброта для функций $f_i(z)$, $i = 1, 2, 3, 4$, являются:

- а) при $i = 1$ — внутренность окружностей, заданных соотношениями $|c| = 1$ и $|2c - 3| = 1$;
- б) при $i = 2$ — внутренность линии (состоящей из двух овалов), заданной соотношением $c(t) = 1/(\sqrt{e^{it}} - 2 - \sqrt{e^{it}} - 2)$, $t \in [0, 2\pi]$;
- в) при $i = 3$ — внутренность эписцилоиды, заданной соотношением $c(t) = e^{it}/\sqrt{3} - e^{3it}/(3\sqrt{3})$, $t \in [0, 2\pi]$;
- г) при $i = 4$ — внутренность лемнискаты, состоящей из одной простой линии, заданной соотношением $c(t) = \sqrt{e^{it} - 1}$.

Доказательство. Пусть $i = 1$. Неподвижными точками функции $f_1(z) = z^3 + cz$ являются точки $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{1-c}$, $z_3 = -\sqrt{1-c}$, а модуль производной функции $f_1(z)$ в неподвижных точках будет равен $|f_1'(z_1)| = |c|$, $|f_1'(z_2)| = |2c - 3|$, $|f_1'(z_3)| = |2c - 3|$.

Пусть z_1, z_2, z_3 — притягивающие неподвижные точки. Тогда выполняются два условия:

- 1) $|c| < 1$;
- 2) $|2c - 3| < 1$.

Из первого условия следует, что точки границы множества, для которого функция $f_1(z)$ имеет неподвижную притягивающую точку, удовлетворяют соотношению $|c| < 1$, задающему единичную окружность с центром в начале координат.

Из второго условия вытекает, что точки множества, для которого функция $f_1(z)$ имеет неподвижную притягивающую точку, удовлетворяют соотношению

$|2c - 3| < 1$. Границей этого множества является окружность с центром в точке $(3/2, 0)$ радиуса $1/2$ (рис. 7).

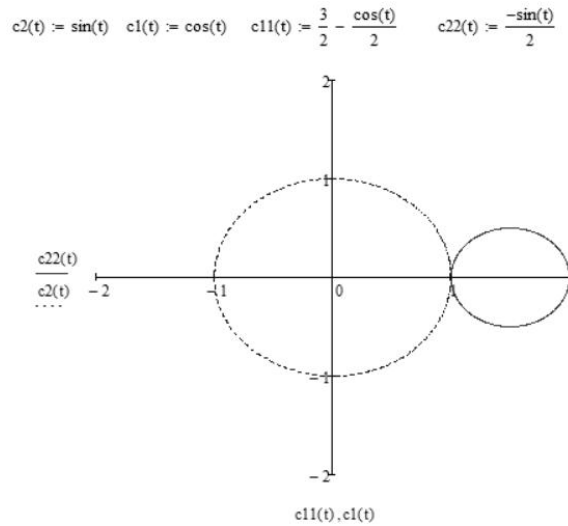


Рис. 7. Обрамление множества Мандельброта функции $f_1(z) = z^3 + cz$

Таким образом, границей множества неподвижных притягивающих точек являются две окружности: $|c| = 1$, $|2c - 3| = 1$, притягивающие неподвижные точки лежат внутри данных окружностей и образуют обрамление множества Мандельброта функции $f_1(z) = z^3 + cz$.

Пусть $i = 2$. Если z — притягивающая неподвижная точка, то выполняются два условия:

- 1) $z^3 + cz^2 = z$;
- 2) $f'(z) = 3z^3 + 2cz$.

Из первого условия следует, что точка $z_1 = 0$ является неподвижной точкой и $z^2 + cz = 1$. Для оставшихся неподвижных точек $f'(z) = 3z^2 + 2cz = 3z^2 + 2 - 2z^2 = 2 + z^2$. Кроме того, $f'(z) = 3 - 3cz + 2cz = 3 - cz$. Таким образом, $f'(z_2) = 2 + z_2^2$, $f'(z_3) = 2 + z_3^2$ и $f'(z_2) = 3 - cz_2$, $f'(z_3) = 3 - cz_3$. Далее имеем $c = 1/z - z$ для каждой ненулевой неподвижной точки функции. Точки границы множества, имеющего неподвижную притягивающую точку, удовлетворяют соотношению $|2 + z^2| = 1$, т. е. $2 + z^2 = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Из последней формулы находим уравнение кривой, внутренние точки которой будут принадлежать обрамлению множества Мандельброта. Так как $z = \sqrt{e^{it} - 2}$, $t \in [0, 2\pi]$, то $c(t) = 1/(\sqrt{e^{it} - 2} - \sqrt{e^{it} - 2})$.

Выведем параметрические уравнения данной кривой. Используя формулу Эйлера и формулу извлечения корня из комплексного числа, получаем

$$\sqrt{z} = \pm \left(\sqrt{\frac{\cos t - 2 + \sqrt{5 - 4 \cos t}}{2}} + \frac{|\sin t|}{\sin t} i \sqrt{\frac{2 - \cos t + \sqrt{5 - 4 \cos t}}{2}} \right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{z}} = \pm \left(\sqrt{\frac{\cos t - 2 + \sqrt{5 - 4 \cos t}}{2\sqrt{5 - 4 \cos t}}} - \frac{|\sin t|}{\sin t} i \sqrt{\frac{2 - \cos t + \sqrt{5 - 4 \cos t}}{2\sqrt{5 - 4 \cos t}}} \right).$$

Пусть

$$\frac{1}{\sqrt{e^{it} - 2}} - \sqrt{e^{it} - 2} = c(t) = c_1 + ic_2(t).$$

Тогда параметрическое задание искомой кривой будет иметь вид

$$\begin{cases} c_1(t) = \pm \left(\sqrt{\frac{\cos t - 2 + \sqrt{5 - 4 \cos t}}{2(5 - 4 \cos t)}} - \sqrt{\frac{\cos t - 2 + \sqrt{5 - 4 \cos t}}{2}} \right), \\ c_2(t) = \pm \left(-\frac{|\sin t|}{\sin t} \sqrt{\frac{2 - \cos t + \sqrt{5 - 4 \cos t}}{2(5 - 4 \cos t)}} - \frac{|\sin t|}{\sin t} \sqrt{\frac{2 - \cos t + \sqrt{5 - 4 \cos t}}{2}} \right). \end{cases}$$

Используя компьютерную программу, построим данную кривую (рис. 8).

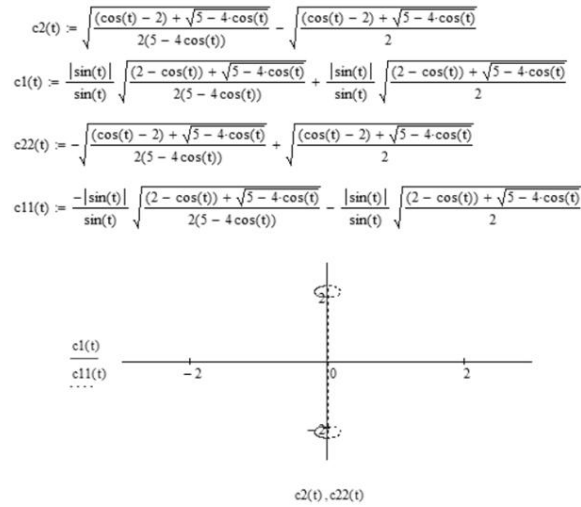


Рис. 8. Обрамление множества Мандельброта функции $f_1(z) = z^3 + cz^2$

Отметим, что обрамлению множества Мандельброта принадлежит точка $c = -(\sqrt{2}i + i/\sqrt{2})$, что согласуется с результатом, помещённым в строке 5 таблицы 1. Обрамлением множества Мандельброта являются верхняя и нижняя части почек множества Мандельброта.

Сделаем важное замечание. В данном случае функция $f(z) = z^3 + cz^2$ имеет две критические точки $\tilde{z}_1 = 0$ и $\tilde{z}_2 = -(2/3)c$. Здесь мы понимаем под множеством Мандельброта множество, которое состоит из ограниченных орбит точек $\tilde{z}_1 = 0$, $\tilde{z}_2 = -(2/3)c$ одновременно. Поскольку точка $\tilde{z}_1 = 0$ неподвижная, то множество Мандельброта в данном случае состоит из точек, орбиты которых ограничены для точки $\tilde{z}_2$.

Таким образом, границей множества неподвижных притягивающих точек являются два овала, изображённые на рис. 8, и притягивающие неподвижные точки лежат внутри данных овалов, образуя обрамление множества Мандельброта функции $f_2(z) = z^3 + cz^2$.

Пусть теперь $i = 3$. Будем иметь

- 1) $z^3 + c = z$;
- 2) $|f'(z)| = 3|z^2|$.

Из второго условия следует, что точки границы удовлетворяют соотношению $3|z^2| = 1$. Тогда $|z| = 1/\sqrt{3}$. Следовательно, $z = (1/\sqrt{3})e^{it}$, $c = z - z^3$.

Таким образом, мы получаем уравнение эпициклоиды:

$$c(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{it} - \frac{1}{3\sqrt{3}}e^{3it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Положим $c(t) = c_1(t) + ic_2(t)$. Тогда параметрическое уравнение данной кривой будет иметь вид

$$\begin{cases} c_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t - \frac{1}{3\sqrt{3}} \cos 3t, \\ c_2(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t - \frac{1}{3\sqrt{3}} \sin 3t. \end{cases}$$

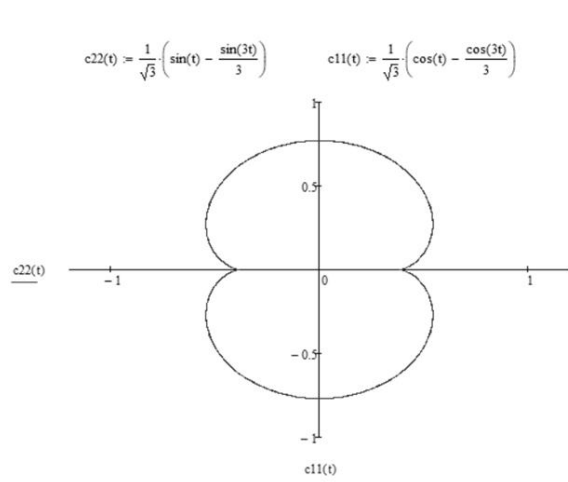


Рис. 9. Обрамление множества Мандельброта функции $f_3(z) = z^3 + c$

Используя компьютерную программу, построим эпициклоиду, для каждой внутренней точки c которой функция $f_c(z) = z^3 + c$ имеет неподвижную притягивающую точку (рис. 9).

Пусть $i = 4$. Тогда для функции $f_4(z) = z^3 + cz^2 + z$ будем иметь

- 1) $z^3 + cz^2 + z = z$;
- 2) $|f'(z)| = 3z^2 + 2cz + 1$.

Неподвижными точками будут точки $z_{1,2} = 0$, $z_3 = -c$. Найдём значение модуля производной в ненулевой неподвижной точке z_3 : $|f'(z)| = |3z^2 + 2cz + 1| = |c^2 + 1|$.

Нетрудно заметить, что координаты неподвижной ненулевой притягивающей точки функции $f_4(z) = z^3 + cz^2 + z$ удовлетворяют неравенству $|c^2 + 1| < 1$. Граничными точками этого множества будут точки, координаты которых удовлетворяют равенству $|c^2 + 1| = 1$. Таким образом, мы получаем уравнение лемнискаты:

$$c(t) = \sqrt{e^{it} - 1}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Положим $c(t) = c_1(t) + ic_2(t)$. Тогда параметрическое уравнение лемнискаты будет иметь вид

$$\begin{cases} c_1(t) = \pm \sqrt{\frac{\cos t - 1 + \sqrt{2 - 2\cos t}}{2}}, \\ c_2(t) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos t + \sqrt{2 - 2\cos t}}{2}}. \end{cases}$$

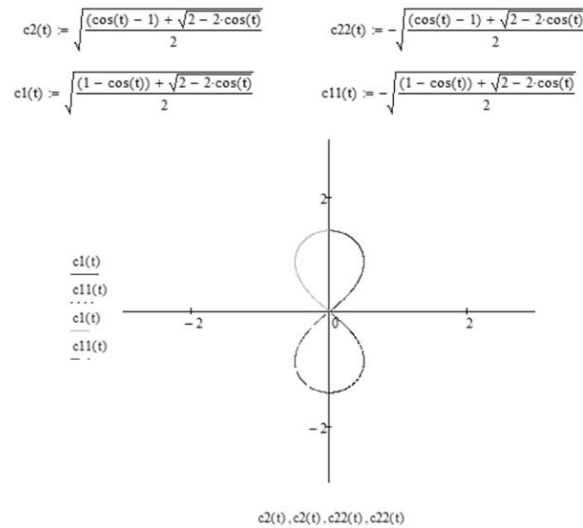


Рис. 10. Обрамление множества Мандельброта функции $f_4(z) = z^3 + cz^2 + z$

Используя компьютерную программу, построим лемнискату (рис. 10), для каждой внутренней точки c которой функция $f_4(z) = z^3 + cz^2 + z$ будет иметь неподвижную притягивающую точку, отличную от нулевой точки. $\square$

Литература

- [1] Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. — М.: Постмаркет, 2000.
- [2] Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций. — М.: Просвещение, 1977.
- [3] Милнор Дж. Голоморфная динамика. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
- [4] Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. — М.: Мир, 1993.
- [5] Секованов В. С. О множествах Жюлиа некоторых рациональных функций // Вестн. КГУ им. Н. А. Некрасова. — 2012. — Т. 18, № 2. — С. 23—28.
- [6] Секованов В. С. Элементы теории фрактальных множеств. — М.: ЛИБЕРКОМ, 2014.
- [7] Секованов В. С. Гладкие множества Жюлиа // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 4. — С. 133—150.
- [8] Секованов В. С. О некоторых дискретных нелинейных динамических системах // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 3. — С. 185—199.
- [9] Секованов В. С. Что такое фрактальная геометрия? — М.: ЛЕНАНД, 2016.
- [10] Секованов В. С. Элементы теории дискретных динамических систем. — СПб.: Лань, 2017.
- [11] Секованов В. С. Фрактальная геометрия. Преподавание, задачи, алгоритмы, синергетика, эстетика, приложения. — СПб.: Лань, 2019.
- [12] Секованов В. С. Голоморфная динамика. — СПб.: Лань, 2021.
- [13] Секованов В. С. О множествах Жюлиа функций, имеющих неподвижные параболические точки // Фундамент. и прикл. матем. — 2021. — Т. 23, вып. 4. — С. 163—176.
- [14] Секованов В. С., Рыбина Л. Б. Обрамления первого и второго порядков множеств Мандельброта и структура неподвижных точек полиномов второй степени // Фундамент. и прикл. матем. — 2022. — Т. 24, вып. 2. — С. 197—212.
- [15] Секованов В. С., Рыбина Л. Б., Березкина А. Е. О множествах Жюлиа функций, имеющих параболическую неподвижную точку // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин. — Кострома: КГУ, 2018. — С. 144—150.
- [16] Секованов В. С., Рыбина Л. Б., Стрункина К. Ю. Изучение обрамлений множеств Мандельброта полиномов второй степени как средство развития оригинальности мышления студентов // Вестн. Костром. гос. унив. Педагогика. Психология. Социокинетика. — 2019. — Т. 25, № 4. — С. 193—199.
- [17] Секованов В. С., Салов А. Л., Самохов Е. А. Использование кластера при исследовании фрактальных множеств на комплексной плоскости // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественнонаучных дисциплин. Материалы V Всероссийской науч.-метод. конф. — 2011. — С. 85—103.

- [18] Секованов В. С., Смирнова А. О. Развитие гибкости мышления студентов при изучении структуры неподвижных точек полиномов комплексной переменной // Вестн. Костром. гос. унив. Педагогика. Психология. Социокинетика. — 2016. — Т. 22, № 3. — С. 189—192.
- [19] Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. — New York: Wiley, 1990.
- [20] Sekovanov V., Ivkov V., Piguzov A., Fateev A. Performing a multi-stage mathematical and informational task «Building a fractal set with L-systems and information technologies» as a means of developing students' creativity // CEUR Workshop Proceedings. Selected Papers of the 11th Int. Sci.-Pract. Conf. Modern Information Technologies and IT-Education (2016). — P. 204—211.

