

# Сингулярные бассовы модули над дедекиндовыми первичными кольцами

**А. А. ТУГАНБАЕВ**

Национальный исследовательский университет МЭИ,  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.5

**Ключевые слова:** бассов модуль, непримитивное кольцо, дедекиндово первичное кольцо.

## Аннотация

Известное описание периодических бассовых абелевых групп распространяется на сингулярные бассовы модули над непримитивными дедекиндовыми первичными кольцами.

## Abstract

*A. A. Tuganbaev, Singular Bassian modules over Dedekind prime rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 3, pp. 161–174.*

A familiar description of singular Bassian Abelian groups is expanded to Bassian modules over non-primitive Dedekind prime rings.

## 1. Введение

Рассматриваются только ассоциативные кольца с ненулевой единицей и унитарные модули. Выражения типа « $A$  — нётерово кольцо» означают, что оба модуля  $A_A$  и  ${}_A A$  нётеровы. Под  $A$ -модулем обычно понимается правый  $A$ -модуль. Все не определённые в статье, но используемые в ней понятия стандартны (см., например, [2, 3, 5–8]).

Модуль  $M$  называется *бассовым*, если  $M$  не изоморфен подмодулю любого своего собственного гомоморфного образа, т. е. если  $N = 0$  для любого подмодуля  $N$  в  $M$ , для которого существует мономорфизм  $M \rightarrow M/N$ . В [4] было введено понятие бассовой абелевой группы. В [4] описаны все бассовы абелевы группы, т. е. бассовы  $\mathbb{Z}$ -модули (см. [4, основная теорема]).

Основным результатом данной статьи является теорема 1.3, которая описывает все сингулярные бассовы модули над непримитивными дедекиндовыми первичными кольцами (такими кольцами являются, например, все кольца целых алгебраических чисел и кольца матриц над ними). Кроме того, раздел 3 содержит некоторые результаты о бассовых модулях  $M \neq \text{Sing } M$ . Кольцо  $A$

называется *дедекиндовым первичным* кольцом, если  $A$  — нётерово первичное кольцо с классическим кольцом частных  $Q$  и каждый ненулевой идеал кольца  $A$  обратим в  $Q$ . Каждое дедекиндово первичное кольцо является наследственным нётеровым первичным кольцом. Кольцо  $A$  называется *непримитивным*, если  $A$  не является примитивным справа или слева, т. е.  $A$  не имеет точных простых правых или левых модулей. Другие необходимые определения и обозначения приведены во введении и разделе 2.

**1.1. Замечание.** Так как кольцо  $\mathbb{Z}$  является непримитивным дедекиндовым первичным кольцом, то теорема 1.3 обобщает описание периодических бассовых абелевых групп (см. [4], где описаны все бассовы абелевы группы).

**1.2. Замечание.** Заметим, что все дедекиндовы первичные кольца являются наследственными нётеровыми первичными кольцами; последние кольца также называются *HNP-кольцами*. В [9] доказано, что любое HNP-кольцо  $A$  примитивно (справа и слева) или ограничено (справа и слева), причём если  $A$  примитивно и ограничено, то  $A$  — простое артиново кольцо, поэтому непримитивные HNP-кольца совпадают с неартиновыми ограниченными HNP-кольцами.

**1.3. Теорема.** Если  $A$  — непримитивное дедекиндово первичное кольцо и  $M$  — сингулярный правый  $A$ -модуль с примарными компонентами  $M_i = M(P_i)$ ,  $i \in I$ , то равносильны следующие условия:

- 1)  $M$  — бассов модуль;
- 2) каждая примарная компонента  $M_i$  модуля  $M$  является редуцированным конечномерным модулем;
- 3) каждая примарная компонента  $M_i$  модуля  $M$  является нётеровым модулем.

Доказательство теоремы 1.3 даётся в разделе 2 в виде нескольких утверждений.

**1.4. Замечание.** Пусть ненулевой модуль  $M = M_0$  не является бассовым. Из определения бассова модуля следует, что  $M$  имеет ненулевой подмодуль  $N_1$ , для которого существует изоморфизм  $f_1: M \rightarrow M_1/N_1$ , где  $M_1$  — подмодуль в  $M = M_0$  и  $M_1$  строго содержит  $N_1 \neq 0$ . Так как ненулевой модуль  $M_1/N_1$  изоморфен  $M$  и не является бассовым, то существует изоморфизм  $f_2: M_1/N_1 \rightarrow M_2/N_2$ , где  $M_2$  — подмодуль в  $M_1$ ,  $M_2$  строго содержит  $N_2$  и  $N_2$  строго содержит  $N_1$ . Продолжая аналогично, получаем строго возрастающую цепь подмодулей  $N_1 \subset N_2 \subset \dots$  в  $M$  и невозрастающую цепь подмодулей  $M \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ . Следовательно, модуль  $M$  не является нётеровым.

**1.5. Замечание.** Из замечания 1.4 следует, что все нётеровы модули являются бассовыми. Заметим, что любая бесконечная прямая сумма попарно неизоморфных простых модулей является бассовым модулем, который не нётеров. В частности, если  $M$  — прямая сумма всех циклических  $p$ -групп, где все  $p$  — различные простые числа, то  $M$  — бассов, но не нётеров  $\mathbb{Z}$ -модуль.

**1.6. Замечание.** Все прямые слагаемые бассовых модулей являются бассовыми модулями.

**Доказательство.** Допустим, что  $M$  — бассов модуль,  $M = X \oplus Y$  и модуль  $X$  не является бассовым. Существует такой мономорфизм  $f: X \rightarrow X/X_1$ , что  $X_1$  — ненулевой подмодуль в  $X$ . Тогда существует мономорфизм  $g = f \oplus 1_Y: M \rightarrow M/X_1 = (X/X_1) \oplus B$ , где  $X_1 \neq 0$ . Получено противоречие.  $\square$

## 2. Сингулярные модули и близкие вопросы

**2.1.** Модуль  $M_A$  называется *инъективным*, если для любого мономорфизма  $f$  из  $M$  в произвольный модуль  $X_A$  модуль  $f(M)$  — прямое слагаемое в  $X$ . Модуль  $M$  называется *редуцированным*, если  $M$  не имеет ненулевых инъективных подмодулей. Подмодуль  $X$  модуля  $M$  называется *существенным*, если  $X \cap Y \neq 0$  для каждого ненулевого подмодуля  $Y$  в  $M$ . В этом случае говорят, что  $M$  — существенное расширение модуля  $X$ . Модуль  $M$  называется *равномерным* (или *однородным*), если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение, т. е. если любой ненулевой подмодуль в  $M$  является существенным. Если модуль  $M$  является существенным расширением модуля  $\bigoplus_{j \in J} X_j$ , где все  $X_j$  — ненулевые равномерные модули и  $\tau$  — мощность множества  $J$ , то  $\tau$  называется *размерностью Голди* или *равномерной размерностью* модуля  $M$  и обозначается  $\text{Gdim } M$ ; хорошо известно, что кардинальное число  $\text{Gdim } M$  определено однозначно. Модуль  $M$  называется *конечномерным*, если  $M$  не имеет подмодулей, являющихся прямыми суммами бесконечного числа ненулевых модулей; в этом случае его размерность Голди конечна.

**2.2.** Если  $N$  — подмножество правого (левого)  $A$ -модуля  $M$ , то  $r(N)$  (соответственно  $\ell(N)$ ) обозначает правый (соответственно левый) аннулятор множества  $N$  в  $A$ , т. е.  $r(N) = \{a \in A \mid Na = 0\}$  (соответственно  $\ell(N) = \{a \in A \mid aN = 0\}$ ). Через  $\text{Sing } M$  обозначается множество всех таких элементов  $m$  правого (левого)  $A$ -модуля  $M$ , что  $r(m)$  (соответственно  $\ell(m)$ ) — существенный правый (соответственно левый) идеал кольца  $A$ . Хорошо известно, что  $\text{Sing } M$  — вполне инвариантный подмодуль модуля  $M$ ; он называется *сингулярным подмодулем* модуля  $M$ . Если  $\text{Sing } M = M$  ( $\text{Sing } M = 0$ ), то модуль  $M$  называется *сингулярным* (соответственно *несингулярным*). Элемент  $a$  кольца  $A$  называется *регулярным*, если  $r(a) = \ell(a) = 0$ . Для правого  $A$ -модуля  $M$  через  $T(M)$  обозначается множество всех таких элементов  $m \in M$ , что  $r(m)$  содержит регулярный элемент кольца  $A$ ; это множество называется *периодической частью* модуля  $M$ . Модуль  $M$  называется *периодическим* (модулем без кручения), если  $T(M) = M$  (соответственно  $T(M) = 0$ ). Подмодуль  $X$  модуля  $M$  называется *замкнутым* в  $M$ , если  $X$  не имеет собственных существенных расширений в  $M$  (соответственно, фактор-модуль  $M/X$  несингулярен).

В следующем замечании 2.3 утверждение 1 хорошо известно и проверяется с помощью леммы Цорна.

**2.3. Замечания.** Пусть  $M$  — модуль и  $X$  — подмодуль в  $M$ .

1. Существуют такие замкнутые подмодули  $M_1$  и  $M_2$  в  $M$ , что  $M_1$  — существенное расширение  $X$ ,  $M_1 \cap M_2 = 0$  и  $M$  — существенное расширение модуля  $M_1 \oplus M_2$ . В этом случае  $M_1$  и  $M_2$  называются *замыканием* и *аддитивным дополнением* модуля  $X$  в  $M$ .
2. Если  $M_3$  — любой замкнутый существенный подмодуль в  $M$  и  $X \subseteq M_3$ , то  $M_3/X$  — существенный подмодуль в  $M/M_1$  [5, утверждение 1.4].
3. Если  $M_4$  — замкнутый подмодуль в  $M$  и  $X \subseteq M_4$ , то  $M_4/M_1$  — замкнутый подмодуль в  $M/X$  [5, с. 20, упражнение 16].
4. Если  $M_1$  — замкнутый подмодуль в  $M$  и  $M_5$  — существенный подмодуль в  $M$ , то  $M_1 \cap M_5$  — замкнутый подмодуль в  $M_5$  [5, с. 20, упражнение 17].

**2.4. Замечания.** Пусть  $M$  — модуль и  $M_1$  — подмодуль в  $M$ .

1. Для каждого модуля любой его гомоморфный образ с существенным ядром сингулярен [5, утверждение 1.20]. Следовательно, если фактор-модуль  $M/M_1$  не сингулярен, то подмодуль  $M_1$  замкнут в  $M$ .
2. Если модуль  $M$  не сингулярен, то модуль  $M/M_1$  является сингулярным в точности тогда, когда  $M$  — существенное расширение модуля  $M_1$  [5, утверждение 1.21].

**2.5.** Кольцо  $A$  называется *ограниченным справа (слева)*, если каждый его существенный правый (соответственно *левый*) идеал содержит ненулевой идеал кольца  $A$ . Кольцо называется *первичным*, если произведение любых двух его ненулевых идеалов не равно нулю. Кольцо  $A$  называется *полупервичным*, если  $A$  не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. Конечномерное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов называется *правым кольцом Голди*.

**2.6. Предложение.** Пусть  $A$  — полупервичное правое кольцо Голди.

1. Множество всех существенных правых идеалов кольца  $A$  совпадает со множеством всех правых идеалов кольца  $A$ , содержащих регулярные элементы. Следовательно, класс всех сингулярных (несингулярных) правых  $A$ -модулей совпадает с классом всех периодических правых  $A$ -модулей (соответственно  $A$ -модулей без кручения). Все существенные расширения сингулярных (несингулярных) правых  $A$ -модулей являются сингулярными (соответственно не сингулярными) модулями. Для любого модуля  $M_A$  модуль  $M/\text{Sing } M$  не сингулярен. Кольцо  $A$  имеет полупростое артиново правое классическое кольцо частных  $Q$ , причём (с точностью до  $A$ -модульного изоморфизма) ненулевые инъективные не сингулярные равномерные правые  $A$ -модули совпадают с минимальными правыми идеалами полупростого артинова кольца  $Q$ ; если  $A$  первично, то кольцо  $Q$  простое.
2. Каждый непериодический правый  $A$ -модуль содержит ненулевой не сингулярный подмодуль.

Предложение 2.6 хорошо известно (см., например, [5, 6]). Утверждение 1 доказано, например, в [6, 5.9, 5.10, 6.14, 6.10 (a)]. Утверждение 2 следует из 1. Утверждение 3 доказано, например, в [6, 6.12].

### 2.7. Классические кольца частных. Максимальные обратимые идеалы.

**Примарные компоненты.** Пусть кольцо  $A$  обладает классическим правым и левым кольцом частных  $Q$ . (В силу утверждения 1 предложения 2.6  $A$  имеет простое артиново классическое правое и левое кольцо частных  $Q$ , которое изоморфно кольцу матриц над телом. В частности, каждое нётерово первичное кольцо обладает простым артиновым классическим правым и левым кольцом частных.) Идеал  $B$  кольца  $A$  называется *обратимым*, если существует такой подбимодуль  $B^{-1}$  бимодуля  ${}_A Q_A$ , что  $BB^{-1} = B^{-1}B = A$ . Максимальные элементы множества всех собственных обратимых идеалов кольца  $A$  называются *максимальными обратимыми идеалами*. Множество всех максимальных обратимых идеалов кольца  $A$  обозначается через  $\mathcal{P}(A)$ . Если  $M$  —  $A$ -модуль и  $P \in \mathcal{P}(A)$ , то подмодуль  $\{m \in M \mid mP^n = 0, n = 1, 2, \dots\}$  называется  *$P$ -примарной компонентой* модуля  $M$  и обозначается через  $M(P)$ . Если  $M = M(P)$  для некоторого  $P \in \mathcal{P}(A)$ , то  $M$  называется *примарным* или  *$P$ -примарным* модулем.

**2.8. Замечание.** Пусть  $A$  — непримитивное HNP-кольцо,  $M$  — сингулярный  $A$ -модуль и  $\{M(P_i)\}_{i \in I}$  — множество всех примарных компонент модуля  $M$ . Многие свойства сингулярного модуля  $M$  и его примарных компонент хорошо известны (см., например, [11–16]). Эти свойства аналогичны свойствам примарных компонент периодических абелевых групп. Например,  $M = \bigoplus_{i \in I} M(P_i)$ , все примарные компоненты  $M(P_i)$  вполне инвариантны в  $M$ , для любого подмодуля  $X$  модуля  $M$  имеем  $X = \bigoplus_{i \in I} X \cap M(P_i)$ , где  $X \cap M(P_i)$  — примарные компоненты модуля  $X$ ,  $M/X = \bigoplus_{i \in I} M/X \cap M(P_i)$  и т. п.

**2.9.** Модуль  $M$  называется *цепным*, если решётка всех его подмодулей является цепью, т. е. в  $M$  любые два подмодуля сравнимы по включению (эквивалентно, любые два циклических подмодуля сравнимы по включению). Каждый цепной модуль равномерен, и каждый равномерный модуль неразложим.

**2.10. Предложение [6, 4.19, 4.20].** Кольцо  $A$  является нётеровым справа кольцом в точности тогда, когда каждый инъективный правый  $A$ -модуль является прямой суммой равномерных инъективных модулей, а также в точности тогда, когда все прямые суммы инъективных правых  $A$ -модулей инъективны.

**2.11. Предложение.** Пусть  $A$  — непримитивное HNP-кольцо,  $M$  — сингулярный правый  $A$ -модуль,  $\{M(P_i)\}$  — множество всех примарных компонент модуля  $M$ .

1. Все конечно порождённые подмодули модуля  $M$  являются конечными прямыми суммами циклических цепных модулей конечной длины.
2. Каждый неинъективный подмодуль модуля  $M$  имеет ненулевое циклическое цепное прямое слагаемое конечной длины.

3.  $M$  — инъективный модуль в точности тогда, когда каждая примарная компонента  $M(P_i)$  является инъективным модулем, а также в точности тогда, когда каждая примарная компонента  $M(P_i)$  является прямой суммой цепных инъективных модулей.

**Доказательство.** Утверждения 1 и 2 доказаны в [12, 13]. Утверждение 3 следует из утверждений 1 и 2 и предложения 2.10.  $\square$

**2.12. Предложение.** Пусть  $A$  — непримитивное HNP-кольцо,  $M$  — инъективный неразложимый ненулевой сингулярный модуль,  $M(P)$  — примарная компонента модуля  $M$ , где  $P$  — максимальный обратимый идеал кольца  $A$ .

1.  $M$  — цепной нециклический примарный модуль без максимальных подмодулей, все собственные подмодули модуля  $M$  циклически, имеют конечную длину и образуют счётную цепь  $0 = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_k \subset \dots$ , где  $X_k/X_{k-1}$  — простой модуль для любого  $k$  и существует такое натуральное число  $n$ , что  $X_j/X_{j-1} \cong X_k/X_{k-1}$  тогда и только тогда, когда  $j - k$  делится на  $n$ . Кроме того, модуль  $M$  обладает сюръективным эндоморфизмом с ненулевым ядром. Следовательно,  $M$  не является бассовым модулем.
2. Если  $\bar{M}$  — любой ненулевой гомоморфный образ модуля  $M$ , то для любого циклического подмодуля  $\bar{X}$  модуля  $\bar{M}$  длины не меньше  $k + n$  существует эпиморфизм  $\bar{X} \rightarrow X_k$  с ненулевым ядром, где  $X_k$  — произвольный циклический подмодуль из пункта 1.
3. Если  $Y$  — произвольный циклический цепной  $P$ -примарный модуль, то он изоморфен подфактору модуля  $M$  и аннулируется некоторой степенью идеала  $P$ .
4. Если  $\bigoplus_{i \in I} Y_i$  —  $P$ -примарный модуль, где все  $Y_i$  — циклические цепные модули, композиционные длины которых ограничены в совокупности, то модуль аннулируется некоторой натуральной степенью идеала  $P$ .
5. Каждый конечномерный редуцированный сингулярный  $A$ -модуль является конечной прямой суммой циклических цепных модулей конечной композиционной длины.
6. Каждый  $A$ -модуль с ненулевым аннулятором является прямой суммой циклических цепных модулей с ограниченными в совокупности конечными композиционными длинами.

Предложение 2.12 следует из предложения 2.6 и результатов [12, 13].

**2.13. Предложение.** Пусть  $A$  — непримитивное дедекиндово первичное кольцо,  $M$  — инъективный неразложимый ненулевой сингулярный модуль,  $M(P)$  — примарная компонента модуля  $M$ , где  $P$  — максимальный идеал кольца  $A$ .

1.  $M$  — цепной нециклический примарный модуль, все ненулевые фактор-модули которого изоморфны  $M$ , все собственные подмодули модуля  $M$  циклически, имеют конечную длину и образуют счётную цепь  $0 = X_0 \subset \dots \subset X_1 \subset \dots \subset X_k \subset \dots$ , где для любого  $k \geq 1$  все модули  $X_k/X_{k-1}$  изоморфны и просты.

2. Если  $Y$  — произвольный циклический цепной  $R$ -примарный модуль, то он изоморфен подфактору модуля  $M$  и аннулируется некоторой степенью идеала  $P$ .
3. Каждый  $R$ -примарный модуль  $N_A$  размерности Голди  $\tau$  является существенным расширением прямой суммы  $\bigoplus_{j \in J} S_j$  изоморфных простых модулей  $S_j$ , где  $|J| = \tau$  и  $\left(\bigoplus_{j \in J} S_j\right)P = 0$ .
4. Если  $\bigoplus_{i \in I} Y_i$  —  $R$ -примарный модуль, где все  $Y_i$  — циклические цепные модули, композиционные длины которых ограничены в совокупности, то модуль аннулируется некоторой натуральной степенью идеала  $P$ .
5. Пусть  $Q$  — инъективный  $R$ -примарный  $A$ -модуль размерности Голди  $\tau$  и  $X$  —  $R$ -примарный  $A$ -модуль размерности Голди  $\sigma \leq \tau$ . Тогда существует мономорфизм  $f: X \rightarrow Q$ .

**Доказательство.** Утверждения 1–4 вытекают из предложения 2.12 и результатов [12, 13].

Докажем утверждение 5. Модуль  $X$  является существенным расширением некоторого модуля  $Y = \bigoplus_{j \in J} Y_j$ , где все  $Y_j$  являются изоморфными простыми модулями и  $|J|\sigma \leq \tau$ . Тогда существует мономорфизм  $g: Y \rightarrow Q$ . Так как модуль  $Q$  инъективен, то  $g$  продолжается до гомоморфизма  $f: X \rightarrow Q$ , причём  $Y \cap \text{Ker } f \subseteq \text{Ker } g = 0$ . Так как  $Y$  — существенный подмодуль в  $X$ , то  $f$  — мономорфизм.  $\square$

**2.14. Замечание [15, с. 45, теоремы 2.7, 1.3].** Пусть  $A$  — непримитивное HNP-кольцо и  $M$  — сингулярный правый  $A$ -модуль. Тогда  $M$  удовлетворяет условиям I–III.

- I. Каждый конечно порождённый подфактор  $X$  модуля  $M$  является конечной прямой суммой циклических цепных модулей  $X_i$  конечной композиционной длины  $d(X_i)$ .
- II. Если  $X$  — любой подфактор модуля  $M$ , содержащий циклические цепные подмодули  $U$  и  $V$ , то для любого подмодуля  $W$  в  $U$  и каждого ненулевого гомоморфизма с условием  $d(U/W) < d(V/f(W))$  верно, что  $f$  продолжается до гомоморфизма  $U \rightarrow V$ .
- III. Для любого конечно порождённого подмодуля  $N$  в  $M$  кольцо  $A/r(N)$  артиново справа.

Далее,  $M$  имеет базисный подмодуль  $B$ ; это означает, что  $B$  — чистый подмодуль в  $M$ ,  $B$  — прямая сумма циклических цепных модулей конечной длины и  $M/B$  — прямая сумма равномерных модулей  $M_i/B$  бесконечной длины, причём из предложения 2.12 (утверждение 1) и 2.10 следует, что все модули  $M_i/B$  и  $M/B$  инъективны. Кроме того, любые два базисных подмодуля модуля  $M$  изоморфны.

**2.15. Замечание [16, с. 139, теорема 3.8].** Пусть  $A$  — непримитивное HNP-кольцо и  $M$  — сингулярный правый  $A$ -модуль. В силу замечания 2.14  $M$  имеет базисный подмодуль и любые его два базисных подмодуля изоморфны.

Элемент  $x \in M$  называется *равномерным*, если  $xA$  — цепной модуль. Для любого равномерного элемента  $x \in M$  обозначим через  $H_M(x)$  верхнюю грань всех длин  $d(T/xA)$ , где  $T$  — произвольный циклический цепной подмодуль в  $M$ , содержащий  $x$ . Обозначим через  $H_k(M)$  подмодуль в  $M$ , порождённый всеми равномерными элементами с условием  $H(x) \geq k$ . Минимум размерностей Голди всех подмодулей  $H_k(M)$  называется *финальным рангом*  $\text{fin. rank } M$  модуля  $M$ . Базисный подмодуль  $B$  модуля  $M$  называется *нижним базисным подмодулем*, если  $\text{Gdim } M = \text{fin. rank } M$ . В общем случае  $M$  не имеет нижнего базисного подмодуля. Однако если цокль модуля  $M$  имеет только конечное число однородных компонент (это так, например, если модуль  $M$  примарен), то модуль  $M$  имеет нижний базисный подмодуль [16, теорема 3.8].

**2.16. Теорема [16, теоремы 3.8, 3.10].** Пусть  $A$  — непримитивное HNP-кольцо и  $M$  — сингулярный правый  $A$ -модуль, цокль которого имеет только конечное число однородных компонент (это так, например, если модуль  $M$  примарен). Тогда модуль  $M$  имеет нижний базисный подмодуль  $B$  и  $M = H_1 \oplus H_2$ , где  $r(H_1) \neq 0$  и  $\text{Gdim } H_2 = \text{fin. rank } H_2 = \text{fin. rank } M$ .

**2.17. Лемма.** Пусть  $A$  — непримитивное HNP-кольцо и  $M$  — сингулярный правый  $A$ -модуль с примарными компонентами  $M_i = M(P_i)$ ,  $i \in I$ .

1. Каждая примарная компонента  $M_i$  модуля  $M$  является редуцированным конечномерным модулем в точности тогда, когда каждая примарная компонента  $M_i$  модуля  $M$  является нётеровым модулем.
2. При выполнении условий из пункта 1 модуль  $M$  является бассовым.
3. Если  $M$  — инъективный ненулевой модуль, то  $M$  — прямая сумма инъективных цепных модулей, не являющихся бассовыми.
4. Если  $M$  — бассов модуль, то  $M$  — редуцированный модуль.
5. Если  $M$  — бассов модуль и  $r(M) \neq 0$ , то каждая примарная компонента модуля  $M$  является нётеровым и артиновым модулем конечной длины.

**Доказательство.** По замечаниям 1.6 и 1.5 можно считать, что  $M = M_i$  — примарный модуль.

Утверждение 1 непосредственно проверяется с помощью индукции и первого утверждения предложения 2.12.

Докажем утверждение 2. Пусть  $X$  — подмодуль в  $M$  с примарными компонентами  $X_i = X \cap M_i$  и существует изоморфизм  $f: M \rightarrow Y/X$ , где  $X \subseteq Y$  и  $Y$  — модуль с примарными компонентами  $Y_i = Y \cap M_i$ . В силу замечания 2.8  $M/X = \bigoplus_{i \in I} M_i/X_i$ . По замечанию 1.5 все нётеровы модули  $M_i$  являются бассовыми модулями. Кроме того, изоморфизм  $f$  индуцирует изоморфизмы  $f_i: M_i \rightarrow Y_i/X_i$ . Поэтому  $X_i = 0$  для всех  $i$ , откуда следует, что  $X = 0$  и  $M$  — бассов модуль.

Докажем утверждение 3. По предложению 2.10  $M$  — прямая сумма инъективных сингулярных неразложимых ненулевых модулей  $M_i$ . По первому утверждению предложения 2.12 модули  $M_i$  не являются бассовыми.

Докажем утверждение 4. По замечанию 1.6 прямые слагаемые бассовых модулей являются бассовыми. Поэтому утверждение следует из пункта 3.

Докажем утверждение 5. По шестому утверждению предложения 2.12  $M = \bigoplus_{j \in J} M_j$ , где все  $M_i$  — циклические цепные модули с конечными композиционными длинами, ограниченными некоторым натуральным числом  $n$ . По утверждению 4  $M$  — редуцированный модуль. Теперь достаточно доказать, что  $|J| < \infty$ .

Допустим, что  $|J| = \infty$ . С помощью предложения 2.12 можно проверить, что бассов модуль  $M$  имеет прямое слагаемое  $X = \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$ , где все  $X_i$  — ненулевые изоморфные циклические цепные модули. Тогда ясно, что модуль  $X$  не бассов, что противоречит замечанию 1.6.  $\square$

**2.18. Окончание доказательства теоремы 1.3.** По замечаниям 1.6 и 1.5 можно считать, что  $M = M_i$  — примарный модуль.

Докажем импликацию 1)  $\implies$  2). По утверждению 4 леммы 2.17  $M$  — редуцированный модуль. Допустим, что  $M$  имеет бесконечный финальный ранг  $\text{fin. rank } M$  (см. замечание 2.15 о финальном ранге). По теореме 2.16  $M = H_1 \oplus H_2$ , где  $r(H_1) \neq 0$  и модуль  $H_2$  имеет бесконечный финальный ранг  $\text{fin. rank } H_2$ , который равен размерности Голди  $\text{Gdim } H_2 = \tau$ . По утверждению 5 леммы 2.17 модуль  $H_1$  нётеров. В частности, модуль  $H_1$  конечномерен. По теореме 2.16 модуль  $H_2$  имеет нижний базисный подмодуль  $B_2 \neq 0$  и  $\text{Gdim}(H_2/B_2) = \tau$ . По утверждению 3 предложения 2.13 модуль  $H_2$  является существенным расширением прямой суммы  $\bigoplus_{j \in J} S_j$  изоморфных простых модулей  $S_j$ , где  $|J| = \tau$ . Так как  $\text{Gdim}(H_2/B_2) = \tau$ , по утверждению 3 предложения 2.13 существует мономорфизм  $f$  из модуля  $\bigoplus_{j \in J} S_j$  в модуль  $H_2/B_2$ .

Модуль  $H_2$  — существенное расширение модуля  $\bigoplus_{j \in J} S_j$ , причём модуль  $H_2/B_2$  инъективен (см. замечание 2.14). Поэтому мономорфизм  $f$  продолжается до мономорфизма  $g: H_2 \rightarrow H_2/B_2$ , причём  $M = H_1 \oplus H_2$ . Тогда существует мономорфизм  $h: M = H_1 \oplus H_2 \rightarrow H_1 \oplus H_2/B_2 = M/B_2$ , который действует тождественно на  $H_1$  и совпадает с  $g$  на  $H_2$ . Так как  $M$  — бассов модуль и  $B_2 \neq 0$ , получено противоречие.

Доказано, что  $M$  имеет конечный финальный ранг  $\text{fin. rank } M = \text{Gdim } H_2 < \infty$ , причём  $M = H_1 \oplus H_2$ , где  $\text{Gdim } H_i < \infty$ ,  $i = 1, 2$ . Поэтому модуль  $M$  конечномерен. По утверждению 5 предложения 2.12 редуцированный конечномерный сингулярный модуль  $M$  является нётеровым модулем.

Эквивалентность 2)  $\iff$  3) и импликация 2)  $\implies$  1) следуют из леммы 2.17.  $\square$

### 3. Дополнение о бассовых модулях $M \neq \text{Sing } M$

Обозначим через  $Z_2(M)$  радикал Голди модуля  $M$ , т. е. такой подмодуль  $Z_2(M)$  в  $M$ , что  $Z_2(M)$  содержит  $\text{Sing } M$  и  $Z_2(M)/\text{Sing } M = \text{Sing}(M/\text{Sing } M)$ . Модуль  $M$  называется *радикальным по Голди*, если  $M = Z_2(M)$ .

**3.1. Замечания [5, с. 37, упражнения 20, 21, 19].** Пусть  $A$  — кольцо.

1.  $\text{Sing}(M/Z_2(M)) = 0$  для любого  $A$ -модуля  $M$ ,  $Z_2(A_A)$  — идеал кольца  $A$ , и фактор-кольцо  $A/Z_2(A_A)$  несингулярно справа.
2. Класс всех радикальных по Голди  $A$ -модулей  $M$  замкнут относительно подмодулей, фактор-модулей, прямых сумм, модульных расширений и существенных расширений.
3. Кольцо  $A$  несингулярно справа в точности тогда, когда для любого правого  $A$ -модуля  $M$  его радикал Голди совпадает с его сингулярным подмодулем.

**3.2. Лемма.** Пусть  $E$  — инъективный правый  $A$ -модуль, не совпадающий со своим радикалом Голди  $E_1$ , и модуль  $E/E_1$  имеет конечную размерность Голди  $n \geq 1$ . Тогда модуль  $E$  не содержит подмодуль  $\bigoplus_{k=1}^{n+1} H_k$ , где все  $H_k$  — ненулевые равномерные несингулярные модули.

**Доказательство.** Допустим противное. Тогда существует прямое разложение  $E = E_1 \oplus F \oplus G$ , где модуль  $F$  несингулярен (возможно,  $F = 0$ ),  $G = \bigoplus_{k=1}^{n+1} G_k$  и  $G_k$  — инъективная оболочка модуля  $H_k$ , являющаяся ненулевым несингулярным равномерным инъективным модулем,  $k = 1, \dots, n+1$ . Тогда  $\text{Gdim}(F \oplus G) \geq \text{Gdim } G = n+1$ . Так как  $\text{Gdim}(E/E_1) = \text{Gdim}(F \oplus G) = n$ , то получено противоречие.  $\square$

**3.3. Замечание.** Пусть  $A$  — наследственное справа кольцо. Тогда каждый гомоморфный образ любого инъективного правого  $A$ -модуля инъективен (см., например, [3, теорема 5.4]). Кроме того, кольцо  $A$  несингулярно справа, поскольку каждый его главный правый идеал  $aA$  проективен и изоморфен  $A_A/r(a)$ , откуда вытекает, что  $r(a)$  — прямое слагаемое модуля  $A_A$ .

**3.4. Предложение (см., например, [2, теоремы 21.15, 21.6; 6, 4.19, 4.20]).** Кольцо  $A$  является нётеровым справа в точности тогда, когда каждый ненулевой инъективный правый  $A$ -модуль  $E$  является прямой суммой  $\bigoplus_{i \in I} E_i$  ненулевых равномерных инъективных модулей  $E_i$  с локальными кольцами эндоморфизмов, а также в точности тогда, когда все прямые суммы инъективных правых  $A$ -модулей инъективны. Кроме того, если  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i = \bigoplus_{j \in J} F_j$  — два разложения модуля  $E$  в прямую сумму ненулевых равномерных инъективных модулей, то существует такая биекция  $f: I \rightarrow J$ , что  $E_i \cong F_{f(i)}$ .

**3.5. Предложение.** Пусть  $A$  — наследственное справа нётерово справа кольцо и  $M$  — правый  $A$ -модуль, причём  $Z_2(M)$  — бассов модуль и модуль  $M/Z_2(M)$  конечномерен. Тогда  $M$  — бассов модуль.

**Доказательство.** По утверждению 3 замечания 3.1 для любого правого  $A$ -модуля его радикал Голди совпадает с его (наибольшим) сингулярным подмодулем. Обозначим  $T = Z_2(M) = \text{Sing } M$ . Без ограничения мощности можно считать, что  $M \neq T$ , т. е.  $M/T$  — ненулевой несингулярный модуль конечной положительной размерности Голди  $n + 1$ ,  $n \geq 0$ . Пусть  $X$  — ненулевой подмодуль в  $M$ . Допустим, что существует мономорфизм  $\alpha: M \rightarrow M/X$ . Надо получить противоречие.

Возможны два случая:

- 1)  $X \subseteq T$ ;
- 2)  $X \not\subseteq T$ .

Случай 1):  $X \subseteq T$ . Так как  $T/X$  — радикальный по Голди модуль и  $(M/X)/(T/X)$  изоморфен несингулярному модулю  $M/T$ , то  $Z_2(M/X) = T/X$ . Тогда  $\alpha(T) \subseteq T/X$  и существует мономорфизм из бассова модуля  $T$  в его собственный фактор-модуль  $T/X$ . Получено противоречие.

Случай 2):  $X \not\subseteq T$ . Существует такой подмодуль  $T_1$  в  $T$ , что  $T_1 \cap (T \cap X) = 0$  и  $T$  — существенное расширение модуля  $T_1 \oplus (T \cap X)$ . Пусть  $E(M)$  — инъективная оболочка модуля  $M$  и  $E(T + X)$ ,  $E(T \cap X)$ ,  $E(T)$ ,  $E(T_1)$ ,  $E(X)$  — инъективные оболочки модулей  $T + X$ ,  $T \cap X$ ,  $T$ ,  $T_1$ ,  $X$  соответственно, лежащие в  $E(M)$ . Тогда  $E(T)$  совпадает с инъективной оболочкой  $E(T_1 \oplus (T \cap X)) = E(T_1) \oplus E(T \cap X)$  модуля  $T_1 \oplus (T \cap X)$ . По замечанию 3.3 модули  $E(M)/X$  и  $E(X)/X$  инъективны. По утверждению 1 замечания 2.4 модуль  $E(X)/X$  сингулярен. Так как  $X \not\subseteq T$ , то модули  $T + X$  и  $X$  не являются существенными расширениями модулей  $T$  и  $T \cap X$  соответственно. Поэтому существует такой ненулевой несингулярный подмодуль  $Y$  в  $X$ , что  $X$  — существенное расширение модуля  $(T \cap X) \oplus Y$ . Тогда  $E(X) = E((T \cap X) \oplus Y) = E(T \cap X) \oplus E(Y)$ , где  $E((T \cap X) \oplus Y)$ ,  $E(T \cap X)$ ,  $E(Y)$  — инъективные оболочки модулей  $(T \cap X) \oplus Y$ ,  $T \cap X$ ,  $Y$  внутри  $E(X) \subseteq E(M)$  и модуль  $E(Y)$  несингулярен. Существует такой несингулярный подмодуль  $Z$  в  $M$ , что  $(T + X) \cap Z = 0$ ,  $M$  — существенное расширение модуля  $(T + X) \oplus Z$ ,  $E(M) = E(T + X) \oplus E(Z)$  — инъективная оболочка модуля  $(T + X) \oplus Z$ , где  $E(Z)$  — инъективная оболочка модуля  $Z$ ,  $E(Z)$  — несингулярный конечномерный модуль размерности Голди  $n < n + 1 = \text{Gdim } E = \text{Gdim } M$ , и возможен случай  $Z = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} E(M) &= E(T) \oplus E(Y) \oplus E(Z) = \\ &= E(T_1) \oplus E(T \cap X) \oplus E(Y) \oplus E(Z) = E(T_1) \oplus E(X) \oplus E(Z). \end{aligned}$$

Так как модуль  $E(M)/X$  инъективен, то мономорфизм  $\alpha: M \rightarrow M/X$  продолжается до гомоморфизма  $\beta: E(M) \rightarrow E(M)/X$ , причём  $\beta$  — мономорфизм, поскольку  $M \cap \text{Ker } \beta = \text{Ker } \alpha = 0$  и  $M$  — существенный подмодуль в  $E(M)$ . Поэтому модуль  $\beta(E(M))$  инъективен и существует прямое разложение  $E(M)/X = \beta(E(M)) \oplus W$ . Так как кольцо  $A$  нётерово справа, то в силу предложения 3.4 существует прямое разложение  $\beta(E(M)) = \bigoplus_{i \in I} E_i$  в прямую сумму ненулевых равномерных инъективных модулей  $E_i$ . Так как модуль  $M/T$  содержит прямую

сумму  $n + 1$  ненулевых равномерных несингулярных модулей, то  $E(M)$  имеет прямое слагаемое  $\bigoplus_{j=1}^{n+1} W_j$ , где все  $W_j$  — ненулевые равномерные несингулярные модули. Поэтому верно следующее утверждение:

инъективный модуль  $E(M)/X$  имеет прямое слагаемое  $\bigoplus_{j=1}^{n+1} \beta(W_j)$ , (\*)  
 где все  $\beta(W_j)$  — ненулевые равномерные несингулярные модули.

При этом  $E(M)/X = (E(T_1) \oplus E(X) \oplus E(Z))/X \cong E(T_1) \oplus (E(X)/X) \oplus E(Z)$ , где модуль  $E(T_1) \oplus (E(X)/X)$  сингулярен, а  $E(Z)$  — несингулярный модуль конечной размерности Голди  $n \geq 0$ . Это противоречит утверждению (\*).  $\square$

**3.6. Теорема.** Пусть  $A$  — непримитивное HNP-кольцо,  $M$  — правый  $A$ -модуль, причём  $M \neq \text{Sing } M$ , каждая примарная компонента сингулярного модуля  $\text{Sing } M$  является нётеровым модулем и модуль  $M/\text{Sing } M$  конечномерен. Тогда  $M$  — бассов модуль.

Теорема 3.6 вытекает из теоремы 1.3 и предложения 3.5.

**3.7. Лемма [1, лемма 2.15].** Пусть  $A$  — кольцо и  $M$  — ненулевой правый  $A$ -модуль, не являющийся существенным расширением своего сингулярного подмодуля  $\text{Sing } X$ . Тогда  $M$  содержит подмодуль, который изоморфен ненулевому правому идеалу кольца  $A$ .

**3.8. Лемма.** Пусть  $A$  — первичное правое кольцо Голди.

1. Каждый ненулевой идеал  $B$  кольца  $A$  является существенным правым идеалом и содержит регулярный элемент.
2. Существует такое натуральное число  $n$ , что для любых ненулевых элементов  $b_1, \dots, b_n$  кольца  $A$  модуль  $b_1 A \oplus \dots \oplus b_n A$  содержит изоморфную копию свободного циклического модуля  $A_A$ .
3. Если  $X$  — непериодический правый  $A$ -модуль и  $X$  содержит несингулярный подмодуль  $Y$  бесконечной размерности Голди  $\tau$ , то  $X$  содержит ненулевой свободный подмодуль  $F$  бесконечного ранга  $\tau$  и, следовательно, существует эпиморфизм из модуля  $F$  на любой  $\tau$ -порождённый правый  $A$ -модуль.

**Доказательство.** Докажем утверждение 1. В силу первого утверждения предложения 2.6 достаточно доказать, что  $B$  — существенный правый идеал. Пусть  $C$  — такой правый идеал кольца  $A$ , что  $B \cap C = 0$ . Тогда  $(AC)B \subseteq B \cap C = 0$ . Так как кольцо  $A$  первично, то  $C \subseteq AC = 0$  и  $B$  — существенный правый идеал.

Докажем утверждение 2. По первому утверждению предложения 2.6) первичное правое кольцо Голди  $A$  обладает классическим правым кольцом частных  $Q$ , которое для некоторого натурального числа  $n$  изоморфно кольцу всех матриц размера  $n \times n$  над телом. Обозначим через  $B$  модуль  $b_1 A \oplus \dots \oplus b_n A$ . Тогда

$Q$ -модуль  $b_1Q \oplus \dots \oplus b_nQ$  содержит изоморфную копию модуля  $Q_Q$ . Поэтому модуль  $B$  содержит изоморфную копию модуля  $A_A$ .

Докажем утверждение 3. По лемме 3.7  $X$  содержит подмодуль, который изоморфен ненулевому главному правому идеалу  $bA$  кольца  $A$ . В силу утверждения 2 существует такое натуральное число  $n$ , что прямая сумма  $n$  изоморфных копий модуля  $bA_A$  содержит изоморфную копию свободного циклического модуля  $A_A$ . Тогда  $X$  содержит ненулевой свободный подмодуль бесконечного ранга  $|J|$ .  $\square$

**3.9. Лемма.** Пусть  $A$  — первичное правое кольцо Голди бесконечной мощности  $|A|$  и  $M$  — ненулевой несингулярный правый  $A$ -модуль бесконечной размерности Голди  $\tau \geq |A|$ . Тогда модуль  $M$  не является бассовым.

**Доказательство.** Пусть  $E$  — инъективная оболочка модуля  $M$ . Хорошо известно, что  $E = \bigoplus_{j \in J} E_j$ ,  $|J| = \tau$ ,  $E_j$  — равномерный инъективный модуль и для любого  $j$  существует изоморфизм  $E_j \cong S_A$ , где  $S$  — некоторый минимальный правый идеал простого артинова правого классического кольца частных  $Q$  кольца  $A$ . Так как ясно, что мощность  $|Q|$  правого классического кольца частных  $Q$  бесконечного кольца  $A$  равна  $|A|$ , то  $|E_j| = |A|$  и  $|M| = \tau$ . По утверждению 3 леммы 3.8 модуль  $M$  содержит свободный подмодуль  $F$  бесконечного ранга  $\tau$ , причём  $|M| = \tau$ . Поэтому существуют подмодуль  $X$  в  $F$  и эпиморфизм  $f: M \rightarrow F/X \subseteq M_X$ . Если  $X = 0$ , то  $M = F$  — бесконечная прямая сумма изоморфных копий модуля  $A_A$ ; в этом случае ясно, что модуль  $M$  не является бассовым. Если  $X \neq 0$  и  $M$  изоморфен подмодулю  $F/X$  в  $M_X$ , то модуль  $M$  тоже не является бассовым.  $\square$

**3.10. Предложение.** Пусть  $A$  — наследственное справа нётерово справа первичное счётное кольцо и  $M$  — ненулевой несингулярный правый  $A$ -модуль. Равносильны условия:

- 1)  $M$  — бассов модуль;
- 2)  $M$  — конечномерный модуль.

**Доказательство.** Импликация 2)  $\implies$  1) вытекает из теоремы 3.6.

Докажем импликацию 1)  $\implies$  2). Допустим противное. Тогда  $\text{Gdim } M \geq \aleph_0 = |A|$ . По лемме 3.9 модуль  $M$  не является бассовым. Получено противоречие.  $\square$

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-11-00052, <https://rscf.ru/project/22-11-00052>.

## Литература

- [1] Туганбаев А. А. Автоморфизм-продолжаемые и эндоморфизм-продолжаемые модули // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 4. — С. 175—248.
- [2] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. — М.: Мир, 1979.

- [3] Cartan H., Eilenberg S. Homological Algebra. — Princeton: The Princeton University Press, 1956.
- [4] Chekhlov A. R., Danchev P. V., Goldsmith B. On the Bassian property for Abelian groups // Arch. Math. (Basel). — 2021. — Vol. 117, no. 6. — P. 593–600.
- [5] Goodearl K. R. Ring Theory. Nonsingular Rings and Modules. — New York: Marcel Dekker, 1976.
- [6] Goodearl K. R., Warfield R. B. An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.
- [7] Kasch F. Modules and Rings. — London: Academic Press, 1982.
- [8] Lam T. Y. Lectures on Modules and Rings. — New York: Springer, 1999.
- [9] Lenagan T. H. Bounded hereditary Noetherian prime rings // J. London Math. Soc. — 1973. — Vol. 6. — P. 241–246.
- [10] Shock R. C. Dual generalizations of the Artinian and Noetherian conditions // Pacific J. Math. — 1974. — Vol. 54, no. 2. — P. 227–235.
- [11] Singh S. Quasi-injective and quasi-projective modules over hereditary Noetherian prime rings // Can. J. Math. — 1974. — Vol. 26, no. 5. — P. 1173–1185.
- [12] Singh S. Modules over hereditary Noetherian prime rings // Can. J. Math. — 1975. — Vol. 27, no. 4. — P. 867–883.
- [13] Singh S. Modules over hereditary Noetherian prime rings. II // Can. J. Math. — 1976. — Vol. 28, no. 1. — P. 73–82.
- [14] Singh S. (hnp)-rings over which every modules admits a basic submodule // Can. J. Math. — 1978. — Vol. 28, no. 1. — P. 73–82.
- [15] Singh S. Some decomposition theorems on Abelian groups and their generalizations. II // Osaka J. Math. — 1979. — Vol. 16. — P. 45–55.
- [16] Singh S., Talwar S. Modules over bounded hereditary Noetherian prime rings // Arch. Math. — 1979. — Vol. 32. — P. 134–142.