Аппроксимативная компактность в классических пространствах последовательностей

ХУ ФАН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: hufang86@yandex.ru, hufang2000@qq.com

УДК 517.982.256

Ключевые слова: аппроксимативно компактное множество, точка аппроксимативной компактности, классические пространства последовательностей, наилучшее приближение, устойчивость наилучшего приближения.

Аннотация

Точка x называется точкой аппроксимативной компактности для множества M, если из любой минимизирующей последовательности из M для точки x можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из M. Получен ряд критериальных условий для точек аппроксимативной компактности специальных подмножеств (замкнутый шар, дополнение к открытому шару) классических пространств последовательностей $c_0(\Gamma)$, $c(\Gamma)$, $\ell^p(\Gamma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Abstract

Hu Fang, Approximative compactness in classical sequence spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 3, pp. 175—188.

A point x is a point of approximative compactness for a set M if any minimizing sequence from M for x contains a subsequence converging to some point from M. We obtain several characterizations for points of approximative compactness for special subsets (a closed ball, the complement of an open ball) in classical sequence spaces $c_0(\Gamma)$, $c(\Gamma)$, $\ell^p(\Gamma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

1. Введение

В 1961 г. Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин [6] ввели фундаментальное понятие аппроксимативной компактности множества, которое играет важную роль в геометрической теории приближений и её приложениях (см., например, [11, гл. 4]). Определение аппроксимативно компактного множества даётся ниже. Известен ряд обобщений этого понятия: слабая аппроксимативная компактность, аппроксимативная компактность по Дойчу, аппроксимативная компактность в метрических и полуметрических пространствах и проч. (см. [1, 2, 8, 12]).

Будем использовать следующие обозначения:

$X = (X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство над $\mathbb{R}$;

Фундаментальная и прикладная математика, 2025, том 25, № 3, с. 175—188.

$\mathring{B}(x,r)=\{y\in X\colon \|y-x\|<r\}$ — открытый шар с центром x и радиусом r;
$B(x,r)=\{y\in X\colon \|y-x\|\leqslant r\}$ — замкнутый шар с центром x и радиусом r;
$S(x,r)=\{y\in X\colon \|y-x\|=r\}$ — сфера с центром x и радиусом r.

В частном случае мы полагаем, что $B:=B(0,1)$ — единичный шар, $\mathring{B}:=\mathring{B}(0,1)$ — открытый единичный шар, $S=S(0,1)$ — единичная сфера.

Величина наилучшего приближения или расстояние от заданного элемента x линейного нормированного пространства X до заданного непустого множества $M\subset X$ определяется формулой

$$\rho(x,M):=\inf_{y\in M}\|x-y\|.$$

Множество ближайших точек из множества M для точки x определяется следующим образом:

$$P_Mx:=\{y\in M\colon \|x-y\|=\rho(x,M)\}.$$

Оператор P_Mx называется *оператором наилучшего приближения* или *метрической проекцией на множество* M.

Определение 1.1. Точка $x\in X$ называется *точкой аппроксимативной компактности* для множества M (обозначение: $x\in\mathrm{AC}(M)$), если из любой последовательности $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset M$, удовлетворяющей соотношению $\|x-y_n\|\to\rho(x,M)$ (такая последовательность называется *минимизирующей*), можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из M.

Ниже $\mathrm{AC}(M)$ — множество всех точек аппроксимативной компактности для множества M.

Определение 1.2. Множество M называется *аппроксимативно компактным*, если $\mathrm{AC}(M)=X$, т. е. любая точка $x\in X$ является точкой аппроксимативной компактности для M.

Хорошо известно, что аппроксимативно компактное множество является множеством существования и метрическая проекция на него полунепрерывна сверху (см., например, [4]).

Напомним определения классических пространств последовательностей c, $c(\Gamma)$, c_0, $c_0(\Gamma)$, ℓ^1, $\ell^1(\Gamma)$, ℓ^∞, $\ell^\infty(\Gamma)$, ℓ^p, $\ell^p(\Gamma)$, где $1<p<\infty$.

В этой работе мы всегда предполагаем, что Γ — бесконечное множество.

Пространство $c(\Gamma)$ состоит из всех функций $x\colon\Gamma\to\mathbb{R}$, таких что найдётся $A=A(x)\in\mathbb{R}$, такое что при любом $\varepsilon>0$ множество $\{\gamma\in\Gamma\colon |x(\gamma)-A|\geqslant\varepsilon\}$ конечно. Норма пространства $c(\Gamma)$ — классическая sup-норма $\|x\|:=\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)|$. Как обычно,

$$c=c(\mathbb{N}):=\Big\{x=\big(x^{(1)},x^{(2)},\dots\big)\colon \text{существует } \lim_{i\to\infty}x^{(i)}<\infty\Big\}.$$

Пространство c снабжено sup-нормой $\|x\|:=\sup\limits_{i\in\mathbb{N}}\big|x^{(i)}\big|$.

Пространство $c_0(\Gamma)$ состоит из всех функций $x\colon\Gamma\to\mathbb{R}$, таких что для любого положительного числа $\varepsilon>0$ множество $\{\gamma\in\Gamma\colon |x(\gamma)|\geqslant\varepsilon\}$ конечно. На пространстве $c_0(\Gamma)$ рассматривается норма $\|x\| := \sup\limits_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)|$. Как обычно,

$$c_0 = c_0(\mathbb{N}) := \Big\{x = \big(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\big)\colon \lim_{i\to\infty} x^{(i)} = 0\Big\}.$$

На пространстве c_0 рассматривается норма $\|x\| := \max\limits_{i\in\mathbb{N}}\big|x^{(i)}\big|$.

Сумма по не обязательно счётному множеству Γ определяется следующим образом:

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)| := \sup_F \sum_{\gamma\in F}|x(\gamma)|,$$

где верхняя грань берётся по всем конечным подмножествам F множества Γ.

Пространство $\ell^\infty(\Gamma)$ состоит из всех ограниченных функций $x\colon \Gamma\to\mathbb{R}$. На нём вводится стандартная норма $\|x\| := \sup\limits_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)|$. Как обычно,

$$\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) := \Big\{x = \big(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\big)\colon \sup_{i\in\mathbb{N}}\big|x^{(i)}\big| < \infty\Big\}.$$

Его норма $\|x\| := \sup\limits_{i\in\mathbb{N}}\big|x^{(i)}\big|$.

Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Пространство $\ell^p(\Gamma)$ состоит из всех функций $x\colon \Gamma\to\mathbb{R}$, таких что $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)|^p < \infty$. Его норма $\|x\| := \Big(\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)|^p\Big)^{1/p}$. Как обычно,

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) := \left\{x = \big(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\big)\colon \sum_{i=1}^{\infty}\big|x^{(i)}\big|^p < \infty\right\},$$

где $1 < p < \infty$. На пространстве ℓ^p рассматривается норма $\|x\| := \Big(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\big|x^{(i)}\big|^p\Big)^{1/p}$.

Замечание 1.1. Классические пространства последовательностей c, c_0, ℓ^1, ℓ^∞, ℓ^p, где $1 < p < \infty$, и их обобщения $c(\Gamma)$, $c_0(\Gamma)$, $\ell^1(\Gamma)$, $\ell^\infty(\Gamma)$, $\ell^p(\Gamma)$, где $1 < p < \infty$, являются банаховыми пространствами.

В настоящей работе мы изучаем свойства аппроксимативно компактных множеств специального вида в классических нормированных пространствах последовательностей. В частности, будет дано полное описание точек аппроксимативной компактности единичного шара B и его дополнения $X \setminus \mathring{B}$ в классических пространствах $X = c(\Gamma)$, $c_0(\Gamma)$, c, c_0, $\ell^1(\Gamma)$, ℓ^1, $\ell^\infty(\Gamma)$, ℓ^∞, $\ell^p(\Gamma)$, ℓ^p $(1 < p < \infty)$. Результаты такого типа оказываются полезными при изучении точек аппроксимативной компактности множеств более общего вида.

2. Аппроксимативная компактность в пространствах $\ell^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$

Напомним, что пространство X равномерно выпукло, если для любого $\varepsilon \in (0, 2]$ существует $\delta > 0$, такое что если $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$, то $\|(x + y)/2\| \leqslant 1 - \delta$.

Пусть X — линейное нормированное пространство. Точка x из единичной сферы $S \subset X$ называется CLUR-*точкой* (CLUR — сокращение от англ. «compactly locally uniformly rotund»), если условия $y_n \in S$, $\|x + y_n\|/2 \to 1$ влекут, что (y_n) имеет сходящуюся подпоследовательность. В нормированном случае класс пространств (CLUR) определяется следующим образом: $X \in (\mathrm{CLUR})$, если любая точка сферы S является CLUR-точкой. (Как и выше, здесь S — единичная сфера пространства.)

Класс CLUR-пространств был введён Л. П. Власовым в 1967 г. (см., например, [1]). Примерно в то же время Е. В. Ошман [7] дал эквивалентное определение таких пространства. Оба этих класса были введены для банаховых пространств, но в настоящей работе мы не предполагаем полноту пространств в соответствующих определениях.

Замечание 2.1. Легко видеть, что всякое равномерно выпуклое пространство является CLUR-пространством.

Пространство $\ell^p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ является равномерно выпуклым пространством, и следовательно, оно также лежит в классе CLUR.

Множество M называется *чебышёвским множеством*, если для любой точки x множество $P_M x$ одноточечно. Термин «чебышёвское множество» был введён Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным [5] в честь Пафнутия Львовича Чебышёва — основателя теории приближения.

Напомним следующий хорошо известный результат (см., например, [11, с. 84]).

Теорема 2.A. *Непустое замкнутое выпуклое подмножество полного равномерно выпуклого банахова пространства является аппроксимативно компактным чебышёвским множеством.*

Следствие 2.1. *В пространстве $\ell^p(\Gamma)$, где $1 < p < \infty$, единичный шар $B_{\ell^p(\Gamma)}$ аппроксимативно компактен, т. е.*

$$\mathrm{AC}\big(B_{\ell^p(\Gamma)}\big) = \ell^p(\Gamma).$$

И. Г. Царьков [9, с. 183] получил следующую характеризацию CLUR-пространств в терминах точек аппроксимативной компактности дополнения к единичному шару.

Теорема 2.B. *Пусть X — бесконечномерное линейное нормированное пространство. Тогда $X \in (\mathrm{CLUR})$, если и только если*

$$\mathrm{AC}(X \setminus \mathring{B}) = X \setminus \{0\}.$$

Следствие 2.2. *В пространстве $X = \ell^p(\Gamma)$, где $1 < p < \infty$, имеем*

$$\mathrm{AC}(X \setminus \mathring{B}) = X \setminus \{0\}.$$

3. Описание точек аппроксимативной компактности для множества $X \setminus \mathring{B}$ в пространствах $X = c(\Gamma), c_0(\Gamma)$

Определим вспомогательную функцию $D(x)$ формулой

$$D(x) := \begin{cases} +1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Теорема 3.1. *В пространстве $X = c(\Gamma)$*

$$\mathrm{AC}(X \setminus \mathring{B}) = X \setminus \mathring{B}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathring{B}$, т. е. $\|x\| < 1$. По определению пространства $c(\Gamma)$ для x существует число $A = A(x) \in \mathbb{R}$, такое что для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\gamma \in \Gamma \colon |x(\gamma) - A| \geqslant \varepsilon\}$ конечно. Обозначим

$$\Gamma' = \{\gamma \in \Gamma \colon |x(\gamma) - A| \geqslant \varepsilon\} = \{\gamma_1', \ldots, \gamma_s'\}.$$

Пусть $\gamma_1'', \gamma_2'', \ldots$ — счётное количество попарно различных координат из множества $\Gamma \setminus \Gamma'$.

Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. $|A| < \|x\|$. В этом случае существует индекс $\gamma_*' \in \Gamma'$, такой что $|x(\gamma_*')| = \|x\|$. Определим последовательность $\{y_n\}$ следующим образом:

$$y_n(\gamma) := \begin{cases} D\big(x(\gamma)\big) & \text{при } \gamma = \gamma_*', \\ x(\gamma) + D\big(x(\gamma)\big) \cdot (1 - \|x\|) & \text{при } \gamma = \gamma_n'', \\ x(\gamma) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что $y_n \in X \setminus \mathring{B}$. Покажем, что для любого номера n имеем $\|x - y_n\| = 1 - \|x\|$. Если $\gamma = \gamma_*'$, то

$$|x(\gamma) - y_n(\gamma)| = \big|x(\gamma_*') - D\big(x(\gamma_*')\big)\big| = 1 - \|x\|.$$

Если $\gamma = \gamma_n''$, то

$$|x(\gamma) - y_n(\gamma)| = \big|x(\gamma) + D\big(x(\gamma)\big) \cdot (1 - \|x\|) - x(\gamma)\big| = 1 - \|x\|.$$

В остальных случаях $|x(\gamma) - y_n(\gamma)| = 0$. Поэтому $\{y_n\} \subset X \setminus \mathring{B}$ — минимизирующая последовательность для x из множества $X \setminus \mathring{B}$. Однако для любых $p, n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|y_{n+p} - y_n\| \geqslant |y_{n+p}(\gamma_n'') - y_n(\gamma_n'')| = 1 - \|x\|,$$

поэтому $\{y_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности.

Случай 2. $|A| = \|x\|$. Определим последовательность $\{y_n\}$ следующим образом:

$$y_n(\gamma) := \begin{cases} x(\gamma) & \text{при } \gamma = \gamma_n'', \\ x(\gamma) + D\big(x(\gamma)\big) \cdot (1 - \|x\|) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что $y_n \in X \setminus \mathring{B}$, так как

$$\|y_n\| = \sup_\gamma |y_n(\gamma)| = \sup_\gamma \big|x(\gamma) + D\big(x(\gamma)\big) \cdot (1 - \|x\|)\big| = \\ = \sup_\gamma |x(\gamma)| + 1 - \|x\| = \|x\| + 1 - \|x\| = 1$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $\|x - y_n\| = 1 - \|x\|$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Если $\gamma = \gamma''_n$, то $|x(\gamma) - y_n(\gamma)| = 0$. В остальных случаях $|x(\gamma) - y_n(\gamma)| = 1 - \|x\|$. Таким образом, $\{y_n\} \subset X \setminus \mathring{B}$ — минимизирующая последовательность для x. Однако для любых $n, p \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|y_{n+p} - y_n\| \geqslant |y_{n+p}(\gamma''_n) - y_n(\gamma''_n)| = |x(\gamma) + D\big(x(\gamma)\big) \cdot (1 - \|x\|) - x(\gamma)| = 1 - \|x\|,$$

поэтому $\{y_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности. Итак, если $\|x\| < 1$, то $x \notin \mathrm{AC}(X \setminus \mathring{B})$. Таким образом,

$$\mathrm{AC}(X \setminus \mathring{B}) = X \setminus \mathring{B}. \qquad \square$$

Следствие 3.1. *В пространстве $X = c_0(\Gamma)$*

$$\mathrm{AC}(X \setminus \mathring{B}) = X \setminus \mathring{B}.$$

Действительно, если $x \in c_0(\Gamma)$, то $A = 0$, поэтому или $x = 0$, или $|A| < \|x\|$. В случае $x = 0$ результат очевиден, а при $x \neq 0$ мы попадаем в условия случая 1 доказательства теоремы 3.1, при этом построенная в этом случае последовательность $y_n(\gamma)$ лежит в $c_0(\Gamma)$.

4. Описание точек аппроксимативной компактности для единичного шара в пространствах $c(\Gamma)$, $c_0(\Gamma)$

Пусть $x \notin B$. По определению пространства $c(\Gamma)$ для x существует число $A = A(\varepsilon)$, такое что для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ множество $\{\gamma \in \Gamma\colon |x(\gamma) - A| \geqslant \varepsilon\}$ конечно. Обозначим

$$\Gamma' = \{\gamma \in \Gamma\colon |x(\gamma) - A| \geqslant \varepsilon\} = \{\gamma'_1, \ldots, \gamma'_s\}.$$

Лемма 4.1. *Пусть $x \in c(\Gamma) \setminus B$ и $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ — минимизирующая последовательность для x. Если $|A| = \|x\|$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся N, такое что для любого $n > N$ и любого $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma'$ имеет место неравенство $1 - 2\varepsilon < |y_n(\gamma)|$.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что найдётся $\varepsilon > 0$, такое что для любого N найдутся $n_0 > N$ и $\gamma_0 \in \Gamma \setminus \Gamma'$, такие что $|y_{n_0}(\gamma_0)| \leqslant 1 - 2\varepsilon$.

Так как $\gamma_0 \in \Gamma \setminus \Gamma'$, то $|x(\gamma_0) - A| < \varepsilon$, откуда следует, что $-\varepsilon < x(\gamma_0) - A < \varepsilon$. Это влечёт, что $A - \varepsilon < x(\gamma_0) < A + \varepsilon$, поэтому

$$\|x\| - \varepsilon = |A| - \varepsilon < |x(\gamma_0)| < |A| + \varepsilon = \|x\| + \varepsilon.$$

Тогда

$$\|y_{n_0} - x\| \geqslant |y_{n_0}(\gamma_0) - x(\gamma_0)| = |x(\gamma_0) - y_{n_0}(\gamma_0)| \geqslant \\ \geqslant |x(\gamma_0)| - |y_{n_0}(\gamma_0)| > (\|x\| - \varepsilon) - (1 - 2\varepsilon) = \|x\| - 1 + \varepsilon.$$

Следовательно, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не является минимизирующей последовательностью для x. Противоречие.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое N, что для любых $n > N$ и $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma'$ имеет место неравенство $1 - 2\varepsilon < |y_n(\gamma)|$. □

Лемма 4.2. *Пусть* $x \in c(\Gamma) \setminus B$. *Если* $|A| = \|x\|$, *то* $x \in \mathrm{AC}(B)$.

Доказательство. Пусть $\{y_n\}$ — произвольная минимизирующая последовательность из B для x. По лемме 4.1 для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, такой что для любых $n > N$ и $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma'$ имеет место неравенство $1 - 2\varepsilon < |y_n(\gamma)|$.

Шаг 1. Заметим, что $\Gamma' \subset \Gamma$ — конечное множество. Можем выбрать подпоследовательность $\{\tilde{y}_n\}$, такую что

для каждого $\gamma \in \Gamma'$ справедливо $|\tilde{y}_{n+p}(\gamma) - \tilde{y}_n(\gamma)| < 2\varepsilon$ при всех $n, p \in \mathbb{N}$.

Шаг 2. Выбор подпоследовательности. Найдётся n_1, такой что для любых $n \geqslant n_1$ и $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma'$ имеет место неравенство $1 - 2\varepsilon < |\tilde{y}_n(\gamma)| \leqslant 1$. Имеем $|\tilde{y}_n(\gamma) - \tilde{y}_{n_1}(\gamma)| < |1 - (1 - 2\varepsilon)| = 2\varepsilon$. Это даёт нам $\tilde{y}_{n_1}$.

Продолжаем аналогично. Найдётся номер $n_j > n_{j-1}$, такой что $1 - 2\varepsilon < |\tilde{y}_n(\gamma)| \leqslant 1$ при любых $n \geqslant n_j$ и $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma'$. Имеем $|\tilde{y}_n(\gamma) - \tilde{y}_{n_j}(\gamma)| < |1 - (1 - 2\varepsilon)| = 2\varepsilon$, что даёт нам точку $\tilde{y}_{n_j}$.

Далее продолжаем аналогично.

Последовательность $\{\tilde{y}_{n_j}\}$ такова, что $\|\tilde{y}_{n_j} - \tilde{y}_{n_k}\| < 2\varepsilon$ при всех $\varepsilon > 0$ и $j, k \geqslant 1$. Без ограничения общности можно считать, что $\{\tilde{y}_{n_j}\}$ такова, что $\|\tilde{y}_{n_j} - \tilde{y}_{n_k}\| < \varepsilon$ при всех $\varepsilon > 0$ и $j, k \geqslant 1$.

Итак, получена нужная подпоследовательность $\{\tilde{y}_{n_j}\} \subset \{y_n\}$, сходящаяся к некоторой точке из B. Таким образом, $x \in \mathrm{AC}(B)$. □

Лемма 4.3. *Пусть* $x \in c(\Gamma) \setminus B$. *Если* $|A| < \|x\|$, *то* $x \notin \mathrm{AC}(B)$.

Доказательство. Определим

$$\alpha = \min\left\{\|x\| - 1,\ \frac{1}{2}(\|x\| - |A|)\right\}.$$

Ясно, что $\alpha > 0$.

По определению пространства $c(\Gamma)$ множество $\{\gamma \in \Gamma\colon |x(\gamma) - A| \geqslant \alpha\}$ конечно. Положим

$$\Gamma' = \{\gamma \in \Gamma\colon |x(\gamma) - A| \geqslant \alpha\} = \{\gamma'_1, \ldots, \gamma'_s\}.$$

Существует точка $\gamma'_* \in \Gamma'$, такая что $|x(\gamma'_*)| = \|x\|$, так как $|A| < \|x\|$.

Во множестве $\Gamma \setminus \Gamma'$ найдётся счётное количество попарно различных элементов $\gamma_1'', \gamma_2'', \ldots$. Определим последовательность $\{y_n\}$ следующим образом:

$$y_n(\gamma) = \begin{cases} D\bigl(x(\gamma)\bigr) & \text{при } \gamma = \gamma_*', \\ D\bigl(x(\gamma)\bigr) \cdot \min\{|x(\gamma)| - \alpha,\ 1 - \alpha\} & \text{при } \gamma = \gamma_n'', \\ D\bigl(x(\gamma)\bigr) \cdot \min\{|x(\gamma)|,\ 1\} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что $\{y_n\} \subset B$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $\|x - y_n\| = \|x\| - 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Если $\gamma = \gamma_*'$, то $|x(\gamma) - y_n(\gamma)| = |x(\gamma_*')| - 1 = \|x\| - 1$. Если $\gamma = \gamma_n''$, то $|x(\gamma) - A| < \alpha$, откуда следует, что $-\alpha < x(\gamma) - A < \alpha$. Следовательно, $A - \alpha < x(\gamma) < A + \alpha$. Это влечёт, что $|A| - \alpha < |x(\gamma)| < |A| + \alpha$. Следовательно, если $\gamma = \gamma_n''$, то

$$\begin{aligned} &|x(\gamma) - y_n(\gamma)| = \bigl|x(\gamma) - D\bigl(x(\gamma)\bigr) \cdot \min\{|x(\gamma)| - \alpha,\ 1 - \alpha\}\bigr| = \\ &\quad = |x(\gamma)| - \min\{|x(\gamma)| - \alpha,\ 1 - \alpha\} = \max\{\alpha,\ |x(\gamma)| - 1 + \alpha\} \leqslant \\ &\quad \leqslant \max\{\alpha,\ |A| + \alpha - 1 + \alpha\} = \max\{\alpha,\ |A| - 1 + 2\alpha\} \leqslant \\ &\quad \leqslant \max\left\{\|x\| - 1,\ |A| - 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}(\|x\| - |A|)\right\} = \|x\| - 1. \end{aligned}$$

В остальных случаях

$$|x(\gamma) - y_n(\gamma)| = |x(\gamma)| - \min\{|x(\gamma)|,\ 1\} \leqslant |x(\gamma)| - 1 \leqslant \|x\| - 1.$$

Таким образом, $\{y_n\} \subset B$ — минимизирующая подпоследовательность для x. Однако для любых $n, p \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} &\|y_{n+p} - y_n\| \geqslant |y_{n+p}(\gamma_n'') - y_n(\gamma_n'')| = \\ &\qquad = |\min\{|x(\gamma)|,\ 1\} - \min\{|x(\gamma)| - \alpha,\ 1 - \alpha\}| = \alpha > 0. \end{aligned}$$

Поэтому подпоследовательность $\{y_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности. Следовательно, $x \notin \mathrm{AC}(B)$. □

Теорема 4.1. *В пространстве $c(\Gamma)$ пусть $x \notin B$. Тогда $x \in \mathrm{AC}(B)$, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\bigl\{\gamma \in \Gamma\colon \bigl|x(\gamma) - \|x\|\bigr| \geqslant \varepsilon\bigr\}$ конечно или множество $\bigl\{\gamma \in \Gamma\colon \bigl|x(\gamma) + \|x\|\bigr| \geqslant \varepsilon\bigr\}$ конечно.*

Для доказательства нужно воспользоваться леммами 4.1—4.3. Действительно, пусть $x \in c(\Gamma) \setminus B$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $\bigl\{\gamma \in \Gamma\colon \bigl|x(\gamma) - A\bigr| \geqslant \varepsilon\bigr\}$ конечно. Очевидно, что $|A| \leqslant \|x\|$. Если $|A| < \|x\|$, то $x \notin \mathrm{AC}(B)$ по лемме 4.3. Если $A = \pm\|x\|$, т. е. $|A| = \|x\|$, то $x \in \mathrm{AC}(B)$ по лемме 4.2.

Следствие 4.1. *В пространстве $c_0(\Gamma)$ имеем*

$$\mathrm{AC}(B) = B.$$

Действительно, пусть $x \in c_0(\Gamma) \setminus B$. Тогда $\|x\| > 1$, и для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\gamma \in \Gamma\colon |x(\gamma)| \geqslant \varepsilon\}$ конечно. Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ множество $\bigl\{\gamma \in \Gamma\colon \bigl|x(\gamma) - \|x\|\bigr| \geqslant \varepsilon\bigr\}$ и множество $\bigl\{\gamma \in \Gamma\colon \bigl|x(\gamma) + \|x\|\bigr| \geqslant \varepsilon\bigr\}$ бесконечны. Таким образом, $x \notin \mathrm{AC}(B)$ по теореме 4.1.

5. Аппроксимативная компактность для множества $X \setminus \mathring{B}$ в пространстве $X = \ell^1(\Gamma)$

Теорема 5.1. *В пространстве* $X = \ell^1(\Gamma)$

$$\mathrm{AC}(X \setminus \mathring{B}) = X \setminus \mathring{B}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathring{B}$, т. е. $\|x\| < 1$. Во множестве Γ возьмём счётное число попарно различных точек $\gamma_1, \gamma_2, \dots$.

Определим последовательность $\{y_n\}$ следующим образом:

$$y_n(\gamma) := \begin{cases} x(\gamma) + D\big(x(\gamma)\big) \cdot (1 - \|x\|) & \text{при } \gamma = \gamma_n, \\ x(\gamma) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что $\{y_n\} \subset X \setminus \mathring{B}$, так как

$$\|y_n\| = \sum_{\gamma \neq \gamma_n} |x(\gamma)| + \big|x(\gamma_n) + D\big(x(\gamma_n)\big) \cdot (1 - \|x\|)\big| =$$
$$= \sum_{\gamma \neq \gamma_n} |x(\gamma)| + |x(\gamma_n)| + 1 - \|x\| = \sum_{\gamma} |x(\gamma)| + 1 - \|x\| = \|x\| + 1 - \|x\| = 1$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{y_n\}$ является минимизирующей последовательностью для элемента x из множества $X \setminus \mathring{B}$, поскольку

$$\|x - y_n\| = \sum_{\gamma \neq \gamma_n} |x(\gamma) - y_n(\gamma)| + |x(\gamma_n) - y_n(\gamma_n)| =$$
$$= 0 + \big|x(\gamma_n) + D\big(x(\gamma_n)\big) \cdot (1 - \|x\|) - x(\gamma_n)\big| = 1 - \|x\|$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Но

$$\|y_{n+p} - y_n\| = \sum_{\gamma \neq \gamma_{n+p}, \gamma_n} |y_{n+p}(\gamma) - y_n(\gamma)| +$$
$$+ |y_{n+p}(\gamma_{n+p}) - y_n(\gamma_{n+p})| + |y_{n+p}(\gamma_n) - y_n(\gamma_n)| = 2(1 - \|x\|)$$

при любых $n, p \in \mathbb{N}$, следовательно, $\{y_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности. Таким образом, $\mathrm{AC}(X \setminus \mathring{B}) = X \setminus \mathring{B}$. □

6. Аппроксимативная компактность для единичного шара в пространстве $\ell^1(\Gamma)$

Теорема 6.1. *В пространстве* $\ell^1(\Gamma)$

$$\mathrm{AC}\big(B_{\ell^1(\Gamma)}\big) = \ell^1(\Gamma).$$

Для случая $\Gamma = \mathbb{N}$ этот результат был получен П. А. Бородиным [3].

Доказательство. Пусть $X = \ell^1(\Gamma)$. Рассмотрим произвольный элемент $x \notin B = B_{\ell^1(\Gamma)}$, и пусть $\{y_n\} \subset B$ — минимизирующая последовательность из B для x. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся конечное подмножество $\Gamma' \subset \Gamma$, такое что $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} |x(\gamma)| < \varepsilon$, и номер N, такой что для любого $n > N$ имеет место неравенство $\|x - y_n\| \leqslant \|x\| - 1 + \varepsilon$.

При $n > N$ имеем

$$
\begin{aligned}
\sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} |y_n(\gamma)| &= \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} |(x(\gamma) - y_n(\gamma)) - x(\gamma)| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} |x(\gamma) - y_n(\gamma)| + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} |x(\gamma)| = \\
&= \|x - y_n\| - \sum_{\gamma\in\Gamma'} |x(\gamma) - y_n(\gamma)| + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} |x(\gamma)| \leqslant \\
&\leqslant \|x\| - 1 + \varepsilon - \sum_{\gamma\in\Gamma'} |x(\gamma) - y_n(\gamma)| + \varepsilon \leqslant \\
&\leqslant \|x\| - 1 + \varepsilon - \left(\sum_{\gamma\in\Gamma'} |x(\gamma)| - \sum_{\gamma\in\Gamma'} |y_n(\gamma)| \right) + \varepsilon = \\
&= \|x\| - 1 + \varepsilon - \left(\|x\| - \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} |x(\gamma)| - \|y_n\| + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} |y_n(\gamma)| \right) + \varepsilon = \\
&= -1 + \varepsilon + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} |x(\gamma)| + \|y_n\| - \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} |y_n(\gamma)| + \varepsilon \leqslant \\
&\leqslant -1 + \varepsilon + \varepsilon + 1 - \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} |y_n(\gamma)| + \varepsilon = 3\varepsilon - \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} |y_n(\gamma)|.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} |y_n(\gamma)| \leqslant (3/2)\varepsilon$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся конечное подмножество $\Gamma' \subset \Gamma$ и номер N, такие что $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} |y_n(\gamma)| \leqslant$ $\leqslant (3/2)\varepsilon$ при $n > N$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можем найти конечное подмножество $\Gamma'' \subset \Gamma$, такое что $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma''} |y_n(\gamma)| \leqslant (3/2)\varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности считаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся конечное подмножество $\Gamma'' \subset \Gamma$, такое что $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma''} |y_n(\gamma)| \leqslant (1/4)\varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Так как Γ'' конечно, то из последовательности $\{y_n\}$ мы можем выбрать подпоследовательность $\{\tilde{y}_n\}$, такую что для любых $\varepsilon > 0$ и номеров m, n имеет место неравенство $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma''} |\tilde{y}_m(\gamma) - \tilde{y}_n(\gamma)| < (1/2)\varepsilon$.

Заметим, что $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma''} |\tilde{y}_n(\gamma)| \leqslant (1/4)\varepsilon$ и $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma''} |\tilde{y}_m(\gamma)| \leqslant (1/4)\varepsilon$. Имеем

$$\|\tilde{y}_n - \tilde{y}_m\| = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\tilde{y}_n - \tilde{y}_m| = \sum_{\gamma\in\Gamma''} |\tilde{y}_n - \tilde{y}_m| + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma''} |\tilde{y}_n(\gamma) - \tilde{y}_m(\gamma)|$$
$$\leqslant \sum{}_{\gamma\in\Gamma''} |\tilde{y}_n - \tilde{y}_m| + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma''} |\tilde{y}_n(\gamma)| + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma''} |\tilde{y}_m(\gamma)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon = \varepsilon.$$

Таким образом, $\{\tilde{y}_n\} \subset \{y_n\}$ — нужная подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке из $B_{\ell^1(\Gamma)}$. □

7. Описание точек аппроксимативной компактности для множества $X \setminus \mathring{B}$ в пространстве $X = \ell^\infty(\Gamma)$

Теорема 7.1. *В пространстве* $X = \ell^\infty(\Gamma)$
$$\mathrm{AC}(X \setminus \mathring{B}) = X \setminus \mathring{B}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathring{B}$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Найдётся $\gamma_0 \in \Gamma$, такое что $|x(\gamma_0)| = \|x\|$. Тогда можем взять счётное количество попарно различных точек $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ из множества Γ.

Определим последовательность $\{y_n\}$ следующим образом:
$$y_n(\gamma) = \begin{cases} D\big(x(\gamma)\big) & \text{при } \gamma = \gamma_0, \\ x(\gamma) + D\big(x(\gamma)\big)\cdot(1 - \|x\|) & \text{при } \gamma = \gamma_n, \\ x(\gamma) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что $\{y_n\} \subset X \setminus \mathring{B}$.

Покажем, что $\|x - y_n\| = 1 - \|x\|$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Если $\gamma = \gamma_0$, то
$$|x(\gamma) - y_n(\gamma)| = 1 - |x(\gamma_0)| = 1 - \|x\|.$$

Если $\gamma = \gamma_n$, то
$$|x(\gamma) - y_n(\gamma)| = |x(\gamma) + D(x(\gamma))\cdot(1 - \|x\|) - x(\gamma)| = 1 - \|x\|.$$

В остальных случаях $|x(\gamma) - y_n(\gamma)| = 0$. Таким образом, $\{y_n\} \subset X \setminus \mathring{B}$ — минимизирующая последовательность для точки x. Но для любых $n, p \in \mathbb{N}$ имеем
$$\|y_{n+p} - y_n\| \geqslant |y_{n+p}(\gamma_n) - y_n(\gamma_n)| = \big|x(\gamma_n) + D\big(x(\gamma_n)\big)\cdot(1 - \|x\|) - x(\gamma_n)\big| = 1 - \|x\|,$$

поэтому последовательность $\{y_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности.

Случай 2. Не существует γ_0, такого что $|x(\gamma_0)| = \|x\|$, но $\sup\limits_{\gamma\in\Gamma} |x(\gamma)| = \|x\|$. Тогда можем взять счётно много попарно различных точек $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ из множества Γ.

Определим последовательность $\{y_n\}$ следующим образом:
$$y_n(\gamma) = \begin{cases} x(\gamma) & \text{при } \gamma = \gamma_n, \\ x(\gamma) + D\big(x(\gamma)\big)\cdot(1 - \|x\|) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что $\{y_n\} \subset X \setminus \mathring{B}$, так как

$$\|y_n\| = \sup_\gamma |y_n(\gamma)| = \sup_\gamma \bigl|x(\gamma) + D\bigl(x(\gamma)\bigr) \cdot (1 - \|x\|)\bigr| = \\ = \sup_\gamma |x(\gamma)| + 1 - \|x\| = \|x\| + 1 - \|x\| = 1$$

при всех $n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что $\|x - y_n\| = 1 - \|x\|$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Если $\gamma = \gamma_n$, то $|x(\gamma) - y_n(\gamma)| = 0$. В остальных случаях $|x(\gamma) - y_n(\gamma)| = 1 - \|x\|$. Таким образом, $\{y_n\} \subset X \setminus \mathring{B}$ — минимизирующая последовательность для точки x. Но для любых $n, p \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|y_{n+p} - y_n\| \geqslant |y_{n+p}(\gamma_n) - y_n(\gamma_n)| = \bigl|x(\gamma_n) + D\bigl(x(\gamma_n)\bigr) \cdot (1 - \|x\|) - x(\gamma_n)\bigr| = 1 - \|x\|,$$

поэтому последовательность $\{y_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности.

Таким образом, в пространстве $X = \ell^\infty(\Gamma)$ имеем $\mathrm{AC}(X \setminus \mathring{B}) = X \setminus \mathring{B}$. $\square$

8. Описание точек аппроксимативной компактности для единичного шара в пространстве $\ell^\infty(\Gamma)$

Теорема 8.1. *В пространстве $\ell^\infty(\Gamma)$ пусть $x \notin B$. Тогда $x \in \mathrm{AC}(B)$, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ множество*

$$\{\gamma \in \Gamma \colon \|x\| - |x(\gamma)| \geqslant \varepsilon\}$$

конечно.

Доказательство. Достаточность. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\Gamma' := \{\gamma \in \Gamma \colon \|x\| - |x(\gamma)| \geqslant \varepsilon\}$$

конечно. Очевидно, что для любого $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma'$ имеет место неравенство $\|x\| - |x(\gamma)| < \varepsilon$, откуда следует, что $|x(\gamma)| > \|x\| - \varepsilon$.

Пусть $\{y_n\} \subset B$ — минимизирующая последовательность для x. Покажем, что

$$\text{для любого } \varepsilon > 0 \text{ найдётся } N = N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}, \\ \text{такое что } |y_n(\gamma)| \geqslant 1 - 2\varepsilon \text{ для любых } n > N,\ \gamma \in \Gamma \setminus \Gamma'.$$

Рассуждая от противного, предположим, что найдётся $\varepsilon_0 > 0$, такое что для любого $N \in \mathbb{N}$ существуют $n_0 > N$ и $\gamma_0 \in \Gamma \setminus \Gamma'$, такие что $|y_{n_0}(\gamma_0)| \leqslant 1 - 2\varepsilon_0$. Тогда

$$\|x - y_{n_0}\| \geqslant |x(\gamma_0) - y_{n_0}(\gamma_0)| \geqslant \|x\| - \varepsilon_0 - (1 - 2\varepsilon_0) = \|x\| - 1 + \varepsilon_0.$$

Следовательно, $\{y_n\}$ не является минимизирующей последовательностью. Противоречие.

Так как Γ' — конечное множество, можем выбрать подпоследовательность $\{\tilde{y}_n\} \subset \{y_n\}$, такую что

для любого $\gamma \in \Gamma'$ имеет место неравенство

$$|\tilde{y}_{n+p}(\gamma) - \tilde{y}_n(\gamma)| < 2\varepsilon \text{ для любых } n, p \in \mathbb{N}.$$

Найдётся n_1 такое, что для любых $n \geqslant n_1$ и $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma'$ имеет место неравенство $1 - 2\varepsilon < |\tilde{y}_n(\gamma)| \leqslant 1$. Имеем

$$|\tilde{y}_n(\gamma) - \tilde{y}_{n_1}(\gamma)| < |1 - (1 - 2\varepsilon)| = 2\varepsilon.$$

Это даёт нам $\tilde{y}_{n_1}$.

Продолжаем аналогично. Найдётся номер $n_j > n_{j-1}$, такой что $1 - 2\varepsilon < |\tilde{y}_n(\gamma)| \leqslant 1$ при любых $n \geqslant n_j$ и $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma'$. Имеем

$$|\tilde{y}_n(\gamma) - \tilde{y}_{n_j}(\gamma)| < |1 - (1 - 2\varepsilon)| = 2\varepsilon,$$

что даёт $\tilde{y}_{n_j}$.

Далее продолжаем аналогично.

Итак, последовательность $\{\tilde{y}_{n_j}\}$ такова, что $\|\tilde{y}_{n_j} - \tilde{y}_{n_k}\| < 2\varepsilon$ при всех $\varepsilon > 0$, $j, k \geqslant 1$. Таким образом, $\{\tilde{y}_{n_j}\} \subset \{y_n\}$ — нужная подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке из B. Это показывает, что $x \in \mathrm{AC}(B)$.

Необходимость. Предположим, что для фиксированного x найдётся $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x) > 0$, такое что множество

$$\Gamma' := \{\gamma \in \Gamma \colon \|x\| - |x(\gamma)| \geqslant \varepsilon_0\}$$

бесконечно. Без ограничения общности предположим, что $\varepsilon_0 \leqslant 1$ и $\varepsilon_0 \leqslant \|x\| - 1$.

Во множестве Γ' выберем счётное число попарно различных точек $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots \in \Gamma'$. Определим последовательность $\{y_n\}$ следующим образом:

$$y_n(\gamma) = \begin{cases} D\big(x(\gamma)\big) \cdot \min\{|x(\gamma)| - \varepsilon_0,\ 1 - \varepsilon_0\} & \text{при } \gamma = \gamma'_n, \\ D\big(x(\gamma)\big) \cdot \min\{|x(\gamma)|,\ 1\} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что $\{y_n\} \subset B$.

Покажем, что $\{y_n\} \subset B$ — минимизирующая последовательность для точки x. Если $\gamma = \gamma'_n$, то

$$\begin{aligned} |x(\gamma) - y_n(\gamma)| &= |x(\gamma)| - \min\{|x(\gamma)| - \varepsilon_0,\ 1 - \varepsilon_0\} = \max\{\varepsilon_0,\ |x(\gamma)| - 1 + \varepsilon_0\} \leqslant \\ &\leqslant \max\{\varepsilon_0,\ |x(\gamma)| - 1 + \|x\| - |x(\gamma)|\} = \max\{\varepsilon_0,\ \|x\| - 1\} \leqslant \\ &\leqslant \max\{\|x\| - 1,\ \|x\| - 1\} = \|x\| - 1. \end{aligned}$$

В остальных случаях

$$\sup_\gamma |x(\gamma) - y_n(\gamma)| = \sup_\gamma |x(\gamma)| - \min\{|x(\gamma)|,\ 1\} = \|x\| - \min\{\|x\|,\ 1\} = \|x\| - 1.$$

Но для любых $n, p \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\|y_{n+p} - y_n\| \geqslant |y_{n+p}(\gamma'_n) - y_n(\gamma'_n)| = |\min\{|x(\gamma)|,\ 1\} - \min\{|x(\gamma)| - \varepsilon_0,\ 1 - \varepsilon_0\}| = \varepsilon_0,$$

поэтому последовательность $\{y_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности. □

Автор благодарен А. Р. Алимову, И. Г. Царькову и А. А. Васильевой за ценные замечания.

Литература

[1] Алимов А. Р., Царьков И. Г. Классические понятия теории приближений в несимметричных CLUR-пространствах // Матем. заметки. — 2024. — Т. 116, № 3. — С. 339—354.

[2] Алимов А. Р., Царьков И. Г. Устойчивость аппроксимации в классических задачах геометрической теории приближений // Изв. РАН. Сер. матем. — 2025.

[3] Бородин П. А. О выпуклых аппроксимативно компактных множествах и пространствах Ефимова—Стечкина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 1999. — № 4. — С. 19—21.

[4] Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН. — 1973. — Т. 28, № 6 (174). — С. 3–66

[5] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б. Некоторые свойства чебышёвских множеств // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 118, № 1. — С. 17—19.

[6] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б. Аппроксимативная компактность и чебышёвские множества // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 140, № 3. — С. 522—524.

[7] Ошман Е. В. Чебышевские множества, непрерывность метрической проекции и некоторые геометрические свойства единичной сферы в пространстве Банаха // Изв. вузов. Матем. — 1969. — № 4. — С. 38—46.

[8] Пятышев И. А. Операции над аппроксимативно компактными множествами // Матем. заметки. — 2007. — Т. 82, № 5. — С. 729—735.

[9] Царьков И. Г. О связности некоторых классов множеств в банаховых пространствах // Матем. заметки. — 1986. — Т. 40, № 2. — С. 174—196.

[10] Царьков И. Г. Свойства дискретного не более чем счётного объединения множеств в несимметричных пространствах // Матем. сб. — 2025. — Т. 216, № 2. — С. 128—144.

[11] Alimov A. R., Tsar'kov I. G. Geometric Approximation Theory. — Cham: Springer, 2021. — (Springer Monogr. Math.).

[12] Alimov A. R., Tsar'kov I. G. Connectedness and approximative properties of sets in asymmetric spaces // Filomat. — 2024. — Vol. 38, no. 9. — P. 3243—3259.