Выпуклые идеалы частично псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями

Е. Е. ШИРШОВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

УДК 512.545

Ключевые слова: частично упорядоченное кольцо, выпуклая подгруппа, направленная группа.

Аннотация

Рассматриваются частично псевдоупорядоченные (K-упорядоченные) алгебры над частично упорядоченными полями. Исследуются свойства множества всех выпуклых направленных идеалов частично псевдоупорядоченных алгебр. Показано, что в теории частично псевдоупорядоченных алгебр выпуклые направленные идеалы играют ту же роль, что выпуклые направленные подгруппы в теории частично упорядоченных групп. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых выпуклый направленный идеал AO-псевдоупорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем является спрямляющим идеалом данной алгебры. Доказано, что в AO-псевдоупорядоченной алгебре над частично упорядоченным полем спрямляющие направленные идеалы образуют корневую систему в решётке всех выпуклых направленных идеалов данной алгебры. Изучаются свойства регулярных идеалов частично псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями. Получены некоторые результаты, касающиеся свойств выпуклых направленных идеалов псевдорешёточно псевдоупорядоченных алгебр над направленными полями.

Abstract

E. E. Shirshova, Convex ideals of partially pseudo-ordered algebras over partially ordered fields, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 3, pp. 189—207.

Characteristics of partially pseudo-ordered (K-ordered) algebras over partially ordered fields are considered. Properties of the set of all convex directed ideals in partially pseudo-ordered algebras are described. It is shown that convex directed ideals play for the theory of partially pseudo-ordered algebras the same role as convex directed subgroups for the theory of partially ordered groups. Necessary and sufficient conditions for a convex directed ideal of an AO-pseudo-ordered algebra over a partially ordered field to be a rectifying ideal are obtained. We show that the set of all rectifying directed ideals of an AO-pseudo-ordered algebra over a partially ordered field forms a root system for the lattice of all convex directed ideals of that algebra. Properties of regular ideals for partially pseudo-ordered algebras over partially ordered fields are investigated. Some results are proved concerning convex directed ideals of pseudo-lattice pseudo-ordered algebras over directed fields.

Фундаментальная и прикладная математика, 2025, том 25, № 3, с. 189—207.

1. Введение

Пусть $R = \langle R, +, \cdot \rangle$ — произвольное кольцо (возможно, неассоциативное). Говорят, что R — *частично упорядоченное кольцо*, если $\langle R, +, \leqslant \rangle$ является частично упорядоченной группой, удовлетворяющей условию:

из $a \leqslant b$ и $0 < c$ следуют неравенства $ac \leqslant bc$ и $ca \leqslant cb$ для всех $a, b, c \in R$.

Частично упорядоченная группа G называется *направленной*, если для любых элементов a и b из G существует элемент $u \in G$, для которого верны неравенства $a, b \leqslant u$.

Пусть F — частично упорядоченное тело. Если группа $\langle F, +, \leqslant \rangle$ является направленной (решёточно упорядоченной, линейно упорядоченной), то F называют *направленным* (*решёточно упорядоченным*, *линейно упорядоченным*) *телом*.

Замечание. До конца статьи будем считать, что F — частично упорядоченное тело нулевой характеристики с положительной единицей (иначе порядок окажется тривиальным).

Линейно упорядоченное поле F, очевидно, удовлетворяет условию

$$\text{если } 0 < ab \text{ и } 0 < a, \text{ то } 0 < b \text{ для всех } a, b \in F \tag{$*$}$$

(см. [13, с. 167]).

Замечание. Иногда будет удобно допустить выполнение условия $(*)$ в других классах частично упорядоченных полей.

Определение 1 [9]. Левое линейное пространство ${}_FV = \langle V, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant \rangle$ над частично упорядоченным телом F называется частично упорядоченным линейным пространством, если $\langle V, +, \leqslant \rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию

из $0 \leqslant v$ следует $0 \leqslant \alpha v$ для всех $v \in V$ и $\alpha > 0$ из тела F.

Частично упорядоченное линейное пространство ${}_FV$ над частично упорядоченным телом F называют *направленно* (*линейно* или *решёточно*) *упорядоченным пространством*, если группа $\langle V, +, \leqslant \rangle$ является направленной (линейно или решёточно упорядоченной) группой.

Свойства частично упорядоченных линейных пространств над частично упорядоченными телами изучались в [9, 10].

Определение 2 [1]. Кольцо R называется частично псевдоупорядоченным кольцом, если аддитивная группа $\langle R, +, \leqslant \rangle$ кольца R является частично упорядоченной группой, удовлетворяющей условию

из неравенства $0 \leqslant a$ следует верность неравенств

$$ab \leqslant a \text{ и } ba \leqslant a \text{ для всех элементов } b \in R. \tag{1}$$

Свойства частично псевдоупорядоченных (K-упорядоченных) колец изучались в [1, 7, 12, 16, 18].

Определение 3 [8]. Алгебра $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant\rangle$ над частично упорядоченным полем F называется частично псевдоупорядоченной алгеброй, если выполняются условия:

1) $\langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant\rangle$ является частично упорядоченным линейным пространством над полем F;
2) $\langle A, +, \cdot, \leqslant\rangle$ является частично псевдоупорядоченным кольцом.

Если группа $\langle A, +, \leqslant\rangle$ является направленной (решёточно упорядоченной, линейно упорядоченной), то алгебру A называют направленно (решёточно, линейно) псевдоупорядоченной алгеброй.

Понятие частично псевдоупорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем было введено Ю. В. Кочетовой и Е. Е. Ширшовой [5]. Первоначально эти алгебры были названы частично K-упорядоченными алгебрами. Свойства таких алгебр исследовались в [5, 6, 8, 11, 17]. Мотивацией для рассмотрения K-упорядоченной алгебры послужило понятие частично упорядоченной алгебры Ли, введённое В. М. Копытовым (см. [3, 4]).

Напомним, что алгебра Ли $L = \langle L, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot\rangle$ над частично упорядоченным полем F называется *частично упорядоченной алгеброй Ли*, если структура $\langle L, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leqslant\rangle$ является частично упорядоченным линейным пространством над полем F, удовлетворяющим условию

$$\text{если } a \leqslant b, \text{ то } a + ac \leqslant b + bc \text{ для всех элементов } a, b, c \in L. \qquad (2)$$

Если алгебра Ли L является частично упорядоченным линейным пространством над частично упорядоченным полем F, то условия (1) *и* (2) *равносильны.*

Действительно, если $a \leqslant b$ в L, то $0 \leqslant b - a$, откуда по условию (1) следует, что $(b-a)(-c) \leqslant b - a$ для любого элемента $c \in L$. Значит, $-bc + ac \leqslant b - a$, т. е. $a + ac \leqslant b + bc$.

С другой стороны, если $0 \leqslant a$, то по условию (2) $0 \leqslant a + a(-b)$ для любого элемента $b \in L$, т. е. $ab \leqslant a$. Из свойства антикоммутативности следует справедливость условия (1).

Таким образом, *частично упорядоченные алгебры Ли образуют подкласс частично псевдоупорядоченных алгебр.*

Отметим, что *частично псевдоупорядоченная алгебра A не содержит единицу* (если $1 \in A$, из $0 < a \in A$ по условию (1) следует верность неравенства $(1+1)a \leqslant a$, т. е. $a \leqslant 0$).

Целью данной работы является исследование свойств выпуклых направленных идеалов в различных классах псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями.

Большинство результатов данной статьи указывает на сходство свойств выпуклых направленных идеалов частично псевдоупорядоченных алгебр со свойствами выпуклых направленных подгрупп частично упорядоченных групп.

В статье используются терминология и обозначения, общепринятые в теории частично упорядоченных алгебраических систем (см. [2, 4, 13]).

Пусть A — частично псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F, положим $A^+ = \{a \in A \mid 0 \leqslant a\}$.

Напомним, что подгруппа M частично упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если для $a, b \in M$ и $g \in G$ из неравенств $a \leqslant g \leqslant b$ всегда следует $g \in M$. Линейное подпространство M частично упорядоченного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом F называется *выпуклым*, если группа $\langle M, +, \leqslant\rangle$ является выпуклой подгруппой частично упорядоченной абелевой группы $\langle V, +, \leqslant\rangle$.

Определение 4 [11]. Идеал I частично псевдоупорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F называется выпуклым идеалом, если I — выпуклое подпространство линейного пространства ${}_FA$.

Элементы a и b из G^+ называются *ортогональными* в частично упорядоченной группе $G = \langle G, +, \leqslant\rangle$, если $L(a, b) \subseteq L(0)$ [19]. (Здесь $L(x)$ — множество нижних граней элемента x.)

Элементы a и b из G^+ называются *почти ортогональными* или *AO-элементами* (almost orthogonal elements) в частично упорядоченной группе $G = \langle G, +, \leqslant\rangle$, если из неравенств $x \leqslant a, b$ следуют неравенства $nx \leqslant a, b$ для всех $x \in G$ и целых положительных чисел n [20]. Ортогональные элементы обладают указанным свойством, но не только они.

Рассмотрим группу $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, в которой $(a, b) \in G^+ \setminus \{(0, 0)\}$, если $a > 0$ и $b > 0$. Тогда элементы $u = (2, 1)$ и $v = (1, 3)$ почти ортогональны в группе G, но не ортогональны, так как, например, $(-1, 0) \leqslant u, v$, но $(-1, 0) \parallel (0, 0)$.

Частично упорядоченную группу $G = \langle G, +, \leqslant\rangle$ называют *AO-группой*, если любой элемент $g \in G$ представим в виде $g = a - b$, где элементы a и b почти ортогональны в группе G. Класс AO-групп является подклассом направленных групп и включает в себя класс псевдорешёточно упорядоченных групп и, следовательно, классы линейно упорядоченных и решёточно упорядоченных групп (подробнее см., например, [20]).

Определение 5. Частично псевдоупорядоченное кольцо $R = \langle R, +, \cdot, \leqslant\rangle$ называется AO-псевдоупорядоченным кольцом, если группа $\langle R, +, \leqslant\rangle$ является AO-группой.

Частично псевдоупорядоченную алгебру $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant\rangle$ над частично упорядоченным полем F будем называть AO-псевдоупорядоченной алгеброй, если кольцо $\langle A, +, \cdot, \leqslant\rangle$ является AO-псевдоупорядоченным кольцом.

Вариация понятия первичного радикала алгебры в классе AO-псевдоупорядоченных алгебр исследовалась в [8].

Обозначим через $L(A)$ множество всех выпуклых направленных идеалов частично псевдоупорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F.

Множество $L(A)$ можно упорядочить по включению.

Для AO-псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть A — AO-псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F. Тогда $L(A)$ — решётка с единицей и нулём. Кроме того, $L(A)$ — полная подрешётка снизу в решётке всех идеалов алгебры A.*

Далее нам понадобится следующее определение.

Определение 6. Выпуклый идеал I частично псевдоупорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F называется *спрямляющим*, если фактор-алгебра A/I является линейно упорядоченной алгеброй.

Некоторые свойства спрямляющих идеалов частично псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями рассматриваются в третьем разделе работы. В случае AO-псевдоупорядоченных алгебр справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть A — AO-псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F, I — выпуклый идеал алгебры A. Тогда эквивалентны следующие условия:*

1) *I — спрямляющий направленный идеал алгебры A;*
2) *если a и b почти ортогональны в алгебре A, то $a \in I$ или $b \in I$.*

Теорема 3. *Пусть $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant\rangle$ — AO-псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F. Спрямляющие направленные идеалы алгебры образуют корневую систему в решётке всех выпуклых направленных идеалов алгебры A.*

Подмножество M решётки L называется *корневой системой*, если для каждого элемента $a \in M$ множество $U_a = \{x \in L \mid a \leqslant x\}$ линейно упорядоченно и лежит в M.

Пусть $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant\rangle$ — частично псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F.

Определение 7. Выпуклый направленный идеал I частично псевдоупорядоченной алгебры A называется *регулярным* идеалом, если существует элемент $x \in A$, такой что I — максимальный идеал из всех выпуклых направленных идеалов алгебры, не содержащих x. В этом случае I называется значением элемента x.

Пример 1. Рассмотрим алгебру A верхнетреугольных матриц над линейно упорядоченным полем $\mathbb{R}$. Пусть

$$(a, b, c) = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $(a, b, c) \in A^+$, если $a > 0$ и $b > 0$ или если $a = b = 0$ и $c \geqslant 0$. Тогда A — частично псевдоупорядоченная алгебра.

Выпуклый направленный идеал $J = \{(0, 0, c)\}$ алгебры A является значением элемента $(1, 1, 0)$, например.

Теорема 4. *Пусть A — частично псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F. Каждый элемент $0 \neq x \in A$ имеет в A хотя бы одно значение. Если $x \notin J$, где J — выпуклый направленный идеал в A, то существует K — значение элемента x, для которого $J \subseteq K$.*

В решёточно псевдоупорядоченных алгебрах над некоторыми направленными полями каждый регулярный идеал алгебры является спрямляющим идеалом (см. лемму 27).

В более широких классах псевдоупорядоченных алгебр это не так.

В четвёртом разделе приводится пример регулярного идеала AO-псевдоупорядоченной алгебры над линейно упорядоченным полем, который не является спрямляющим идеалом (см. пример 2).

В четвёртом разделе работы исследуются регулярные идеалы AO-псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 5. *Пусть A — AO-псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F. Каждый выпуклый направленный идеал I алгебры A является пересечением регулярных идеалов.*

Определение 8. Скажем, что идеал $I \in L(A)$ неразложим в пересечение, если из равенства $I = \bigcap\limits_{s \in S} J_s$ ($J_s \in L(A)$ для всех $s \in S$) следует существование индекса $n \in S$, для которого $I = J_n$.

Используя определение 8, несложно доказать следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant\rangle$ — AO-псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F и $I \in L(A)$. Тогда равносильны следующие условия:*

1) *I — регулярный идеал;*
2) *идеал I неразложим в пересечение.*

Напомним, что частично упорядоченная группа G называется *интерполяционной группой*, если для любых элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ из неравенств $a_1, a_2 \leqslant b_1, b_2$ следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leqslant c \leqslant b_1, b_2$ (см. [15]). Класс интерполяционных групп включает классы решёточно упорядоченных групп, линейно упорядоченных групп и групп Рисса.

Определение 9 [11]. Частично псевдоупорядоченную алгебру $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant\rangle$ над частично упорядоченным полем F будем называть интерполяционной псевдоупорядоченной алгеброй, если аддитивная группа $\langle A, +, \leqslant\rangle$ является интерполяционной группой.

Свойства интерполяционных псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями рассматривались в [11].

Определение 10. AO-псевдоупорядоченную алгебру A над частично упорядоченным полем F, которая является интерполяционной псевдоупорядоченной алгеброй, будем называть псевдорешёточно псевдоупорядоченной алгеброй.

Важную роль играет следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть A — псевдорешёточно псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F. Тогда в A существует выпуклый направленный идеал $\mathcal{I} = \bigvee_{a,b} I_{a,b}$ для всех пар почти ортогональных элементов a и b алгебры A.*

Свойства выпуклых направленных идеалов псевдорешёточно псевдоупорядоченных алгебр над направленными полями исследуются в пятом разделе работы. Основными результатами этого раздела являются следующие утверждения.

Теорема 8. *В каждой псевдорешёточно псевдоупорядоченной алгебре A над направленным полем F, удовлетворяющим условию $(*)$, существует выпуклый направленный идеал, фактор-алгебра по которому является решёточно псевдоупорядоченной алгеброй.*

Теорема 9. *Пусть A — псевдорешёточно псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F, удовлетворяющим условию $(*)$. Идеал $\mathcal{I}$ совпадает с пересечением всех спрямляющих направленных идеалов алгебры A.*

2. Некоторые свойства псевдоупорядоченных алгебр

Напомним свойство частично упорядоченных групп.

Лемма 10. *Для частично упорядоченной группы $G = \langle G, +, \leqslant\rangle$ равносильны следующие условия:*

1) *G является направленной группой;*
2) *для нуля и каждого элемента $a \in G$ существует верхняя грань;*
3) *каждый элемент $g \in G$ представим в виде $g = a - b$, где $a, b \in G^+$.*

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [13, ч. I, гл. II, § 1, предложение 1]. □

Следствием леммы 10 является следующее утверждение.

Лемма 11. *Направленная псевдоупорядоченная алгебра A над частично упорядоченным полем F порождается множеством A^+.*

Доказательство. Из пункта 3) леммы 10 следует, что любой элемент $x \in A$ представим в виде $x = a - b$, где $a, b \in A^+$. □

Напомним свойства частично псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями.

Определение 11 [8]. Пусть $A = \langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant_1\rangle$ и $B = \langle B, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot, \leqslant_2\rangle$ — частично псевдоупорядоченные алгебры над частично упорядоченным полем F. Отображение f алгебры A в алгебру B называется o-гомоморфизмом алгебр, если выполняются следующие условия:

1) f — гомоморфизм кольца $\langle A, +, \cdot \rangle$ в кольцо $\langle B, +, \cdot \rangle$;
2) f — гомоморфизм линейного пространства $\langle A, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\} \rangle$ в линейное пространство $\langle B, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\} \rangle$;
3) $f(A^+) \subseteq B^+$.

При этом f называется строгим o-гомоморфизмом алгебр, если выполняется условие

4) $f(A^+) = B^+ \cap f(A)$.

Если для o-гомоморфизма алгебр f существует o-гомоморфизм алгебр f^{-1}, то f называется o-изоморфизмом алгебр.

Лемма 12. *Пусть A является частично псевдоупорядоченной алгеброй над частично упорядоченным полем F. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если I — выпуклый идеал алгебры A, то фактор-алгебра A/I является частично псевдоупорядоченной алгеброй.*
2. *Канонический гомоморфизм алгебр $\pi\colon A \to A/I$ является строгим o-гомоморфизмом алгебр.*
3. *Если I — выпуклый направленный идеал алгебры A, K — выпуклый направленный идеал алгебры A/I, то в алгебре A существует выпуклый направленный идеал J, для которого $\pi(J) = K$.*

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [8, теорема 1]. □

Лемма 13. *Пусть A — частично псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F, $a \in A$ и $a > 0$. Тогда в алгебре A существует выпуклый направленный идеал алгебры I_a, для которого*

$$I_a{}^+ = \{x \in A^+ \mid x \leqslant \alpha a \text{ для некоторых } \alpha > 0 \text{ из поля } F\}.$$

Если J — выпуклый направленный идеал алгебры A и $a \in J$, то $I_a \subseteq J$.

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [17, теорема 1]. □

Лемма 14. *Пусть A — AO-псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F, I — выпуклый направленный идеал алгебры A. Если $x \in I$ и $x = a - b$, где элементы a и b почти ортогональны в алгебре A, то $a \in I$ и $b \in I$.*

Доказательство. Из условия леммы следует, что $a = x + b$. Так как I — направленный идеал, то по второму условию леммы 10 существует элемент $u \in I^+$, для которого $x \leqslant u$. Поэтому $a \leqslant u + b$. Отсюда следует, что $a - u \leqslant b$ и $a - u \leqslant a$. Из почти ортогональности элементов a и b вытекает, что $2(a - u) \leqslant a$, т. е. $a \leqslant 2u$. Так как I — выпуклый идеал, то $a \in I$. Следовательно, $b \in I$. □

Лемма 15. *Пусть A — AO-псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F, $\{I_s \mid s \in S\}$ — семейство выпуклых направленных идеалов алгебры A, $I = \bigcap\limits_{s \in S} I_s$. Тогда I — выпуклый направленный идеал алгебры A.*

Доказательство. Так как пересечение выпуклых подгрупп является выпуклой подгруппой, то I — выпуклый идеал алгебры A.

Пусть $x \in I$. Тогда $x \in I_s$ для любого индекса $s \in S$. По условию леммы $x = a - b$, где элементы a и b являются почти ортогональными в алгебре A. В силу леммы 14 $a \in I_s$ для любого индекса $s \in S$. Следовательно, $a \in I$. Кроме того, $x, 0 \leqslant a$. Из второго условия леммы 10 следует, что I — направленный идеал алгебры A. □

Следствие 16. *Пусть A — АО-псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F, $0 < a$ и $0 < b$ в алгебре A. Тогда в алгебре A существует выпуклый направленный идеал $I_{a,b} = I_a \wedge I_b$.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{I_s \mid s \in S\}$ — семейство выпуклых направленных идеалов алгебры A. Пересечением $\bigwedge\limits_{s \in S} I_s$ идеалов будем считать их теоретико-множественное пересечение $\bigcap\limits_{s \in S} I_s$. Из леммы 15 следует, что пересечение выпуклых направленных идеалов алгебры A является выпуклым направленным идеалом этой алгебры.

Пусть I и J — выпуклые направленные идеалы алгебры A. Рассмотрим в алгебре A множество $\{K_s \mid s \in S\}$, где $K_s \in L(A)$ и $I, J \subseteq K_s$ для всех $s \in S$.

Пусть $K = \bigcap\limits_{s \in S} K_s$. В силу леммы 15 K — выпуклый направленный идеал алгебры A. Так как $I, J \subseteq K$, то $I, J \leqslant K$. Пусть $H \in L(A)$ и $I, J \leqslant H$. Тогда $H = K_s$ для некоторого $s \in S$. Значит, $K \leqslant H$. Таким образом, $K = I \vee J$. □

Следующие утверждения будут использованы позднее.

Теорема 17. *Пусть A — частично псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *A является решёточно псевдоупорядоченной алгеброй;*
2) *каждый элемент $x \in A$ представим в виде $x = a - b$, где a и b — ортогональные элементы алгебры A.*

Доказательство. Пусть выполняется первое условие. Тогда группа $\langle A, +, \leqslant\rangle$ является решёточно упорядоченной группой. Каждый элемент группы удовлетворяет второму условию (см. [4, гл. II, § 2, предложение 5]).

Пусть имеет место второе условие. Рассмотрим группу $G = \langle A, +, \leqslant\rangle$. Если $g \in G$, то по условию леммы $g = a - b$, где $a, b \in G^+$. Тогда верны неравенства $0, g \leqslant a$. По второму условию леммы 10 G — направленная группа.

Пусть далее $x, y \in G^+$. По условию леммы $x - y = a - b$, где элементы a и b ортогональны в алгебре A. Для элемента $c = x - a = y - b$ справедливы неравенства $c \leqslant x, y$. Из неравенств $u \leqslant x, y$ для элемента $u \in G$ следуют неравенства

$$u - c = (u - x) + a = (u - y) + b \leqslant a, b.$$

Значит, $u - c \in L(a, b) \subseteq L(0)$, т. е. $u \leqslant c$. Таким образом, c — точная нижняя грань элементов x и y. Кроме того, $-c = a - x = b - y \leqslant a, b$, значит, $-c \in L(0)$, т. е. $c \in G^+$.

Рассмотрим элемент $v = a + b + c \in G^+$. Справедливы неравенства $v = x + b = y + a \geqslant x, y$. Пусть $x, y \leqslant t$. Тогда

$$v - t = (x - t) + b = (y - t) + a \leqslant a, b.$$

Значит, $v - t \in L(0)$, т. е. $v \leqslant t$. Таким образом, v — точная верхняя грань элементов x и y в G^+. Следовательно, множество G^+ — решётка.

Группа G — решёточно упорядоченная группа [4, гл. 2, § 1, предложение 1]. Следовательно, A — решёточно псевдоупорядоченная алгебра. □

Лемма 18. *Пусть A — решёточно псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F, $a, b \in A^+$. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *a и b ортогональны в алгебре A*;
2) *a и b почти ортогональны в алгебре A.*

Доказательство. Очевидно, что условие 1 влечёт условие 2.

Пусть a и b почти ортогональны в алгебре A и $c = a \wedge b$. Тогда $0 \leqslant c$. Из верных неравенств $c \leqslant a, b$ по условию 2 следует справедливость неравенств $2c \leqslant a, b$. По определению пересечения $2c \leqslant c$, т. е. $c \leqslant 0$. Следовательно, $a \wedge b = 0$. Таким образом, условие 2 влечёт условие 1. □

3. Спрямляющие идеалы частично псевдоупорядоченных алгебр

Лемма 19. *Пусть A является частично псевдоупорядоченной алгеброй над частично упорядоченным полем F, I — спрямляющий идеал алгебры A, J, K — выпуклые направленные идеалы алгебры A, $I \subset J$ и $I \subset K$. Тогда $J \subseteq K$ или $K \subseteq J$.*

Доказательство. Пусть, от противного, $J \parallel K$. Тогда найдутся элементы $x \in J \setminus K$ и $y \in K \setminus J$. Так как идеал J является направленным, то по третьему условию леммы 10 заключаем, что $x = u - v$ для некоторых элементов $u, v \in J^+$. Либо $u \notin K$, либо $v \notin K$ (иначе $x \in K$). Без потери общности можно считать, что $0 \leqslant x$. По условию леммы $x + I \leqslant y + I$ или $y + I \leqslant x + I$.

В первом случае $x \leqslant y + c$ для некоторого элемента $c \in I$. Значит, $x \in K$, так как K является выпуклым идеалом, но это противоречит выбору элемента x.

Во втором случае приходим к противоречию с выбором элемента y. □

Лемма 20. *Пусть A является частично псевдоупорядоченной алгеброй над частично упорядоченным полем F, I — спрямляющий направленный идеал алгебры A, a и b почти ортогональны в алгебре A. Тогда $a \in I$ или $b \in I$.*

Доказательство. Если $a = 0$ или $b = 0$, то утверждение очевидно.

Пусть $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Рассмотрим смежные классы $a + I$ и $b + I$ в фактор-алгебре A/I. По условию леммы $a + I \leqslant b + I$ или $b + I \leqslant a + I$.

В первом случае $a \leqslant b + c$ для некоторого элемента $c \in I$. Так как I — направленный идеал, то по второму условию леммы 10 можно считать, что $0 \leqslant c$. Тогда $a - c \leqslant a, b$ в алгебре A. Из почти ортогональности элементов a и b следует, что $2(a - c) \leqslant a, b$. Таким образом, $2a - 2c \leqslant a$, откуда следует, что $a \leqslant 2c$, где $2c \in I$. Так как I — выпуклый идеал, то $a \in I$.

Во втором случае, рассуждая аналогично, получаем $b \in I$. □

Лемма 21. *Пусть A — частично псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F, I — спрямляющий направленный идеал алгебры A, $a \neq 0$ и $b \neq 0$ почти ортогональны в алгебре A. Тогда $I_a \subseteq I$ или $I_b \subseteq I$.*

Доказательство. Из леммы 20 следует, что $a \in I$ или $b \in I$. Если $a \in I$, то по лемме 13 $I_a \subseteq I$. Во втором случае рассуждения аналогичны. □

Напомним свойства AO-псевдоупорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями.

Лемма 22. *Пусть A — AO-псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F.*

1. *Если I — выпуклый направленный идеал алгебры A, то фактор-алгебра A/I является AO-псевдоупорядоченной алгеброй над полем F.*
2. *Канонический гомоморфизм алгебр $\pi\colon A \to A/I$ является AO-гомоморфизмом алгебр.*
3. *Если J — выпуклый направленный идеал алгебры A, то $\pi(J)$ — выпуклый направленный идеал алгебры A/I.*

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [8, теорема 2]. □

o-гомоморфизм f (см. определение 11) AO-псевдоупорядоченной алгебры A в AO-псевдоупорядоченную алгебру B называется *AO-гомоморфизмом алгебр*, если из почти ортогональности элементов a и b в алгебре A следует почти ортогональность их образов $f(a)$ и $f(b)$ в алгебре B.

Лемма 23. *Пусть G — AO-группа, M — выпуклая направленная нормальная подгруппа группы G, H — выпуклая направленная подгруппа группы G. Если имеет место неравенство $M \leqslant K$ в фактор-группе G/M для класса $K \in \pi(H)$, то существует элемент $a \in H^+$, для которого $K = a + M$.*

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [8, лемма 14]. □

Следствие 24. *Пусть A — AO-псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F, I, J — выпуклые направленные идеалы алгебры A. Если имеет место неравенство $I \leqslant K$ в фактор-алгебре A/I для класса $K \in \pi(J)$, то существует элемент $a \in J^+$, для которого $K = a + I$.*

Доказательство. В AO-группе $G = \langle A, +, \leqslant\rangle$ рассмотрим выпуклые направленные подгруппы $M = \langle I, +, \leqslant\rangle$ и $H = \langle J, +, \leqslant\rangle$. По условию следствия смежный класс K в фактор-группе G/M удовлетворяет условию $M \leqslant K$. Остаётся применить лемму 23. □

Лемма 25. *Пусть A — AO-псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F, I — выпуклый идеал алгебры A. Если из почти ортогональности элементов a и b в алгебре A всегда следует $a \in I$ или $b \in I$, то I — спрямляющий идеал алгебры.*

Доказательство. Рассмотрим смежный класс $x + I$ в фактор-алгебре A/I. По условию леммы $x = a - b$ для некоторых почти ортогональных элементов a и b в алгебре A. По условию леммы $a \in I$ или $b \in I$. Если $a \in I$, то $x + I = (a - b) + I = -b + I < I$. Если $b \in I$, то $x + I = (a - b) + I = a + I > I$. □

Доказательство теоремы 2. Следует применить леммы 20 и 25. □

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим множество $L(A)$ всех выпуклых направленных идеалов алгебры A. Обозначим через M множество всех спрямляющих направленных идеалов алгебры A. Тогда $M \subset L(A)$.

Пусть $I \in M$ и $U_I = \{J \in L(A) \mid I \subseteq J\}$. В силу леммы 19 множество U_I линейно упорядоченно по включению. Если $K \in U_I$, то $K \in L(A)$, где $I \subseteq K$. Если a и b почти ортогональны в алгебре A, то по теореме 2 $a \in I$ или $b \in I$. Отсюда следует, что $a \in K$ или $b \in K$. Из теоремы 2 следует, что $K \in M$, т. е. $U_I \subset M$. □

Лемма 26. *Пусть A — частично псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F, a и b — почти ортогональные элементы алгебры A, $x = a + c$ и $y = b + c$ для элемента $c \in A$. Если элементы x и y почти ортогональны в алгебре A, то $c \in I_{a,b}$.*

Доказательство. По условию леммы $x - y = (a + c) - (b + c) = a - b$. Значит, $c = x - a = y - b \leqslant x, y$. Из почти ортогональности элементов x и y следует, что $2c \leqslant x, y$, т. е. $2x - 2a \leqslant x$ и $2y - 2b \leqslant y$. Отсюда вытекает, что $x \leqslant 2a$ и $y \leqslant 2b$, т. е. по лемме 13 $x \in I_a$ и $y \in I_b$. Следовательно, $c \in I_a$ и $c \in I_b$. Таким образом, по следствию 16 $c \in I_{a,b}$. □

4. Регулярные идеалы частично псевдоупорядоченных алгебр

Начнём с доказательства существования регулярных идеалов.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим множество $M = \{J_s \mid s \in S\}$ всех выпуклых направленных идеалов алгебры A, для которых $x \notin J_s$ для всех $s \in S$. Так как $\{0\} \in M$, то $M \neq \varnothing$.

Множество M можно упорядочить по включению. Если множество $T = \{J_q \mid q \in Q\}$ — некоторая цепь в M, то легко проверить, что множество

$J = \bigcup\limits_{q \in Q} J_q$ является выпуклым направленным идеалом алгебры A. Если $x \in J$, то существует индекс $q \in Q$, для которого $x \in J_q$, чего быть не может. Следовательно, $x \notin J$. Значит, J является точной верхней гранью в T. Следовательно, по лемме Цорна в M существуют максимальные элементы, каждый элемент из M содержится в некотором максимальном элементе. □

Лемма 27. *Пусть A — решёточно псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F, которое удовлетворяет условию $(*)$, J — выпуклый направленный идеал алгебры A. Если J — регулярный идеал алгебры A, то J — спрямляющий идеал алгебры.*

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [6, теорема 2.5.1]. □

В более широких классах псевдоупорядоченных алгебр это не так. Рассмотрим пример регулярного идеала, не являющегося спрямляющим идеалом, в AO-псевдоупорядоченной алгебре над линейно упорядоченным полем.

Пример 2. Пусть $\mathbb{R}$ — аддитивная группа действительных чисел с естественной упорядоченностью, $B = \overline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$ — прямое произведение линейно упорядоченных групп. Тогда B — решёточно упорядоченная группа (см. [13, часть I, гл. II, § 6]).

Рассмотрим лексикографическое произведение $D = \overrightarrow{B \times B}$ решёточно упорядоченных групп. В этом случае D не является решёточно упорядоченной группой (см. [13, часть I, гл. II, § 7]). С другой стороны, D — псевдорешёточная группа (см. [14]), поэтому D — AO-группа (см. [20, лемма (B)]). В этом случае элемент $g = \big((a,b),(c,d)\big)$ считается положительным, если выполняется одно из следующих условий: $0 < a$ и $0 \leqslant b$; или $0 \leqslant a$ и $0 < b$; или $a = b = 0$, а $0 \leqslant c$ и $0 \leqslant d$.

Если обозначить $F = \mathbb{R}$ и для $\alpha \in F$ положить $\alpha g = \big((\alpha a, \alpha b),(\alpha c, \alpha d)\big)$, то D станет частично упорядоченным линейным пространством над полем F.

Определим на группе D операцию умножения $\circ$: если $g_1 = \big((a,b),(c,d)\big)$ и $g_2 = \big((u,v),(s,t)\big)$, то положим $g_1 \circ g_2 = \big((0,0),(0, av - ub)\big)$. Тогда $K = \langle D, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \circ\rangle$ — алгебра Ли над полем F.

Если $0 < g_1$, то $g_1 \circ g_2 \leqslant g_1$ и $g_2 \circ g_1 \leqslant g_1$ для всех $g_2 \in K$. Поэтому K — AO-псевдоупорядоченная алгебра Ли, не являющаяся решёточно упорядоченной.

Выпуклый направленный идеал $C = \big\{\big((0,0),(c,0)\big)\big\}$ является регулярным, но не является спрямляющим. Действительно, пусть $u = \big((0,1),(0,0)\big)$ и $v = \big((1,0),(0,0)\big)$. Тогда $u + C \parallel v + C$.

Доказательство теоремы 5. Из теоремы 4 для элемента $a \in A \setminus I$ следует существование значения J^a, для которого $I \subseteq J^a$. Рассмотрим множество $\{J^x \mid x \in A \setminus I\}$ всех регулярных идеалов, для которых $I \subseteq J^x$. По лемме 15 существует выпуклый направленный идеал $K = \bigwedge\limits_{x \in A \setminus I} J^x$. Очевидно, $I \subseteq K$.

Допустим, что существует элемент $u \in K \setminus I$. Тогда $u \in A \setminus I$ и найдётся регулярный идеал J^u — значение элемента u, для которого $I \subseteq J^u$. Так как $u \notin J^u$, то $u \notin K$, что противоречит выбору элемента u. Значит, $I = K$. □

Доказательство теоремы 6. Пусть I — регулярный идеал и $I = \bigcap\limits_{s \in S} J_s$, где $J_s \in L(A)$ для всех $s \in S$. По предположению существует элемент $x \in A$, для которого идеал I является значением в алгебре A. Если $I \subset J_s$ для всех $s \in S$, то $x \in J_s$ для всех $s \in S$. Значит, $x \in I$, что противоречит выбору элемента x. Таким образом, существует индекс $n \in S$, для которого $I = J_n$. Следовательно, идеал I неразложим в пересечение.

Пусть I удовлетворяет условию 2. По теореме 5

$$I = \bigwedge_{s \in S} J_s = \bigcap_{s \in S} J_s,$$

где идеалы J_s являются регулярными для всех $s \in S$. По условию 2 существует индекс $n \in S$, для которого $I = J_n$. Значит, I — регулярный идеал. □

5. Псевдорешёточно псевдоупорядоченные алгебры

Лемма 28. *Каждой паре почти ортогональных элементов a и b псевдорешёточно псевдоупорядоченной алгебры A над направленным полем F соответствует выпуклый направленный идеал $I_{a,b}$ алгебры A.*

Доказательство. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то по следствию 16 в алгебре A существует выпуклый направленный идеал $I_{a,b}$. Если $a = 0$ или $b = 0$, положим $I_{a,b} = \{0\}$. □

Лемма 29. *Пусть A — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F. Если I — выпуклый направленный идеал алгебры A, то фактор-алгебра A/I — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра над полем F.*

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [11, лемма 9]. □

Теорема 30. *Пусть A — псевдорешёточно псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F, J — выпуклый направленный идеал алгебры A, элементы $a \neq 0$ и $b \neq 0$ почти ортогональны в алгебре A. Тогда $I_{a+J,b+J} = \pi(I_{a,b})$ в фактор-алгебре A/J.*

Доказательство. Так как по определению 10 A является интерполяционной псевдоупорядоченной алгеброй, то по лемме 29 фактор-алгебра A/I является интерполяционной псевдоупорядоченной алгеброй. Так как по определению 10 A является AO-псевдоупорядоченной алгеброй, то из леммы 22 следует, что смежные классы $a + J$ и $b + J$ почти ортогональны в алгебре A/J. Так как по лемме 22 A/J является AO-псевдоупорядоченной алгеброй, то по следствию 16 в фактор-алгебре A/J существует выпуклый направленный идеал $I_{a+J,b+J}$. По лемме 12 найдётся выпуклый направленный идеал K алгебры A, для которого $I_{a+J,b+J} = \pi(K)$, где

$$K = \{x \in A \mid x + J \in I_{a+J,b+J}\}.$$

По лемме 22 существует выпуклый направленный идеал $\pi(I_{a,b})$ в фактор-алгебре A/J, где

$$\pi(I_{a,b}) = \{X \in A/J \mid X = x + J \text{ для некоторого элемента } x \in I_{a,b}\}.$$

Рассмотрим смежный класс $X \in \pi(I_{a,b})$, для которого $J \leqslant X$ в алгебре A/J. По следствию 24 найдётся элемент $x \in {I_{a,b}}^{+}$, для которого $X = x + J$. По следствию 16 $x \in I_a$ и $x \in I_b$, т. е. $x \leqslant \alpha a$ и $x \leqslant \beta b$ для некоторых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ из поля F. Значит, $x + J \leqslant \alpha a + J = \alpha(a + J)$ и $x + J \leqslant \beta b + J = \beta(b + J)$. В алгебре A/J по лемме 13 $x + J \in I_{a+J}$ и $x + J \in I_{b+J}$. По следствию 16 $x + J \in I_{a+J,b+J}$. Значит, $\pi(I_{a,b})^{+} \subset I_{a+J,b+J}$. По лемме 11 $\pi(I_{a,b}) \subseteq I_{a+J,b+J}$.

Рассмотрим смежный класс $Y \in I_{a+J,b+J}$, где $J \leqslant Y$. По следствию 16 $Y \in I_{a+J}$ и $Y \in I_{b+J}$. Значит, $Y \leqslant \alpha(a + J)$ и $Y \leqslant \beta(b + J)$ для некоторых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ из поля F. По следствию 24 найдётся элемент $y \in A^{+}$, для которого $Y = y + J$. Таким образом, $y + J \leqslant \alpha a + J$ и $y + J \leqslant \beta b + J$. Для элемента y найдутся элементы $u, v \in J$, для которых $y + u \leqslant \alpha a$ и $y + v \leqslant \beta b$. Так как J — направленный идеал, то найдётся $w \in J$, для которого $w \leqslant u, v$. Тогда $y + w \leqslant \alpha a, \beta b$. Так как A является интерполяционной псевдоупорядоченной алгеброй, то существует элемент $c \in A$, для которого $y + w, 0 \leqslant c \leqslant \alpha a, \beta b$. В силу леммы 13 $c \in I_a$ и $c \in I_b$. По следствию 16 $c \in I_{a,b}$. Значит, смежный класс $c + J \in \pi(I_{a,b})$. Так как $\pi(I_{a,b})$ — выпуклый идеал и $J \leqslant y + J \leqslant c + J$, то $Y = y + J \in \pi(I_{a,b})$. Таким образом, ${I_{a+J,b+J}}^{+} \subset \pi(I_{a,b})$. По лемме 11 $I_{a+J,b+J} \subseteq \pi(I_{a,b})$.

Следовательно, $I_{a+J,b+J} = \pi(I_{a,b})$. □

Лемма 31. *Пусть A — псевдорешёточно псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F, элементы a и b почти ортогональны в алгебре A и $I_{a,b} = \{0\}$. Тогда элементы a и b ортогональны.*

Доказательство. Если $a = 0$ или $b = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Пусть $x \in L(a, b)$. Тогда $0, x \leqslant a, b$. Так как по определению 10 A — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра, то существует элемент $c \in A$, для которого $0, x \leqslant c \leqslant a, b$. Так как идеалы I_a и I_b являются выпуклыми, то $c \in I_a$ и $c \in I_b$. По следствию 16 $c \in I_{a,b}$, т. е. $c = 0$. Значит, $x \leqslant 0$. Следовательно, $L(a, b) \subseteq L(0)$. □

Лемма 32. *Пусть A — псевдорешёточно псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F, удовлетворяющим условию $(*)$. Если элементы a и b ортогональны в алгебре A, то элементы a и b почти ортогональны и $I_{a,b} = \{0\}$.*

Доказательство. Если $a = 0$ или $b = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Допустим, что $0 \leqslant x \in I_{a,b}$. По следствию 16 $x \in I_a$ и $x \in I_b$, т. е. $x \leqslant \alpha a$ и $x \leqslant \beta b$ для некоторых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ из поля F. Так как F — направленное поле, то существует $\gamma \in F^+$, для которого $\alpha, \beta \leqslant \gamma$.

Если $\gamma - \alpha > 0$, то $0 \leqslant (\gamma - \alpha)a$, откуда следует, что $\alpha a \leqslant \gamma a$. Значит, $x \leqslant \gamma a$. Аналогично $x \leqslant \gamma b$. Так как $\gamma > 0$ и $0 < 1 = \gamma \cdot \gamma^{-1}$, то по условию $(*)$ $0 < \gamma^{-1}$. Поэтому $0 \leqslant \gamma^{-1}(\gamma a - x)$ и $0 \leqslant \gamma^{-1}(\gamma b - x)$. Отсюда вытекает, что $\gamma^{-1}x \leqslant a, b$. Таким образом, $\gamma^{-1}x \in L(a,b) \subseteq L(0)$. Значит, $\gamma^{-1}x \leqslant 0$, откуда $0 \leqslant -\gamma^{-1}x$. Это означает, что $0 \leqslant -x$, т. е. $x \leqslant 0$. Следовательно, $x = 0$ и $I_{a,b} = \{0\}$. □

Лемма 33. *Пусть A — псевдорешёточно псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F, удовлетворяющим условию $(*)$, J — выпуклый направленный идеал алгебры A. Тогда равносильны следующие условия:*

1) *A/J — решёточно псевдоупорядоченная алгебра над полем F;*
2) *если элементы a и b почти ортогональны в алгебре A, то $I_{a,b} \subseteq J$.*

Доказательство. Пусть имеет место условие 1 и элементы a и b почти ортогональны в алгебре A. Если $a = 0$ или $b = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Так как по определению 10 A является AO-псевдоупорядоченной алгеброй, то из леммы 22 следует, что смежные классы $a + J$ и $b + J$ почти ортогональны в фактор-алгебре A/J. Из леммы 18 по условию 1 следует, что смежные классы $a + J$ и $b + J$ ортогональны в алгебре A/J. Так как по определению 10 A является интерполяционной псевдоупорядоченной алгеброй, по лемме 29 получаем, что фактор-алгебра A/J является интерполяционной псевдоупорядоченной алгеброй. Таким образом, A/J является псевдорешёточно псевдоупорядоченной алгеброй над полем F. В силу леммы 32 $I_{a+J,b+J} = \{J\}$. По теореме 30 $I_{a+J,b+J} = \pi(I_{a,b})$, поэтому $\pi(I_{a,b}) = \{J\}$. Таким образом, если $x \in I_{a,b}$, то $x \in J$.

Пусть имеет место условие 2. Так как по определению 10 A является интерполяционной псевдоупорядоченной алгеброй, то по лемме 29 фактор-алгебра A/J является интерполяционной псевдоупорядоченной алгеброй. Так как по определению 10 A является AO-псевдоупорядоченной алгеброй, то по лемме 22 фактор-алгебра A/J является AO-псевдоупорядоченной алгеброй. Значит, A/J — псевдорешёточно псевдоупорядоченная алгебра над полем F.

Пусть смежные классы X и Y почти ортогональны в алгебре A/J. Так как $J \leqslant X, Y$, то существуют элементы $x, y \in A^+$, для которых $X = x + J$ и $Y = y + J$. Тогда $x - y = a - b$, где элементы a и b почти ортогональны в алгебре A. Пусть $c = x - a = y - b$. Тогда $x = a + c$ и $y = b + c$. Значит, $X = (a + J) + (c + J)$ и $Y = (b + J) + (c + J)$. Из леммы 22 следует, что смежные классы $a + J$ и $b + J$ почти ортогональны в алгебре A/J. В силу леммы 26 $c + J \in I_{a+J,b+J}$. По теореме 30 $I_{a+J,b+J} = \pi(I_{a,b})$. По условию леммы $c + J = J$. Значит, $X = a + J$ и $Y = b + J$. Поэтому $I_{X,Y} = \pi(I_{a,b}) = \{J\}$ в алгебре A/J. Из леммы 31 следует, что классы X и Y ортогональны в алгебре A/J. В силу теоремы 17, фактор-алгебра A/J является решёточно псевдоупорядоченной алгеброй. □

Лемма 34. *Если A — интерполяционная псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F, то множество $L(A)$ всех выпуклых направленных идеалов алгебры A образует подрешётку в решётке всех идеалов алгебры A. Кроме того, $L(A)$ — полная подрешётка сверху.*

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [11, теорема 2]. □

Доказательство теоремы 7. По лемме 28 для каждой пары почти ортогональных элементов a и b в алгебре A существует выпуклый направленный идеал $I_{a,b}$. Утверждение теоремы является прямым следствием леммы 34. □

Лемма 35. *Пусть A — псевдорешёточно псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F, удовлетворяющим условию $(*)$, J — выпуклый направленный идеал алгебры A. Тогда равносильны следующие условия:*

1) *A/J — решёточно псевдоупорядоченная алгебра над полем F;*
2) *идеал $\mathcal{I} \subseteq J$.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из леммы 33 и определения идеала $\mathcal{I}$ (см. теорему 7). □

Лемма 36. *Пусть A — псевдорешёточно псевдоупорядоченная алгебра над направленным полем F, удовлетворяющим условию $(*)$. Тогда равносильны следующие условия:*

1) *A — решёточно псевдоупорядоченная алгебра над полем F;*
2) *$\mathcal{I} = \{0\}$.*

Доказательство. Пусть A — решёточно псевдоупорядоченная алгебра, где элементы a и b почти ортогональны в алгебре A. По лемме 18 элементы a и b ортогональны в кольце A. В силу леммы 32 $I_{a,b} = \{0\}$. Из теоремы 7 следует верность условия 2.

Пусть выполняется условие 2. Так как по определению 10 A является AO-псевдоупорядоченной алгеброй, то каждый элемент x алгебры A представим в виде $x = a - b$, где элементы a и b почти ортогональны. По лемме 31 элементы a и b ортогональны. Остаётся применить теорему 17. □

Доказательство теоремы 8. Если A — решёточно псевдоупорядоченная алгебра, то утверждение очевидно.

Пусть A не является решёточно псевдоупорядоченной алгеброй. Тогда в силу леммы 36 выпуклый направленный идеал $\mathcal{I}$ отличен от $\{0\}$. Из леммы 35 следует, что фактор-алгебра $A/\mathcal{I}$ является решёточно псевдоупорядоченной алгеброй. □

Пример 3. Рассмотрим псевдорешёточно псевдоупорядоченную алгебру K из примера 2. Перечислим её нетривиальные выпуклые направленные идеалы:

$$C = \big\{\big((0,0),(c,0)\big)\big\},\quad D = \big\{\big((0,0),(0,d)\big)\big\},\quad J = \big\{\big((0,0),(c,d)\big)\big\},$$
$$A = \big\{\big((a,0),(c,d)\big)\big\},\quad B = \big\{\big((0,b),(c,d)\big)\big\}.$$

В этом случае $\mathcal{I} = J$.

Лемма 37. *Пусть A — псевдорешёточно псевдоупорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F, I — выпуклый направленный идеал алгебры A. Если K — спрямляющий направленный идеал фактор-алгебры A/I, то существует спрямляющий направленный идеал J в алгебре A, для которого $\pi(J) = K$.*

Доказательство. Так как по определению 10 A — AO-псевдоупорядоченная алгебра, то в силу леммы 22 фактор-алгебра A/I является AO-псевдоупорядоченной алгеброй. По лемме 12 существует выпуклый направленный идеал J алгебры A, для которого $\pi(J) = K$.

Пусть a и b почти ортогональны в алгебре A. По лемме 22 смежные классы $a + I$ и $b + I$ почти ортогональны в фактор-алгебре A/I. Так как K — спрямляющий направленный идеал, то по теореме 2 $a + I \in K$ или $b + I \in K$. Значит, $a \in J$ или $b \in J$. В силу теоремы 2 J — спрямляющий направленный идеал алгебры A. □

Доказательство теоремы 9. Рассмотрим множество $\{J_s \mid s \in S\}$ всех спрямляющих направленных идеалов в алгебре A. Так как по определению 10 A — AO-псевдоупорядоченная алгебра, то по теореме 1 существует выпуклый направленный идеал $J = \bigwedge\limits_{s\in S} J_s$.

Если элементы a и b почти ортогональны в алгебре A, то по теореме 2 $a \in J_s$ или $b \in J_s$ для всех $s \in S$. По лемме 13 имеем $I_a \subseteq J_s$ или $I_b \subseteq J_s$ для всех $s \in S$. По следствию 16 идеал $I_{a,b} \subseteq J_s$ для всех $s \in S$. В силу теоремы 7 $\mathcal{I} \subseteq J_s$ для всех $s \in S$. Поэтому $\mathcal{I} \subseteq J$.

Допустим, что $\mathcal{I} \neq J$. Существует элемент $x \in J \setminus \mathcal{I}$. По теореме 7 идеал $\mathcal{I}$ является выпуклым и направленным в алгебре A. Так как по определению 10 A является интерполяционной псевдоупорядоченной алгеброй, то по лемме 29 фактор-алгебра $A/\mathcal{I}$ является интерполяционной псевдоупорядоченной алгеброй. Так как по определению 10 A является AO-псевдоупорядоченной алгеброй, то по лемме 22 фактор-алгебра $A/\mathcal{I}$ является AO-псевдоупорядоченной алгеброй. Значит, $A/\mathcal{I}$ — псевдорешёточно псевдоупорядоченная алгебра.

Смежный класс $x + \mathcal{I}$ отличен от $\mathcal{I}$ в алгебре $A/\mathcal{I}$. По теореме 4 в алгебре $A/\mathcal{I}$ существует регулярный идеал K, являющийся значением класса $x + \mathcal{I}$. По лемме 35 алгебра $A/\mathcal{I}$ является решёточно псевдоупорядоченной алгеброй. По лемме 27 идеал K — спрямляющий направленный идеал алгебры $A/\mathcal{I}$. По лемме 37 существует спрямляющий направленный идеал H в алгебре A, для которого $\pi(H) = K$, поэтому $J \subseteq H$. Если $x \in H$, то $x + \mathcal{I} \in K$, что противоречит выбору идеала K. Если $x \notin H$, то $x \notin J$, что противоречит выбору элемента x. Следовательно, $\mathcal{I} = J$. $\square$

Литература

[1] Бибаева В. Н., Ширшова Е. Е. О линейно K-упорядоченных кольцах // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 4. — С. 13—23.

[2] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.

[3] Копытов В. М. Упорядочение алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 3. — С. 295—325.

[4] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

[5] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О линейно упорядоченных линейных алгебрах // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, вып. 1. — С. 53—63.

[6] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 1. — С. 85—158.

[7] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал направленных псевдоупорядоченных колец // Фундамент. и прикл. матем. — 2019. — Т. 22, вып. 4. — С. 147—166.

[8] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал направленных псевдоупорядоченных алгебр над направленными полями // Фундамент. и прикл. матем. — 2020. — Т. 23, вып. 3. — С. 215—230.

[9] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Проективная геометрия над частично упорядоченными телами // Фундамент. и прикл. матем. — 2020. — Т. 23, вып. 2. — С. 231—245.

[10] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Проективная геометрия над частично упорядоченными телами. II // Чебышёвский сб. — 2021. — Т. 22, вып. 1. — С. 213—224.

[11] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Интерполяционные псевдоупорядоченные алгебры над частично упорядоченными полями // Фундамент. и прикл. матем. — 2022. — Т. 24, вып. 2. — С. 181—196.

[12] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Интерполяционные псевдоупорядоченные кольца // Фундамент. и прикл. матем. — 2022. — Т. 24, вып. 1. — С. 177—191.

[13] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

[14] Ширшова Е. Е. Лексикографические расширения и pl-группы // Фундамент. и прикл. матем. — 1995. — Т. 1, вып. 4. — С. 1133—1138.

[15] Ширшова Е. Е. О свойствах интерполяционных групп // Мат. заметки. — 2013. — Т. 93, № 2. — С. 295—304.

[16] Ширшова Е. Е. О частично K-упорядоченных кольцах // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 1. — С. 225—239.

[17] Ширшова Е. Е. О частично упорядоченных алгебрах над полями // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 4. — С. 249—263.

[18] Ширшова Е. Е. Выпуклые идеалы частично псевдоупорядоченных колец // Фундамент. и прикл. матем. — 2023. — Т. 24, вып. 3. — С. 181—199.

[19] Fuchs L. Riesz groups // Ann. Math. Scu. Norm. Sup. Pisa. — 1965. — Vol. 19. Ser. III. — P. 1—34.

[20] Shirshova E. E. On groups with the almost orthogonality condition // Commun. Algebra. — 2000. — Vol. 28, no. 10. — P. 4803—4818.