Усечённые ряды в роли матричных элементов

С. А. АБРАМОВ
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» РАН
e-mail: sergeyabramov@mail.ru

А. А. РЯБЕНКО
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» РАН
e-mail: anna.ryabenko@gmail.com

УДК 519.7

Ключевые слова: строго невырожденные матрицы, усечённые степенные ряды, компьютерная алгебра.

Аннотация

Рассматриваются квадратные матрицы над кольцом формальных степенных рядов. Элементы матриц (ряды) заданы «приближённо»: для каждого из них известно лишь конечное число начальных членов, и эти числа могут не совпадать для разных элементов матрицы. Обсуждаются вопросы, связанные с возможностью гарантий невырожденности матрицы, для которой известно лишь такого рода «приближённое» представление.

Abstract

S. A. Abramov, A. A. Ryabenko, Truncated series in the role of matrix elements, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 4, pp. 17—27.

Square matrices over a ring of formal power series are considered. The matrix elements (series) are given “approximately”: for each of them only a finite number of initial terms are known, and these numbers need not coincide for different matrix elements. We dicuss issues related to the possibility of guaranteeing the non-singularity of a matrix for which only this kind of “approximate” representation is known.

Посвящается памяти Е. В. Панкратьева

1. Введение

В [5] предложен алгоритм, применимый к произвольной невырожденной квадратной матрице $P = (p_{ij})$, в которой все элементы p_{ij} — полиномы от x над полем K характеристики 0. Алгоритм позволяет проверить, верно ли, что матрица $P + Q$ невырожденна при любой матрице Q с элементами из кольца

Фундаментальная и прикладная математика, 2025, том 25, № 4, с. 17—27.

$K[[x]]$ формальных степенных рядов, имеющей, во-первых, такой же размер, как P, и, во-вторых, обладающей свойством

$$\operatorname{val} Q \geqslant 1 + \deg P. \tag{1}$$

Напомним, что валюацией $\operatorname{val} f(x)$ степенного ряда или полинома называется младшая степень x, имеющая в $f(x)$ ненулевой коэффициент (например, для $f(x) = -3x^2 + 5x^3 + \ldots$ имеем $\operatorname{val} f(x) = 2$; по определению полагаем $\operatorname{val} 0 = \infty$). Валюацией матрицы, составленной из степенных рядов или полиномов, называется наименьшая из валюаций всех элементов этой матрицы. Степенью составленной из полиномов матрицы считается наибольшая из всех степеней элементов, при этом $\deg 0 = -\infty$.

Матрица P, для которой матрица $P+Q$ оказывается невырожденной всякий раз, когда для матрицы Q того же размера, что и P, выполнено (1), названа в [5] *строго невырождённой*. Строго невырожденная матрица остаётся невырожденной при добавлении к её элементам «хвостов», превращающем полиномы в ряды, имеющие коэффициенты из K. При добавлении «хвостов» необходимо, чтобы младшая степень (валюация) каждого такого «хвоста» превосходила $\deg P$.

Пусть матрица P невырожденна и получена путём усечения некоторой матрицы

$$M = (m_{ij}), \tag{2}$$

элементами которой служат формальные степенные ряды, при этом степень усечения для всех элементов равна фиксированному целому неотрицательному d: все члены более высоких, чем d, степеней удалены. Тогда, если $d = \deg P$, с помощью предложенного в [5] алгоритма можно проверить, верно ли, что матрица M (мы эту матрицу не знаем), не может быть вырожденной. С этой целью выполняется проверка строгой невырожденности матрицы P.

Примечание 1. Если d больше степени некоторого p_{ij}, то подразумевается, что коэффициенты при степенях $\deg p_{ij} + 1, \ldots, d$ в m_{ij} равны нулю.

Мы далее рассматриваем задачу проверки строгой невырожденности в более общем, в сравнении с [5], варианте, расширяя само понятие строгой невырожденности, опуская предположение, что степени усечений всех элементов изначальной матрицы одинаковы, и, в частности, считая, что степень любого (и даже каждого) из элементов матрицы P может быть меньше d, — см. примечание 1.

Ниже P — это невырожденная $(n \times n)$-матрица, элементы которой — полиномы от x над полем K. (Степени этих полиномов могут отличаться друг от друга.)

В [1, 2] был рассмотрен вопрос, как для заданной невырожденной числовой вещественной матрицы, в элементах которой после десятичной точки присутствует лишь конечное число цифр, проверить, останется ли эта матрица невырожденной после произвольного дописывания цифр к некоторым (явно заранее указанным) из её элементов? Выяснено, что эта задача алгоритмически разрешима. Обсуждалась компьютерная реализация предлагаемого алгоритмического решения. Допускалось, что разные элементы исходной матрицы P могут иметь разное число известных цифр после десятичной точки. Как уже сказано, ниже подобная задача рассматривается для степенных рядов, имеющих свою специфику.

2. Предварительные сведения

В [5, предложение 1] доказан критерий, т. е. необходимое и достаточное условие, строгой невырожденности матрицы P:

$$\deg P + \operatorname{val} P^* \geqslant \operatorname{val} \det P, \tag{3}$$

где в соответствии с определением величин val и deg

- $\deg P = \max\limits_{i,j} \deg p_{ij}$,
- $\operatorname{val} P^* = \min\limits_{i,j} \operatorname{val} f_{ij}$; здесь f_{ij} — минор матрицы P, полученный вычёркиванием i-й строки и j-го столбца. В целом матрица P^* рассматривается как транспонированная матрица алгебраических дополнений матрицы P.

Критерий (3) может быть, очевидно, переписан в эквивалентной форме:

$$\deg P + \operatorname{val} P^{-1} \geqslant 0.$$

В контексте нашей новой задачи вопрос о возможном критерии не тривиален. Например, любая константная невырожденная матрица является строго невырожденной. Отсюда получаем, что матрица, все свободные члены элементов которой образуют невырожденную матрицу, является строго невырожденной. Но это достаточное условие строгой невырожденности не является необходимым (пример следует ниже). Как следствие, само указанное свойство не является критерием строгой невырожденности. Подтверждающий это пример: матрица

$$\begin{pmatrix} x & x^3 \\ 1 & x \end{pmatrix} \tag{4}$$

строго невырожденная в соответствии с (3). Но вырожденна матрица свободных членов её элементов.

Критерий (3) можно обобщить, охватив и случай, когда степень усечения d превосходит степень матрицы P. Можно заметить, что согласно (3) матрица

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

не является строго невырожденной. Но вместе с этим не существует такой (2×2)-матрицы Q, $\operatorname{val} Q > 2$, что матрица $P + Q$ вырожденна.

Изменим формулировку предложения 1 из [5].

Предложение 1. *Пусть* $P = (p_{ij})$, $p_{ij} \in K[x]$, — *невырожденная полиномиальная* $(n \times n)$*-матрица, и пусть задано такое целое* d, *что* $d \geqslant \deg p_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$. *Тогда матрица* $P + Q$ *невырожденна при любой* $(n \times n)$*-матрице* Q *с элементами из кольца* $K[[x]]$, *обладающей свойством* (1), *если и только если выполняется*

$$d + \operatorname{val} P^* \geqslant \operatorname{val} \det P. \tag{5}$$

Доказательство в новой формулировке остаётся тем же, что и доказательство предложения 1 из [5].

Этот вариант критерия будет существенно использоваться далее в алгоритме решения рассматриваемой задачи.

Относительно поля K мы предполагаем, что существует алгоритм, проверяющий совместность произвольной заданной полиномиальной системы уравнений над K, имея в виду, что коэффициенты системы принадлежат K и эта система имеет решение с компонентами в K. В случае алгебраически замкнутого поля такой алгоритм основывается на базисах Грёбнера [3]. В случае вещественно замкнутого поля работает метод цилиндрической декомпозиции при элиминации кванторов [6—8, 10], являющийся обобщением алгоритма Тарского [11]. Если полиномиальная система имеет рациональные коэффициенты, то сам алгоритм Тарского позволяет ответить на вопрос, имеет ли эта система решение с вещественными компонентами. Применительно к исходной задаче это означает, что если элементами данной матрицы P служат полиномы с рациональными коэффициентами, то можно узнать, существуют ли продолжения этих полиномов в виде рядов с вещественными коэффициентами, для которых матрица становится вырожденной. Заметим, что при положительном ответе можно считать, что коэффициенты полиномиальной системы и компоненты её решения принадлежат полю K вещественных алгебраических чисел (которое является вещественно замкнутым полем в смысле [7]).

Примечание 2. Что касается решений, имеющих рациональные компоненты, то по настоящее время не известно, возможно ли алгоритмически решать вопрос об их наличии. Благодаря результатам Ю. В. Матиясевича [4] известно, что эта проблема неразрешима, если речь идёт о целых компонентах, но из этого результата напрямую не следует, что проблема неразрешима и для рациональных чисел.

Для проверки наличия решений в поле K вещественных алгебраических чисел полиномиальной системы уравнений с коэффициентами — рациональными числами можно предварительно применить алгоритм, основанный на базисах Грёбнера, существенно менее затратный по времени, чем алгоритм цилиндрической декомпозиции. Если ответ получится отрицательным, то это будет означать, что система несовместна над полем алгебраических чисел и, следовательно, над полем K. Но положительный ответ не означает, что система имеет решение с компонентами в K. Дополнительно для получения окончательного ответа можно использовать алгоритм цилиндрической декомпозиции.

Вместе с матрицей P считаются заданными целые числа $d_{ij} \geqslant -1$, $i,j = 1,\ldots,n$. Пусть

$$P = (p_{ij}), \quad p_{ij} \in K[x], \quad \deg p_{ij} \leqslant d_{ij}, \quad d = \max_{i,j} d_{ij}. \tag{6}$$

Относительно элемента m_{ij} матрицы (2) предполагается, что $m_{ij} = p_{ij} + q_{ij}$, где $q_{ij} \in K[[x]]$ — некоторый ряд, такой что $\operatorname{val} q_{ij} \geqslant d_{ij}+1$. Равенство $d_{ij} = -1$ означает, что мы не имеем никакой информации об элементе m_{ij} матрицы M, кроме его принадлежности $K[[x]]$.

Эта задача проверки невырожденности матрицы M сложнее рассмотренной в [5], где никакой из добавляемых членов не может иметь степень, меньшую, чем $d+1$. Тем самым добавляемый член не влияет на начальные члены определителя. Решение этой новой задачи ниже сведено к серии проверок совместности (иначе говоря, проверок наличия решений, разрешимости) систем полиномиальных уравнений.

Будем считать, что среди целых чисел d_{ij} имеются неотрицательные. Таким образом, $d \geqslant 0$ в (6).

В разделе 6 мы дополнительно рассматриваем вопрос о числе начальных членов рядов, служащих элементами матрицы P^{-1} и совпадающих с начальными членами элементов матрицы M^{-1}. Ответ даётся в предположении строгой невырожденности (в новом расширенном смысле) матрицы P.

Если все d_{ij} равны между собой, то матрица P будет называться *плоской*.

3. Расширение понятия строгой невырожденности матрицы

Определение 1. Матрицу P рассматриваемого вида (6) будем называть *строго невырожденной*, если для любой $(n \times n)$-матрицы $Q = (q_{ij})$, элементы которой принадлежат $K[[x]]$, $\operatorname{val} q_{ij} \geqslant d_{ij}+1$, матрица $P+Q$ невырожденна. (Если $d_{ij} = -1$, то q_{ij} может быть любым элементом $K[[x]]$, и при любом q_{ij} матрица $P+Q$ невырожденна.)

Будет показано, что для заданной матрицы P при некоторых предположениях относительно поля K можно алгоритмически выяснить, является ли эта матрица строго невырожденной в смысле определения 1.

Определение 2. Пусть имеет место (6). Для матрицы P её *K-пополнением* назовём матрицу, полученную добавлением к каждому p_{ij} при $d_{ij} < d$ каких-либо одночленов степеней $d_{ij}+1,\ldots,d$ с коэффициентами из K. *Формальным пополнением* назовём такое пополнение, в котором все добавляемые одночлены имеют различные неопределённые (символьные) коэффициенты.

Легко видеть, что справедливо следующее предложение.

Предложение 2. *Матрица P является строго невырожденной, если и только если любое её K-пополнение (каждое будет плоской матрицей) является строго невырожденной матрицей.*

Рассматривая в дальнейшем утверждения, справедливые для всех решений некоторой полиномиальной системы уравнений, мы считаем, что если система пуста (не содержит уравнений), то любой набор значений неизвестных является её решением.

Теорема 1. *Пусть $p(x; t_1, \ldots, t_m)$ — полином от x, коэффициентами которого служат полиномы над K от неизвестных $t_1, \ldots, t_m$. Пусть S — полиномиальная над K совместная система уравнений (возможно, пустая) относительно неизвестных $t_1, \ldots, t_m$. Существует алгоритм, позволяющий найти все значения $\operatorname{val} p$, реализующиеся (возникающие) при каких-то значениях $t_1, \ldots, t_m \in K$, удовлетворяющих системе S. Вместе с каждым найденным значением ν валюации этот алгоритм находит совместную систему S_ν полиномиальных над K уравнений, решения которой — все те решения системы S, при которых $\operatorname{val} p = \nu$. Результатом работы алгоритма является список имеющих вид (ν, S_ν) условных валюаций.*

Доказательство. Укажем соответствующий алгоритм (назовём его $\mathcal{A}$). Пусть для некоторого n

$$p = p_0(t_1, \ldots, t_m) + \ldots + p_n(t_1, \ldots, t_m)x^n, \tag{7}$$

при этом $p_n(t_1, \ldots, t_m)$ — ненулевой полином. Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_m \in K$ — некоторые конкретные значения неизвестных $t_1, \ldots, t_m$. Пусть ν — некоторое целое число, $0 \leqslant \nu \leqslant n$. Равенство $\nu = \operatorname{val} p$ для данных значений неизвестных, удовлетворяющих системе S, выполняется, если и только если для $\tau_1, \ldots, \tau_m$ выполнены соотношения

$$S,\ p_0 = \ldots = p_{\nu-1} = 0,\ p_\nu \neq 0 \tag{8}$$

(уравнения системы S включены в (8)). Систему (8) можно записать как систему полиномиальных уравнений, включающей в себя и уравнения системы S:

$$S,\ p_0 = 0, \ldots, p_{\nu-1} = 0,\ p_\nu - r = 0,\ rs - 1 = 0, \tag{9}$$

где r, s — дополнительные неизвестные, вовлекаемые в систему. Если $\nu = 0$, то уравнения $p_0 = 0, \ldots, p_{\nu-1} = 0$ отсутствуют в (9). Два последних уравнения системы (9) обеспечивают выполнение неравенства $p_\nu(t_1, \ldots, t_m) \neq 0$.

Алгоритм последовательно рассматривает все априорные значения $\nu = 0, \ldots, n$, для каждого из них строит систему S_ν полиномиальных уравнений вида (9) и проверяет её совместность. Если система S_ν совместна, то условная валюация (ν, S_ν) включается в результирующий список. □

4. Алгоритм проверки строгой невырожденности матрицы

Алгоритм $\mathcal{A}$ и критерий (5) приводят к алгоритму решения основной задачи. Идея такова: найти с помощью $\mathcal{A}$ все пары

$$\operatorname{val}\det P,\ \operatorname{val} P^*, \tag{10}$$

которые реализуются при тех или иных конкретных K-пополнениях исходной системы; для каждой из этих пар проверить выполнение неравенства (5).

Итак, пусть найденный для формального пополнения $\tilde{P}$ матрицы P определитель $\det\tilde{P}$ имеет вид (7), где в качестве неизвестных выступают символьные обозначения, используемые в формальном пополнении.

Для записанного в виде (7) полинома p алгоритм вначале проверяет совместность системы $p_0 = 0, \dots, p_n = 0$. В случае её совместности вычисления прекращаются и объявляется, что P не является строго невырожденной матрицей.

Применяя $\mathcal{A}$ к $\det\tilde{P}$ и пустой системе, получаем конечный список условных валюаций. Далее рассматриваем эти условные валюации. Пусть (ν, S_ν) — очередная валюация. Для матрицы $(\tilde{P})^*$ находим с помощью $\mathcal{A}$ её условные валюации ν_0 с учётом системы S_ν. Возникает список имеющих вид (ν_0, ν, S_{ν_0}) условных валюаций, в котором все системы S_{ν_0} совместны. Совместность гарантирует то, что каждая из полученных пар (10) реализуется при некоторых значениях для $t_1, \dots, t_m$. Каждую из пар (10) исследуем с помощью критерия (5). Это может указать на существование K-пополнения матрицы P, при котором не выполняется (5), тогда P не является строго невырожденной матрицей. Если же такого не случилось, то любое K-пополнение даёт строго невырожденную матрицу и по предложению 2 матрица P является строго невырожденной.

5. Реализация в Maple

Представленный выше алгоритм проверки строгой невырожденности матрицы с элементами, имеющими вид усечённых рядов, реализован нами в среде компьютерной алгебры Maple 2024 (см. [9]) в виде процедуры `StronglyNonSingular`. Maple-библиотека, содержащая эту процедуру, как и Maple-сессия с примерами использования процедуры, доступны по ссылке `www.ccas.ru/ca/_media/StronglyNonSingularSeriesMatrix.zip`.

Для определения совместности полиномиальных над K систем, возникающих в процессе работы процедуры, где K — поле вещественных алгебраических чисел, сначала используется процедура `Solve` встроенного в Maple пакета `Groebner`. Эта процедура определяет, совместна ли данная система над полем $\bar{\mathbb{Q}}$ алгебраических чисел. Если система оказывается совместной над $\bar{\mathbb{Q}}$, далее используется процедура `QuantifierEliminate` из Maple-пакета `QuantifierElimination` (см. [12]), реализующая метод цилиндрической декомпозиции, для проверки совместности системы над K.

Первым аргументом нашей процедуры `StronglyNonSingular` является квадратная матрица P, вторым — имя переменной (в наших примерах — x). Усечённые элементы матрицы задаются в виде $p_{ij}(x) + O(x^{d_{ij}+1})$, где $d_{ij} \geqslant -1$ и $p_{ij}(x)$ — полином степени не выше d_{ij} над полем рациональных чисел. (Здесь и далее обозначение $O(x^k)$ используется для некоторого (неуточняемого) формального ряда, валюация которого больше или равна k.) Процедура возвращает `true`, если P является строго невырожденной, иначе — `false`. Также выполняется печать некоторых промежуточных результатов.

Пример 1. Пусть требуется проверить, является ли строго невырожденной матрица

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

при степенях усечения $d_{11} = 1$, $d_{12} = 2$, $d_{21} = 2$, $d_{22} = 1$. Выполняем присваивание

$> P := \begin{bmatrix} x + O(x^2) & O(x^3) \\ 1 + O(x^3) & x + O(x^2) \end{bmatrix}:$

Применяем нашу процедуру:

$>$ `StronglyNonSingular`(P, x);

```
completion:
```

$$\begin{bmatrix} x + x^2\, t_1 & 0 \\ 1 & x + x^2 t_2 \end{bmatrix}$$

```
d = 2
detP = t[1]*t[2]*x^4+(t[1]+t[2])*x^3+x^2
    val_detP = 2
    S2 = {}
         d >= val_detP --> true

                              true
```

Процедура выводит промежуточные результаты: формальное пополнение исходной матрицы, максимальную степень усечения $d = 2$ и т. д.

Ответ `true` означает, что заданная матрица является строго невырожденной.

Пример 2. Рассмотрим работу процедуры с матрицей, которая не является строго невырожденной.

$>$ `StronglyNonSingular` $\left(\begin{bmatrix} x + O(x^3) & O(x^2) \\ 1 + O(x^3) & x + x^2 + O(x^3) \end{bmatrix}, x\right);$

```
completion:
```

$$\begin{bmatrix} x & x^2\,t_1 \\ 1 & x+x^2 \end{bmatrix}$$

```
d = 2
detP = x^3+(-t[1]+1)*x^2
    val_detP = 2
    S2 = {-t[1]+1-r[2] = 0
          r[2]*s[2]-1 = 0}
adjoint:
```

$$\begin{bmatrix} x+x^2 & -t_1\,x^2 \\ -1 & x \end{bmatrix}$$

```
        val_Padj = 0
        S0 = {-t[1]+1-r[2] = 0
              r[2]*s[2]-1 = 0}
        d + val_Padj >= val_detP --> true
    val_detP = 3
    S3 = {-t[1]+1 = 0}
        val_Padj = 0
        S0 = {-t[1]+1 = 0}
        d + val_Padj >= val_detP --> false
                            false
```

Ответ `false` говорит о том, что заданная матрица не является строго невырожденной.

6. Обратная матрица

Для заданной плоской строго невырожденной матрицы P, $d = \deg P$, можно вычислить начальные члены рядов, составляющих обратную матрицу, в количестве $h+1$, где

$$h = d + \operatorname{val} P^{-1} = d + \operatorname{val} P^* - \operatorname{val} \det P \tag{11}$$

([5, Prop. 3]). Т.е. элементы матриц P^{-1} и M^{-1} совпадают по крайней мере до степени $\operatorname{val} P^{-1} + h$. В частности $\operatorname{val} P^{-1} = \operatorname{val} M^{-1}$.

Пусть усечение P матрицы M является строго невырожденным, но не обязательно плоским. Для формального пополнения $\tilde{P}$ матрицы P можно, используя предложенный алгоритм, найти все допустимые пары (10). По всем полученным парам выберем наименьшее $\nu = \operatorname{val}(\tilde{P})^{-1}$ и положим $h = d + \nu$.

Каждый (i,j)-й элемент матрицы $(\tilde{P})^{-1}$ вычислим до степени $\nu + h$:

$$a_\nu x^\nu + \ldots + a_{\nu+h} x^{\nu+h} + \ldots$$

Некоторые из начальных коэффициентов, возможно, будут зависеть от введённых при формальном пополнении неизвестных $t_1, t_2, \ldots$ Пусть $h_{i,j}$ таково, что

$a_\nu, \ldots, a_{\nu+h_{i,j}}$ не зависят от неизвестных, при этом $a_{\nu+h_{i,j}+1}$ зависит. Тогда (i,j)-й элемент матрицы M^{-1} известен до степени $\nu + h_{i,j}$.

Пример 3. Рассмотрим усечение с формальным пополнением

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1+x & 0 \\ 1+t_1\,x & 1-x \end{pmatrix}.$$

Здесь $d=1$, $\det\tilde{P} = -x^2+1$. Так как $\operatorname{val}\det\tilde{P} = 0$ независимо от значений t_1 и при этом $d > \operatorname{val}\det\tilde{P}$, то выполняется условие (5) строгой невырожденности. Вычисляем

$$(\tilde{P})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x+1} & 0 \\ \frac{x\,t_1+1}{-x^2+1} & \frac{1}{x-1} \end{pmatrix}.$$

Получаем $\operatorname{val}(\tilde{P})^{-1} = 0$ и первые члены разложения в ряд всех элементов до степени 1 этой матрицы:

$$(\tilde{P})^{-1} = \begin{pmatrix} 1-x+O(x^2) & O(x^2) \\ -1-t_1\,x+O(x^2) & 1+x+O(x^2) \end{pmatrix}.$$

Отбросив зависящий от t_1 член, окончательно получим

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1-x+O(x^2) & O(x^2) \\ -1+O(x) & 1+x+O(x^2) \end{pmatrix}.$$

Наша процедура `StronglyNonSingular` предоставляет возможность построения начальных членов элементов матрицы M^{-1} в тех случаях, когда нам известна строго невырожденная матрица P, являющаяся усечением для M. Для этого процедуре дополнительно передаётся имя, которое будет присвоено усечению обратной матрицы.

$$> \texttt{StronglyNonSingular}\left(\begin{bmatrix} 1+x+O(x^2) & O(x^2) \\ 1+O(x) & 1-x+O(x^2) \end{bmatrix},\ x,\ \texttt{'inverse'} = {}'Pinv'\right);$$

completion:

$$\begin{bmatrix} 1+x & 0 \\ 1+t_1\,x & 1-x \end{bmatrix}$$

```
d = 1
detP = -x^2+1
    val_detP = 0
    S0 = {}
         d >= val_detP --> true
```

$$\texttt{true}$$

$> Pinv;$

$$\begin{bmatrix} 1 - x + O(x^2) & O(x^2) \\ -1 + O(x) & 1 + x + O(x^2) \end{bmatrix}$$

Авторы благодарны М. Кауэрсу (Университет Линца) за полезные советы, а также компании Maplesoft (Ватерлоо, Канада) за консультации и дискуссии.

Литература

[1] Абрамов С. А., Рябенко А. А. О строго невырожденных числовых матрицах // Труды XV науч. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы математики». — Коломна: ГСГУ, 2025. — С. 19—24.

[2] Абрамов С. А., Рябенко А. А. Конечные десятичные дроби как элементы невырожденных матриц // Программирование. — 2025. — № 2. — С. 83—90.

[3] Бухбергер Б. Базисы Грёбнера. Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов // Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления. — М.: Мир, 1986. — С. 331—372.

[4] Матиясевич Ю. В. Десятая проблема Гильберта. — М.: Физматлит, 1993.

[5] Abramov S., Barkatou M. On strongly non-singular polynomial matrices // Advances in Computer Algebra. WWCA 2016 / Schneider C., Zima E., eds. — Springer, 2018. — (Springer Proc. Math. Stat.; Vol. 226). — P. 1—17.

[6] Basu S., Pollack R., Roy M.-F. Algorithms in Real Algebraic Geometry. — Springer, 2016. — (Algorithms Comput. Math.; Vol. 10).

[7] Collins G. E. Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition // Proc. 2nd GI Conf. Automata Theory and Formal Languages. — New York: Springer, 1975. — P. 134—183.

[8] Davenport J., Heintz J. Real quantifier elimination is doubly exponential // J. Symb. Comput. — 1988. — Vol. 5. — P. 29—35.

[9] Maple online help. — `http://www.maplesoft.com/support/help/`.

[10] Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition / Caviness B. F., Johnson J. R., eds. — Springer, 1998. — (Texts Monogr. Symbolic Comput.).

[11] Tarski A. A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry. — Santa Monica, CA: Rand Corp., 1948.

[12] Tonks Z. A poly-algorithmic quantifier elimination package in Maple // Maple in Mathematics Education and Research / Corless R. M., Gerhard J., Kotsireas I. S., eds. — Springer, 2020. — (Commun. Comp. Inform. Sci., Vol. 1414). — P. 176—186.