Существование дробно-рационального приближения в несимметричных пространствах*

А. Р. АЛИМОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru

УДК 517.982.256

Ключевые слова: несимметрично нормированное пространство, сходимость по Дойчу, рациональные функции.

Аннотация

С использованием аппарата сходимости по Дойчу получен ряд теорем о существовании наилучшего приближения обобщёнными рациональными функциями в несимметрично нормированных пространствах типа C и L^p.

Abstract

A. R. Alimov, Existence of best rational approximation in asymmetric spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 4, pp. 29—35.

The machinery of Deutsch convergence is used to obtain existence theorems for best generalized rational approximation in asymmetric normed spaces of the type C and L^p.

Настоящая заметка посвящена светлой памяти Евгения Васильевича Панкратьева, светлого человека, патриота России и отечественной науки, замечательного учёного и педагога, прекрасного организатора и вдохновителя. Воспоминания об этом замечательном человеке с указанием ряда его результатов можно найти в [1].

Пусть X — линейное пространство над $\mathbb{R}$. *Несимметричная норма* $\|\cdot|$ на X удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $\|\alpha x| = \alpha\|x|$ для всех $\alpha \geqslant 0$, $x \in X$;
2) $\|x + y| \leqslant \|x| + \|y|$ для всех $x, y \in X$;
3) $\|x| \geqslant 0$ для всех $x \in X$; $\|x| = 0$, если и только если $x = 0$.

Термин *несимметричная норма* был введён М. Г. Крейном в 1938 г. (см., например, [9]).

Если $\|\cdot|$ — несимметричная норма, то функционал

$$\|x\|_{\mathrm{sym}} = \max\{\|x|, \|-x|\}, \quad x \in X,$$

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации научного проекта по соглашению № 075-15-2025-013.

называемый *нормой симметризации*, является нормой. Несимметрично нормированное пространство $X=(X,\|\cdot|)$ называется *симметризуемым*, если несимметричная норма $\|\cdot|$ эквивалентна норме симметризации $\|x\|_{\mathrm{sym}}$.

Ниже:

- $X=(X,\|\cdot|)$ — несимметрично нормированное пространство,
- $\mathring{B}(x,r)=\{y\in X\mid \|y-x|<r\}$ — открытый шар с центром x и радиусом r;
- $B(x,r)=\{y\in X\mid \|y-x|\leqslant r\}$ — «замкнутый» шар с центром x и радиусом r.

Для $\varnothing\ne M\subset X$ *правая функция расстояния* от точки $x\in X$ до множества $M\subset X$ и *левая функция расстояния* от множества M до точки $x\in X$ определяются формулами

$$\rho(x,M):=\inf_{y\in M}\|y-x|,\quad \rho^-(x,M):=\inf_{y\in M}\|x-y|.$$

Множества правых и левых *ближайших точек* для точки $x\in X$ из множества M определяются следующим образом:

$$P_Mx:=\{y\in M\mid \rho(x,M)=\|y-x|\},\quad P_M^-x:=\{y\in M\mid \rho^-(x,M)=\|x-y|\}.$$

Точка x называется точкой существования, если $P_Mx\ne\varnothing$.

Топология τ несимметричного пространства $X=(X,\|\cdot|)$ задаётся предбазой открытых шаров $\mathring{B}(x,r)$. В общем случае такая топология удовлетворяет лишь аксиоме отделимости T_1 и может быть нехаусдорфовой.

Класс несимметричных пространств, являющийся важным и полезным расширением класса линейных нормированных пространств, имеет многочисленные приложения в теории приближений, вариационном исчислении, теоретической информатике и математической экономике (см., например, [3, 5, 10]).

Ниже важную роль будет играть аппарат нетопологической сходимости, введённый в нормированном случае Ф. Дойчем [11]. Сформулируем обобщение его определения на несимметричный случай.

Определение 1. Пусть X — линейное пространство с несимметричной нормой. Под *сходимостью по Дойчу* τ (или *τ-сходимостью*) $x_\delta\xrightarrow{\tau}x$ направленностей (или последовательностей) в X мы понимаем сходимость τ со следующими свойствами:

(i) сходимость τ инвариантна относительно сдвига, т. е. $x_\delta\xrightarrow{\tau}x$ влечёт, что $x_\delta+y\xrightarrow{\tau}x+y$ для любого $y\in X$;

(ii) τ является однородной, т. е. сходимость $x_\delta\xrightarrow{\tau}x$ влечёт, что $\alpha x_\delta\xrightarrow{\tau}\alpha x$ для любого $\alpha\geqslant 0$;

(iii) если $x_\delta\xrightarrow{\tau}x$, то $\|x|\leqslant\limsup\|x_\delta|$.

Определённую выше сходимость по Дойчу мы будем также называть *правой сходимостью по Дойчу* (или *τ^+-сходимостью по Дойчу*).

Отметим, что:

— если $\|x - x_\delta| \to 0$ (т. е. (x_δ) *право сходится* к x), то (x_δ) τ^+-сходится по Дойчу к x;

— если $\|x_\delta - x| \to 0$ (т. е. (x_δ) *лево сходится* к x), то (x_δ) τ^--сходится по Дойчу к x.

Определение 2. Множество M называется (регулярно) *аппроксимативно компактным*, если из условий $(y_n) \subset M$, $\|y_n - x| \to \rho(x, M)$ следует, что найдётся подпоследовательность (y_{n_k}), (лево) сходящаяся к некоторой точке $\hat{y} \in M$, т. е. $\|y_{n_k} - \hat{y}| \to 0$. Соответствующая точка x называется точкой *аппроксимативной компактности* для M.

Множество M называется *право-аппроксимативно τ^+-компактным* (или *право-аппроксимативно τ^+-компактным по Дойчу*), если из условий $(y_\delta) \subset M$, $\|y_\delta - x| \to \rho(x, M)$ следует, что найдётся поднаправленность (y_{δ_γ}), (право-) τ^+-сходящаяся к некоторой точке $\hat{y} \in M$.

Множество M называется *право-аппроксимативно τ^--компактным* (или *право-аппроксимативно τ^--компактным по Дойчу*), если из условий $(y_\delta) \subset M$, $\|y_\delta - x| \to \rho(x, M)$ следует, что найдётся поднаправленность (y_{δ_γ}), (лево-) τ^--сходящаяся к некоторой точке $\hat{y} \in M$.

Определённую выше сходимость по Дойчу мы будем также называть *левой сходимостью по Дойчу*. (*Правая сходимость по Дойчу* — это сходимость по Дойчу для зеркальной нормы $\|- \cdot|$.) Отметим, что если $\|x_\delta - x| \to 0$ (т. е. (x_δ) *лево сходится* к x), то (x_δ) (лево) сходится по Дойчу к x. Аналогично, если $\|x - x_\delta| \to 0$, то (x_δ) право сходится по Дойчу к x.

Множество M в несимметричном пространстве $X = (X, \|\cdot|)$ называется (право-)ограниченным, если существует точка $z \in X$ и число $C > 0$, для которых $M \subset B(z, C)$.

Определение 3. Подмножество $M \subset X$ называется *ограниченно τ-компактным*, если любая (право-)ограниченная направленность из M содержит (лево-)τ-сходящуюся поднаправленность к точке из M. Ограниченная τ-компактность также называется *ограниченной компактностью по Дойчу*.

Ясно, что ограниченно τ-компактное множество аппроксимативно τ-компактно.

Ключевым в исследовании свойства существования в несимметричных пространствах является следующий общий результат, обобщающий классическую теорему существования Ф. Дойча [11].

Теорема 1. *Пусть $\tau = \tau^+$ — сходимость по Дойчу (секвенциальная сходимость по Дойчу) на несимметрично нормированном пространстве X. Тогда любое аппроксимативно τ-компактное множество в X является множеством существования.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ и (y_δ) — минимизирующая направленность из M для x, т. е. $\|y_\delta - x| \to \rho(x, M)$. Тогда по определению (y_δ) имеет поднаправленность (подпоследовательность) (y_{δ_γ}) (которую мы отождествим с (y_δ)), которая (право-)τ-сходится к некоторому $y_0 \in M$. По свойствам (i) и (ii) определения 1 имеем $y_\delta - x \xrightarrow{\tau} y_0 - x$ и

$$\|y_0 - x| \leqslant \limsup \|y_\delta - x\| = \rho(x, M).$$

Это показывает, что $y_0 \in P_M x$. $\square$

Несимметричные аналоги классических нормированных пространств $C(Q)$ и L^p вводились многими авторами, начиная с М. Г. Крейна, ссылки на работы можно найти в [4,7].

Определение 4. Пусть w_+, w_-, $0 < \alpha \leqslant w_\pm(t) \leqslant \beta < \infty$, — измеримые веса на пространстве $L^p = L^p(\Omega, \sigma, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, с σ-конечной мерой. Положим $w := (w_+, w_-)$. Определим несимметричное пространство L^p_w как пространство $L^p(\Omega, \sigma, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, с несимметричной нормой

$$\left(\int\limits_\Omega |f_+/w_+ + f_-/w_-|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \tag{1}$$

где $f_+(t) := \max\{f(t), 0\}$, $f_-(t) := \min\{f(t), 0\}$.

Пространство L^p_w, $1 < p < \infty$, с нормой (1) является полным симметризуемым несимметричным пространством из класса (CLUR) (см. [3]).

Определение 5. Определим пространство $C_\psi(Q)$, как пространство непрерывных вещественных функций $C(Q, \mathbb{R})$ на хаусдорфовом компактном множестве Q с несимметричной нормой

$$\|x|_\psi = \|x|_{\psi_+, \psi_-} := \max_{t \in Q} \left\{ \frac{x_+(t)}{\psi_+(t)}, \frac{x_-(t)}{\psi_-(t)} \right\}, \tag{2}$$

где ψ_+, ψ_- — фиксированные положительные непрерывные функции.

По поводу ряда продвижений в задачах теории приближений в таких пространствах см. недавние работы [4,7].

Важным примером сходимости по Дойчу является Δ-*сходимость* (т. е. поточечная сходимость в пространстве $C(Q)$ на плотном подмножестве компакта Q), именно: $x_\delta \xrightarrow{\Delta} x$, если найдётся плотное подмножество $Q_0 \subset Q$, на котором $x_\delta(t) \to x(t)$ для любого $t \in Q_0$ (множество Q_0 зависит от (x_δ).

Изучение вопросов существования наилучшего приближения обобщёнными рациональными функциями было начато в работах Э. Чини, Х. Л. Лоеба, Г. Ш. Рубинштейна, Б. Бёма, Ч. Данхема и др. (см. [2, § 5]). В отличие классического случая приближения классом $\mathscr{R}_{n,m}$ (см. (5) ниже) в $C[a, b]$, существование (и единственность) элементов обобщённого рационального приближения в пространстве непрерывных функций, вообще говоря, не имеет места. Из последних исследований в этом направлении отметим [2, 12—15].

Рассмотрим случай приближения одним специальным классом обобщённых рациональных функций (см. [8,13]). Пусть V, W — конечномерные подпространства пространства $C[a, b]$, состоящие из аналитических функций. Рассмотрим следующий класс рациональных функций:

$$\mathscr{R}_V^W := \bigl\{ r \in C[a,b] \mid rw = v,\ w \in W,\ w \not\equiv 0,\ v \in V \bigr\}.$$

Замечание 1. Функция w в определении класса $\mathscr{R}_V^W$ может обращаться в ноль в некоторых точках рассматриваемого отрезка $[a,b]$.

Теорема 2. *Множество $\mathscr{R}_V^W$ ограниченно Δ-компактно в несимметричном пространстве $C_\psi[a,b]$. Как следствие, $\mathscr{R}_V^W$ является множеством существования.*

Доказательство. Пусть $\|\cdot| = \|\cdot|_\psi$ — несимметричная норма (2) на пространстве $C_\psi]a,b]$. Вторая часть теоремы следует из первой с учётом теоремы 1. Для доказательства первого утверждения рассмотрим (лево-)ограниченную направленность $(r_\delta) \subset \mathscr{R}_V^W$, $\|r_\delta| \leqslant \mu$. Тогда мы можем записать $r_\delta w_\delta = v_\delta$ при некотором $w_\delta \in W$, $\|w_\delta| = 1$. При любом $t \in [a,b]$ имеем

$$|v_\delta(t)| = |r_\delta(t)\, w_\delta(t)| \leqslant \mu |w_\delta(t)| \leqslant \mu, \tag{3}$$

что даёт $\|v_\delta| \leqslant \mu$ при всех δ. Так как V, W — конечномерные подпространства, а направленности (w_δ) и (v_δ) ограниченны, то, переходя при необходимости к поднаправленности, мы можем считать, что $\|v_\delta - v_0| \to 0$ при некотором $v_0 \in V$ и $\|w_\delta - w_0| \to 0$ при некотором $w_0 \in W$, где, понятно, $\|w_0| = 1$. Это в силу аналитичности показывает, что функция w_0 может иметь только конечное число нулей. Переходя к пределу в (3), получаем

$$|v_0(t)| \leqslant \mu |w_0(t)|, \quad t \in [a,b]. \tag{4}$$

Из (4) видно, что любой ноль t_0 функции w_0 является нулём функции v_0, при этом в силу аналитичности

$$w_0(t) = (t - t_0)^k \hat{w}_0(t), \quad v_0(t) = (t - t_0)^{k'} \hat{v}_0(t),$$

где $\hat{w}_0(t_0) \neq 0$, $\hat{v}_0(t_0) \neq 0$, $k \leqslant k'$. Таким образом, функция $r_0 = v_0/w_0$ корректно определена и непрерывна на $[a,b] \setminus \mathrm{Z}(w_0)$, где $\mathrm{Z}(w_0)$ — множество нулей функции w_0. Сокращая общие множители вида $(t-t_0)^\nu$ у аналитических функций w_0 и v_0 на $\mathrm{Z}(w_0)$, мы получаем, что r_0 везде корректно определена и непрерывна. При этом $r_0 w_0 = v_0$. Итак, $r_0 \in C[a,b]$ и $r_0 w_0 = v_0$, т. е. $r_0 \in \mathscr{R}_V^W$.

Окончательно для $t \in [a,b] \setminus \mathrm{Z}(w_0)$ имеем

$$r_0(t) = \frac{v_0(t)}{w_0(t)} = \lim \frac{v_\delta(t)}{w_\delta(t)} = \lim r_\delta(t).$$

Таким образом, $r_\delta \xrightarrow{\Delta} r_0$, и теорема 2 доказана. □

Пусть $\mathscr{P}_n$ — класс (алгебраических) многочленов степени не выше n.

Следствие 1. *Множество*

$$\mathscr{R}_{n,m} := \{ p/q \mid p \in \mathscr{P}_n,\ q \in \mathscr{P}_m,\ q \neq 0 \} \tag{5}$$

рациональных функций $\mathscr{R}_{n,m}$ ограниченно Δ-компактно в несимметричном пространстве $C_\psi[a,b]$. Как следствие, $\mathscr{R}_{n,m}$ является множеством существования в $C_\psi[a,b]$,

Определение 6. Пусть Q — хаусдорфов компакт, и пусть $U \subset V \times W$, где $V, W \subset C(Q)$. Будем говорить, что множество

$$\mathscr{R}_U := \bigl\{r \in C(Q) \mid rw = v,\ w \not\equiv 0,\ (v,w) \in U\bigr\}$$

алгебраически полно (см. [8]), если условия

(a) $(v_k, w_k) \to (v, w)$ в пространстве $C(Q) \times C(Q)$, где $(v_k, w_k) \in U$, $w \not\equiv 0$, и

(b) существует функция $r \in C(Q)$, такая что $r(t) = v(t)/w(t)$ при всех $t \in Q \setminus \mathrm{Z}(w)$, где $\mathrm{Z}(w)$ — множество нулей функции w,

эквиваленты тому, что $(v, w) \in U$.

Пусть далее Q — компакт, $V, W \subset C(Q)$ — ограниченно компактные множества, и пусть $U \subset V \times W$ — непустое множество. Рассмотрим класс обобщённых рациональных функций

$$\mathscr{R}_U := \{r \in C(Q) \mid rw = v,\ w \not\equiv 0,\ (v,w) \in U\}.$$

Следующая теорема распространяет на несимметричный случай теорему 5.3 работы [2]. Доказательство аналогично, используется теорема 1.

Теорема 3. *Пусть множество $\mathscr{R}_U$ алгебраически полно и для любой ненулевой функции из W дополнение её множества нулей в Q всюду плотно. Тогда $\mathscr{R}_U$ ограниченно Δ-компактно в несимметричном пространстве $C_\psi(Q)$ и, как следствие, является множеством существования в $C_\psi(Q)$.*

Замечание 2. Аналогичными методами также доказываются теоремы о существовании наилучшего обобщённого рационального приближения в несимметричных пространствах L^p_w с несимметричной нормой (1).

Замечание 3. Также с использованием аппарата сходимости по Дойчу можно доказать проксиминальность множеств многомерных экспоненциальных сумм

$$\mathbf{E}_n^+ := \biggl\{ \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} a_j e^{(\boldsymbol{\lambda}_j, \mathbf{x})} \biggm| \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}_j \in \mathbb{R}^d,\ a_j \geqslant 0 \biggr\},$$

$$\mathbf{E}_n := \biggl\{ \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} p_j(\mathbf{x}) e^{(\boldsymbol{\lambda}_j, \mathbf{x})} \biggm| \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}_j \in \mathbb{R}^d,\ \sum_{j=1}^{n} \bigl(1 + \deg p_j(\mathbf{x})\bigr) \leqslant n \biggr\},$$

где $p_j(\mathbf{x})$ — действительнозначный многочлен, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, в пространстве $C(D)$, где D — непустое выпуклое компактное тело в $\mathbb{R}^d$.

Литература

[1] Абрамов С. А., Кондратьева М. В., Латышев В. Н., Михалёв А. В. Памяти Евгения Васильевича Панкратьева // Программирование. — 2008. — Т. 34, № 4. — С. 78—80.

[2] Алимов А. Р., Рютин К. С., Царьков И. Г. Вопросы существования, единственности и устойчивости наилучших и почти наилучших приближений // УМН. — 2023. — Т. 78, № 3 (471). — С. 3—52.

[3] Алимов А. Р., Царьков И. Г. Классические понятия теории приближений в несимметричных CLUR-пространствах // Матем. заметки. — 2024. — Т. 116, № 3. — С. 339—354.

[4] Алимов А. Р., Царьков И. Г. Чебышёвские множества, составленные из объединения подпространств в несимметрично нормированных пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. — 2024. — Т. 88, № 6. — С. 23—43.

[5] Алимов А. Р., Царьков И. Г. Проекционно замкнутые множества и пространства Ефимова—Стечкина // Тр. ИММ УрО РАН. — 2025. — Т. 31, № 3. — С. 20—35. —

[6] Царьков И. Г. θ-метрическая функция в задаче минимизации функционалов // Изв. РАН. Сер. матем. — 2024. — Т. 88, № 2. — С. 184—205.

[7] Alimov A. R. Strict protosuns in asymmetric spaces of continuous functions // Results Math. — 2023. — Vol. 78, no. 3. — P. 95.

[8] Alimov A. R., Tsar'kov I. G. Solarity and proximinality in generalized rational approximation in spaces $C(Q)$ and L^p // Russian J. Math. Physics. — 2022. — Vol. 29, no. 3. — P. 291—305.

[9] Alimov A. R., Tsar'kov I. G. Connectedness and approximative properties of sets in asymmetric spaces // Filomat. — 2024. — Vol. 38, no. 9. — P. 3243—3259.

[10] Cobzaş Ş. Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces. — Basel: Birkhäuser; Springer, 2013. — (Front. Math.)

[11] Deutsch F. Existence of best approximations // J. Approx. Theory. — 1980. — Vol. 28. — P. 132—154.

[12] Peiris V., Sharon N., Sukhorukova N., Ugon J. Generalised rational approximation and its application to improve deep learning classifiers // Appl. Math. Comp. — 2021. — Vol. 389. — P. 125560.

[13] Tsar'kov I. G. Properties of Chebyshev generalized rational fractions in L_1 // Russ. J. Math. Phys. — 2022. — Vol. 29. — P. 583—587.

[14] Tsar'kov I. G. Properties of sets in asymmetric spaces // Lobachevskii J. Math. — 2024. — Vol. 45, no. 6. — P. 2971—2974.

[15] Tsar'kov I. G. Convexity of weakly compact sets in normed linear spaces // Russ. J. Math. Phys. — 2025. — Vol. 32. — P. 585—589.