

Аutomорфизмы групп Шевалле типа F_4 над локальными кольцами с необратимой двойкой

Е. И. БУНИНА

Университет им. Бар-Илана, Израиль
e-mail: helenbunina@gmail.com

В. В. КИРАКОСЯН

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: vazgen.kirakosyan@gmail.com

УДК 512.54+512.552

Ключевые слова: группа Шевалле, автоморфизм, локальное кольцо.

Аннотация

В данной работе мы доказываем, что каждый автоморфизм группы Шевалле типа F_4 над коммутативным локальным кольцом с необратимой двойкой является композицией кольцевого автоморфизма, диаграммного автоморфизма и сопряжения с помощью некоторой матрицы в пространстве присоединённого представления.

Abstract

E. I. Bunina, V. V. Kirakosyan, Automorphisms of Chevalley groups of type F_4 over local rings without $1/2$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 4, pp. 37–70.

In this paper, we prove that every automorphism of a Chevalley group of type F_4 over a commutative local ring without $1/2$ is a composition of a ring automorphism, a graph automorphism, and a conjugation by some matrix in the adjoint representation space.

Введение

Цель данной работы — доказать, что каждый автоморфизм группы Шевалле типа F_4 над коммутативным локальным кольцом с необратимой двойкой есть композиция кольцевого автоморфизма, диаграммного автоморфизма и сопряжения некоторой матрицей в пространстве присоединённого представления. Отметим, что в работе мы следуем статьям Е. И. Буниной, в первую очередь [3, 6], в которых доказан аналогичный результат для групп Шевалле других типов.

Заметим, что для системы корней типа F_4 существует лишь одна решётка весов, которая является одновременно универсальной и присоединённой, поэтому для каждого кольца R существует единственная группа Шевалле типа F_4 — это $G(R) = G_{\text{ad}}(F_4, R)$. Более того, над локальными кольцами универсальные

группы Шевалле совпадают со своими элементарными подгруппами, поэтому рассматриваемая группа Шевалле одновременно является элементарной (то есть нам известны её образующие и соотношения в ней).

Подобные результаты для групп Шевалле над полями были доказаны Р. Стейнбергом [34] для конечного случая и Дж. Хамфри [29] для бесконечного. Описанию автоморфизмов групп Шевалле над различными коммутативными кольцами были посвящены работы многих авторов, среди которых стоит отметить работы А. Бореля и Дж. Титса [15], Р. Картера и Ю Чена [21], Ю Чена [22–26], Э. Абе [14], А. Клячко [31].

Аналог теоремы 1 для систем корней типов A_ℓ , D_ℓ и E_ℓ был получен Е. И. Буниной в [5], в [2] полностью описаны автоморфизмы групп Шевалле данных типов над локальными кольцами с $1/2$. Подобная теорема для локальных колец без $1/2$ была доказана в [3]. Для систем корней типов B_2 и G_2 она получена в [1], однако в этой работе для системы корней типа G_2 предполагаются обратимыми двойка и тройка в кольце. В [6] данный результат доказывается для системы корней типа G_2 уже без требования обратимости двойки. В [17] Е. И. Буниной была доказана аналогичная теорема для системы корней типа F_4 при условии обратимости двойки. В [18] все предыдущие результаты с помощью метода локализации обобщены для случая присоединённых групп на произвольные коммутативные кольца (с соответствующими условиями обратимости двойки или тройки).

Для системы корней типа F_4 в случае локального кольца от требования обратимости двойки также удаётся отказаться, этому и посвящена данная работа.

1. Определения и формулировка основной теоремы

Определение 1. Подмножество Φ евклидова пространства $\mathbb{E}$ называется *системой корней* в $\mathbb{E}$, если выполнены следующие условия:

- 1) множество Φ конечно, порождает $\mathbb{E}$ и не содержит 0;
- 2) если $\alpha \in \Phi$, то из кратных корня α в Φ содержатся только $\pm\alpha$;
- 3) если $\alpha \in \Phi$, то *отражение* w_α относительно гиперплоскости, ортогональной α , выражаемое формулой

$$w_\alpha \beta = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha,$$

сохраняет множество Φ инвариантным; коэффициенты, участвующие в формуле, обозначаются через

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

и называются *числами Картана*;

- 4) если $\alpha, \beta \in \Phi$, то $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

Определение 2. Подмножество Δ в Φ называется *базисом* (а входящие в него корни *простыми*), если:

- 1) Δ является базисом в $\mathbb{E}$;
- 2) каждый корень $\beta \in \Phi$ представляется в виде

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_{\alpha} \alpha,$$

где коэффициенты k_{α} целые и все одновременно неотрицательные или неположительные.

Если все коэффициенты k_{α} неотрицательны (соответственно все k_{α} неположительны), то корень β называется *положительным* (соответственно *отрицательным*).

Определение 3. Подгруппа (конечная) W в $GL(\mathbb{E})$, порождённая всеми отражениями w_{α} , $\alpha \in \Phi$, называется *группой Вейля* системы корней Φ .

Группа Вейля играет исключительно важную роль в изучении систем корней. Среди свойств группы Вейля выделим два важных свойства, которые в дальнейшем будем использовать: группа Вейля в действительности порождается лишь простыми отражениями w_{α} , $\alpha \in \Delta$, и она транзитивно действует на множестве всех корней одной длины.

Подробные сведения о системах корней, их типах и свойствах можно найти, например, в [16, 30].

Зафиксируем неприводимую систему корней Φ , имеющую тип F_4 . Данная система корней имеет ранг 4, состоит из 24 положительных и 24 отрицательных корней, и в ней встречаются корни двух различных длин. Пусть $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ — стандартный ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^4$. Пронумеруем положительные корни системы F_4 следующим образом (первые четыре корня являются простыми):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= e_2 - e_3, \\ \alpha_2 &= e_3 - e_4, \\ \alpha_3 &= e_4, \\ \alpha_4 &= \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4); \\ \alpha_5 &= \alpha_1 + \alpha_2 = e_2 - e_4, \\ \alpha_6 &= \alpha_2 + \alpha_3 = e_3, \\ \alpha_7 &= \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4), \\ \alpha_8 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = e_2, \\ \alpha_9 &= \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4), \\ \alpha_{10} &= \alpha_2 + 2\alpha_3 = e_3 + e_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4), \\
\alpha_{12} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4), \\
\alpha_{13} &= \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = e_2 + e_4, \\
\alpha_{14} &= \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = e_1 - e_2, \\
\alpha_{15} &= \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4), \\
\alpha_{16} &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = e_2 + e_3, \\
\alpha_{17} &= \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = e_1 - e_3, \\
\alpha_{18} &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4), \\
\alpha_{19} &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = e_1 - e_4, \\
\alpha_{20} &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4), \\
\alpha_{21} &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = e_1, \\
\alpha_{22} &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = e_1 + e_4, \\
\alpha_{23} &= \alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = e_1 + e_3, \\
\alpha_{24} &= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = e_1 + e_2.
\end{aligned}$$

Рассмотрим комплексную простую алгебру Ли $\mathcal{L}$ типа F_4 с картановской подалгеброй $\mathcal{H}$ (подробную информацию о полупростых алгебрах Ли, включая их классификацию и связь с системами корней, можно найти в [30]). В алгебре Ли $\mathcal{L}$ можно выбрать *базис Шевалле*

$$\{x_\alpha \mid \alpha \in \Phi; h_i \mid 1 \leq i \leq 4\}$$

таким образом, что для любых двух элементов этого базиса их коммутатор является целочисленной линейной комбинацией элементов этого же базиса, а именно:

- 1) $[h_i, h_j] = 0, 1 \leq i, j \leq 4;$
- 2) $[h_i, x_\alpha] = \langle \alpha, \alpha_i \rangle x_\alpha, 1 \leq i \leq 4, \alpha \in \Phi;$
- 3) $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$ является целочисленной линейной комбинацией векторов $h_1, \dots, h_4;$
- 4) если α, β — линейно независимые корни и $\alpha + \beta \notin \Phi$, то $[x_\alpha, x_\beta] = 0;$
- 5) если $\alpha + \beta \in \Phi$, то $[x_\alpha, x_\beta] = N_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$, причём $N_{\alpha\beta} = \pm(r+1)$, где r — максимальное целое число, для которого $\beta - r\alpha \in \Phi$. Существуют алгоритмы согласованного выбора знаков всех констант $N_{\alpha\beta}$ (подробнее см. в приложении).

Определение 4. Если $x \in \mathcal{L}$, то отображение

$$\text{ad } x: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, \quad \text{ad } x(y) = [x, y]$$

является эндоморфизмом пространства $\mathcal{L}$ и, более того, (внутренним) дифференцированием алгебры Ли $\mathcal{L}$. Отображение

$$\mathrm{ad}: \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{L}), \quad \mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad} x$$

является гомоморфизмом алгебр Ли и называется *присоединённым представлением* алгебры Ли $\mathcal{L}$.

Замечание 1. Присоединённое представление полупростой алгебры Ли является *точным* (инъективным), так как его ядро совпадает с центром алгебры Ли, который, разумеется, является абелевым идеалом и поэтому тривиален.

Введём обозначения для образов элементов базиса Шевалле при присоединённом представлении:

$$X_\alpha = \mathrm{ad} x_\alpha, \quad H_i = \mathrm{ad} h_i.$$

Определение 5. Ассоциативное кольцо R с единицей называется *локальным*, если оно имеет единственный максимальный идеал (совпадающий с радикалом этого кольца). Это равносильно тому, что необратимые элементы кольца R образуют идеал.

Замечание 2. Мы будем описывать автоморфизмы групп Шевалле типа F_4 над коммутативными локальными кольцами с необратимой двойкой и будем активно пользоваться тем фактом, что в этом случае тройка обратима, так как иначе в силу локальности кольца и равенства $3 - 2 = 1$ единица была бы необратима, что неверно.

Возьмём произвольное коммутативное локальное кольцо и построим элементарную присоединённую группу Шевалле типа F_4 над этим кольцом (см. [35]). Для удобства кратко воспроизведём построение здесь (см. также приложение).

В базисе Шевалле алгебры Ли $\mathcal{L}$ все операторы $X_\alpha^k/k!$ для $\alpha \in \Phi$ и $k \in \mathbb{N}$ записываются целочисленными (нильпотентными) матрицами. Целочисленная матрица может рассматриваться как матрица над произвольным коммутативным кольцом R с единицей. Таким образом, рассмотрим матрицы размера $n \times n$ над R (в нашем случае $n = \dim \mathcal{L} = 52$) и указанные матрицы $X_\alpha^k/k!$ при $\alpha \in \Phi$, $k \in \mathbb{N}$ вложим в $M_n(R)$.

Теперь рассмотрим автоморфизмы свободного модуля R^n вида

$$x_\alpha(t) = \exp(tX_\alpha) = 1 + tX_\alpha + \frac{t^2 X_\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{t^k X_\alpha^k}{k!} + \dots, \quad \alpha \in \Phi, \quad t \in R.$$

Так как все матрицы X_α nilпотентны, такой ряд всегда конечен.

Очевидно, что для таких экспонент выполнено следующее простое, но важное соотношение:

$$x_\alpha(t)x_\alpha(u) = x_\alpha(t+u). \quad (1)$$

Определение 6. Автоморфизмы $x_\alpha(t)$ называются *элементарными корневыми элементами*.

Определение 7. Подгруппа в $\mathrm{Aut}(R^n)$, порождённая всеми автоморфизмами $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R$, называется *элементарной присоединённой группой Шевалле* и обозначается $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$.

Определение 8. В элементарной группе Шевалле определим также следующие важные элементы:

- $w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R^*$; $\omega_\alpha = w_\alpha(1)$;
- $h_\alpha(t) = w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R^*$.

Как уже было отмечено во введении, над локальными кольцами для системы корней типа $\mathbf{F}_4$ группа Шевалле $G(R) = G_{\text{ad}}(\Phi, R)$ совпадает со своей элементарной подгруппой $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$, поэтому в данной работе мы не будем вводить группы Шевалле в общем смысле.

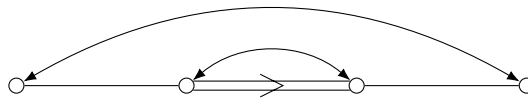
Определим стандартные автоморфизмы (элементарной) группы Шевалле $G(R)$ и ещё один дополнительный тип автоморфизмов.

Определение 9. Пусть $\rho: R \rightarrow R$ — автоморфизм кольца R . Отображение $(a_{ij}) \mapsto (\rho(a_{ij}))$ является автоморфизмом группы $G(R)$, который обозначается той же буквой ρ и называется *кольцевым автоморфизмом* группы $G(R)$. Заметим, что для всех $\alpha \in \Phi$, $t \in R$ элемент $x_\alpha(t)$ отображается в $x_\alpha(\rho(t))$.

Определение 10. Предположим, что R — совершенное кольцо характеристики 2, то есть $2 = 0$ и эндоморфизм Фробениуса $F(t) = t^2$ является автоморфизмом R . Для каждого корня $\alpha \in \Phi$ положим $\lambda(\alpha) = 1$, если α — длинный корень, и $\lambda(\alpha) = 2$, если α — короткий корень. Пусть $\delta: \Phi \rightarrow \Phi$ — перестановка системы корней типа $\mathbf{F}_4$, которая переставляет длинные корни с короткими таким образом, что отображение $\alpha \mapsto \lambda(\alpha)\delta(\alpha)$ является изоморфизмом систем корней; такая δ определена однозначно, при этом $\delta^2 = 1$ и δ действует на множестве простых корней следующим образом: $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_4$, $\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_3$. Тогда отображение

$$x_\alpha(t) \mapsto x_{\delta(\alpha)}(t^{\lambda(\alpha)}), \quad \alpha \in \Phi, \quad t \in R,$$

однозначно определяет автоморфизм группы $G(R)$, который обозначается той же буквой δ и называется *диаграммным (графовым) автоморфизмом* группы $G(R)$ (см. [20, 35]).



Замечание 3. Очевидно, кольцевой и диаграммный автоморфизмы коммутируют между собой.

Определение 11. Пусть $g \in G(R)$. Сопряжение группы $G(R)$ с помощью элемента g является автоморфизмом группы $G(R)$, который обозначается i_g и называется *внутренним автоморфизмом* группы $G(R)$.

Эти три типа автоморфизмов называются *стандартными*. К стандартным также относятся *центральные* автоморфизмы, однако в рассматриваемом нами случае системы корней типа $\mathbf{F}_4$ таких нетривиальных нет, поэтому будем говорить, что автоморфизм группы $G(R)$ *стандартен*, если он является композицией трёх введённых типов автоморфизмов.

Кроме того, нам понадобится ещё один дополнительный тип автоморфизмов.

Определение 12. Пусть V — пространство представления группы $G(R)$, $C \in \mathrm{GL}(V)$ — матрица, нормализующая группу $G(R)$:

$$CG(R)C^{-1} = G(R).$$

Тогда отображение $x \mapsto CxC^{-1}$ является автоморфизмом группы $G(R)$, который обозначается i_C и называется *автоморфизмом-сопряжением* группы $G(R)$, индуцированным элементом C .

Теперь сформулируем основную теорему данной работы.

Теорема 1. Пусть $G(R) = E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{F}_4, R)$ — группа Шевалле типа $\mathbf{F}_4$, R — коммутативное локальное кольцо с необратимой двойкой. Тогда любой автоморфизм φ группы $G(R)$ является композицией кольцевого автоморфизма, диаграммного автоморфизма и автоморфизма-сопряжения.

Дальнейшие разделы посвящены доказательству теоремы 1.

2. Замена исходного автоморфизма изоморфизмом специального вида

В данном разделе мы используем некоторые соображения, взятые из работы [8] и используемые также в предыдущих подобных работах, упоминавшихся выше (в частности, [3, 6]).

Пусть J — максимальный идеал (радикал) кольца R , $2 \in J$, k — поле вычетов R/J характеристики 2, $E_J = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J)$ — нормальная подгруппа в группе Шевалле $G(R) = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, порождённая всеми элементами $x_\alpha(t)$ для $\alpha \in \Phi$, $t \in J$. Тогда E_J — наибольшая нормальная собственная подгруппа в $G(R)$ (см. [7, 12, 13]). Следовательно, подгруппа E_J инвариантна относительно действия автоморфизма φ .

Таким образом, автоморфизм

$$\varphi: E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R) \rightarrow E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$$

индуцирует автоморфизм

$$\bar{\varphi}: E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)/E_J = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k) \rightarrow E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k).$$

Группа $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k)$ является присоединённой группой Шевалле над полем, значит, автоморфизм $\bar{\varphi}$ стандартен (см. [35]), то есть имеет вид

$$\bar{\varphi} = i_{\bar{g}} \bar{\delta}^\varepsilon \bar{\rho},$$

где $\bar{g} \in N(E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k))$, $\bar{\delta}$ — диаграммный автоморфизм и $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $\bar{\rho}$ — полевой автоморфизм, индуцированный некоторым автоморфизмом поля k .

Ясно, что существует матрица $g \in \mathrm{GL}_n(R)$, образ которой при факторизации R по J совпадает с $\bar{g}$. При этом отметим, что мы не можем быть уверены в том, что $g \in N(E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R))$.

Рассмотрим отображение

$$\varphi' = i_{g^{-1}}\varphi.$$

Это изоморфизм группы $E_{\text{ad}}(\Phi, R) \subset \text{GL}_n(R)$ на некоторую подгруппу $\text{GL}_n(R)$, причём при факторизации R по J он переходит в точности в автоморфизм $\bar{\delta}^\varepsilon \bar{\rho}$.

До конца этого раздела временно предположим, что диаграммного автоморфизма $\bar{\delta}$ нет в композиции, то есть $\varepsilon = 0$ и изоморфизм φ' при факторизации по J переходит в автоморфизм $\bar{\rho}$. Тогда проведённые рассуждения доказывают следующее утверждение.

Предложение 1. Любая матрица $A \in E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ с элементами из подкольца R_1 в R , порождённого единицей, отображается при изоморфизме φ' в матрицу из множества

$$\{B \in \text{GL}_n(R) \mid A - B \in M_n(J)\}$$

(иными словами, её образ является сдвигом исходной матрицы на некоторую матрицу с элементами из радикала J).

Пусть $a \in E_{\text{ad}}(\Phi, R)$, $a^3 = 1$. Тогда элемент

$$e = \frac{1}{3}(1 + a + a^2)$$

является идемпотентом в кольце $M_n(R)$:

$$e^2 = \frac{1}{9}(1 + a^2 + a^4 + 2a + 2a^2 + 2a^3) = \frac{1}{9}(3 + 3a + 3a^2) = e.$$

Этот идемпотент определяет разложение свободного R -модуля $V \cong R^n$:

$$V = eV \oplus (1 - e)V = V_0 \oplus V_1$$

(модули V_0, V_1 свободны, так как любой проективный модуль над локальным кольцом свободен [32]). Пусть $\bar{V} = \bar{V}_0 \oplus \bar{V}_1$ — соответствующее разложение k -модуля (линейного пространства) $\bar{V} \cong k^n$ относительно $\bar{a}$ и

$$\bar{e} = \frac{1}{3}(1 + \bar{a} + \bar{a}^2).$$

Предложение 2. Модули (подпространства) $\bar{V}_0, \bar{V}_1$ являются образами модулей V_0, V_1 при факторизации по J .

Доказательство. Обозначим образы модулей V_0, V_1 при факторизации по J через $\tilde{V}_0, \tilde{V}_1$ соответственно. Так как

$$V_0 = \{x \in V \mid ex = x\}, \quad V_1 = \{x \in V \mid ex = 0\},$$

то

$$\bar{e}(\bar{x}) = \frac{1}{3}(1 + \bar{a} + \bar{a}^2)(\bar{x}) = \frac{1}{3}(1 + \bar{a}(\bar{x}) + \bar{a}^2(\bar{x})) = \frac{1}{3}(1 + \overline{a(x)} + \overline{a(x)^2}) = \overline{e(x)}.$$

Тогда $\tilde{V}_0 \subset \bar{V}_0, \tilde{V}_1 \subset \bar{V}_1$.

Пусть $x = x_0 + x_1, x_0 \in V_0, x_1 \in V_1$. Тогда $\bar{e}(\bar{x}) = \bar{e}(\bar{x}_0) + \bar{e}(\bar{x}_1) = \bar{x}_0$. Если $\bar{x} \in \tilde{V}_0$, то $\bar{x} = \bar{x}_0$. $\square$

Пусть теперь для матрицы a с целыми элементами $b = \varphi'(a)$. Тогда $b^3 = 1$ и согласно предложению 1 b сравнима с a по модулю радикала J .

Предложение 3. Предположим, что $a, b \in E_{\text{ad}}(\Phi, R)$, $a^3 = b^3 = 1$, a — матрица с элементами из подкольца R_1 в R , порождённого единицей, b и a сравнимы по модулю радикала J , $V = V_0 \oplus V_1$ — разложение V относительно a , $V = V'_0 \oplus V'_1$ — разложение V относительно b . Тогда $\dim V'_0 = \dim V_0$, $\dim V'_1 = \dim V_1$.

Доказательство. Мы имеем R -базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ модуля V , такой что $\{e_1, \dots, e_k\} \subset V_0$, $\{e_{k+1}, \dots, e_n\} \subset V_1$. Ясно, что

$$\bar{a}\bar{e}_i = \overline{ae_i} = \overline{\left(\sum_{j=1}^n a_{ji}e_j\right)} = \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ji}\bar{e}_j.$$

Пусть $\bar{V} = \bar{V}_0 \oplus \bar{V}_1$, $\bar{V} = \bar{V}'_0 \oplus \bar{V}'_1$ — разложения k -модуля (пространства) $\bar{V}$ относительно $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Ясно, что $\bar{V}_0 = \bar{V}'_0$, $\bar{V}_1 = \bar{V}'_1$. Таким образом, по предложению 2 образы модулей V_0 и V'_0 , V_1 и V'_1 при факторизации по радикалу J совпадают. Возьмём такие $\{f_1, \dots, f_k\} \subset V'_0$, $\{f_{k+1}, \dots, f_n\} \subset V'_1$, что $\bar{f}_i = \bar{e}_i$, $i = 1, \dots, n$. Так как матрица перехода от $\{e_1, \dots, e_n\}$ к $\{f_1, \dots, f_n\}$ обратима (сравнима с единичной матрицей по модулю радикала J), то $\{f_1, \dots, f_n\}$ — это R -базис в V . Ясно, что тогда $\{f_1, \dots, f_k\}$ является R -базисом в V'_0 , а $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ — R -базисом в V'_1 . $\square$

Следствие 1. В условиях предыдущего предложения для матрицы b существует некоторый базис модуля V , в котором b имеет тот же вид, что и матрица a в исходном базисе. Таким образом, матрицы a и b сопряжены.

3. Метод линеаризации для локальных колец

Опишем метод линеаризации для локальных колец, которым далее будем активно пользоваться. Этот метод позволяет доказывать, что некоторая система полиномиальных уравнений с коэффициентами в локальном кольце R имеет лишь нулевое решение в радикале кольца. Он был описан и использовался во многих аналогичных работах, перечисленных выше; здесь мы для удобства приведём теорему и один простой пример, иллюстрирующий применение метода (см., например, [6]).

Теорема 2. Пусть R — локальное кольцо и дана система полиномиальных уравнений вида $P_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, где все входящие полиномы $P_i \in R[x_1, \dots, x_n]$ с коэффициентами в кольце R и, кроме того, для каждого i выполнено $P_i(0, \dots, 0) = 0$ (то есть это полиномы без свободного члена). Пусть $\bar{P}_i$ — приведённые по модулю радикала $J = \text{Rad}(R)$ линеаризации P_i , то есть $\bar{P}_i$ содержит лишь мономы первой степени соответствующего полинома, приведённые по модулю радикала. Тогда если система $\bar{P}_i = 0$ имеет единственное

нулевое решение $x_j = 0$, то исходная система в радикале J имеет единственное решение $x_j = 0$ ($x_j \in J$).

Доказательство. Система уравнений $P_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ может быть представлена в виде $A(x_1, \dots, x_n)x = 0$, где A — матрица, зависящая от переменных x_j . Тогда если определитель матрицы A сравним по модулю радикала с обратимым элементом кольца R (который не зависит от переменных x_j , так как они лежат в радикале), то можно явно выразить решение $x = (A(x))^{-1}0 = 0$ и получить, что $x = 0$ (так как в локальном кольце любой элемент, сравнимый с обратимым по модулю радикала, обратим). Но определитель матрицы $A(x)$ сравним по модулю радикала с определителем матрицы линеаризованной системы, значит, достаточным условием единственности нулевого решения исходной полиномиальной системы в радикале является обратимость матрицы линеаризованной системы, то есть единственность нулевого решения для линеаризованной системы. $\square$

Замечание 4. Отметим, что способ получения указанной матрицы $A(x)$ неоднозначен, однако её линеаризация однозначна.

Пример 1. Пусть R — локальное кольцо с необратимой двойкой. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x + 2y - xy = 0, \\ x - y + xy = 0. \end{cases}$$

Её приведённая по модулю радикала линеаризация имеет вид

$$\begin{cases} x = 0, \\ x - y = 0, \end{cases}$$

определитель матрицы равен -1 и обратим, поэтому нулевое решение единственно. Следовательно, по теореме 2 исходная система тоже имеет лишь нулевое решение в радикале кольца.

С другой стороны, для исходной системы можно убедиться в единственности нулевого решения в радикале непосредственно. Перепишем её в следующем виде:

$$\begin{cases} x + (2 - x)y = 0, \\ (1 + y)x - y = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $x = (1 + y)^{-1}y$, подставляем это выражение в первое уравнение и получаем после приведения подобных членов

$$((1 + y)^{-1} + (2 - x))y = 0.$$

Так как коэффициент при y обратим (как сумма обратимого и необратимого элементов локального кольца), получаем, что $y = 0$, значит и $x = 0$.

4. Образы элементов $w_\alpha(1)$, $x_\alpha(1)$

Напомним, что мы перешли к изоморфизму φ' , который при факторизации R по J переходит в автоморфизм $\bar{\delta}^\varepsilon \bar{\rho}$.

Введём матрицы

$$Q_\alpha = \omega_\alpha x_\alpha(1), \quad \alpha \in \Phi$$

(вид некоторых из этих матриц в выбранном базисе можно найти в приложении). Заметим, что для всех матриц Q_{α_i} , $i = 1, \dots, 4$, выполнено $Q_{\alpha_i}^3 = 1$ и элементы этих матриц целые. Значит, по следствию 1 образ Q_{α_i} при изоморфизме сопряжён $Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_i)}$. Более того, матрицы Q_{α_1} и Q_{α_3} коммутируют между собой, так же как и матрицы $Q_{\delta(\alpha_1)} = Q_{\alpha_4}$ и $Q_{\delta(\alpha_3)} = Q_{\alpha_2}$.

Лемма 1. *Образы коммутирующих между собой Q_{α_1} и Q_{α_3} можно сопряжением одновременно привести к $Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}$ и $Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_3)}$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\varepsilon = 0$. Если бы в нашем кольце R был такой элемент ξ , что $\xi^3 = 1$, то для матриц Q_{α_1} и Q_{α_3} существовал бы базис, в котором они обе были бы диагональны. Присоединим (временно и если его нет) к кольцу R такой элемент ξ (то есть введём такой внешний элемент и рассмотрим кольцо $\bar{R}$, порождённое кольцом R и элементом ξ). Поскольку образы матриц Q_{α_1} и Q_{α_3} также коммутируют, их можно привести к диагональному виду. При изоморфизме у матриц Q_{α_1} и Q_{α_3} не меняются собственные значения и их кратности, значит, диагональный вид останется таким же с точностью до перестановки элементов на диагонали. Следовательно, можно произвести сопряжение (заменой базиса) и привести образы матриц Q_{α_1} и Q_{α_3} к диагональному виду, затем выполнить сопряжение матрицей перестановки, чтобы на диагонали элементы стояли так же, как у Q_{α_1} и Q_{α_3} в диагональном виде, и далее обратным сопряжением получить из образов матриц Q_{α_1} и Q_{α_3} сами Q_{α_1} и Q_{α_3} .

В случае $\varepsilon = 1$ аналогичное рассуждение даёт нужный результат. $\square$

Теперь будем считать, что мы заменили исходный изоморфизм новым, переводящим Q_{α_1} и Q_{α_3} в $Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}$ и $Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_3)}$.

Рассмотрим матрицы $x_\alpha(1)$, $w_\alpha(1) = \omega_\alpha$ для всех $\alpha \in \Phi$.

Лемма 2. *Все матрицы $x_\alpha(1)$ и ω_α , $\alpha \in \Phi$, выражаются через следующий набор матриц: ω_{α_1} , ω_{α_2} , ω_{α_3} , ω_{α_4} , Q_{α_1} , Q_{α_3} .*

Доказательство. В элементарной группе Шевалле для всех $\alpha, \beta \in \Phi$ выполнено, в числе прочих, соотношение (см. [35])

$$\omega_\alpha x_\beta(t) \omega_\alpha^{-1} = x_{w_\alpha \beta}(\pm t), \quad (2)$$

где знак зависит только от корней α , β (и не зависит ни от t , ни от выбора базиса), причём этот знак совпадает для пар корней α , β и α , $-\beta$. В частности, отсюда легко получить такое же соотношение для $w_\beta(t)$, $t \in R^*$:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha w_\beta(t) \omega_\alpha^{-1} &= \omega_\alpha (x_\beta(t) x_{-\beta}(-t^{-1}) x_\beta(t)) \omega_\alpha^{-1} = \\ &= x_{w_\alpha \beta}(\pm t) x_{-w_\alpha \beta}(\mp t^{-1}) x_{w_\alpha \beta}(\pm t) = w_{w_\alpha \beta}(\pm t). \end{aligned} \quad (3)$$

Если в каком-то соотношении должен быть выбран знак минус, то достаточно потом обратить полученную матрицу, поскольку в силу (1) $x_\alpha(-t) = (x_\alpha(t))^{-1}$ и $w_\alpha(-t) = (w_\alpha(t))^{-1}$.

Группа Вейля системы корней порождается простыми отражениями, а также действует транзитивно на множестве корней одинаковой длины. Следовательно, имея матрицы $\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}, \omega_{\alpha_3}, \omega_{\alpha_4}$ и используя соотношения (3) (при $t = 1$), можно выразить все матрицы $\omega_\alpha, \alpha \in \Phi$.

Далее, можно выразить

$$x_{\alpha_1}(1) = \omega_{\alpha_1}^{-1} Q_{\alpha_1}, \quad x_{\alpha_3}(1) = \omega_{\alpha_3}^{-1} Q_{\alpha_3}.$$

Наконец, так как α_1, α_3 — корни двух возможных различных длин, снова благодаря транзитивности действия группы Вейля на множестве корней одной длины можно из соотношений (2) (при $t = 1$) выразить все матрицы $x_\alpha(1), \alpha \in \Phi$. $\square$

Таким образом, если произвести сопряжение матрицей из $\mathrm{GL}_n(R, J)$ (то есть сравнимой с единичной по модулю радикала J), которое сохранит текущие образы $Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}, Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_3)}$ матриц $Q_{\alpha_1}, Q_{\alpha_3}$ и переведёт образы матриц $\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}, \omega_{\alpha_3}, \omega_{\alpha_4}$ в матрицы $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}, \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}, \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_3)}, \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_4)}$ соответственно, то композиция изоморфизма с этим сопряжением будет переводить все $x_\alpha(1)$ и ω_α соответственно в $x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$ и $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha)}, \alpha \in \Phi$, причём по-прежнему при факторизации R по J она будет переходить в автоморфизм $\bar{\delta}^\varepsilon \bar{\rho}$.

Лемма 3. Указанное сопряжение существует.

Доказательство. Пользуясь предложением 1, обозначим образы матриц $\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}, \omega_{\alpha_3}, \omega_{\alpha_4}$ через $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)} + A, \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)} + B, \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_3)} + C, \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_4)} + D$, где $A, B, C, D \in M_n(J)$ — неизвестные матрицы.

В элементарной группе Шевалле для всех $\alpha, \beta \in \Phi, \alpha + \beta \neq 0$, выполнено следующее соотношение на коммутатор соответствующих корневых элементов (см. [35]):

$$(x_\alpha(t), x_\beta(u)) = \prod_{\substack{i\alpha+j\beta \in \Phi, \\ i, j \in \mathbb{N}}} x_{i\alpha+j\beta}(c_{ij} t^i u^j), \quad (4)$$

где $(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$ — групповой коммутатор (обозначаемый для удобства круглыми скобками, чтобы не путать с коммутатором в алгебре Ли), произведение в правой части берётся по всем корням $i\alpha + j\beta, i, j \in \mathbb{N}$, расположенным в некотором фиксированном порядке, а c_{ij} — целые числа, зависящие только от α, β и от выбранного порядка корней (и не зависящие от t, u), причём если $\alpha + \beta \in \Phi$, то $c_{11} = N_{\alpha\beta}$. В случае нашей системы корней Φ типа $\mathbf{F}_4$ произведение в правой части всегда состоит не более чем из двух элементов и все коэффициенты c_{ij} принимают значения ± 1 или ± 2 . Ещё раз подчеркнём, что благодаря целочисленности c_{ij} все участвующие в соотношении корневые элементы легко выражаются через соответствующие корневые элементы без коэффициентов c_{ij} — достаточно воспользоваться свойством (1).

Итак, рассмотрим набор образов всех соотношений вида (2), (3), (4) при $t = u = 1$. Они дают систему (полиномиальных) уравнений относительно неизвестных матриц A, B, C, D , то есть относительно $4n^2 = 4 \cdot 52^2 = 10\,816$ переменных из радикала. Решая систему методом линеаризации, можно попытаться доказать, что $A = B = C = D = 0$. Однако компьютерное вычисление показывает, что это не так, линеаризованная система, приведённая по модулю радикала J (отметим, что в результате все коэффициенты такой системы будут равны 0 или 1), может иметь ненулевое решение, а именно, её ранг равен 10 492 (как при $\varepsilon = 0$, так и при $\varepsilon = 1$). Это означает, что действительно требуется нетривиальное сопряжение.

С помощью компьютерного вычисления можно убедиться, что существует такое сопряжение, которое сохраняет $Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}$ и $Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_3)}$ и при этом позволяет занулить ровно 324 переменные (то есть после этого сопряжения соответствующие элементы матриц-образов совпадают с элементами требуемых матриц). Таким образом, получаем систему относительно $10\,816 - 324 = 10\,492$ переменных, приведённая по модулю радикала линеаризация которой оказывается системой полного ранга, равного 10 492, и поэтому имеет только нулевое решение, откуда по теореме о линеаризации заключаем, что $A = B = C = D = 0$ и найденное сопряжение является искомым. $\square$

5. Образы элементов $x_\alpha(t)$

Итак, на данном этапе изоморфизм переводит все $x_\alpha(1)$ и ω_α соответственно в $x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$ и $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha)}$, $\alpha \in \Phi$.

Следствие 2. Если $\varepsilon = 1$, то кольцо R имеет характеристику 2.

Доказательство. Рассмотрим корни $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_6 = \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_{10} = \alpha_2 + 2\alpha_3$ и следующие соотношения вида (4):

$$(x_{\alpha_2}(1), x_{\alpha_{10}}(1)) = 1, \quad (x_{\alpha_3}(1), x_{\alpha_6}(1)) = x_{\alpha_{10}}(\pm 2).$$

Поскольку $\delta(\alpha_2) = \alpha_3, \delta(\alpha_{10}) = \alpha_6$, отсюда сразу следует, что $\pm 2 = 0$ в R . $\square$

Изучим образы $x_\alpha(t)$, а именно докажем, что эти матрицы переходят в некоторые $x_\alpha(t')$ в случае $\varepsilon = 0$ или в некоторые $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)})$ в случае $\varepsilon = 1$, где $t \mapsto t'$ — кольцевой автоморфизм. Над полем это верно (см. [35]). Значит, в нашем случае они переходят в $x_\alpha(t') + T$ ($\varepsilon = 0$) или $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)}) + T$ ($\varepsilon = 1$), где $T \in M_n(J)$. Нужно доказать, что во всех случаях $T = 0$. Однако это может быть неверно, если неправильно выбрать t' и, соответственно, T . Правильный выбор будет описан ниже.

Замечание 5. На этом этапе мы ничего не говорим об отображении $t \mapsto t'$. Утверждается лишь, что существует такой элемент t' , что матрицы отображаются указанным образом.

Лемма 4. Все матрицы $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, выражаются через следующий набор матриц: $\omega_\alpha, \alpha \in \Phi; x_{\alpha_1}(t), x_{\alpha_3}(t)$.

Доказательство. По аналогии с леммой 2 данное утверждение сразу следует из соотношений (2), транзитивности действия группы Вейля на множестве корней одной длины и того факта, что α_1, α_3 — это корни двух возможных различных длин. $\square$

Рассмотрим матрицы $x_{\alpha_1}(t)$ и $x_{\alpha_3}(t)$. Пользуясь рассуждением выше, обозначим их образы при изоморфизме через $x_{\alpha_1}(t') + S$ и $x_{\alpha_3}(t') + T$ соответственно ($\varepsilon = 0$) или через $x_{\alpha_4}(t') + S$ и $x_{\alpha_2}((t')^2) + T$ соответственно ($\varepsilon = 1$), где $S, T \in M_n(J)$ — неизвестные матрицы с элементами из радикала J . Выберем S и T так, чтобы выполнялось $T_{8,5} = 0$. Как выяснится далее при компьютерном вычислении, это даст правильный выбор представителя. В силу леммы 4 достаточно доказать, что $S = T = 0$.

Возьмём набор образов тех соотношений вида (2) и (4), в которые входят только элементы (и их степени) вида $x_\alpha(t)$, $x_\alpha(1)$ и ω_α , $\alpha \in \Phi$. Они дают систему (полиномиальных) уравнений относительно неизвестных матриц S и T , то есть (с учётом условия $T_{8,5} = 0$) относительно $2n^2 - 1 = 2 \cdot 52^2 - 1 = 5407$ переменных из радикала. Решим полученную систему методом линеаризации. Компьютерное вычисление показывает, что приведённая по модулю радикала J линеаризация системы является системой полного ранга, равного 5407 (как при $\varepsilon = 0$, так и при $\varepsilon = 1$), и поэтому имеет только нулевое решение. Отсюда по теореме о линеаризации заключаем, что $S = T = 0$.

6. Доказательство основной теоремы

Таким образом, на данном этапе изоморфизм переводит матрицы $x_\alpha(t)$ в некоторые $x_\alpha(t')$ ($\varepsilon = 0$) или в некоторые $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)})$ ($\varepsilon = 1$). Обозначим отображение $t \mapsto t'$ через $\rho: R \rightarrow R$.

Лемма 5. Отображение ρ инъективно, аддитивно и мультипликативно; в случае $\varepsilon = 1$ эндоморфизм Фробениуса F также инъективен.

Доказательство. Инъективность отображения ρ , а также эндоморфизма F при $\varepsilon = 1$ очевидна, так как у нас изоморфизм групп и при этом $x_\alpha(0) = 1$.

Аддитивность ρ сразу следует из соотношения (1).

Мультипликативность ρ следует, например, из соотношения (4) для корней α_1 и α_2 :

$$(x_{\alpha_1}(t), x_{\alpha_2}(u)) = x_{\alpha_1 + \alpha_2}(tu) = x_{\alpha_5}(tu)$$

(это рассуждение остаётся в силе и при $\varepsilon = 1$, так как участвующие в соотношении корни длинные). $\square$

Следствие 3. Отображение ρ является изоморфизмом из кольца R на некоторое его подкольцо R' ; в случае $\varepsilon = 1$ то же верно и для эндоморфизма Фробениуса F .

Теперь докажем сюръективность полученных эндоморфизмов кольца R . Заметим, что мы находимся в ситуации, в которой для некоторой матрицы

$C \in \mathrm{GL}(V)$ выполнено

$$i_C \varphi(E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)) = CE_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)C^{-1} \subset E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R')$$

(причём при $\varepsilon = 0$ имеет место равенство). Покажем, что $R' = R$.

Лемма 6. Если для некоторого $C \in \mathrm{GL}(V)$ имеет место включение $CE_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)C^{-1} \subset E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R')$, где R' — подкольцо в R , то $R' = R$.

Доказательство. Обозначим матричные единицы через E_{ij} . Можно проверить, что

$$\begin{aligned} ((x_{\alpha_1}(1) - 1)(x_{\alpha_2}(1) - 1))^2 &= E_{5,29}, \\ \omega_{\alpha_5}((x_{\alpha_1}(1) - 1)(x_{\alpha_2}(1) - 1))^2 \omega_{\alpha_5}^{-1} &= E_{29,5}. \end{aligned}$$

Произведение этих матричных единиц даёт матричную единицу $E_{5,5}$. В матрице $h_{\alpha_1}(t)$ элемент на позиции $(5, 5)$ равен t . Таким образом, с помощью нашей группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ сложением и умножением матриц можно получить любую матрицу вида $tE_{5,5}$, где $t \in R^*$.

Предположим теперь, что R' — собственное подкольцо в R . Так как $CE_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)C^{-1} \subset E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R')$, то подкольцо кольца $M_n(R)$, порождённое всеми элементами группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, должно переходить в подкольцо кольца $M_n(R')$, порождённое элементами группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R')$. Следовательно, все элементы матриц $C(tE_{5,5})C^{-1}$ при $t \in R^*$ должны лежать в подкольце R' .

Очевидно, в обратимой матрице над локальным кольцом не может быть строки или столбца, полностью состоящего из необратимых элементов. Значит, существует такая пара индексов i, j , что элементы $C_{i,5}$ и $(C^{-1})_{5,j}$ обратимы. Отсюда заключаем, что при $t \in R^*$

$$C_{i,5}t(C^{-1})_{5,j} = (C(tE_{5,5})C^{-1})_{i,j} \in R',$$

то есть

$$C_{i,5}R^*(C^{-1})_{5,j} = R^* \subset R'.$$

Но локальное кольцо R аддитивно порождается множеством R^* , поэтому в действительности $R \subset R'$, что даёт требуемое равенство $R' = R$. $\square$

Следствие 4. Отображение ρ является автоморфизмом кольца R ; в случае $\varepsilon = 1$ эндоморфизм Фробениуса F также является автоморфизмом кольца R , то есть в этом случае R — совершенное кольцо характеристики 2. При этом выполнено $CE_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)C^{-1} = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$.

Таким образом, показано, что композиция $i_C \varphi$ исходного автоморфизма φ группы Шевалле и некоторого сопряжения (замены базиса) с помощью матрицы $C \in \mathrm{GL}_n(R)$, нормализующей данную группу, является композицией $\delta^\varepsilon \rho$, где δ — диаграммный автоморфизм и $\varepsilon \in \{0, 1\}$, ρ — кольцевой автоморфизм. Это завершает доказательство теоремы 1.

7. Приложение

7.1. Знаки структурных констант $N_{\alpha\beta}$

Напомним, что при $\alpha + \beta \in \Phi$ структурные константы $N_{\alpha\beta}$ базиса Шевалле выражаются формулой

$$N_{\alpha\beta} = \pm(r + 1),$$

где r — максимальное целое число, для которого $\beta - r\alpha \in \Phi$. Как уже упоминалось в работе, существуют алгоритмы согласованного выбора знаков всех констант $N_{\alpha\beta}$. Более подробные сведения об этом можно найти, например, в [27, 33]. Готовые таблицы структурных констант для систем корней некоторых типов можно также найти, например, в [28].

7.2. Построение представления, некоторые элементы группы Шевалле

В пространстве представления возьмём следующий базис:

$$\begin{aligned} v_1 = x_{\alpha_1}, \dots, v_{24} = x_{\alpha_{24}}, v_{25} = x_{-\alpha_1}, \dots, v_{48} = x_{-\alpha_{24}}, \\ v_{49} = h_1, v_{50} = h_2, v_{51} = h_3, v_{52} = h_4. \end{aligned}$$

Выпишем, к примеру, образы элементов x_α базиса, соответствующих простым корням, а также некоторые элементы группы Шевалле.

$$X_{\alpha_1}:$$

[illegible]

[illegible]

$X_{\alpha_3}:$

[illegible]

[illegible]

$x_{\alpha_1}(t):$

[illegible]

[illegible]

$x_{\alpha_3}(t):$

[illegible]

[illegible]

$\omega_{\alpha_1}:$

[illegible]

$\omega_{\alpha_3}:$

[illegible]

[illegible]

$$Q_{\alpha_1}:$$

[illegible]

[illegible]

$$Q_{\alpha_3}:$$

[illegible]

[illegible]

- [1] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов $\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2007. — Т. 13, вып. 4. — С. 3—29.
- [2] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов $\mathbf{A}_\ell$, $\mathbf{D}_\ell$, $\mathbf{E}_\ell$ над локальными кольцами с $1/2$ // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2009. — Т. 15, вып. 2. — С. 35—59.
- [3] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов $\mathbf{A}_\ell$, $\mathbf{D}_\ell$, $\mathbf{E}_\ell$ над локальными кольцами с необратимой двойкой // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2009. — Т. 15, вып. 7. — С. 47—80.
- [4] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типа $\mathbf{B}_\ell$ над локальными кольцами с $1/2$ // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2009. — Т. 15, вып. 7. — С. 3—46.
- [5] Бунина Е. И. Автоморфизмы элементарных присоединённых групп Шевалле типов $\mathbf{A}_\ell$, $\mathbf{D}_\ell$, $\mathbf{E}_\ell$ над локальными кольцами с $1/2$ // *Алгебра и логика.* — 2009. — Т. 48, вып. 4. — С. 443—470.

- [6] Бунина Е. И., Верёвкин П. А. Автоморфизмы групп Шевалле типа G_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2012. — Т. 17, вып. 7. — С. 49–66.
- [7] Вавилов Н. А., Николенко С. И. A_2 -доказательство структурных теорем для группы Шевалле типа F_4 // *Алгебра и анализ.* — 2008. — Т. 20, № 4. — С. 27–63.
- [8] Петечук В. М. Автоморфизмы групп SL_n , GL_n над некоторыми локальными кольцами // *Мат. заметки.* — 1980. — Т. 28, № 2. — С. 187–204.
- [9] Петечук В. М. Автоморфизмы групп $SL_3(K)$, $GL_3(K)$ // *Мат. заметки.* — 1982. — Т. 31, № 5. — С. 657–668.
- [10] Петечук В. М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами // *Мат. сб.* — 1982. — Т. 117, № 4. — С. 534–547.
- [11] Шевалле К. О некоторых простых группах // *Математика: Период. сб. перев. иностр. статей.* — 1958. — Т. 2, вып. 1. — С. 3–53.
- [12] Abe E. Chevalley groups over local rings // *Tôhoku Math. J.* — 1969. — Vol. 21, no. 3. — P. 474–494.
- [13] Abe E. Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // *Contemp. Math.* — 1989. — Vol. 83. — P. 1–17.
- [14] Abe E. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // *Algebra Analysis.* — 1993. — Vol. 5, no. 2. — P. 74–90.
- [15] Borel A., Tits J. Homomorphismes “abstraits” de groupes algébriques simples // *Ann. Math.* — 1973. — Vol. 97, no. 3. — P. 499–571.
- [16] Bourbaki N. Groupes et algèbres de Lie. — Hermann, 1968.
- [17] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of type F_4 over local rings with $1/2$ // *J. Algebra.* — 2010. — Vol. 323, no. 8. — P. 2270–2289.
- [18] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // *J. Algebra.* — 2012. — Vol. 355, no. 1. — P. 154–170.
- [19] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // *Commun. Algebra.* — 2024. — Vol. 52, no. 6. — P. 2313–2327.
- [20] Carter R. W. Simple Groups of Lie Type. — London: Wiley, 1989.
- [21] Carter R. W., Chen Yu. Automorphisms of affine Kac–Moody groups and related Chevalley groups over rings // *J. Algebra.* — 1993. — Vol. 155, no. 1. — P. 44–94.
- [22] Chen Yu. Isomorphic Chevalley groups over integral domains // *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.* — 1994. — Vol. 92. — P. 231–237.
- [23] Chen Yu. Automorphisms of simple Chevalley groups over $\mathbb{Q}$ -algebras // *Tôhoku Math. J.* — 1995. — Vol. 47, no. 1. — P. 81–97.
- [24] Chen Yu. On representations of elementary subgroups of Chevalley groups over algebras // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1995. — Vol. 123, no. 8. — P. 2357–2361.
- [25] Chen Yu. Isomorphisms of adjoint Chevalley groups over integral domains // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1996. — Vol. 348, no. 2. — P. 521–541.
- [26] Chen Yu. Isomorphisms of Chevalley groups over algebras // *J. Algebra.* — 2000. — Vol. 226, no. 2. — P. 719–741.
- [27] Cohen A. M., Murray S. H., Taylor D. E. Computing in groups of Lie type // *Math. Comp.* — 2004. — Vol. 73, no. 247. — P. 1477–1498.

- [28] Gilkey P. B., Seitz G. M. Some representations of exceptional Lie algebras // *Geom. Dedicata*. — 1988. — Vol. 25. — P. 407—416.
- [29] Humphreys J. E. On the automorphisms of infinite Chevalley groups // *Can. J. Math.* — 1969. — Vol. 21. — P. 908—911.
- [30] Humphreys J. E. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. — New York: Springer, 1978.
- [31] Klyachko A. A. Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras // *J. Algebra*. — 2010. — Vol. 324, no. 10. — P. 2608—2619.
- [32] McDonald B. R. Automorphisms of $GL_n(R)$ // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1976. — Vol. 215. — P. 145—159.
- [33] Samelson H. *Notes on Lie Algebras*. — New York: Springer, 1990.
- [34] Steinberg R. Automorphisms of finite linear groups // *Can. J. Math.* — 1960. — Vol. 12. — P. 606—615.
- [35] Steinberg R. *Lectures on Chevalley Groups*. — Yale Univ., 1967.
- [36] Vavilov N. A., Plotkin E. B. Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations // *Acta Appl. Math.* — 1996. — Vol. 45. — P. 73—113.