Классы Бэра мажорант и минорант верхнепредельных хвостовых функций на произведении банаховых пространств

В. В. БЫКОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: vvbykov@gmail.com

УДК 517.517

Ключевые слова: тихоновская топология, равномерная топология, классы Бэра.

Аннотация

Рассматриваются функции на счётном произведении банаховых пространств, зависящие только от «хвоста» последовательности координат своего аргумента. Получено достаточное условие, при котором полунепрерывная сверху (снизу) в равномерной топологии функция принадлежит второму (третьему) классу Бэра в тихоновской топологии.

Abstract

V. V. Bykov, Baire classes of majorants and minorants of upper-limit tail functions on the product of Banach spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 4, pp. 71—78.

Functions on a countable product of Banach spaces that depend only on the "tail" of the sequence of coordinates of the argument are studied. We obtain a sufficient condition under which a function that is upper (lower) semicontinuous in the uniform topology belongs to the second (third) Baire class in the Tichonoff topology.

1. Введение

Пусть для каждого $j \in \mathbb{N}$ задано банахово пространство X_j с нормой $|\cdot|_j$. На декартовом произведении $X = \prod\limits_{j\in\mathbb{N}} X_j$ определим естественным образом линейные операции и введём две топологии: *равномерную*, задаваемую метрикой

$$\rho_U(x,y) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \min\{|x_j - y_j|_j, 1\}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in X, \quad y = (y_1, y_2, \ldots) \in X,$$

и *тихоновскую*, задаваемую метрикой

$$\rho_P(x,y) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \min\{|x_j - y_j|_j, j^{-1}\}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in X, \quad y = (y_1, y_2, \ldots) \in X.$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2025, том 25, № 4, с. 71—78.

Полученные топологические пространства условимся обозначать через X_U и X_P соответственно.

Всюду ниже $\bar{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$ обозначает *расширенную числовую прямую*, которую мы наделяем стандартным порядком и порядковой топологией.

Напомним определение бэровских классов [8, с. 247—249]. Пусть M — топологическое пространство. Нулевой класс Бэра $\mathcal{B}_0(M)$ состоит из всех непрерывных функций $M \to \bar{\mathbb{R}}$, а класс $\mathcal{B}_k(M)$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ определяется по индукции как множество поточечных пределов последовательностей функций из класса $\mathcal{B}_{k-1}(M)$.

Определение 1. Будем называть функцию $f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ *конечно определённой*, если она зависит только от конечного числа координат своего аргумента. Более точно, f конечно определена, если существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $f(x) = f(y)$ для любых $x, y \in X$, у которых первые m координат совпадают.

Заметим, что всякая непрерывная функция на X_P представима в виде поточечного предела от последовательности непрерывных конечно определённых функций. Действительно, для любой такой функции f последовательность $f \circ p_n$, где $p_n\colon X \to X$ действует по правилу $p_n(x) = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$, $x \in X$, поточечно сходится к f. Оказывается, справедлива более сильная теорема.

Теорема 1 [9, теорема 2; 11, теорема 8]. *Если $f \in \mathcal{B}_1(X_P)$, то существует последовательность непрерывных конечно определённых функций $f_k\colon X_P \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, такая что*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x), \quad x \in X.$$

Таким образом, бэровская классификация в тихоновской топологии на X отражает минимальную сложность формулы для вычисления функции как повторного предела от (мультииндексной) последовательности непрерывных конечно определённых функций.

Определение 2 (ср. [7, определение 7.2])**.** Будем называть функцию $f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ *хвостовой* или *остаточной*, если она зависит только от «хвоста» последовательности координат своего аргумента, т. е. если для всяких $x, y \in X$, у которых все координаты, кроме некоторого конечного их числа, совпадают, выполнено равенство $f(x) = f(y)$.

Теорема 2 (ср. [4, теорема 2]). *Всякая хвостовая функция $f\colon X_P \to \bar{\mathbb{R}}$ либо тождественно постоянна, либо всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра.*

Доказательство. Пусть $f(x') \neq f(x'')$ для некоторых $x', x'' \in X$. Для каждой точки $x \in X$ определим последовательности (y^n) и (z^n) равенствами

$$y^n = p_n(x) + \bigl(x' - p_n(x')\bigr), \quad z^n = p_n(x) + \bigl(x'' - p_n(x'')\bigr), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $y^n \xrightarrow{X_P} x$ и $z^n \xrightarrow{X_P} x$ при $n \to \infty$. В то же время

$$\lim_{n\to\infty} f(y^n) = f(x') \neq f(x'') = \lim_{n\to\infty} f(z^n),$$

поскольку функция f хвостовая. Следовательно, f разрывна в каждой точке $x \in X_P$. Непринадлежность функции f классу $\mathcal{B}_1(X_P)$ вытекает из теоремы Бэра о функциях первого класса [8, с. 242]. Теорема доказана. $\square$

Таким образом, в тихоновской топологии не бывает полунепрерывных хвостовых функций (кроме констант). Более того, рассуждая аналогично доказательству теоремы 2, нетрудно показать, что хвостовая функция не является полунепрерывной сверху (снизу) в любой точке, где она не принимает своего наибольшего (наименьшего) значения. Из сказанного ясно, что для описания «реакции» хвостовой функции на малое изменение её аргумента тихоновская топология не подходит. Для этой цели гораздо лучше подходит равномерная топология. Отсюда возникает естественный вопрос: как связаны между собой бэровские классы хвостовых функций в указанных топологиях? Как оказалось, в общем случае связь между ними отсутствует, если не считать естественного включения $\mathcal{B}_k(X_P) \subset \mathcal{B}_k(X_U)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ [2, теорема 1]. В настоящей работе мы рассматриваем один важный частный случай, когда такую связь установить всё же удаётся.

2. Бэровский класс мажорант

Определение 3 (ср. [3, определение 6])**.** Будем говорить, что функция $f\colon M \to \bar{\mathbb{R}}$ является верхнепредельной, если существует такая последовательность непрерывных функций $f_k\colon M \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, что

$$f(\mu) = \varlimsup_{k\to\infty} f_k(\mu), \quad \mu \in M.$$

Замечание 1. Указанное в определении 3 свойство функции равносильно каждому из следующих условий:

1) f представляется как поточечный предел убывающей последовательности функций первого бэровского класса;
2) прообраз всякого луча $[r, +\infty]$, $r \in \mathbb{R}$, при отображении f является множеством типа G_δ. Функции, удовлетворяющие указанному условию, составляют класс $(^*, G_\delta)$ [8, с. 223, 224].

Равносильность условий 1 и 2 установлена в [8, с. 221—231], а равносильность условия 2 и определения 3 вытекает из [12, 13] (см. также [5, замечание 3]).

Отметим, что из условия 1 следует, что всякая верхнепредельная функция принадлежит второму классу Бэра.

Для каждой функции $f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ через $\bar{f}$ условимся обозначать её *минимальную полунепрерывную сверху мажоранту* в пространстве X_U:

$$\bar{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \sup_{y\in B^U_\varepsilon(x)} f(y), \quad x \in X,$$

где $B^U_\varepsilon(x) \equiv \{y \in X\colon \rho_U(y, x) \leqslant \varepsilon\}$.

Теорема 3. *Если пространство X сепарабельно, а функция $\varphi\colon X_P \to \bar{\mathbb{R}}$ является хвостовой и верхнепредельной, то тем же свойством обладает и её мажоранта $\bar{\varphi}$.*

Доказательству теоремы 3 предпошлём две леммы.

Для каждого числа $r \in \mathbb{R}$ множества Лебега [8, с. 221] $[f > r]$ и $[f \geqslant r]$ функции $f\colon M \to \bar{\mathbb{R}}$ — это прообразы промежутков $(r, +\infty]$ и $[r, +\infty]$ соответственно.

Лемма 1. *Пусть M — полное сепарабельное метрическое пространство, а для функции $\varphi\colon M \to \bar{\mathbb{R}}$ справедливо представление*

$$\varphi(\mu) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{l\in\mathbb{N}} \varphi_{kl}(\mu), \quad \mu \in M, \tag{1}$$

где $\varphi_{kl}\colon M \to \bar{\mathbb{R}}$, $k, l \in \mathbb{N}$, — непрерывные функции. Тогда если для любого $r \in \mathbb{R}$ множество $[\varphi \geqslant r]$ либо пусто, либо плотно в M, то выполнено равенство

$$S \equiv \sup_{\mu\in M} \varphi(\mu) = \inf_{j,k\in\mathbb{N}} \sup_{\mu\in U_j} \sup_{l\in\mathbb{N}} \varphi_{kl}(\mu) \equiv \tilde{S},$$

где U_j, $j \in \mathbb{N}$, — произвольная счётная база топологии пространства M.

Доказательство. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\varphi_k(\mu) = \sup_{l\in\mathbb{N}} \varphi_{kl}(\mu), \quad \mu \in M.$$

Выберем произвольно и зафиксируем $r \in \mathbb{R}$.

1. Предположим, что $S > r$. Тогда множество $F_r \equiv [\varphi \geqslant r]$ непусто и, следовательно, плотно в пространстве M. Стало быть, для каждого $j \in \mathbb{N}$ имеем $F_r \cap U_j \neq \varnothing$, откуда вытекает

$$\inf_{j\in\mathbb{N}} \sup_{\mu\in U_j} \varphi(\mu) \geqslant r. \tag{2}$$

В силу (1) для любых $k, j \in \mathbb{N}$ и $\mu \in U_j$ справедливо неравенство $\varphi_k(\mu) \geqslant \varphi(\mu)$. Беря от обеих частей этого неравенства сначала точную верхнюю грань по $\mu \in U_j$, а затем точную нижнюю грань по $j, k \in \mathbb{N}$, получаем

$$\inf_{j,k\in\mathbb{N}} \sup_{\mu\in U_j} \varphi_k(\mu) \geqslant \inf_{j\in\mathbb{N}} \sup_{\mu\in U_j} \varphi(\mu).$$

Следовательно, $\tilde{S} \geqslant r$.

2. Предположим, что $\tilde{S} > r$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $Q_k \equiv [\varphi_k > r]$. Тогда для всякого $j \in \mathbb{N}$ имеем $Q_k \cap U_j \neq \varnothing$, поэтому Q_k плотно в M. Далее, Q_k открыто в силу равенства

$$Q_k = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} [\varphi_{kl} > r]$$

и непрерывности функций φ_{kl}, $k, l \in \mathbb{N}$. Из теоремы Бэра [6, § 34, V, 1] получаем, что множество $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} Q_k$ плотно в M, а значит, непусто. Пусть $\mu_0 \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} Q_k$.

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi_k(\mu_0) > r$, откуда вытекает, что $\varphi(\mu_0) \geqslant r$ и тем более $S \geqslant r$.

3. Если допустить, что $S \neq \tilde{S}$, то для некоторого $r \in \mathbb{R}$ мы имели бы одно из двойных неравенств: $\tilde{S} < r < S$ либо $S < r < \tilde{S}$. Но первое неравенство противоречит пункту 1, а второе — пункту 2. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Если пространство X сепарабельно, а $\varphi\colon X_P \to \bar{\mathbb{R}}$ — верхнепредельная хвостовая функция, то для любого $\varepsilon > 0$ функция $\tilde{\varphi}_\varepsilon\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$, задаваемая равенством*

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon(x) = \sup_{y \in B_\varepsilon^U(0)} \varphi(x+y), \quad x \in X, \tag{3}$$

обладает свойством: для любого $r \in \mathbb{R}$ множество $[\tilde{\varphi}_\varepsilon \geqslant r]$ является множеством типа G_δ.

Доказательство. Всюду ниже множество $B_\varepsilon \equiv B_\varepsilon^U(0) \subset X_P$ считаем наделённым топологией подпространства. Выберем произвольно и зафиксируем $x \in X$. По условию существует последовательность непрерывных функций $\varphi_m\colon X_P \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, такая что

$$\varphi(x+y) = \varlimsup_{m \to \infty} \varphi_m(x+y), \quad y \in B_\varepsilon.$$

Запишем последнее равенство в виде

$$\varphi(x+y) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{l \in \mathbb{N}} \varphi_{k+l}(x+y), \quad y \in B_\varepsilon.$$

Для каждого $r \in \mathbb{R}$ положим $F_r = \{y \in B_\varepsilon\colon \varphi(x+y) \geqslant r\}$. Пусть для некоторых $r \in \mathbb{R}$ и $\tilde{y} \in B_\varepsilon$ выполнено включение $\tilde{y} \in F_r$. Покажем, что множество F_r плотно в пространстве B_ε. Действительно, пусть заданы $z \in B_\varepsilon$ и $\delta > 0$. Положим

$$\tilde{z}_k = \begin{cases} z_k & \text{при } k \in \{1, \ldots, N\}, \\ \tilde{y}_k & \text{при } k \geqslant N+1, \end{cases}$$

где $N = [1/\delta] + 1$. Тогда по построению имеем $\tilde{z} \in B_\varepsilon$, $\rho_P(z, \tilde{z}) < \delta$ и $\varphi(x+\tilde{z}) = \varphi(x+\tilde{y}) \geqslant r$, поскольку функция φ хвостовая. Следовательно, $\tilde{z} \in F_r$.

Из равенства

$$B_\varepsilon = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{x \in X\colon \min\{|x_j|_j, 1\} \leqslant \varepsilon\}$$

заключаем, что множество B_ε замкнуто в пространстве X_P. Следовательно, пространство B_ε полно и сепарабельно. Применяя лемму 1, получаем

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon(x) \equiv \sup_{y \in B_\varepsilon} \varphi(x+y) = \inf_{j,k \in \mathbb{N}} \sup_{y \in U_j} \sup_{l \in \mathbb{N}} \varphi_{k+l}(x+y),$$

где U_j, $j \in \mathbb{N}$, — какая-нибудь счётная база топологии пространства B_ε.

Зафиксируем $j, k, p \in \mathbb{N}$. Отметим, что для любого $r \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\Big\{x \in X\colon \sup_{y \in U_j} \sup_{l \in \mathbb{N}} \varphi_{k+l}(x+y) > r - p^{-1}\Big\} = \bigcup_{y \in U_j} \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \{x \in X\colon \varphi_{k+l}(x+y) > r - p^{-1}\}.$$

Множества, стоящие под знаком объединения, открыты в силу непрерывности функций $X_P \to \mathbb{R}$, действующих по правилу $x \mapsto \varphi_{k+l}(x+y)$, $l \in \mathbb{N}$, $y \in U_j$, поэтому их объединение тоже открыто. Тогда из представления

$$[\tilde{\varphi}_\varepsilon \geqslant r] = \bigcap_{j,k,p\in\mathbb{N}} \Big\{x \in X\colon \sup_{y\in U_j} \sup_{l\in\mathbb{N}} \varphi_{k+l}(x+y) > r - p^{-1}\Big\}$$

получаем, что $[\tilde{\varphi}_\varepsilon \geqslant r]$ есть множество типа G_δ. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3. Поскольку $B^U_{\varepsilon_1}(0) \subset B^U_{\varepsilon_2}(0)$ для любых положительных $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то функция $\tilde{\varphi}_\varepsilon$, определённая равенством (3), является неубывающей по ε при фиксированном $x \in X$, откуда получаем

$$\bar{\varphi}(x) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \tilde{\varphi}_{1/m}(x), \quad x \in X.$$

Для любого $r \in \mathbb{R}$ имеем

$$[\bar{\varphi} \geqslant r] = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} [\tilde{\varphi}_{1/m} \geqslant r],$$

откуда, применяя лемму 2, заключаем, что $[\bar{\varphi} \geqslant r]$ есть множество типа G_δ. Следовательно (см. замечание 1), функция $\bar{\varphi}$ является верхнепредельной. Теорема доказана. $\square$

3. Бэровский класс минорант

Для каждой функции $f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ через $\underline{f}$ условимся обозначать её *максимальную полунепрерывную снизу миноранту* в пространстве X_U:

$$\underline{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \inf_{y\in B^U_\varepsilon(x)} f(y), \quad x \in X.$$

Теорема 4. *Если все пространства X_j, $j \in \mathbb{N}$, конечномерны, а функция $\varphi\colon X_P \to \bar{\mathbb{R}}$ является хвостовой и верхнепредельной, то её миноранта $\underline{\varphi}$ принадлежит третьему классу Бэра $\mathcal{B}_3(X_P)$.*

Перед доказательством теоремы отметим следующий факт.

Лемма 3 [1, лемма 2]. *Пусть K — компактное топологическое пространство, а (f_i) — нестрого возрастающая последовательность полунепрерывных снизу функций $K \to \bar{\mathbb{R}}$. Тогда*

$$\inf_{x\in K} \sup_{i\in\mathbb{N}} f_i(x) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \inf_{x\in K} f_i(x).$$

Доказательство теоремы 4. Как и ранее, множество B_ε считаем наделённым топологией подпространства X_P.

Сначала покажем, что для любого $\varepsilon \in (0,1)$ функция $\breve{\varphi}_\varepsilon\colon X_P \to \bar{\mathbb{R}}$, задаваемая равенством

$$\breve{\varphi}_\varepsilon(x) = \inf_{y\in B_\varepsilon} \varphi(x+y), \quad x \in X,$$

является верхнепредельной.

1. По условию существует такая последовательность непрерывных функций $\varphi_m\colon X_P \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, что

$$\varphi(x) = \varlimsup_{m\to\infty} \varphi_m(x), \quad x \in X.$$

Запишем последнее равенство в виде

$$\varphi(x) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{q\in\mathbb{N}} \max_{1\leqslant p\leqslant q} \varphi_{m+p}(x), \quad x \in X,$$

и определим функции $\varphi_{mq}\colon X \to \mathbb{R}$, $m, q \in \mathbb{N}$, равенством

$$\varphi_{mq}(x) = \max_{1\leqslant p\leqslant q} \varphi_{m+p}(x), \quad x \in X.$$

Таким образом,

$$\breve{\varphi}_\varepsilon(x) = \inf_{y\in B_\varepsilon} \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{q\in\mathbb{N}} \varphi_{mq}(x+y), \quad x \in X. \tag{4}$$

Положим

$$f_m(x) = \inf_{y\in B_\varepsilon} \sup_{q\in\mathbb{N}} \varphi_{mq}(x+y), \quad x \in X, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Заметим, что множество B_ε компактно как прямое произведение компактов $\{x_j \in X_j\colon |x_j|_j \leqslant \varepsilon\}$, $j \in \mathbb{N}$. По лемме 3 имеем

$$f_m(x) = \sup_{q\in\mathbb{N}} \inf_{y\in B_\varepsilon} \varphi_{mq}(x+y), \quad x \in X, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Очевидно, что для любых $x \in X$ и $m, q \in \mathbb{N}$ точная нижняя грань в равенстве (6) достигается, т. е. может быть заменена минимумом.

2. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и докажем, что функция f_m полунепрерывна снизу. Функция $X_P \times X_P \to X_P$, задаваемая равенством $(x, y) \mapsto x + y$, непрерывна, поэтому для любого $q \in \mathbb{N}$ функция $X_P \times X_P \to \mathbb{R}$, действующая по правилу $(x, y) \mapsto \varphi_{mq}(x + y)$, также непрерывна. Следовательно, для любых $a \in \mathbb{R}$ и $q \in \mathbb{N}$ множество

$$\{(x, y) \in X \times B_\varepsilon\colon \varphi_{mq}(x + y) \leqslant a\}$$

замкнуто в $X_P \times B_\varepsilon$. Тогда замкнута и его проекция на первый сомножитель [10, XI, 2.5] произведения, т. е. множество

$$\{x \in X\colon \min_{y\in B_\varepsilon} \varphi_{mq}(x + y) \leqslant a\}.$$

Для всякого $a \in \mathbb{R}$ из равенства (6) с точной нижней гранью, заменённой минимумом, получаем

$$[f_m > a] = \bigcup_{q\in\mathbb{N}} \{x \in X\colon \min_{y\in B_\varepsilon} \varphi_{mq}(x + y) > a\}.$$

Следовательно, для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $[f_m > a]$ открыто (что равносильно полунепрерывности снизу функции f_m).

3. Комбинируя равенства (4) и (5), получаем

$$\breve{\varphi}_\varepsilon(x) = \inf_{m\in\mathbb{N}} f_m(x), \quad x \in X.$$

Заметим, что для любого $r \in \mathbb{R}$ справедливо представление

$$[\breve{\varphi}_\varepsilon \geqslant r] = \bigcap_{m,k\in\mathbb{N}} [f_m > r - k^{-1}],$$

откуда вытекает, что прообраз $[\breve{\varphi}_\varepsilon \geqslant r]$ является множеством типа G_δ. В силу замечания 1 функция $\breve{\varphi}_\varepsilon$ является верхнепредельной и, следовательно, принадлежит второму классу Бэра.

4. Поскольку $B_{\varepsilon_1} \subset B_{\varepsilon_2}$ для любых положительных $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то функция $\breve{\varphi}_\varepsilon$ является невозрастающей по ε при фиксированном $x \in X$, откуда получаем

$$\underline{\varphi}(x) = \lim_{l\to\infty} \breve{\varphi}_{1/l}(x), \quad x \in X.$$

Таким образом, $\underline{\varphi}$ есть предел (неубывающей) последовательности функций второго класса Бэра. Теорема доказана. $\square$

Литература

[1] Быков В. В. Некоторые свойства мажорант показателей Ляпунова систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравн. — 2014. — Т. 50, № 10. — С. 1291—1301.

[2] Быков В. В. О классах Бэра ляпуновских инвариантов // Мат. сб. — 2017. — Т. 208, № 5. — С. 38—62.

[3] Быков В. В., Салов Е. Е. О классе Бэра минорант показателей Ляпунова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2003. — № 1. — С. 33—40.

[4] Ветохин А. Н. К бэровской классификации остаточных показателей // Дифференц. уравн. — 1998. — Т. 34, № 8. — С. 1039—1042.

[5] Карпук М. В. Показатели Ляпунова семейств морфизмов метризованных векторных расслоений как функции на базе расслоения // Дифференц. уравн. — 2014. — Т. 50, № 10. — С. 1332—1338.

[6] Куратовский К. Топология. Т. 1. — М.: Мир, 1966.

[7] Сергеев И. Н. К теории показателей Ляпунова // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1983. — Вып. 9. — С. 111—166.

[8] Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М.; Л.: ОНТИ, 1937.

[9] Bykov V. V. On Baire class one functions on a product space // Topol. Appl. — 2016. — Vol. 199. — P. 55—62.

[10] Dugundji J. Topology. — Boston: Allyn and Bacon, 1966.

[11] Karlova O., Mykhaylyuk V. Limits of sequences of continuous functions depending on finitely many coordinates // Topol. Appl. — 2017. — Vol. 216. — P. 25—37.

[12] Kantorovitch L. Sur les suites des fonctions rentrant dans la classification de M. W. H. Young // Fund. Math. — 1929. — Vol. 13. — P. 178—185.

[13] Stepanoff W. Sur les suites des fonctions continues // Fund. Math. — 1928. — Vol. 11. — P. 264—274.