Полюса Максвелла и комплексные сферические гармоники на S^2

В. М. ГИЧЕВ
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омский филиал
e-mail: gichev@ofim.oscsbras.ru

УДК 517.586

Ключевые слова: полюса Максвелла, полиномы Лежандра, сферические гармоники.

Аннотация

Однородный многочлен называется вполне приводимым над полем $\mathbb{F}$, если он разлагается в произведение $\mathbb{F}$-линейных форм. Пусть $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и $\mathcal{H}_n$, $\mathcal{D}_n$ — семейства всех гармонических и всех вполне приводимых многочленов в пространстве $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3)$ однородных многочленов степени n соответственно. Тогда для каждого $h \in \mathcal{H}_n$ существуют единственные $p \in \mathcal{D}_n$ и $q \in \mathcal{P}_{n-2}$, такие что $h = p + r^2 q$. Дж. Дж. Сильвестр привёл набросок доказательства этой теоремы в своей заметке о сферических гармониках в качестве замечания к теории полюсов Максвелла. Если $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, то те же равенства справедливы для некоторых p, q, но единственности обычно нет. Для h общего положения есть $(2n-1)!!$ таких многочленов. Положим $\Lambda_h = (h + r^2\mathcal{P}_{n-2}) \cap \mathcal{D}_n$. В статье доказывается, что $h = \frac{1}{(2n-1)!!} \sum\limits_{p \in \Lambda_h} p$, т. е. h — центр масс Λ_h. Это влечёт квадратичные алгебраические соотношения между сферическими гармониками.

Abstract

V. M. Gichev, Maxwell's poles and complex spherical harmonics on S^2, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 4, pp. 95—111.

A homogeneous polynomial is called completely reducible over a field $\mathbb{F}$ if it can be factored into a product of $\mathbb{F}$-linear forms. Set $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, and let $\mathcal{H}_n$ and $\mathcal{D}_n$ be the families of all harmonic and all completely reducible polynomials in the space $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3)$ of homogeneous polynomials of degree n, respectively. Then, for every $h \in \mathcal{H}_n$, there exist unique $p \in \mathcal{D}_n$ and $q \in \mathcal{P}_{n-2}$ such that $h = p + r^2 q$. Sylvester sketched a proof of this theorem in his note on spherical harmonics as a remark on Maxwell's pole theory. If $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, then the same equalities hold for some p, q, but they are usually not unique. For h in general position, there are $(2n-1)!!$ such polynomials. Let $\Lambda_h = (h + r^2\mathcal{P}_{n-2}) \cap \mathcal{D}_n$. We prove that $h = \frac{1}{(2n-1)!!} \sum\limits_{p \in \Lambda_h} p$, i.e., h is the center of mass of Λ_h. This implies algebraic quadratic relations between the spherical harmonics.

Фундаментальная и прикладная математика, 2025, том 25, № 4, с. 95—111.

Статья посвящается памяти
Евгения Васильевича Панкратьева

1. Введение

Собственные функции сферического оператора Лапласа называются сферическими гармониками. В статье рассматриваются гармоники на двумерной сфере S^2 из $\mathbb{R}^3$. Собственное число λ_n оператора Лапласа равно $-n(n+1)$. Отвечающее λ_n пространство $\mathcal{H}_n$ состоит из следов на S^2 однородных гармонических многочленов степени n, которые обычно тоже называют сферическими гармониками. Максвелл предложил метод их получения и инструменты для работы с ними, известные как полюса Максвелла.

Пусть $v \in \mathbb{R}^3$ и $D_v f(u) = d_u f(v)$ — производная f вдоль v. Положим

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$r = \sqrt{r^2} \geqslant 0$. Функция $\frac{1}{r}$ гармоническая. Поэтому для любых $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^3$ функция

$$D_{v_1} \ldots D_{v_n} \frac{1}{r} = \frac{h}{r^{2n+1}} \tag{1.1}$$

тоже гармоническая. Более того, h — однородный степени n гармонический многочлен, т. е. $h \in \mathcal{H}_n$. Максвелл посвятил сферическим гармоникам главу 9 своего основного труда [10], где широко использовал эту конструкцию. Векторы $\frac{v_1}{|v_1|}, \ldots, \frac{v_n}{|v_n|} \in S^2$ называются *полюсами Максвелла.*

Пусть $p \in \mathcal{P}$. Положим

$$D_p = p\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{1.2}$$

Обозначим $\ell_v(u) = \langle v, u \rangle$. Тогда $D_v = D_{\ell(v)}$, и оператор слева в (1.1) можно записать как D_p, где

$$p = \ell_{v_1} \ldots \ell_{v_n}.$$

Однородный многочлен p называется *вполне приводимым над полем* $\mathbb{F}$, если он является произведением $\mathbb{F}$-линейных функций. Таким образом, набор полюсов можно заменить одним вполне приводимым полиномом. Эти два способа различаются тем, что замена направления k полюсов на противоположное изменяет знак функции p в случае нечётного k и сохраняет p при чётном k. Дж. Дж. Сильвестр отметил, что для любой вещественной сферической гармоники существует единственный вполне приводимый вещественный полином, заменяющий оператор в левой части (1.1). Он также привёл набросок доказательства этого факта в заметке [11].

В формулировке теоремы 1.1 предполагается, что $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Первое полное её доказательство появилось в основополагающем труде Д. Гильберта и Р. Куранта по математической физике (см. [7, гл. 7]). В. И. Арнольд в приложении 1 к своим лекциям по уравнениям в частных производных [1] тоже привёл доказательство этой теоремы и добавил ещё одно для свойства единственности. Приложение содержит также интересные факты о топологии связанных с ней многообразий.

Теорема 1.1. *Для каждой вещественной сферической гармоники h степени n существуют единственные вполне приводимый многочлен p и однородный степени $n-2$ многочлен q, такие что $h=p+r^2q$.*

Стоит отметить, что вещественные многочлены, обладающие обоими свойствами (т. е. гармонические и вполне приводимые), допускают исчерпывающее описание, обнаруженное М. Л. Аграновским в связи с проблемой инъективности преобразования Радона (см. [2]).

Теорема 1.2. *Вещественный вполне приводимый над $\mathbb{R}$ многочлен является гармоническим тогда и только тогда, когда гиперплоскости его нулей не имеют кратностей и образуют систему Кокстера.*

Последнее означает, что отражения в гиперплоскостях нулей порождают конечную линейную группу. Теорема верна в любом конечномерном евклидовом пространстве.

В случае $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ теорема 1.1 неверна в отношении единственности: для h общего положения в $\mathcal{H}_n$ существуют $(2n-1)!!$ вполне приводимых многочлена p, таких что $h-p$ делится на r^2.

У конуса $\mathcal{Q}_0$, заданного уравнением $r^2=0$, имеется естественное квадратичное двулистное накрытие $\kappa\colon \mathbb{C}^2\to\mathcal{Q}_0$. Отображение $\mathcal{R}\colon p\to p\circ\kappa$ задаёт биекцию между $\mathcal{H}_n$ и пространством $\mathcal{P}_{2n}$ однородных многочленов степени $2n$ на $\mathbb{C}^2$ и аннулирует многочлены, делящиеся на r^2.

Пусть $h\in\mathcal{H}_n$ и $q=\mathcal{R}h$. Так как любой многочлен $q\in\mathcal{P}_{2n}(\mathbb{C}^2)$ вполне приводим, то h задаёт множество $\mathfrak{L}_q$ из $2n$ линейных множителей q с точностью до масштабирования множителей. Каждой паре этих линейных форм отвечает линейная форма на $\mathbb{C}^3$, а каждое разбиение $\mathfrak{L}_q$ на пары определяет вполне приводимый многочлен на $\mathbb{C}^3$. Обратное также верно. Множество Λ_h этих многочленов можно перечислить, с учётом повторений, разбивая $\{1,\ldots,2n\}$ на пары. Поэтому их ровно $(2n-1)!!$ в общем положении. Мы докажем, что h является центром масс Λ_h. Применяя этот результат к $2k$-подмножествам $\mathfrak{L}_q$, мы получаем квадратичные соотношения между вовлечёнными в эту процедуру полиномами, а из них следуют некоторые соотношения между функциями Лежандра P_n^m.

За последние два десятилетия появилось несколько работ о комплексных полюсах Максвелла, которые мотивированы исследованием реликтового излучения (см. [5, 6, 8, 9]). Оно содержит информацию о ранней стадии развития Вселенной. Оказалось удобным хранить информацию об определяющих реликтовый фон сферических гармониках в терминах их полюсов, поскольку они не зависят от системы координат.

Дополнительную информацию о сферических гармониках, относящуюся к материалу статьи, можно найти в [3].

Опишем коротко содержание разделов работы.

Раздел 2 содержит вспомогательный материал. Определённое выше отображение $\mathcal{R}$ сплетает действия группы $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\}$ в алгебре $\mathcal{P}(\mathbb{C}^3)$ многочленов на $\mathbb{C}^3$ и в алгебре $\mathcal{P}^e(\mathbb{C}^2)$ чётных многочленов на $\mathbb{C}^2$ соответственно. Это позволяет построить для каждого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ базис в $\mathcal{H}_n$, состоящий из собственных функций $f_{n,m}$ стационарной подгруппы T_o точки $o = (0, 0, 1)$. Отвечающие им базисы в $\mathcal{P}_{2n}$ состоят из мономов координатных функций a, b на $\mathbb{C}^2$. Связь между функциями $f_{n,m}$ в $\mathcal{H}_n$ и мономами $a^{n+m}b^{n-m}$ задаёт удобную форму обратного к $\mathcal{R}$ отображения $\mathcal{R}^{-1}$. Функции $f_{n,m}$ тесно связаны с полиномами Лежандра. Формулы приведены в разделе 4.

В разделе 3 отмечено, что метод Максвелла приводит к формуле для вычисления ортогональной проекции на $\mathcal{H}_n$. Она работает как в вещественном, так и в комплексном случаях. Есть два способа построения множества Λ_h всех вполне приводимых p из пространства $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^3)$ однородных полиномов степени n на $\mathbb{C}^3$, гармоническая компонента которых равна h. Первый из них внутренний: это пересечение множества $\mathcal{D}_n$ всех вполне приводимых многочленов с аффинным пространством $h + r^2\mathcal{P}_{n-2}$. Второй — внешний: это множество всех произведений линейных форм на $\mathbb{C}^3$, которые относятся к парам линейных форм на $\mathbb{C}^2$, являющихся множителями $q = \mathcal{R}h$, причём выбор последних определяется разбиением множества $\mathfrak{L}_q$ на пары. Видимо, Дж. Дж. Сильвестр использовал его в несколько иной форме.

В разделе 4 доказывается, что h является центром масс Λ_h. Применение этого результата к $2k$-подмножествам $\mathfrak{L}_q$ приводит к квадратичным соотношениям между участвующими в них сферическими гармониками.

2. Вспомогательный материал

Хорошо известно разложение пространства $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^3)$ всех однородных степени n многочленов в ортогональную $\mathrm{O}(3, \mathbb{C})$-инвариантную сумму:

$$\mathcal{P}_n = \sum_{j \in J_n} r^{n-j}\mathcal{H}_j, \tag{2.1}$$

где $J_n = \{j \in \mathbb{Z} \colon 0 \leqslant j \leqslant n \text{ и } n - j \text{ чётно}\}$ и $\mathcal{H}_j$ — пространство всех гармонических полиномов из $\mathcal{P}_j$. Отметим, что пространства $r^{n-j}\mathcal{H}_j$ и $\mathcal{H}_j$ на S^2 имеют одинаковые следы на S^2. Поэтому ограничение пространства

$$\mathcal{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

всех гармонических многочленов от $\mathbb{C}^3$ на S^2 совпадает со множеством следов пространства

$$\mathcal{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$$

всех полиномов. Эти суммы предполагаются алгебраическими, но первую из них можно рассматривать и как ортогональное разложение пространства $L^2(S^2)$, где S^2 наделено инвариантной вероятностной мерой. Оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

действует как на гладкие функции на $\mathbb{R}^3$, так и на голоморфные функции на $\mathbb{C}^3$. Пространства $\mathcal{H}_n$ попарно ортогональны в $L^2(S^2)$, а их сумма $\mathcal{H}$ плотна в нём. Следовательно, $L^2(S^2)$ — прямая ортогональная сумма $\mathcal{H}_n$. Обозначим через π_n ортогональную проекцию в $L^2(S^2)$:

$$\pi_n\colon \mathcal{P} \to \mathcal{H}_n.$$

Слагаемые (2.1) инвариантны относительно естественного действия группы SO(3). Они неприводимы и попарно неэквивалентны. Поэтому любой коммутирующий с $\mathrm{SO}(3,\mathbb{C})$ линейный оператор в $\mathcal{P}_n$ сохраняет все пространства $\mathcal{H}_j$. В частности, это верно для π_n. Согласно (2.1) для любого $p \in \mathcal{P}_n$ имеется единственное разложение

$$p = r^2 q + h, \tag{2.2}$$

где $q \in \mathcal{P}_{n-2}$ и $h \in \mathcal{H}_n$. Таким образом,

$$\pi_n p = h, \text{ если и только если } r^2 \text{ делит } p - h. \tag{2.3}$$

2.1. Гармонические многочлены на $\mathbb{C}^3$ и многочлены на $\mathbb{C}^2$

В дальнейшем $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}^3)$, $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}^3)$ и $\mathcal{P}_{2n}(\mathbb{C}^2)$ часто будут рассматриваться одновременно. Поэтому мы сокращаем обозначения до $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{H}_n$ и $\mathcal{P}_{2n}$ соответственно, надеясь, что это не приведёт к путанице. Легко проверить, что

$$\dim \mathcal{H}_n = \dim \mathcal{P}_{2n} = 2n + 1. \tag{2.4}$$

Группы Ли $\mathrm{SO}(3,\mathbb{C})$ и $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ изоморфны, а их естественные представления в $\mathcal{H}_n$ и $\mathcal{P}_{2n}$ эквивалентны. Это следует из простой геометрической конструкции. Пусть

$$\mathcal{Q}_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \colon r^2 = c\}.$$

Отображение

$$\kappa(a,b) = \left(\frac{1}{2}(a^2+b^2), \frac{1}{2}i(b^2-a^2), -iab\right) \tag{2.5}$$

задаёт двулистное накрытие $\mathbb{C}^2$ нуль-конуса $\mathcal{Q}_0$. Оно склеивает $\pm(a,b)$ и отождествляет $\mathbb{C}^3 \sim \mathcal{P}_1(\mathbb{C}^3) = \mathcal{H}_1(\mathbb{C}^3)$ с пространством $\mathcal{P}_2(\mathbb{C}^2)$ всех квадратичных форм на $\mathbb{C}^2$. Положим

$$\mathcal{R}p = p \circ \kappa \tag{2.6}$$

и обозначим через $\mathcal{P}^e$ алгебру всех чётных многочленов на $\mathbb{C}^2$.

Предложение 2.1. *Отображение $\mathcal{R}$ является эквивариантным сюръективным гомоморфизмом $\mathcal{P}(\mathbb{C}^3) \to \mathcal{P}^e(\mathbb{C}^2)$, ядро которого равно $r^2\mathcal{P}(\mathbb{C}^3)$. Кроме того, $\mathcal{R}$ задаёт биекцию между $\mathcal{H}_n$ и $\mathcal{P}_{2n}$ для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{R}$ отображает $\mathcal{P}_n$ в $\mathcal{P}_{2n}$ и $\mathcal{R}r^2 = 0$. Последнее означает, что $\mathcal{R}p$ не зависит от первого слагаемого в правой части (2.2). Эквивариантность $\mathcal{R}$ следует из (2.6): группа $\mathrm{SO}(3)$ сохраняет конус $\mathcal{Q}_0$ и задаёт компактную группу линейных преобразований $\mathcal{P}_2(\mathbb{C}^2)$. Явные выражения соответствия нам не понадобятся. Так как группа $\mathrm{SO}(3)$ неприводима в $\mathcal{H}_n$, то либо $\mathcal{R} = 0$ на $\mathcal{P}_n$, либо оператор $\mathcal{R}$ инъективен на $\mathcal{H}_n$. Первое утверждение, очевидно, ложно. Поэтому второе истинно. Благодаря (2.4) это завершает доказательство предложения. □

Предложение 2.1 влечёт следующие отождествления:

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{P}(\mathbb{C}^3)/r^2\mathcal{P}(\mathbb{C}^3) \cong \mathcal{P}^e(\mathbb{C}^2).$$

2.2. Обратное к $\mathcal{R}$ отображение на $\mathcal{P}^e$

Если $\mathfrak{B}_n$ — линейный базис в $\mathcal{H}_n$, то $\mathcal{R}\mathfrak{B}_n$ — базис в $\mathcal{P}_{2n}$. Это определяет $\mathcal{R}^{-1}$ на $\mathcal{P}_{2n}$ и, следовательно, на $\mathcal{P}^e$. Мы приведём конструктивную версию этой процедуры. Отметим точку

$$o = (0, 0, 1) \in S^2$$

и обозначим через $T_o = \mathrm{SO}(2)$ её стационарную подгруппу в $\mathrm{SO}(3)$. Определим комплексно линейные функции ζ, ω, $\bar\zeta$ на $\mathbb{C}^3$ следующим образом:

$$(\zeta, \omega, \bar\zeta) = (x + iy, iz, x - iy). \tag{2.7}$$

Черта не обозначает комплексное сопряжение на $\mathbb{C}^3$, но совпадает с ним на $\mathbb{R}^3$. В силу (2.5) имеем

$$(\zeta, \omega, \bar\zeta) \circ \kappa(a, b) = (a^2, ab, b^2). \tag{2.8}$$

Это означает, что

$$\mathcal{R}(\zeta^j\omega^k\bar\zeta^l) = a^{2j+k}b^{2l+k}. \tag{2.9}$$

Положим

$$F = \omega D_{\bar\zeta} - \bar\zeta D_\omega = iz\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) - i(x - iy)\frac{\partial}{\partial z},$$

где D_p определяется формулой (1.2). Дифференциальный оператор F удовлетворяет равенствам

$$F\zeta = 2\omega, \quad F\omega = \bar\zeta, \quad F\bar\zeta = 0, \tag{2.10}$$

и следовательно,

$$F(\zeta^j\omega^k\bar\zeta^l) = \zeta^{j-1}\omega^{k-1}\bar\zeta^l(k\zeta\bar\zeta + 2j\omega^2). \tag{2.11}$$

Обозначим $m = n - k$ и

$$c_{n,m} = \frac{(n+m)!}{(2n)!},$$
$$f_{n,m} = c_{n,m} F^{n-m} \zeta^n, \tag{2.12}$$

где $m = n, n-1, \dots, -n$. Положим $\mathcal{F} = b\frac{\partial}{\partial a}$.

Лемма 2.1. *Оператор F сохраняет $\mathcal{H}_n$ для каждого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и, кроме того,*

$$\mathcal{R}Fp = \mathcal{F}\mathcal{R}p \tag{2.13}$$

для всех $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^3)$. При этом выполняется равенство

$$\mathcal{R}f_{n,m} = a^{n+m} b^{n-m}, \tag{2.14}$$

где $m = n, \dots, -n$.

Доказательство. Так как F — комплексная линейная комбинация операторов $zD_x - xD_z$ и $zD_y - yD_z$, которые соответствуют поворотам в $\mathbb{R}^3$, то выполняется включение $F\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{H}_n$. Простое вычисление с $p = \zeta^j \omega^k \bar{\zeta}^l$, (2.9), (2.11) и с равенством

$$\mathcal{F}(a^s b^r) = s a^{s-1} b^{r+1}$$

показывает, что обе части (2.13) равны $(2j+k)a^{2j+k-1}b^{2l+k+1}$. Следовательно, (2.13) выполняется для всех $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^3)$, что доказывает первое утверждение леммы.

Применяя $\mathcal{F}$ к a^{2n} многократно, получаем линейный базис в $\mathcal{P}_{2n}$:

$$\mathcal{F}^k a^{2n} = \frac{(2n)!}{(2n-k)!} a^{2n-k} b^k, \quad k = 0, \dots, 2n. \tag{2.15}$$

После замены $k = n - m$, с учётом (2.9), (2.12), (2.13), из (2.15) получается равенство (2.14). Это завершает доказательство леммы. □

Соотношение (2.14) определяет обратное отображение $\mathcal{R}_n^{-1} \colon \mathcal{P}_{2n} \to \mathcal{H}_n$ для каждого n. Ясно, что оно продолжается до $\mathcal{R}^{-1} \colon \mathcal{P}^e(\mathbb{C}^2) \to \mathcal{H}$.

Равенство (2.14) влечёт формулу для проекции $\pi_n \colon \mathcal{P}(\mathbb{C}^3) \to \mathcal{H}_n$:

$$\pi_n = \tilde{\mathcal{R}}_n^{-1} \mathcal{R}, \tag{2.16}$$

где $\tilde{\mathcal{R}}_n^{-1} = \mathcal{R}_n^{-1}$ и $\tilde{\mathcal{R}}_n^{-1} = 0$ на всех $\mathcal{P}_{2k}$ при $k \neq n$. В некоторых ситуациях удобно использовать именно её.

2.3. Многочлены $f_{n,m}$

Условимся писать $f(\zeta, \omega, \bar{\zeta})$, предполагая (2.7). Так как коэффициенты в (2.11) неотрицательны, то коэффициенты при мономах $\zeta^j \omega^k \bar{\zeta}^l$ в $f_{n,m}$ не могут сократиться. Вместе с (2.13) и (2.14) это влечёт следующее свойство многочленов $f_{n,m}$:

$$\text{сумма коэффициентов } f_{n,m} \text{ равна } 1. \tag{σ}$$

Отметим, что $f_{n,-m}$ получается из $f_{n,m}$ перестановкой a и b в $\mathcal{P}_{2n}$ или ζ и $\bar\zeta$ в $\mathcal{H}_n$. Последнее верно благодаря (2.8) и равносильно изменению знака y. Вот короткая таблица $f_{n+m,m}$, где $n = 1, \ldots, 4$ и $m = 0, 1, 2$:

ω	$\zeta\omega$	$\zeta^2\omega$
$\frac{1}{3}(\zeta\bar\zeta + 2\omega^2)$	$\frac{\zeta}{5}(\zeta\bar\zeta + 4\omega^2)$	$\frac{\zeta^2}{7}(\zeta\bar\zeta + 6\omega^2)$
$\frac{\omega}{5}(3\zeta\bar\zeta + 2\omega^2)$	$\frac{\zeta\omega}{7}(3\zeta\bar\zeta + 4\omega^2)$	$\frac{\zeta^2\omega}{3}(\zeta\bar\zeta + 2\omega^2)$
$\frac{1}{35}(3\zeta^2\bar\zeta^2 + 24\zeta\bar\zeta\omega^2 + 8\omega^4)$	$\frac{\zeta}{21}(\zeta^2\bar\zeta^2 + 12\zeta\bar\zeta\omega^2 + 8\omega^4)$	$\frac{\zeta^2}{33}(\zeta^2\bar\zeta^2 + 16\zeta\bar\zeta\omega^2 + 16\omega^4)$

Группа $T_o = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ действует на $\mathbb{R}^3$ вращениями вокруг оси z. Это стационарная подгруппа точки o в $\mathrm{SO}(3)$. Многочлены $f_{n,m} \in \mathcal{H}_n$ — её собственные функции. Базис мономов $a^{n+m}b^{n-m}$ в $\mathcal{P}_{2n}$ представляет собой весовое разложение для группы T_o, действующей на $\mathcal{P}_{2n}$ так:

$$a^{n+m}b^{n-m} \to e^{2imt}a^{n+m}b^{n-m}.$$

Мономы $\zeta^j\omega^k\bar\zeta^l$ также являются собственными функциями T_o, отвечающими собственным значениям $e^{2i(j-l)t}$ согласно (2.8). Обозначим

$$\varrho^2 = \zeta\bar\zeta = x^2 + y^2.$$

Полиномы $f_{n,m}$ допускают единственное разложение на множители:

$$f_{n,m}(\zeta, \omega, \bar\zeta) = \begin{cases} \zeta^m p_{n,m}(\varrho, \omega), & 0 \leqslant m \leqslant n, \\ \bar\zeta^{|m|} p_{n,|m|}(\varrho, \omega), & -n \leqslant m \leqslant 0, \end{cases} \tag{2.17}$$

где полином $p_{n,m}$ является T_o-инвариантным и содержит ϱ лишь в чётных степенях, а ζ^m, $\bar\zeta^{|m|}$ отвечают за нетривиальные части собственных значений $e^{\pm imt}$. Это нетрудно вывести из (2.10) и (2.15). Фактически $p_{n,m}$ зависят только от $\omega = iz$ и $\zeta\bar\zeta = x^2 + y^2$. Отметим, что

$$r^2 = \zeta\bar\zeta - \omega^2 = \varrho^2 - \omega^2.$$

Следовательно, $\mathcal{R}\zeta\bar\zeta = \mathcal{R}\omega^2 = a^2b^2$. Многочлен $p_{n,m}$ имеет степень $n - |m|$. Он либо чётный, либо нечётный. Последнее выполняется тогда и только тогда, когда ω делит $p_{n,m}$. В этом случае удобно иметь дело с $\frac{p_{n,m}}{\omega}$. Кроме того, $f_{n,m}$ подчиняется условию (σ) тогда и только тогда, когда $p_{n,m}$ удовлетворяет ему. Все эти утверждения легко выводятся из (2.10). Полиномы $f_{n,m}$ тесно связаны с функциями Лежандра P_n^m. Мы поясним это позже.

3. Полюса Максвелла

3.1. Вещественные полюса Максвелла

В дальнейшем $\mathbb{F}$ — либо $\mathbb{C}$, либо $\mathbb{R}$. Как правило, мы предполагаем, что $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, используя индекс $\mathbb{R}$ для обозначения случая $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Таким образом,

$\mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_n^{\mathbb{R}}$ обозначают множества всех вполне приводимых над $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ многочленов из $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_n^{\mathbb{R}}$ соответственно.

Из метода Максвелла следует формула для ортогонального проектора $\pi_n \colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{H}_n$:

$$\pi_n p = \frac{(-1)^n r^{2n+1}}{(2n-1)!!} D_p r^{-1}. \tag{3.1}$$

Этот результат слабее, чем теорема 1.1, но часто бывает полезным. Приведём простое доказательство, использующее следующие свойства линейной функции ℓ_v при $v \in \mathcal{Q}_0$: для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta \ell_v^n = D_v \ell_v^n = 0. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (2.2) и (2.3) следует, что теорема 1.1 эквивалентна существованию и единственности следующего разложения $h \in \mathcal{H}_n$:

$$h = p + r^2 q, \tag{3.3}$$

где $p \in \mathcal{D}_n^{\mathbb{R}}$, $q \in \mathcal{P}_{n-2}$ и $n > 1$.

Предложение 3.1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех $p \in \mathcal{P}_n$ верно* (3.1).

Доказательство. Пусть μ_n обозначает оператор в правой части (3.1). Очевидно, $\mu_n \mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}_n$. Поскольку $D_{r^2} r^{-1} = \Delta r^{-1} = 0$, то $\mu_n(r^2 \mathcal{P}_{n-2}) = 0$.

Согласно (2.2) достаточно установить, что μ_n тождественен на $\mathcal{H}_n$. Учитывая (3.2), легко доказать, что $\ell_v^n \in \mathcal{H}_n$ и

$$D_{\ell_v} r^{-k} = -k \ell_v r^{-k-2}$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $\mu_n \ell_v^n = \ell_v^n$. Следовательно, μ_n тождественен на линейной оболочке L степеней ℓ_v^n для всех $v \in \mathcal{Q}_0$. Так как конус $\mathcal{Q}_0$ инвариантен, а $\mathcal{H}_n$ неприводимо, то $L = \mathcal{H}_n$. Это завершает доказательство. $\square$

Функции ℓ_v^n при $v \in \mathcal{Q}_0$ и $n > 1$ доставляют серию функций, одновременно гармонических и вполне приводимых. Кроме указанных, есть ещё одна серия: $\ell_u \ell_v^n$, где $v \in \mathcal{Q}_0$ и $u \perp v$. Отметим также, что (3.1) — уже третья формула для ортогональной проекции π_n.

3.2. Комплексные полюса Максвелла

Мы предполагаем, что $\mathbb{C}^3$ наделено стандартной эрмитовой метрикой, но форма $\langle\ ,\ \rangle$ билинейна. Пусть $p = \ell_{v_1} \dots \ell_{v_n} \in \mathcal{D}_n$, где $v_j \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. Как и в вещественном случае, будем называть $\frac{v_1}{|v_1|}, \dots, \frac{v_n}{|v_n|}$ полюсами Максвелла для $h = r^{2n+1} D_p r^{-1}$. Предложение 3.1 тоже остаётся в силе.

Если $p \in \mathcal{P}_n$, то $\mathcal{R}p = p \circ \kappa$ принадлежит $\mathcal{P}_{2n}$ и $\mathcal{R}p$ вполне приводим, потому что каждый однородный полином от двух комплексных переменных обладает этим свойством. Пусть $\ell \in \mathcal{P}_1(\mathbb{C}^3)$. Тогда $\ell \circ \kappa$ является квадратичной формой на $\mathbb{C}^2$. Это произведение двух линейных форм. Обратно, пусть $\alpha_j a + \beta_j b$, $j = 1, 2$, — линейные формы. Согласно (2.8)

$$\mathcal{R}(\alpha_1 \alpha_2 \zeta + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)\omega + \beta_1 \beta_2 \bar{\zeta}) = (\alpha_1 a + \beta_1 b)(\alpha_2 a + \beta_2 b). \tag{3.4}$$

Это явная формула для $\ell \in \mathcal{P}_1(\mathbb{C}^3)$, в которой $\ell \circ \kappa$ — произведение справа. Напомним, что оператор $\mathcal{R}$ биективен на $\mathcal{H}_n$ и что $\mathcal{P}_1(\mathbb{C}^3) = \mathcal{H}_1$.

Если $p = \ell_1 \cdots \ell_n \in \mathcal{D}_n$ и $q = \mathcal{R}p$, то $q = (\ell_1 \circ \kappa) \ldots (\ell_n \circ \kappa)$. Отсюда следует, что каждый $p \in \mathcal{D}_n$ определяет разбиение I_{2n} на пары линейных сомножителей $\mathcal{D}_n$. Для q общего положения число этих полиномов равно количеству разбиений набора $I_{2n} = \{1, \ldots, 2n\}$ на пары, равному $(2n-1)!!$.

Отображение $\mathcal{R}$ определяет биекцию между $\mathcal{P}_1(\mathbb{C}^3)$ и $\mathcal{P}_2(\mathbb{C}^2)$ по лемме 2.1, поскольку $\mathcal{P}_1(\mathbb{C}^3) = \mathcal{H}_1$. Таким образом, разбиение индексов на пары определяет разложение q в произведение квадратичных множителей, как и относящихся к ним линейных форм на $\mathbb{C}^3$. Соответствие между разбиениями и факторизацией, очевидно, взаимно однозначно с точностью до умножения линейных сомножителей на константы, произведение которых равно 1. Мы также получаем связь между полиномами $p \in \mathcal{H}_n$ и наборами $2n$ точек в $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, подсчитанных с кратностями, которые, в свою очередь, определяют его с точностью до постоянного множителя.

3.3. Вполне приводимые и гармонические многочлены на $\mathbb{C}^3$

Наша цель сейчас — показать, что внутреннее и внешнее определения множества $p \in \mathcal{D}_n$, таких что $\pi_n p = h$, эквивалентны. Пусть $j = 1, \ldots, 2n$,

$$\ell_j = \alpha_j a + \beta_j b, \quad q = \ell_1 \ldots \ell_{2n},$$

а также

- $\mathfrak{L}_q = \{\ell_1, \ldots, \ell_{2n}\}$,
- Π_q — семейство всех разбиений $\mathfrak{L}_q$ на пары,
- для $\varpi \in \Pi_q$ q_ϖ — произведение линейных форм на $\mathbb{C}^3$, относящихся к парам из ϖ.

Предложение 3.2. *Пусть $n \geqslant 2$, $h \in \mathcal{H}_n$ и $q = \mathcal{R}h$. Тогда*

$$(h + r^2\mathcal{P}_{n-2}) \cap \mathcal{D}_n = \{p \in \mathcal{D}_n \colon \pi_n p = h\} = \{q_\varpi \colon \varpi \in \Pi_q\}. \tag{3.5}$$

Для любого $h \in \mathcal{H}_n$ множество слева конечно и состоит из $(2n-1)!!$ точек с кратностями, определяемыми правой частью.

Доказательство. Достаточно доказать предложение для h общего положения в $\mathcal{H}_n$. Пусть $p \in (h + r^2\mathcal{P}_{n-2}) \cap \mathcal{D}_n$. Применяя $\mathcal{R}$ к линейным множителям p, мы получим квадратичные множители q с точностью до постоянных, произведение которых равно 1, поскольку $\mathcal{R}f = q$. Поэтому мы можем все эти константы заменить единицами, получив тем самым произведение q_ϖ для некоторого $\varpi \in \Pi_q$, поскольку $\mathcal{P}_1(\mathbb{C}^3) = \mathcal{H}_1$ и линейные множители p определяются однозначно как отвечающие произведениям пар линейных множителей q. Таким образом, $p = q_\varpi$ для некоторого $\varpi \in \Pi_q$ и левая часть (3.5) содержится в правой. Остальные включения в (3.5) очевидны.

Группа S_{2n} всех перестановок $\mathfrak{L}_q$ действует естественным образом на Π_q. Действие транзитивно. Количество разбиений в правой части равно $(2n-1)!!$, поскольку число перестановок, фиксирующих данное разбиение, равно $2^n n!$. Это завершает доказательство. □

Обозначим
$$\Lambda_p = (p + r^2\mathcal{P}_{n-2}) \cap \mathcal{D}_n.$$
Это множество определено корректно, если $p \notin r^2\mathcal{P}_{n-2}$ и $n \geqslant 2$. Согласно (2.3) оно равно Λ_h для $h = \pi_n p$. Попутно отметим, что h — единственный гармонический полином в аффинном пространстве $p + r^2\mathcal{P}_{n-2}$.

4. Усреднение по S_{2n} равносильно π_n

По теореме 1.1 каждому $h \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ отвечает единственный полином $p \in \mathcal{D}_n^{\mathbb{R}}$, такой что $\pi_n p = h$. Если $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, то равенство выполняется для всех $p \in \Lambda_h$, где множество Λ_h состоит из $(2n-1)!!$ точек с учётом кратностей. Наша цель — доказать, что h является центром масс Λ_h. Начнём с наглядного примера квадратичных форм.

4.1. Случай $n = 2$

Отметим, что $\mathcal{D}_2$ совпадает с множеством вырожденных квадратичных форм на $\mathbb{C}^3$. Действительно, если ненулевая квадратичная форма на $\mathbb{C}^3$ вырожденна, то её можно привести либо к виду x^2, либо к виду $x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy)$. Оба вполне приводимы. Обратно, произведение двух линейных функций задаёт вырожденную симметричную билинейную форму (т. е. для неё существует прямая, ортогональная всему пространству $\mathbb{C}^3$). Так как $\mathcal{P}_0 = \mathbb{C}$, то
$$\Lambda_p = \mathcal{D}_2 \cap (p + \mathbb{C}r^2) = \{p - \lambda r^2 \colon \lambda \in \mathbb{C} \text{ и } \operatorname{rank}(p - \lambda r^2) < 3\}.$$
Множество таких λ представляет собой спектр квадратичной формы p, а также соответствующей симметричной матрицы. Для p общего положения в $\mathcal{P}_2$ имеются три комплексных числа λ_1, λ_2, λ_3 и шесть линейных функций $\ell_1, \ldots, \ell_6$ на $\mathbb{C}^3$, таких что
$$p - \ell_{2j-1}\ell_{2j} = \lambda_j r^2, \quad j = 1, 2, 3. \tag{4.1}$$
Произведения $\ell_{2j-1}\ell_{2j}$ определяются однозначно, а их разложение может быть любым. Поскольку $\mathcal{R}r^2 = 0$,
$$\mathcal{R}p = \mathcal{R}(\ell_{2j-1}\ell_{2j}), \quad j = 1, 2, 3.$$
Форма p гармоническая тогда и только тогда, когда след соответствующей ей матрицы равен нулю. Поскольку числа λ_j для неё собственные, это равносильно равенству $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Суммируя равенства (4.1), мы получаем $p = \frac{1}{3}(\ell_1\ell_2 + \ell_3\ell_4 + \ell_5\ell_6)$ для гармонических p. Таким образом,
$$\pi_2 p = \frac{1}{3}(\ell_1\ell_2 + \ell_3\ell_4 + \ell_5\ell_6)$$

для всех $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C}^3)$, включая случай $p \in \mathbb{C}r^2$. Другими словами, единственный гармонический многочлен в $p + r^2\mathcal{P}_{n-2}$ является центром масс множества $\Lambda_p = (p + r^2\mathcal{P}_{n-2}) \cap \mathcal{D}_n$, если $n = 2$.

4.2. Формула для π_n

Доказанное утверждение справедливо и для $n > 2$. Мы предполагаем $n \geqslant 2$, поскольку $\mathcal{P}_n = \mathcal{H}_n$ при $n < 2$, а также используем обозначения из п. 3.3.

Теорема 4.1. *Пусть $p \in \mathcal{P}_n$, $p \notin r^2\mathcal{P}_{n-2}$, где $n > 1$. Тогда Λ_p состоит из $(2n+1)!!$ точек, взятых с учётом кратностей, заданных правой частью* (3.5). *При этом*

$$\pi_n p = \frac{1}{(2n-1)!!} \sum_{\tilde{p} \in \Lambda_p} \tilde{p}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Для $n = 2$ теорема доказана выше. Число точек в Λ_p равно $(2n-1)!!$ и каждый $\tilde{p} \in \Lambda_p$ совпадает с q_ϖ для некоторого $\varpi \in \Pi_p$ по предложению 3.2.

Пусть $q = \mathcal{R}p$ и $\mathcal{A}$ обозначает отображение справа в (4.2). В силу предложения 3.2 $\mathcal{A}$ можно задать композицией $\mathcal{R}\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{2n}$ и $\mathcal{B}\colon \mathcal{P}_{2n} \to \mathcal{P}_n$, где

$$\mathcal{B}(q) = \frac{1}{(2n-1)!!} \sum_{\varpi \in \Pi_q} q_\varpi \tag{4.3}$$

и $\mathcal{A} = \mathcal{B} \circ \mathcal{R}$ действует в $\mathcal{P}_n$. Положим $h = \pi_n p$. Так как $\Lambda_p = \Lambda_h$, то достаточно установить, что $\mathcal{A}h = h$.

Докажем, что $\mathcal{A}$ линейно. По определению $\mathcal{A}$ не изменяется под действием симметрической группы S_{2n} на множестве Λ_h, которое определяется перестановками линейных функций из $\mathfrak{L}_q$. Пусть $\ell_j \in \mathfrak{L}_q$, $q = \ell_1 \dots \ell_{2n}$ и

$$\ell_j(a, b) = \alpha_j a + \beta_j b,$$

где $j = 1, \dots, 2n$. Согласно (3.4) произведению $\ell_j \ell_k$ отвечает

$$\ell_{j,k}(\zeta, \omega, \bar{\zeta}) = \alpha_j \alpha_k \zeta + (\alpha_j \beta_k + \beta_j \alpha_k)\omega + \beta_j \beta_k \bar{\zeta}. \tag{4.4}$$

Ясно, что для любого $\varpi \in \Pi_q$ коэффициент при любом мономе в полиноме q_ϖ является полилинейной формой от коэффициентов ℓ_j. Это сумма одночленов $\gamma_1 \dots \gamma_{2n}$, где γ_j — либо α_j, либо β_j, причём каждое j встречается ровно один раз и j пробегает $\{1, \dots, 2n\}$. То же самое верно и для отображения $\mathcal{A}h$, коэффициенты которого обладают дополнительным свойством инвариантности относительно группы S_{2n}, поскольку им обладает $\mathcal{A}h$. Следовательно, коэффициент при любом одночлене от ζ, ω, $\bar{\zeta}$, содержащий моном от α, β, в котором α встречается k раз, должен содержать все мономы этого типа. Их сумма есть коэффициент при $a^k b^{2n-k}$ многочлена $\mathcal{R}h = \prod\limits_{j=1}^{2n} \ell_j$. Таким образом, коэффициенты Ah — полиномы степени 1 от коэффициентов $\mathcal{R}h$, и поэтому $\mathcal{A}$ линейно на $\mathcal{H}_n$.

Пусть $g \in \mathrm{SO}(3)$ и $\mathfrak{B}$ — построенный выше базис $f_{n,m}$ в $\mathcal{P}$. Так как $\mathcal{R}$ сплетает действия $\mathrm{SO}(3)$ на $\mathcal{H}_n$ и $\mathcal{P}_{2n}$ и, кроме того, является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{P}$ на $\mathcal{P}^e$, то построение отображения $\mathcal{B}$ для набора $g\mathfrak{L}_q$ должно выполняться в базисе $g\mathfrak{B}$ по тем же правилам, что и для $\mathfrak{L}_q$ в базисе $\mathfrak{B}$, включая формулу (4.4). Поэтому $\mathcal{A}$ коммутирует с $\mathrm{SO}(3)$. Это влечёт $\mathcal{A}$-инвариантность пространства $\mathcal{H}_n$, поскольку компоненты разложения (2.1) попарно неэквивалентны. Благодаря этому оба полинома, h и $\mathcal{A}h$, гармонические. По определению $\mathcal{R}q_\varpi = q$ для всех $\varpi \in \Pi_q$. Следовательно, $\mathcal{R}\mathcal{A}h = q$. Таким образом, $\mathcal{R}\mathcal{A}h = \mathcal{R}h = q$ и $\mathcal{A}h = h$, поскольку $\mathcal{R}$ на $\mathcal{H}_n$ взаимно однозначно по предложению 2.1. Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Следствие 4.2. Многочлен $\mathcal{B}(q)$ является гармоническим для любого $q \in \mathcal{P}_{2n}$ и, кроме того, $\mathcal{R}\mathcal{B}(q) = q$. Другими словами, $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{R}}_n^{-1}$ на $\mathcal{P}_{2n}$. $\square$

Следствие 4.2 можно применить к любому подмножеству $\mathfrak{L}_q$ с чётным числом точек. Пусть $S \subseteq I := \{1, \ldots, 2n\}$ — соответствующий набор индексов, а h_S — полученный из него по формуле (4.3) полином. Условимся обозначать через $|S|$ количество точек в S.

Теорема 4.3. *Для любых $h \in \mathcal{H}_n$ и $k = 1, \ldots n-1$ справедливо следующее равенство:*

$$h = \frac{1}{K} \sum_{|S|=2k} h_S h_{I \setminus S}, \tag{4.5}$$

где $K = \binom{2n}{2k}$ и S пробегает все подмножества I с $2k$ элементами.

Доказательство. Положим $q = \mathcal{R}h$. Согласно теореме 4.1 и следствию 4.2 нам нужно доказать, что сумма в (4.5) кратна $\mathcal{B}(q)$ и вычислить константу K.

Пусть Π_S, $\Pi_{I\setminus S}$ — семейства разбиений на пары соответствующих множеств, $\varpi \in \Pi_S$ и $\varpi' \in \Pi_{I \setminus S}$. Объединение ϖ и ϖ' задаёт разбиение $\tilde{\varpi} \in \Pi_q$. С другой стороны, выбор любого подмножества из k пар в $\tilde{\varpi}$ определяет $2k$-подмножество I. Поэтому

$$\sum_{|S|=2k} \sum_{\varpi, \varpi'} q_\varpi q_{\varpi'} = \binom{n}{k} \sum_{\varpi \in \Pi_q} q_\varpi, \tag{4.6}$$

где ϖ и ϖ' независимо пробегают Π_S и $\Pi_{I \setminus S}$ соответственно, а множитель $\binom{n}{k}$ справа — количество повторений каждого $\tilde{\varpi} \in \Pi_q$ в сумме слева. Это доказывает первое утверждение.

Правая часть (4.6) равна $\binom{n}{k}(2n-1)!!\,h$ по теореме 4.1. Обозначим $l = n - k$. Поскольку w и w' независимы, для заданного S имеем

$$(2k-1)!!\,(2l-1)!!\,h_S h_{I \setminus S} = \sum_{\varpi, \varpi'} q_\varpi q_{\varpi'}.$$

Следовательно,

$$K = \frac{n!(2n-1)!!}{k!\,(2k-1)!!\,l!\,(2l-1)!!} = \binom{2n}{2k}.$$

Тем самым теорема доказана. $\square$

Мы можем использовать формулы из п. 2.2 для нахождения h_S. В случае специальных многочленов это даёт ряд соотношений. Например, положим

$$h = f_{n,m}.$$

Тогда $q = \mathcal{R}h = a^{n+m}b^{n-m}$ согласно (2.14). Множество $\mathfrak{L}_q$ состоит из $n+m$ линейных форм a и $n-m$ форм b, где $-n \leqslant m \leqslant n$. Пусть $S \subset I$, $|S| = 2k$, а j — количество форм b в соответствующем S подмножестве $\mathfrak{L}_q$. Тогда

$$J = \big\{j \in \mathbb{Z}\colon \max\{0, 2k-n-m\} \leqslant j \leqslant \min\{2k, n-m\}\big\}$$

есть множество возможных значений j. Применяя (2.14), получаем

$$\mathcal{R}h_S = a^{2k-j}b^j.$$

Отсюда следует, что $h_S = f_{k,k-j}$ и $h_{I\setminus S} = f_{n-k,m-k+j}$. Для каждого $j \in J$ количество множеств S, удовлетворяющих этим равенствам, равно $\binom{n+m}{2k-j}\binom{n-m}{j}$, и поэтому (4.5) можно записать следующим образом:

$$f_{n,m} = \binom{2n}{2k}^{-1} \sum_{j\in J} \binom{n+m}{2k-j}\binom{n-m}{j} f_{k,k-j} f_{n-k,m-k+j}. \tag{4.7}$$

Условимся в дальнейшем считать, что

$$m \geqslant 0,$$

поскольку это упрощает вычисления, а $f_{n,-m}$ и $f_{n,m}$ связаны простым соотношением (см. (2.14)).

4.3. Функции Лежандра P_n^m и многочлены $f_{n,m}$

Напомним, что $\mathcal{H}_n$ — собственное подпространство сферического лапласиана. Согласно построению $f_{n,m}$ они определяют более тонкое, чем (2.1), ортогональное разложение $L^2(S^2)$, состоящее из общих собственных подпространств операторов вращения из группы T_o в каждом $\mathcal{H}_n$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Во всех пространствах $\mathcal{H}_n$ это разложение не имеет кратностей. Это означает, что функции $f_{n,m}$ составляют ортогональный базис в $L^2(S^2)$. Итак, общие собственные функции сферического лапласиана и группы T_o образуют ортогональный базис в $L^2(S^2)$, который однозначно с точностью до масштабирования определяется этими свойствами. Поэтому *функции $f_{n,m}$ должны быть пропорциональны классическим сферическим гармоникам Y_n^m на сфере S^2.*

Между Y_n^m и функциями Лежандра P_n^m есть соотношение

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi},$$

где θ, φ — углы Эйлера. Отсюда следует, что аналогичное соотношение справедливо для $f_{n,m}$ и P_n^m.

Многочлен $f_{n,m}$ является T_o-инвариантным тогда и только тогда, когда $m = 0$. Тогда след многочлена $P_n(z)$ на единичной сфере S^2 в $\mathbb{R}^3$ совпадает со следом $f_{n,0}$ с точностью до постоянного множителя, поскольку оба постоянны на окружностях $\{z = t\} \cap S^2$, где $t \in (-1, 1)$. Также отметим, что проекция поверхностной меры на S^2 на её диаметр $[-1, 1]$ в оси z пропорциональна мере Лебега на ней, что согласуется с определением P_n как ортогональных многочленов для меры Лебега на $[-1, 1]$. Связь между $f_{n,0}$ и P_n можно найти, сравнивая следы этих многочленов на верхней полуокружности в окружности $\{y = 0\} \cap S^2$, соединяющей концы $(0, 0, -1)$ и $(0, 0, 1)$ диаметра. Обозначим через τ эту кривую.

То же самое верно для собственных функций $f_{n,m}$ группы T_o. Согласно формулам (2.17) многочлен $f_{n,m}$ делится на $(x + iy)^m$, если $m > 0$, и на $(x - iy)^{-m}$ при $m < 0$. Этот множитель отвечает за собственные значения $e^{\pm im\varphi}$. Оставшаяся часть $f_{n,m}$ — T_o-инвариантный полином $p_{n,m}$.

Функции P_n^m выражаются через полиномы Лежандра следующим образом:

$$P_n^m(z) = \frac{(-1)^m}{2^n n!}(1 - z^2)^{m/2}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z). \tag{4.8}$$

Они наследуют радиальную часть $(x \pm iy)^m$ — это множитель $(1 - z^2)^{m/2}$. Он не полиномиален при нечётных m. Итак, должно выполняться равенство

$$f_{n,m}(\sqrt{1 - z^2}, 0, z) = C_{n,m}P_n^m(z), \tag{4.9}$$

где $C_{n,m}$ — константа, а $f_{n,m}$ рассматривается как полином от x, y, z. Координата z является естественным параметром кривой τ, поскольку она согласуется с проекцией на диаметр инвариантной меры на S^2, которая пропорциональна мере Лебега на самом диаметре.

Вычислить $C_{n,m}$ можно, сравнивая коэффициенты у старших степеней полиномов, полученных подстановкой параметризации $(\sqrt{1 - t^2}, 0, t)$ кривой τ в функции $f_{n,m}$ и P_n^m из равенства (4.9) и последующим делением их на общий множитель $(1 - t^2)^{m/2}$.

Начнём с правой части (4.9). Надо найти старший коэффициент у $\frac{d^m}{dt^m}P_n(t)$ и поправить его с помощью (4.8). Так как по формуле Родригеса

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n,$$

то у P_n он равен $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$, а для P_n^m получается $(-1)^m\frac{(2n-1)!!}{(n-m)!}$ согласно (4.8). В левой части нужно найти старший коэффициент для $p_{n,m}$. Сначала заметим, что $\zeta\bar\zeta$ соответствует $1 - t^2$, а $\omega^2 = -z^2 = -t^2$. Благодаря этому и свойству (σ) в таблице из п. 2.3 старшие коэффициенты определяются степенью ω. Они равны i, -1, $-i$, 1 в каждом столбце. Из (2.11) в предположении $m \geqslant 0$ следует, что для $p_{n,m}$ коэффициенты равны i^{n-m}. Учитывая множитель $(-1)^m$, в результате получаем

$$C_{n,m} = \frac{(n - m)!}{(2n - 1)!!}\, i^{n+m}. \tag{4.10}$$

Подставим (4.10) в (4.9) и потом (4.9) в (4.7). Большая часть факториалов сократится, как и мнимые множители. Заменяя $k-j$ на $j \in \{-k, \ldots, k\}$, получаем равенство

$$P_n^m = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{j\in J} \binom{n+m}{k+j} P_k^j P_{n-k}^{m-j}.$$

Множество J возможных чисел j можно задать неравенствами

$$\max\{-k, k-n+m\} \leqslant j \leqslant \min\{k, n+m-k\},$$

где $n \geqslant k \geqslant 0$ и $n \geqslant |m|$.

При $n = 2k$ и $m = 0$ равенство выглядит следующим образом:

$$P_{2k} = \binom{2k}{k}^{-1} \sum_{j=-k}^{k} \binom{2k}{k+j} P_k^j P_k^{-j} = \sum_{j=-k}^{k} \frac{(k!)^2}{(k+j)!(k-j)!} P_k^j P_k^{-j},$$

а так как $P_k^{-j} = (-1)^j \frac{(k-j)!}{(k+j)!} P_k^j$, то

$$P_{2k} = \sum_{j=-k}^{k} (-1)^j \left(\frac{k! P_k^j}{(k+j)!} \right)^2.$$

Похожее вычисление в случае $n = 2k+1$ приводит к равенствам

$$P_{2k+1} = \binom{2k+1}{k}^{-1} \sum_{j=-k}^{k} \binom{2k+1}{k+j} P_k^j P_{k+1}^{-j} =$$

$$= \sum_{j=-k}^{k} \frac{k!(k+1)!}{(k+j)!(k-j+1)!} P_k^j P_{k+1}^{-j} = \sum_{j=-k}^{k} (-1)^j \frac{k!(k+1)!}{(k+j)!(k+j+1)!} P_k^j P_{k+1}^j.$$

Скорее всего, эти соотношения известны, но мне не удалось их найти в литературе, в том числе в справочнике Г. Бейтмана и А. Эрдейи, который содержит их в неявной форме (см. [4, 11.5.1, (2)]).

Литература

[1] Арнольд В. И. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Фазис, 2004.

[2] Agranovsky M. L. On a problem of injectivity for the Radon transform on a paraboloid // Contemp. Math. — 1999. — Vol. 251. — P. 1—14.

[3] Axler S., Bourdon P., Ramey W. Harmonic Function Theory. — New York: Springer, 2001.

[4] Bateman H., Erdélyi A. Higher Transcendental Functions. Vol. 2. — McGraw-Hill, 1953.

[5] Bielewicz P., Riazuelo A. The study of topology of the universe using multipole vectors // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2009. — Vol. 396. — P. 609—623.

[6] Copi C. J., Huterer D., Starkman G. D. Multipole vectors: A new representation of the CMB sky and evidence for statistical anisotropy or non-Gaussianity at $2 \leqslant \ell \leqslant 8$ // Phys. Review. — 2004. — D 70. — 043515.

[7] Courant R., Hilbert D. Methoden der Mathematischen Physik. Bd. 1. — Berlin: Springer, 1931.

[8] Dennis M. R. Canonical representation of spherical functions: Sylvester's theorem, Maxwell's multipoles and Majorana's sphere // J. Phys. A: Math. Gen. — 2004. — Vol. 37. — P. 9487—9500.

[9] Katz G. Deconstructing functions on quadratic surfaces into multipoles // Ann. Global Analysis Geom. — Vol. 32, no. 2. — P. 167—207.

[10] Maxwell J. C. A treatise on electricity and magnetism. Vol. 1. — New York: Dover, 1954.

[11] Sylvester J. J. Note on spherical harmonics // Phil. Mag. — 1876. — Vol. 2. — P. 291—307.