Однозначное представление ранжиров на частных производных

О. Д. ГОЛУБИЦКИЙ
Google
e-mail: oleg.golubitsky@gmail.com

УДК 512.541.7+512.545+512.555+512.628.2

Ключевые слова: ранжиры, ранжиры Рикье, частные производные, упорядоченные абелевы группы.

Аннотация

Рассмотрена задача представления ранжиров на частных производных конечного набора функций от конечного числа переменных с помощью конечных наборов данных. Предложено представление на основе частичных ранжиров Рикье и разложения упорядоченной абелевой группы в упорядоченную прямую сумму архимедовых подгрупп. Показано, что это представление определено однозначно.

Abstract

O. Golubitsky, A unique representation of rankings on partial derivatives, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 4, pp. 113—127.

Consider the problem of representing rankings on partial derivatives of a finite set of functions in finitely many variables by a finite collection of data. We propose a representation based on Riquier pre-rankings and the decomposition of ordered Abelian groups into an ordered direct sum of Archimedean subgroups. We prove that this representation is uniquely defined.

1. Ранжиры

Рассмотрим множество $\mathbb{N}^m \times \mathbb{N}_n$, где $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ — множество натуральных чисел с нулём, а $\mathbb{N}_n = \{1, \ldots, n\}$ — множество первых n натуральных чисел, начиная с единицы. Элементы этого множества соответствуют выражениям вида

$$x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m} b_j, \quad (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}^m, \quad j \in \mathbb{N}_n,$$

а также частным производным n функций от m переменных

$$\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_m} u_j}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_m^{i_m}}.$$

В случае $n = 1$ получаем множество мономов от m переменных, а в случае $m = 0$ — конечное множество размера n.

Фундаментальная и прикладная математика, 2025, том 25, № 4, с. 113—127.

Ранжиром на множестве $\mathbb{N}^m \times \mathbb{N}_n$ называется отношение линейного порядка $\leqslant$, удовлетворяющее аксиомам положительности и параллельного переноса,

(i) $(0, i) \leqslant (a, i)$,

(ii) $(a, i) \leqslant (b, j)$ влечёт $(a + c, i) \leqslant (b + c, j)$,

для любых $a, b, c \in \mathbb{N}^m$, $i, j \in \mathbb{N}_n$.

Под представлением объектов из некоторого семейства мы будем понимать наборы данных определённого вида, однозначно задающие эти объекты. Например, представлением линейной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ можно считать пару её коэффициентов $a, b \in \mathbb{R}$. Это представление однозначно, поскольку различные пары коэффициентов задают различные функции. Представлением рациональной дроби $\frac{a}{b}$ можно считать пару целых чисел $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Это представление неоднозначно, но если потребовать взаимную простоту чисел a, b и положительность числа b, то оно станет однозначным. Если для каждого объекта из данного семейства определено однозначное представление, то его называют каноническим. Заметим, что представление обычно выбирается так, чтобы было возможно совершать привычные операции над объектами, например вычислять значение функции в данной точке или применять арифметические операции к рациональным дробям.

Пусть дано некоторое семейство объектов и некоторое их представление (необязательно каноническое) с помощью наборов данных определённого вида. Тогда на множестве всевозможных наборов данных этого вида определено отношение эквивалентности: два набора данных эквивалентны тогда и только тогда, когда они представляют один и тот же объект. В вышеупомянутом примере пары целых чисел $(2, 3)$ и $(4, 6)$ эквивалентны, так как они представляют одну и ту же дробь, $\frac{2}{3}$. Задачу канонического представления объектов можно сформулировать как задачу выбора определённого представителя в каждом классе эквивалентности [2].

В [7] предложено представление ранжиров на множестве $\mathbb{N}^m \times \mathbb{N}_n$ с помощью конечных наборов данных, позволяющее сравнивать любые два элемента $(a, i), (b, j) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}_n$ относительно данного ранжира. Это представление неоднозначно (один и тот же ранжир может быть задан различными наборами данных). Нашей задачей будет построение однозначного представления ранжиров. Используемые нами наборы данных несколько отличаются от представления [7], но не принципиально, это сделано для упрощения доказательства единственности представления. Как и в [7], предлагаемое нами представление ранжиров основано на матричном представлении частичных ранжиров Рикье. Единственность представления получается с помощью разложения упорядоченной абелевой группы в упорядоченную прямую сумму архимедовых подгрупп, а в лексикографическом случае, когда все эти подгруппы изоморфны $\mathbb{Z}$, с помощью алгоритма Дж. М. Томаса [8].

2. Представление отношений порядка на абелевых группах

Понятие ранжира на множестве $\mathbb{N}^m \times \mathbb{N}_n$ можно обобщить на множества вида $G(n) = G \times \mathbb{N}_n$, где G — абелева группа, убрав аксиому положительности. *Ранжиром* на множестве $G(n)$ назовём отношение линейного порядка $\leqslant$, удовлетворяющее аксиоме параллельного переноса

$$(a, i) \leqslant (b, j) \text{ влечёт } (a + c, i) \leqslant (b + c, j)$$

для любых $a, b, c \in G$, $i, j \in \mathbb{N}_n$.

Заметим, что если на множестве $G(n)$ задан ранжир, то G — упорядоченная абелева группа (в качестве упорядочения группы G можно, например, взять ограничение ранжира на множество $G \times \{1\}$). Любая упорядоченная абелева группа свободна от кручения, а любая конечно порождённая абелева группа без кручения изоморфна $\mathbb{Z}^m$. Более того, любой ранжир на множестве $\mathbb{N}^m \times \mathbb{N}_n$ однозначно продолжается до ранжира на множестве $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{N}_n$ [5]. Поэтому задача однозначного представления ранжиров на множестве $G(n)$, где G — конечно порождённая абелева группа с фиксированной системой образующих, эквивалентна задаче однозначного представления ранжиров на множестве $\mathbb{Z}^m(n)$, которая, в свою очередь, не сильно отличается от случая $\mathbb{N}^m \times \mathbb{N}_n$ (аксиома положительности эквивалентна условиям $(0, j) \leqslant (e_i, j)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, где $e_i \in \mathbb{Z}^m$ — i-й единичный вектор стандартного базиса $\mathbb{Z}^m$).

В случае $n = 1$ имеем упорядоченную абелеву группу. Задача классификации отношений порядка на конечно порождённых абелевых группах была решена независимо М. И. Зайцевой [1] и Дж. Тревизаном [9]. Любая упорядоченная конечно порождённая абелева группа допускает однозначное с точностью до изоморфизма разложение в упорядоченную прямую сумму архимедовых подгрупп. Любая конечно порождённая архимедова абелева группа изоморфна (как упорядоченная группа) некоторой подгруппе действительных чисел относительно сложения, поэтому архимедова группа может быть представлена в виде действительного вектора с рационально независимыми компонентами, размерность которого равна рангу группы. Два таких вектора, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m)$, задают изоморфные упорядоченные группы тогда и только тогда, когда они связаны соотношением

$$c\alpha_i = \sum \lambda_{ij} \alpha'_j,$$

где (λ_{ij}) — обратимая целочисленная матрица, а c — действительное число, отличное от нуля [1]. Если зафиксировать базис группы и поставить его элементы в соответствие компонентам вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, то два таких вектора задают одно и то же отношение порядка на группе тогда и только тогда, когда они получаются друг из друга умножением на положительное действительное число [1].

Из данной классификации можно получить однозначное матричное представление отношений порядка на конечно порождённых абелевых группах, предложенное Л. Роббиано [6]. Пусть G — упорядоченная конечно порождённая абелева группа с фиксированной системой образующих (которая задаёт изоморфизм между G и $\mathbb{Z}^m$). Разложим группу G в упорядоченную прямую сумму архимедовых подгрупп $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_k$, $k \leqslant m$. Любая подгруппа группы $\mathbb{Z}^m$ изоморфна $\mathbb{Z}^{m'}$ для некоторого $m' \leqslant m$, и её можно задать базисом. Более того, приведя матрицу, состоящую из базисных векторов, к эрмитовой нормальной форме, можно получить однозначно определённый базис подгруппы. Для каждой архимедовой подгруппы с фиксированным базисом определим отношение порядка с помощью действительного вектора с рационально независимыми компонентами. В результате над базисом группы G, состоящим из базисных векторов архимедовых подгрупп $G_1, \ldots, G_k$, получим представление отношения порядка на группе G в виде действительной матрицы M размера $k \times m$ вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m_1} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{21} & \ldots & a_{2m_2} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & a_{k1} & \ldots & a_{km_k} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где в каждой строке $l = 1, \ldots, k$ элементы $a_{l1}, \ldots, a_{lm_l}$ рационально независимы. Перейдя к стандартному базису $\mathbb{Z}^m$, состоящему из единичных векторов, получим представление отношения порядка на группе $\mathbb{Z}^m$ в виде матрицы размера $k \times m$ и ранга m над полем рациональных чисел.

Отношение порядка $\leqslant_M$ на $\mathbb{Z}^m$, заданное матрицей M, определяется формулой

$$a \leqslant_M b, \text{ если и только если } Ma^{\mathrm{T}} \leqslant_{\mathrm{lex}} Mb^{\mathrm{T}},$$

где $\leqslant_{\mathrm{lex}}$ — отношение лексикографического порядка на группе $\mathbb{R}^m$. Любая матрица размера $k \times m$ ранга m над полем рациональных чисел задаёт отношение порядка на группе $\mathbb{Z}^m$.

В качестве примеров для $m = 2$ приведём:

(i) единичную матрицу, задающую лексикографическое отношение порядка;

(ii) матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

задающую отношение порядка, при котором сравниваются сначала суммы компонент двух векторов из $\mathbb{Z}^m$, а затем, при равных суммах, сравниваются эти два вектора лексикографически;

(iii) матрицу, состоящую из одной строки $(1, \sqrt{2})$, задающую отношение порядка

$$(i_1, i_2) \leqslant (j_1, j_2), \text{ если и только если } i_1 + i_2\sqrt{2} \leqslant j_1 + j_2\sqrt{2}.$$

Матричное представление отношения порядка на $\mathbb{Z}^m$ не единственно, даже если ограничиться матрицами вида (1), поскольку разложение в упорядоченную прямую сумму архимедовых подгрупп определено с точностью до изоморфизма и в каждой архимедовой подгруппе можно выбирать различные базисы. Однако если эти базисы зафиксировать, то строки матрицы M будут определены однозначно с точностью до положительного множителя (т. е. они будут определены однозначно, если потребовать, чтобы их евклидова норма равнялась единице). Выбрать однозначно определённые базисы архимедовых подгрупп возможно, приведя матрицы, состоящие из базисных векторов, к эрмитовой нормальной форме. Но в этом нет необходимости.

Возьмём произвольные упорядоченные базисы архимедовых подгрупп (упорядоченное объединение которых является базисом группы $\mathbb{Z}^m$) и рассмотрим однозначно определённую матрицу M вида (1) с нормализованными строками, задающую отношение порядка на группе $\mathbb{Z}^m$. Перейдём к базису группы $\mathbb{Z}^m$, состоящему из единичных векторов e_i, $i = 1, \ldots, m$, получив матрицу $\bar{M}$, задающую отношение порядка на $\mathbb{Z}^m$ над стандартным базисом, и нормализуем её строки. Нетрудно показать, что $\bar{M}$ не зависит от выбора базисов архимедовых подгрупп и, таким образом, определена однозначно.

Действительно, пусть $u_1, \ldots, u_m$ и $u'_1, \ldots, u'_m$ — два базиса группы $\mathbb{Z}^m$, согласованных с разложением в упорядоченную прямую сумму архимедовых подгрупп. Пусть $u'_i = \sum \lambda_{ij} u_j$, где (λ_{ij}) — матрица перехода между двумя базисами. Поскольку оба базиса согласованы с разложением группы в упорядоченную прямую сумму k архимедовых подгрупп, матрица (λ_{ij}) имеет блочно-диагональный вид

$$(\lambda_{ij}) = \begin{pmatrix} \bigl(\lambda_{ij}^{(1)}\bigr) & & \\ & \ddots & \\ & & \bigl(\lambda_{ij}^{(k)}\bigr) \end{pmatrix},$$

где $\bigl(\lambda_{ij}^{(1)}\bigr), \ldots, \bigl(\lambda_{ij}^{(k)}\bigr)$ — обратимые целочисленные матрицы размеров $m_1, \ldots, m_k$. Рассмотрим матрицы

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m_1} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & a_{k1} & \ldots & a_{km_k} \end{pmatrix},$$

$$M' = \begin{pmatrix} a'_{11} & \ldots & a'_{1m_1} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & a'_{k1} & \ldots & a'_{km_k} \end{pmatrix}$$

вида (1) с нормализованными строками, определяющие отношение порядка над соответствующими базисами. Тогда матрица M и матрица

$$M'' = \begin{pmatrix} \sum\limits_j \lambda_{1j}^{(1)} a'_{1j} & \ldots & \sum\limits_j \lambda_{m_1 j}^{(1)} a'_{1j} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & \sum\limits_j \lambda_{1j}^{(k)} a'_{kj} & \ldots & \sum\limits_j \lambda_{m_k j}^{(k)} a'_{kj} \end{pmatrix}$$

задают одно и то же отношение порядка над базисом $u_1, \ldots, u_m$. Следовательно, нормализовав строки M'', получим матрицу, совпадающую с M, т. е. матрица M' переходит в M при замене базиса $u'_1, \ldots, u'_m$ на $u_1, \ldots, u_m$ и нормализации. Отсюда следует, что замены базисов $u_1, \ldots, u_m$ и $u'_1, \ldots, u'_m$ на стандартный базис, состоящий из единичных векторов, с последующей нормализацией строк преобразуют матрицы M и M' в одну и ту же матрицу.

Для отношений порядка на $\mathbb{Z}^m$, заданных целочисленными матрицами, алгоритм построения однозначного представления был предложен Дж. М. Томасом [8]. Этот алгоритм основан на следующих инвариантах:

(i) умножение строки матрицы M на положительное число не влияет на отношение порядка $\leqslant_M$;

(ii) прибавление к строке матрицы любой предыдущей строки, умноженной на любое число, не влияет на отношение порядка $\leqslant_M$.

С помощью этих операций алгоритм Томаса обнуляет все элементы матрицы, находящиеся под максимальным элементом первой строки (если максимальных элементов несколько, то можно выбрать первый). Затем аналогично обнуляются все элементы, находящиеся под максимальным по абсолютной величине элементом второй строки, и т. д. В результате получаем матрицу размера $m \times m$, в которой последняя строка содержит один ненулевой элемент, предпоследняя — максимум два и т. д. После этого каноническая матрица получается делением каждой строки на наибольший общий делитель её элементов.

Каноническая матрица Томаса, вообще говоря, может отличаться от канонической матрицы, полученной из матрицы вида (1) с помощью перехода от базиса, согласованного с разложением $\mathbb{Z}^m$ в упорядоченную прямую сумму архимедовых подгрупп, к стандартному базису и нормализации строк.

Для произвольных отношений порядка на $\mathbb{Z}^m$ в [10] также предложено однозначное представление в виде линейных форм над конечно порождёнными полями.

3. Представление частичных ранжиров Рикье

Проблема представления ранжиров на множестве $G(n)$ была рассмотрена Дж. Карра-Ферро и У. Ситом. В [5] предложена характеризация ранжиров с помощью транзитивных семейств сечений абелевой группы и получено представление таких сечений с помощью действительных матриц. Однако проблема проверки условия транзитивности для данного семейства сечений остаётся открытой.

К. Раст и Г. Рид предложили решение проблемы представления произвольных ранжиров на множествах $\mathbb{N}^m \times \mathbb{N}_n$ и $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{N}_n$ с помощью частичных ранжиров Рикье. В [7] показано, что любой ранжир можно представить рекурсивно в виде дерева принятия решений или нерекурсивно в виде конечного набора действительных матриц, векторов и целых чисел. Это представление, вообще говоря, неединственно. Нашей задачей будет выбор однозначного представления.

Частичным ранжиром называется отношение частичного порядка на множестве $G(n)$, удовлетворяющее всем аксиомам ранжира, кроме, возможно, аксиомы антисимметричности

$$u \leqslant v \leqslant u \ \text{ влечёт } \ u = v.$$

Например, отношение, сравнивающее степени мономов, является частичным ранжиром на множестве мономов. Всякий ранжир является частичным ранжиром, но не наоборот. Для данного частичного ранжира $\preceq$ обозначим отношение $\{(u,v) \mid u \preceq v,\ v \npreceq u\}$ через $\prec$.

Заметим, что из наличия частичного ранжира $\preceq$ на множестве $G(n)$, вообще говоря, не следует, что группа G свободна от кручения. Однако для любого элемента $a \in G$ конечного порядка и $i \in \mathbb{N}_n$ справедливы неравенства $0 \preceq (a,i) \preceq 0$. Поэтому частичный ранжир $\preceq$ однозначно определяется своим ограничением на множество $H(n)$, где H — подгруппа, состоящая из нуля и элементов бесконечного порядка группы G. Следовательно, без ограничения общности можно предполагать, что группа G свободна от кручения и в случае частичных ранжиров.

Для данного частичного ранжира $\preceq$ на множестве $G(n)$ и элемента $i \in \mathbb{N}_n$ определим отношение частичного порядка $\preceq_i$ на группе G:

$$a \preceq_i b, \ \text{ если и только если } \ (a,i) \preceq (b,i).$$

Если отношение $\preceq_i$ не зависит от i, то обозначим его через $\preceq_G$, а частичный ранжир $\preceq$ назовём *частичным ранжиром Рикье* [4, 7]. Частичный ранжир на множестве $G(n)$ является частичным ранжиром Рикье тогда и только тогда, когда его можно продолжить до частичного упорядочения на группе $G \times \mathbb{Z}^n$, в которой множество $G(n)$ содержится в качестве образа вложения $(a,i) \mapsto a \oplus e_i$, где $e_i \in \mathbb{Z}^n$ — i-й единичный вектор, а операция $\oplus$ обозначает прямую сумму векторов. Такое продолжение, вообще говоря, неединственно.

Частичные ранжиры Рикье $\preceq$ на множестве $G(n)$ допускают представление в виде действительных матриц [7]. Пусть A — действительная матрица размера $k \times (m+n)$. Тогда частичный ранжир $\preceq_A$ определяется соотношением

$$(a,i) \preceq_A (b,j), \ \text{ если и только если } \ A(a \oplus e_i)^{\mathrm{T}} \leqslant_{\mathrm{lex}} A(b \oplus e_j)^{\mathrm{T}}. \tag{2}$$

Для ранжиров Рикье, представленных целочисленными матрицами, алгоритм вычисления канонической матрицы приведён Дж. М. Томасом [8].

Заметим, что не всякий (частичный) ранжир является (частичным) ранжиром Рикье. Например, если $\leqslant_1$, $\leqslant_2$ — два разных отношения порядка на группе G, то отношение $\leqslant$ на множестве $G(2)$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} (a,1) \leqslant (b,1), & \text{если и только если } \ a \leqslant_1 b, \\ (a,2) \leqslant (b,2), & \text{если и только если } \ a \leqslant_2 b, \\ (a,1) \leqslant (b,2) \end{cases}$$

для всех $a, b \in G$, является ранжиром, но не ранжиром Рикье.

Рассмотрим задачу однозначного представления частичных ранжиров Рикье на множестве $G(n)$, где G — конечно порождённая абелева группа без кручения, т. е. G изоморфна $\mathbb{Z}^m$. Для данного частичного ранжира Рикье $\preceq$ на множестве $G(n)$ определим *ядро*

$$K_\preceq = \{a \in G \mid a \preceq_i 0 \preceq_i a \text{ для всех } i \in \mathbb{N}_n\}.$$

Легко видеть, что $K_\preceq$ является подгруппой группы G. Следуя [7], рассмотрим фактор-группу $G' = G/K_\preceq$ и отношение $\preceq'$ на множестве $G'(n)$:

$$(\bar{a}, i) \preceq' (\bar{b}, j),$$
$$\text{если и только если существуют } a \in \bar{a},\ b \in \bar{b}, \text{ такие что } (a, i) \preceq (b, j).$$

Отношение $\preceq'$ является частичным ранжиром Рикье. Проверим аксиому транзитивности, остальные очевидны. Пусть $(\bar{a}_1, i_1) \preceq' (\bar{a}_2, i_2)$ и $(\bar{a}_2, i_2) \preceq' (\bar{a}_3, i_3)$. Тогда существуют $a_1 \in \bar{a}_1$, $a_2, a_2' \in \bar{a}_2$, $a_3 \in \bar{a}_3$, такие что $(a_1, i_1) \preceq (a_2, i_2)$ и $(a_2', i_2) \preceq (a_3, i_3)$. Используя аксиому параллельного переноса, получаем, что $(a_1 + a_2' - a_2, i_1) \preceq (a_2', i_2) \preceq (a_3, i_3)$, где $a_1 + a_2' - a_2 \in \bar{a}_1$, поскольку $a_2' - a_2 \in K_\preceq$.

Отношение $\preceq'$ также является *почти ранжиром* [7], т. е. удовлетворяет свойству

$$(\bar{a}, i) \preceq' (\bar{b}, j) \preceq' (\bar{c}, j) \preceq' (\bar{a}, i) \ \text{ влечёт } \ \bar{b} = \bar{c}. \tag{3}$$

Действительно, пусть $(\bar{a}, i) \preceq' (\bar{b}, j) \preceq' (\bar{c}, j) \preceq' (\bar{a}, i)$. Тогда существуют $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$, $c \in \bar{c}$, $a' \in \bar{a}$, такие что $(a, i) \preceq (b, j) \preceq (c, j) \preceq (a', i)$. По аксиоме параллельного переноса имеем $(a - b, i) \preceq (0, j) \preceq (c - b, j) \preceq (a' - b, i)$. Далее, поскольку $a, a' \in \bar{a}$, то $a' - a \in K_\preceq$, следовательно, $a' - a \preceq_i 0$ и $(a' - a, i) \preceq (0, i)$. Отсюда по аксиоме параллельного переноса $(a' - b, i) \preceq (a - b, i)$, т. е. цепочку неравенств можно замкнуть:

$$(a - b, i) \preceq (0, j) \preceq (c - b, j) \preceq (a' - b, i) \preceq (a - b, i).$$

Отсюда следует, что $(c - b, j) \preceq (0, j) \preceq (c - b, j)$, т. е. $c - b \preceq_j 0 \preceq_j c - b$. Поскольку отношение $\preceq$ является частичным ранжиром Рикье, неравенства $c - b \preceq_k 0 \preceq_k c - b$ верны для любого $k \in \mathbb{N}_n$. Следовательно, $c - b \in K_\preceq$ и $\bar{b} = \bar{c}$.

В частности, если в определении почти ранжира (3) положить $j = i$ и $\bar{c} = \bar{a}$, то получим, что отношение $\preceq_i'$ удовлетворяет аксиоме антисимметричности и является отношением линейного порядка на фактор-группе $G' = G/K_\preceq$.

Частичный ранжир Рикье $\preceq$ на множестве $G(n)$ однозначно определяется своим ядром $K_\preceq$ и почти ранжиром Рикье $\preceq'$ на множестве $G'(n)$. Действительно, из $(a, i) \preceq (b, j)$ следует $(\bar{a}, i) \preceq' (\bar{b}, j)$ по определению отношения $\preceq'$. Верно и обратное: если $(\bar{a}, i) \preceq' (\bar{b}, j)$, то существуют $a' \in \bar{a}$, $b' \in \bar{b}$, такие что $(a', i) \preceq (b', j)$. Из $a' \in \bar{a}$, $b' \in \bar{b}$ следует, что $a - a'$, $b' - b \in K_\preceq$, т. е. $a - a' \preceq_i 0$ и $b' - b \preceq_j 0$, откуда по аксиоме параллельного переноса получаем $(a, i) \preceq (a', i) \preceq (b', j) \preceq (b, j)$.

Любая подгруппа группы $\mathbb{Z}^m$, в частности $K_\preceq$, изоморфна группе $\mathbb{Z}^{m'}$ для некоторого $m' \leqslant m$, и её можно задать базисом. Посчитав эрмитову нормальную форму матрицы, состоящей из базисных векторов, получим канонический базис подгруппы.

Согласно [7] почти ранжир Рикье $\preceq'$ на группе G' задаёт отношение эквивалентности $\approx_{\preceq'}$ на множестве $\mathbb{N}_n$:

$i \approx_{\preceq'} j$,

если и только если существуют $\bar{a}, \bar{b} \in G'$, такие что $(\bar{a}, i) \preceq' (\bar{b}, j) \preceq' (\bar{a}, i)$.

Почти ранжир Рикье $\preceq'$ является ранжиром тогда и только тогда, когда это отношение эквивалентности совпадает с отношением равенства.

В каждом классе эквивалентности $[i] \in \mathbb{N}_n/_{\approx_{\preceq'}}$ возьмём наименьший элемент $l_{[i]} \in [i]$, таким образом упорядочив фактор-множество $\mathbb{N}_n/_{\approx_{\preceq}}$ и отождествив его с $\mathbb{N}_{n'}$, $n' \leqslant n$. Определим отношение $\preceq''$ на множестве $G' \times \mathbb{N}_n/_{\approx_{\preceq'}}$:

$$(\bar{a}, [i]) \preceq'' (\bar{b}, [j]), \quad \text{если и только если} \quad (\bar{a}, l_{[i]}) \preceq' (\bar{b}, l_{[j]}). \tag{4}$$

Поскольку отношение $\preceq'$ является почти ранжиром, то по [7, лемма 25] отношение $\preceq''$ является ранжиром. Следовательно, фактор-группа $G' = G/K_{\preceq}$ свободна от кручения и её можно отождествить с $\mathbb{Z}^{m''}$, $m'' \leqslant m$, взяв лексикографически наименьшее подмножество $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_{m''}}\}$ базисных элементов группы G, отождествлённой с $\mathbb{Z}^m$, независимых над $K_{\preceq}$.

Данное наблюдение позволяет получить однозначно определённое матричное представление ядра $K_{\preceq}$, не выбирая канонический базис подгруппы с помощью эрмитовой нормальной формы. Действительно, возьмём произвольный базис подгруппы $K_{\preceq}$ и дополним его векторами $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_{m''}}\}$, получая базис $\mathbb{Z}^m$. Над этим базисом $K_{\preceq}$ определяется как множество векторов, ортогональных $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_{m''}}\}$, т. е. задаётся матрицей. Перейдя к стандартному базису $\mathbb{Z}^m$, получим матричное представление подгруппы $K_{\preceq}$. Его можно сделать однозначным с помощью нормализации, например потребовав, чтобы первый ненулевой элемент каждой строки равнялся единице. Используя рассуждения, аналогичные приведённым в разделе 2, нетрудно показать, что полученная в результате матрица не зависит от выбора базиса $K_{\preceq}$.

По отношению $\preceq''$ и канонической проекции $p\colon \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n/_{\approx_{\preceq}}$ можно однозначно восстановить отношение $\preceq'$. Пусть $(\bar{a}, [i]) \preceq'' (\bar{b}, [j])$. Тогда по определению отношения $\preceq''$ справедливо неравенство $(\bar{a}, l_{[i]}) \preceq' (\bar{b}, l_{[j]})$. Поскольку $i \approx_{\preceq} l_{[i]}$ и $j \approx_{\preceq} l_{[j]}$, существуют $\bar{a}'$ и $\bar{b}'$, такие что $(\bar{a}, i) \preceq' (\bar{a}', l_{[i]})$ и $(\bar{b}', l_{[j]}) \preceq' (\bar{b}, j)$. Имеем

$$(\bar{a}, i) \preceq' (\bar{a}', l_{[i]}) \preceq' (\bar{b}', l_{[j]}) \preceq' (\bar{b}, j).$$

Таким образом, задача канонического представления частичного ранжира Рикье $\preceq$ на множестве $G(n)$ свелась к

(i) каноническому представлению ядра $K_{\preceq}$;

(ii) каноническому представлению отношения эквивалентности $\approx_{\preceq'}$ на множестве $\mathbb{N}_n$;

(iii) выбору представителя в каждом классе эквивалентности относительно $\approx_{\preceq'}$;

(iv) каноническому представлению ранжира Рикье $\preceq''$ на множестве

$$G/K_{\preceq} \times \mathbb{N}_n/_{\approx_{\preceq'}}.$$

Данное построение сводит задачу однозначного представления частичных ранжиров Рикье на множестве $\mathbb{Z}^m(n)$ к однозначному представлению ранжиров Рикье на множестве $\mathbb{Z}^{m'}(n')$, где $m'+n' < m+n$, в случае, если данный частичный ранжир Рикье $\preceq$ не является ранжиром. Если же он является ранжиром, то ядро $K_{\preceq}$ совпадает с нулевой подгруппой, отношение эквивалентности $\approx_{\preceq'}$ на множестве $\mathbb{N}_n$ — с отношением равенства, а ранжир Рикье $\preceq''$ — с исходным ранжиром $\preceq$, поэтому данный случай мы рассмотрим отдельно.

4. Представление ранжиров Рикье

Пусть $\leqslant$ — ранжир Рикье на множестве $G(n)$, $G = \mathbb{Z}^m$, заданный матрицей M_0 (2). Рассмотрим задачу построения его однозначного представления.

Обозначим через A_0 и B_0 подматрицы, состоящие соответственно из первых m и последних n столбцов матрицы M_0. Тогда $M_0 = (A_0 \mid B_0)$. Рассмотрим отношение порядка $\leqslant_G$ на группе G. Это отношение определяется матрицей A_0. Перейдём к произвольному базису группы G, в котором матрица, задающая отношение $\leqslant_G$, имеет вид (1), оставляя неизменными базисные векторы $e_{m+1}, \dots, e_n$ группы $\mathbb{Z}^{m+n}$. В результате матрица M_0 перейдёт в матрицу $M = (A \mid B)$, где подматрица A состоит из строк вида (1) и, возможно, нулевых строк, а $B = B_0$. Нормализуем строки матрицы M так, что каждая строка подматрицы A будет иметь евклидову норму, равную нулю или единице (умножение строки матрицы M на положительное число не влияет на ранжир). Удалим из матрицы M нулевые строки.

Заметим, что если в любой строке матрицы M прибавить одно и то же число к последним n элементам, то ранжир не изменится [8]. Поэтому элементы последних n столбцов можно считать неотрицательными.

4.1. Случай лексикографического порядка на группе

Если $m_1 = \ldots = m_k = 1$, то отношение порядка $\leqslant_G$ называется порядком лексикографического типа [6]. В этом случае $k = m$ и G является упорядоченной прямой суммой m архимедовых подгрупп, изоморфных $\mathbb{Z}$. Подматрица A матрицы $M = (A \mid B)$ состоит из строк вида $(0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0)$ и, возможно, нулевых строк. Если элементы базиса, соответствующие столбцам с -1, заменить на противоположные, то элементы -1 станут единицами. Полученный в результате базис, согласованный с разложением в упорядоченную прямую сумму архимедовых подгрупп, определён однозначно.

Рассмотрим произвольную строку матрицы M. Возможны два случая:

(i) строка имеет вид $(0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_n)$. Тогда если b_i заменить на произвольные неотрицательные целые числа, сохраняя порядок между ними, то ранжир не изменится. Заменим $b_1, \ldots, b_n$ на лексикографически минимальный набор неотрицательных целых чисел, сохраняя их порядок;

(ii) строка имеет вид $v = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_n)$. Если не все b_i целые, то заменим строку v на две строки:

$$V' = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \lfloor b_1 \rfloor & \ldots & \lfloor b_n \rfloor \\ 0 & & & \ldots & & & 0 & b_1 - \lfloor b_1 \rfloor & \ldots & b_n - \lfloor b_n \rfloor \end{pmatrix},$$

где $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, не превосходящее x. Легко проверить, что эта замена не влияет на ранжир. Действительно, пусть $\preceq_v$ и $\preceq_{V'}$ — частичные ранжиры, заданные соответственно вектором v и матрицей V'. Предположим, что они различны, т. е. существуют (p, i) и (q, j), такие что $(p, i) \preceq_v (q, j)$ и $(q, j) \prec_{V'} (p, i)$. Представим вектор v в виде прямой суммы $a \oplus (b_1, \ldots, b_n)$, где $a = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in G$. Имеем

$$\begin{gathered} (p, i) \preceq_v (q, j) \quad \text{влечёт} \quad ap + b_i \leqslant aq + b_j, \\ (q, j) \prec_{V'} (p, i) \quad \text{влечёт} \quad aq + \lfloor b_j \rfloor \leqslant ap + \lfloor b_i \rfloor, \end{gathered} \tag{5}$$

где ap — скалярное произведение векторов a и p. Следовательно,

$$\lfloor b_j \rfloor - \lfloor b_i \rfloor \leqslant a(p - q) \leqslant b_j - b_i.$$

Из $b_j < \lfloor b_j \rfloor + 1$ и $b_i \geqslant \lfloor b_i \rfloor$ следует, что $b_j - b_i < \lfloor b_j \rfloor - \lfloor b_i \rfloor + 1$. Поскольку $a(p - q)$ — целое число, имеем $\lfloor b_j \rfloor - \lfloor b_i \rfloor = a(p - q)$. Следовательно, $(q, j) \preceq_{v'_1} (p, i) \preceq_{v'_1} (q, j)$, где v'_1 — первая строка матрицы V'. Отсюда и из предположения $(q, j) \prec_{V'} (p, i)$ имеем $(q, j) \prec_{v'_2} (p, i)$, где v'_2 — вторая строка матрицы V'. Последнее условие эквивалентно $b_j - \lfloor b_j \rfloor < b_i - \lfloor b_i \rfloor$, что противоречит сумме неравенств (5). Согласно первому случаю элементы второй строки матрицы V' можно заменить на целые неотрицательные числа.

В результате получим целочисленную матрицу, задающую ранжир Рикье $\leqslant$. Эту матрицу можно привести к каноническому виду с помощью алгоритма Томаса [8].

4.2. Случай нелексикографического порядка на группе

Если не все $m_1, \ldots, m_k$ равны единице, то пусть $l = l(M)$ — наименьший индекс, такой что строка номер l имеет вид

$$u = (0, \ldots, 0, a_{s+1}, \ldots, a_{s+t}, 0 \ldots, 0, b_1, \ldots, b_n), \tag{6}$$

где $t \geqslant 2$ и $a_{s+1}, \ldots, a_{s+t}$ рационально независимы.

Пусть $M_{i:j}$ — подматрица матрицы M, состоящая из строк $i, i+1, \ldots, j$ (пустая, если $i > j$), $M_{:j} = M_{1:j}$ и $M_{i:} = M_{i:r}$, где r — число строк матрицы M. Покажем, что частичный ранжир $\preceq_{M_{:l(M)-1}}$ определён данным ранжиром $\leqslant$ однозначно.

Предположим, что существует другая матрица $M' = (A' \mid B')$, определяющая тот же ранжир $\leqslant$ и имеющая тот же вид, что и матрица M, но при этом задающая другой частичный ранжир $\preceq_{M'_{:l(M')-1}}$. Без ограничения общности можно считать, что матрица M' задаёт ранжир $\leqslant$ над тем же базисом, что и матрица M (назовём этот базис исходным). Действительно, если M' задаёт $\leqslant$ над базисом, отличным от исходного, то перейдём к исходному базису, при этом матрица M' сохранит свой вид (так как оба базиса согласованы с разложением группы в упорядоченную прямую сумму архимедовых подгрупп), а частичный ранжир $\preceq_{M'_{:l(M')-1}}$ не изменится.

Заметим, что ненулевые строки матриц A и A' совпадают и существует единственная строка матрицы M' вида

$$u' = (0, \ldots, 0, a_{s+1}, \ldots, a_{s+t}, 0 \ldots, 0, b'_1, \ldots, b'_n). \tag{7}$$

Для краткости обозначим частичные ранжиры $\preceq_{M_{:l(M)-1}}$ и $\preceq_{M'_{:l(M')-1}}$ через $\preceq$ и $\preceq'$. Из предположения, что они различны, следует, что найдутся (p, i) и (q, j), такие что $(p, i) \preceq (q, j)$ и $(q, j) \prec' (p, i)$. Так как оба частичных ранжира $\preceq$ и $\preceq'$ содержат ранжир $\leqslant$, то имеем $(q, j) \prec' (p, i)$, следовательно, $(q, j) < (p, i)$ и тогда $(q, j) \preceq (p, i)$. Обозначим через $\preceq_u$ частичный ранжир, заданный строкой u (6). Выберем $p' \in G$ вида $(0, \ldots, 0, p_{s+1}, \ldots, p_{s+t}, 0, \ldots, 0)$, такой что $(p + p', i) \prec_u (q, j)$. Получим $(p + p', i) \prec_{M_{:l(M)}} (q, j)$ и $(q, j) \prec_{M'_{:l(M')-1}} (p + p', i)$, что противоречит предположению, что матрицы M и M' задают один и тот же ранжир. Следовательно, частичные ранжиры $\preceq$ и $\preceq'$ совпадают.

Рассмотрим отношение эквивалентности на множестве $\mathbb{N}_n$, заданное частичным ранжиром $\preceq$:

$$\begin{aligned} &i \approx_{\preceq} j, \\ &\text{если и только если существуют } a, b \in G, \text{ такие что } (a, i) \preceq (b, j) \preceq (a, i). \end{aligned} \tag{8}$$

Возможны два случая: либо $\mathbb{N}_n$ разбивается на несколько классов эквивалентности относительно $\approx_{\preceq}$, либо все элементы $\mathbb{N}_n$ эквивалентны.

4.2.1. Случай нескольких классов эквивалентности

Если не все i, j эквивалентны относительно $\approx_{\preceq}$, то запишем множество $\mathbb{N}_n$ в виде объединения классов эквивалентности:

$$\mathbb{N}_n = S_1 \cup \ldots \cup S_D, \quad D \geqslant 2.$$

Обозначим через $\leqslant_d$ ограничение ранжира $\leqslant$ на множество $G \times S_d$, $d = 1, \ldots, D$. Имеем $(a, i) \leqslant (b, j)$ тогда и только тогда, когда

$$(a, i) \prec (b, j) \quad \text{или} \quad [(a, i) \preceq (b, j) \preceq (a, i) \text{ и } i, j \in S_d \text{ и } (a, i) \leqslant_d (b, j)].$$

Таким образом, задача канонического представления ранжира Рикье $\leqslant_M$ свелась к каноническому представлению

(i) частичного ранжира Рикье $\preceq_{M_{:l(M)-1}}$: поскольку столбцы $s+1,\ldots,m$ матрицы $M_{:l(M)-1}$ нулевые, каноническое представление этого частичного ранжира можно считать построенным по индукции по m;

(ii) ранжиров $\leqslant_d$ на множествах $G \times S_d$, $d = 1,\ldots,D$, где $|S_d| < n$, каноническое представление которых можно считать построенным по индукции по n.

4.2.2. Случай одного класса эквивалентности

Если $i \approx_{\preceq} j$ для всех $i, j \in \mathbb{N}_n$, то частичный ранжир $\preceq_{M_{l(M):}}$ определён ранжиром $\leqslant$ однозначно. Действительно, предположим, что существует матрица M', задающая ранжир $\leqslant$ и имеющая тот же вид, что и матрица M, такая что частичный ранжир $\preceq_{M'_{l(M'):}}$ отличен от $\preceq_{M_{l(M):}}$. Без ограничения общности (см. выше) можно считать, что матрица M' задана над тем же базисом, что и матрица M. Тогда существуют (p,i) и (q,j), такие что $(p,i) \preceq_{M_{l(M):}} (q,j)$ и $(q,j) \prec_{M'_{l(M'):}} (p,i)$. Поскольку первые s столбцов матриц $M_{l(M):}$ и $M'_{l(M'):}$ нулевые, можно считать нулевыми первые s компонент векторов p и q.

Из эквивалентности $i \approx_{\preceq} j$ следует, что существуют $p', q' \in G$, такие что $(p',i) \preceq (q',j) \preceq (p',i)$. Так как столбцы $s+1,\ldots,m$ матрицы $M_{:l(M)-1}$, задающей частичный ранжир $\preceq$, нулевые, то можно считать нулевыми компоненты $s+1,\ldots,m$ векторов p' и q'. Получаем, что $(p+p',i) \preceq (q+q',j) \preceq (p+p',i)$, $(p+p',i) \preceq_{M_{l(M):}} (q+q',j)$ и $(q+q',j) \prec_{M'_{l(M'):}} (p+p',i)$. Это противоречит предположению, что матрицы M и M' задают один и тот же ранжир.

Таким образом, задача канонического представления ранжира Рикье $\leqslant$ свелась к каноническому представлению частичных ранжиров $\preceq_{M_{:l(M)-1}}$ и $\preceq_{M_{l(M):}}$. Если $l(M) > 1$, то матрица $M_{:l(M)-1}$ непустая, и среди её первых m столбцов есть хотя бы один ненулевой, поскольку $i \approx_{\preceq} j$ для всех $i, j \in \mathbb{N}_n$. Значит, число ненулевых столбцов в обеих матрицах $M_{:l(M)-1}$ и $M_{l(M):}$ меньше m, и их каноническое представление можно считать построенным по индукции по m.

4.2.3. Случай нелексикографической первой строки

Осталось разобрать случай $l(M) = 1$, т. е. случай, когда строка u (6) является первой строкой матрицы M и $s = 0$. Легко видеть, что тогда над выбранным базисом эта строка определена ранжиром $\leqslant$ однозначно с точностью до добавления одного и того же числа к её последним n элементам. Действительно, из рациональной независимости чисел $a_1,\ldots,a_t$, где $t \geqslant 2$, следует, что линейную комбинацию $a_1p_1 + \ldots + a_tp_t$ можно сделать сколь угодно близкой к нулю и любого знака, выбирая подходящие целые числа $p_1,\ldots,p_t$. Значит, для любой строки u' вида (7), где $b'_i - b'_j \neq b_i - b_j$ для некоторых i, j, найдётся $p \in G$, такое что $(p,i) \prec_u (0,j)$ и $(0,j) \prec_{u'} (p,i)$. Отсюда следует, что строки u и u' не могут являться первыми строками матриц, задающих один и тот же ранжир.

Заметим, что числа $a_1, \ldots, a_t$ зависят от выбора базиса первой подгруппы в разложении группы $G = \mathbb{Z}^m$ в упорядоченную прямую сумму архимедовых подгрупп и, следовательно, не могут быть частью набора данных, однозначно задающих ранжир. Однако, как мы видели в разделе 2, при переходе к стандартному базису, состоящему из единичных векторов, и последующей нормализации строк образ первой строки будет одним и тем же вне зависимости от выбора базиса, над которым первая строка матрицы, задающей ранжир, имеет вид (6). Этот образ можно взять в качестве однозначного представления частичного ранжира $\preceq_u$.

Задача канонического представления ранжира Рикье $\leqslant$ свелась к каноническому представлению

(i) частичного ранжира $\preceq_u$ над стандартным базисом, состоящим из единичных векторов;

(ii) (если не все i, j эквивалентны относительно $\approx_{\preceq_u}$) ранжиров $\leqslant_d$ на множествах $G \times T_d$, $d = 1, \ldots, D_u$, где

$$\mathbb{N}_n = T_1 \cup \ldots \cup T_{D_u},\ D_u \geqslant 2, -$$

разложение множества $\mathbb{N}_n$ в объединение классов эквивалентности относительно $\approx_{\preceq_u}$, по индукции по n;

(iii) (если $i \approx_{\preceq_u} j$ для всех $i, j \in \mathbb{N}_n$) частичного ранжира $\preceq_{M_{2:}}$, который определён однозначно согласно разделу 4.2.2. В этом случае применима индукция по m, поскольку первые t столбцов матрицы $M_{2:}$ нулевые.

5. Представление произвольных ранжиров

Пусть $\leqslant$ — ранжир на множестве $G(n)$. По [7, теорема 18] существует нетривиальный частичный ранжир Рикье, содержащий ранжир $\leqslant$ (обозначенный через $\preceq$ в доказательстве теоремы). Если $n > 1$ и ранжир $\leqslant$ не является ранжиром Рикье, то рассмотрим отношение эквивалентности $\approx_{\preceq}$, определённое формулой (8). Согласно доказательству теоремы 18 в [7] существуют $i, j \in \mathbb{N}_n$, такие что $i \not\approx_{\preceq} j$.

Рассмотрим пересечение $\preceq_R$ всех частичных ранжиров Рикье, содержащих ранжир $\leqslant$. Легко проверить, что отношение $\preceq_R$ является частичным ранжиром Рикье. Поскольку отношение $\preceq_R$ содержится в отношении $\preceq$, то $i \not\approx_{\preceq_R} j$.

Запишем множество $\mathbb{N}_n$ в виде объединения классов эквивалентности относительно $\approx_{\preceq_R}$:

$$\mathbb{N}_n = S_1 \cup \ldots \cup S_D, \quad D \geqslant 2.$$

Через $\leqslant_d$ обозначим ограничение ранжира $\leqslant$ на множество $G \times S_d$, $d = 1, \ldots, D$. Имеем $(a, i) \leqslant (b, j)$ тогда и только тогда, когда

$$(a, i) \prec_R (b, j) \ \text{ или } \ [(a, i) \preceq_R (b, j) \preceq_R (a, i) \text{ и } i, j \in S_d \text{ и } (a, i) \leqslant_d (b, j)].$$

Задача канонического представления ранжира $\leqslant$ на множестве $G(n)$ свелась к каноническому представлению

(i) частичного ранжира Рикье $\preceq_R$;

(ii) ранжиров $\leqslant_d$ на множествах $G \times S_d$, $d = 1, \ldots, D$, где $|S_d| < n$.

Таким образом, с помощью индукции по n получаем каноническое представление ранжира $\leqslant$.

Представленная работа посвящается памяти Евгения Васильевича Панкратьева, научного руководителя автора. Автор благодарен организаторам и участникам Колчинского семинара по дифференциальной алгебре за внимание и гостеприимство и в особенности У. Ситу за обсуждение дифференциальных ранжиров и канонических представлений.

Литература

[1] Зайцева М. И. О совокупности упорядочений абелевой группы // УМН. — 1953. — Т. 8, № 1. — С. 135—137.

[2] Панкратьев Е. В. Элементы компьютерной алгебры. — М.: Интернет-университет информационных технологий, 2007.

[3] Buchberger B. Theoretical basis for the reduction of polynomials to canonical forms // ACM SIGSAM Bull. — 1976. — Vol. 10, no. 3. — P. 19—29.

[4] Caboara M., Silvestri M. Classification of compatible module orderings // J. Pure Appl. Algebra. — 1999. — No. 142. — P. 13—24.

[5] Carrà Ferro G., Sit W. Y. On term-orderings and rankings // Computational Algebra. — Dekker, 1994. — (Lect. Notes Pure Appl., Vol. 151). — P. 31—77.

[6] Robbiano L. Term orderings on the polynomial ring // European Conf. on Computer Algebra 85. EUROCAL 85. Linz, Austria, April 1—3, 1985 / B. F. Caviness, ed. — Berlin: Springer, 1985. — (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 204). — P. 513—517.

[7] Rust C. J., Reid G. J. Rankings of partial derivatives // Int. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation 97. ISSAC 97. Kihei, Maui Hawaii, USA, July 21—23, 1997 / B. Char, P. S. Wang, eds. — New York: ACM Press, 1997. — P. 9—16.

[8] Thomas J. M. Matrices of integers ordering derivatives // Trans. Amer. Math. Soc. — 1931. — Vol. 33, no. 2. — P. 389—410.

[9] Trevisan G. Classificazione dei semplici ordinamenti di un gruppo libero con N generatori // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1953. — Vol. 22. – P. 143—156.

[10] Weispfenning V. Admissible orders and linear forms // ACM SIGSAM Bull. — 1987. — P. 16—18.