

К задачам оптимизации формы объекта в потенциальном плоском потоке

А. С. ДЕМИДОВ

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Российский университет дружбы народов
e-mail: demidov.alexandre@gmail.com

Е. В. ТИМОХИН

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: tjenja@mail.ru

УДК 517.54+532.5.031

Ключевые слова: оптимизация, потенциальное плоское течение.

Аннотация

В данной работе на простом примере детально излагается намеченный в статье одного из авторов метод оптимизации формы объекта в потенциальном плоском потоке.

Abstract

A. S. Demidov, E. V. Timokhin, To problems of shape optimization in a potential flat flow, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 4, pp. 129–132.

This paper provides a simple application of the shape optimization method for an object in a potential flat flow.

1.

В плоскости $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ рассматривается задача оптимизации формы препятствия, обтекаемого безотрывным потенциальным потоком жидкости. В момент времени t скорость $V(t) = dz/dt$ её частицы с координатами $(x(t), y(t)) \simeq z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}$ равна $\nabla\varphi(x(t), y(t))$. Ограничимся здесь случаем, когда скорость потока на бесконечности равна $V_\infty = (1, 0)$, а препятствие клиновидное (рис. 1).

Интерес представляет выбор угла $\pi\theta$, при котором время $T > 0$ движения частицы жидкости вдоль скоса OM будет минимально при ограничении

$$|OM| \sin \pi\theta = 1. \quad (1)$$

Область течения (при $y > 0$) обозначим через Ω , считая её подобластью комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В этой односвязной области введём аналитическую функцию $w = \varphi + i\psi$, равную нулю в точке O . Линии уровня функций φ

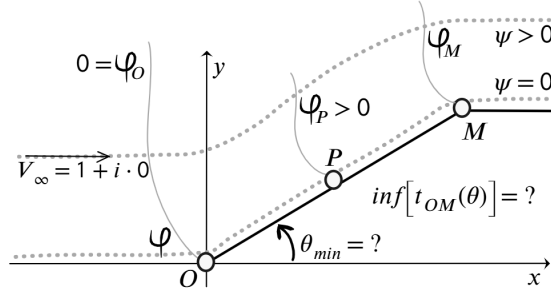


Рис. 1. Схема обтекания

и ψ называются соответственно эквипотенциалами и линиями тока. Введём на линии тока $\psi = 0$ натуральный параметр ξ , отсчитываемый от точки O в сторону возрастания φ . Точку (частицу жидкости) на линии $\psi = 0$, соответствующую ξ , обозначим $P(\xi)$, а её координату через $z_\xi(t) = x_\xi(t) + i y_\xi(t)$. Наша цель — найти тот угол $\pi\theta \in]0, \pi/2[$, при котором минимально время $T > 0$ движения частицы, соответствующей координате

$$z_\xi(t)|_{\xi=0} = x_0(t) + i y_0(t),$$

скользящей вдоль скоса OM от точки O до точки M , с натуральным параметром $\xi = \sin^{-1} \pi\theta$.

Заметим, что $\varphi_{P(\xi)} = \varphi(z_\xi)$ есть значение потенциала на эквипотенциали, проходящей через точку $P(\xi)$. В частности,

$$\varphi_O = \varphi_{P(0)} = \varphi(0, 0) = 0, \quad \varphi_M = \varphi_{P(\sin^{-1} \pi\theta)} = \varphi(\sin^{-1} \pi\theta, 1) > 0.$$

2.

Очевидно, что отображение

$$w: z \mapsto w(z) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y)$$

однолистно переводит Ω на $\mathbb{C}_+ = \{\text{Im } Z > 0\}$. Поэтому существует как аналитическая функция $Z: w \mapsto z$, такая что $Z(w(t)) = z(t)$, так и аналитическая функция $\ln(dZ/dw) = A(\varphi, \psi) + i B(\varphi, \psi)$, где $A = \ln |dZ/dw|$, а B — непрерывная ветвь $\text{Arg}(dZ/dw)$, однозначная в силу односвязности $\mathbb{C}_+$.

Согласно геометрическому смыслу $\text{Arg}(dZ/dw)$ в любой точке линии тока $\psi = 0$ имеем

$$B(w)|_{\psi=0} = B(\varphi) = \pi\theta \cdot \chi_{[\varphi_O, \varphi_M]}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \varphi < \varphi_O, \\ \pi\theta, & \varphi_O < \varphi < \varphi_M, \\ 0 & \varphi_M < \varphi. \end{cases}$$

Гармоническая функция B в полуплоскости $\psi > 0$ с такими кусочно-постоянными граничными условиями при $\psi = 0$ задаётся формулой

$$B(\varphi + i\psi) = \theta \left(\operatorname{arccctg} \left(\frac{\varphi_O - \varphi}{\psi} \right) + \operatorname{arccctg} \left(\frac{\varphi_M - \varphi}{\psi} \right) \right).$$

Функция, гармонически сопряжённая к B , имеет вид

$$A(\varphi + i\psi) = \frac{\theta}{2} \ln \left(\frac{\psi^2 + (\varphi_M - \varphi)^2}{\psi^2 + (\varphi_O - \varphi)^2} \right) + \ln c,$$

где константа c равна 1. Действительно,

$$Z'(w) = e^A e^{iB} = c \left(\frac{\psi^2 + (\varphi_M - \varphi)^2}{\psi^2 + (\varphi_O - \varphi)^2} \right)^{\theta/2} e^{iB}, \quad (2)$$

$$\dot{z}(t) = \varphi_x + i\varphi_y = \overline{\varphi_x - i\varphi_y} = \overline{\varphi_x + i\psi_x} = \frac{dw}{dZ} = \overline{\left(\frac{dZ}{dw} \right)^{-1}} = \overline{Z'(w)^{-1}} = e^{-A+iB},$$

$$\dot{z} = c^{-1} \left(\frac{\psi^2 + (\varphi_O - \varphi)^2}{\psi^2 + (\varphi_M - \varphi)^2} \right)^{\theta/2} e^{iB}, \quad \dot{z}|_{\psi=0} = c^{-1} \left| \frac{\varphi_O - \varphi}{\varphi_M - \varphi} \right|^\theta \exp(i\pi\theta \chi_{[\varphi_O, \varphi_M]}(\varphi)).$$

А поскольку $V_\infty = (1, 0)$, то

$$1 + i0 = \lim_{\varphi \rightarrow \infty} (\varphi_x + i\varphi_y)|_{\psi=0} = c^{-1},$$

следовательно, $c = 1$. В итоге

$$\dot{z}|_{\psi=0} = \left| \frac{\varphi_O - \varphi}{\varphi_M - \varphi} \right|^\theta \exp(i\pi\theta \chi_{[\varphi_O, \varphi_M]}(\varphi)).$$

Для частицы, связанной с точкой $P(0)$, то есть имеющей координату $z_\xi(t)|_{\xi=0} = z_0(t)$, введём обозначения $\phi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{P(0)}$, $a \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_M$. Заметим также, что $\varphi_O = 0$ и $\exp(i\pi\theta \chi_{[\varphi_O, \varphi_M]}(\phi)) = e^{i\pi\theta}$. Таким образом,

$$\dot{z}_0|_{\psi=0} = \left(\frac{\phi}{a - \phi} \right)^\theta e^{i\pi\theta}. \quad (3)$$

Что касается $\phi = \phi(t)$, то эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\phi} - \left(\frac{\phi}{a - \phi} \right)^{2\theta} = 0. \quad (4)$$

Оно получается, поскольку $Z(w(t)) = z(t)$, откуда имеем $Z'(w)\dot{w} = \dot{z}$, или $e^{A+iB}\dot{w} = e^{-A+iB}$, следовательно, $\dot{w} = e^{-2A}$.

3.

Учитывая сказанное выше, получаем, что рассматриваемая в данной работе задача оптимизации, а именно поиск угла $\pi\theta \in]0, \pi/2[$, при котором минимально

время T движения частицы вдоль склона OM , сводится к условию (1) и задаче Коши

$$\dot{\phi}(t) = \left(\frac{\phi(t)}{a - \phi(t)} \right)^{2\theta/\pi}, \quad \phi(0) = 0. \quad (5)$$

Отметим, что условие (1) выражается формулой

$$\Phi(a, \theta) = 0, \quad \text{где} \quad \Phi(a, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \sin \pi \theta \int_0^a \left(\frac{a - \phi}{\phi} \right)^{\theta/\pi} d\phi - 1. \quad (6)$$

Дальнейшее исследование возможно методами численного анализа. Условие (1) неявно задаёт формулу для $a(\theta)$, т. е. позволяет по заданному углу наклона θ вычислять потенциал a частиц в точке M . Подставляя найденную $a = a(\theta)$ в проинтегрированное на $[0, T]$ уравнение (5), получим выражение для искомого времени от угла:

$$T(\theta, a(\theta)) = \int_0^{a(\theta)} \left(\frac{a(\theta) - \phi}{\phi} \right)^{2\theta/\pi} d\phi.$$

Точка минимума данной функции — искомая величина. Результаты полученных вычислений представлены на рис. 2.

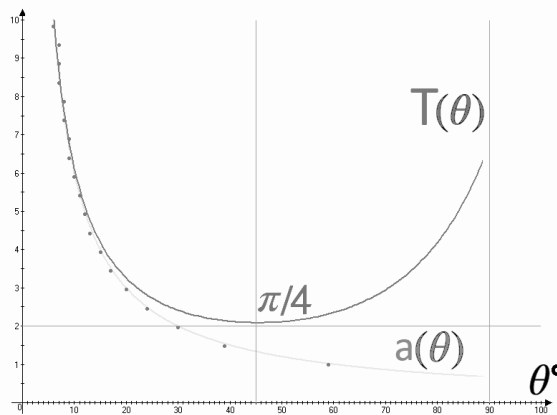


Рис. 2. По оси абсцисс размечена градусная мера θ , по оси ординат — безразмерные значения $a(\theta)$, $T(\theta)$

Литература

- [1] Демидов А. С. Функционально-геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций // УМН. — 2010. — Т. 65, № 1 (391). — С. 3—96.