Некоторые факты об уравнении Ритта

М. В. КОНДРАТЬЕВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: marina.kondratieva@math.msu.ru

УДК 512.628.2

Ключевые слова: дифференциальная алгебра, кольцо дифференциальных многочленов, дифференциальная размерность, общий нуль системы алгебраических дифференциальных многочленов.

Аннотация

Дж. Ритт в 1950 г. нашёл пример обыкновенного однородного дифференциального уравнения первого порядка от трёх неизвестных, главное решение которого пересекается с гиперплоскостью $y = 0$ в одной точке ($u = 0$, $v = 0$, $y = 0$). Мы дадим другое доказательство факта, что, в отличие от алгебраических многообразий, дифференциальные гиперплоскости могут иметь пересечение размерности 0, и приведём другой (неоднородный по степени) пример.

Abstract

M. V. Kondratieva, Some facts about the Ritt equation, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 4, pp. 133—142.

J. Ritt (1950) found an example of an ordinary differential homogeneous first order equation in three unknowns, the general solution of which intersects the hyperplane $y = 0$ at one point ($u = 0$, $v = 0$, $y = 0$). We will give another proof of the fact that, in contrast to algebraic sets, differential hyperplanes can have an intersection of dimension 0 and give another example (non-homogeneous in degree).

*Памяти моего учителя,
профессора Евгения Васильевича Панкратьева*

1. Введение

Дифференциальная алгебра берёт начало в работах Дж. Ритта [9] и Э. Колчина [7]. Это раздел коммутативной алгебры, где структуры снабжены операциями дифференцирования.

Дифференциальные алгебраические множества имеют много общего с обычными алгебраическими множествами. В то же время есть и отличия.

Фундаментальная и прикладная математика, 2025, том 25, № 4, с. 133—142.

Так, Дж. Ритт [9] (1950 г.) показал, что для них не выполняется теорема о размерности пересечения, справедливая в алгебраической геометрии. Отметим, что его работы дали импульс к исследованию смежных вопросов (см. [1; 2; 4; 6; 7, с. 190, 199; 8, с. 265, 273] и др.).

В последние годы повысился интерес к компьютерной алгебре, в которой используются конструктивные методы и изучаются алгоритмы для нахождения решения проблемы. Такой подход позволяет взглянуть по-новому на многие старые вопросы.

Одним из направлений компьютерной алгебры является изучение базисов Грёбнера. Применением этой техники в дифференциальной алгебре занимался Е. В. Панкратьев (см., например, [5]). Несмотря на трудности (как правило, дифференциальные стандартные базисы не являются конечными), Е. В. Панкратьев добился выдающихся результатов.

В статье сделана попытка применить современные методы в задачах, которыми занимался Дж. Ритт, и, в частности, ещё раз восхититься силой его интуиции и гениальностью (также см. [3], где результаты Дж. Ритта использовались для систем уравнений в частных производных).

Для вычислений в кольце алгебраических дифференциальных многочленов мы будем использовать систему компьютерной алгебры Maple (пакеты diffalg, Groebner). Её в своих исследованиях применял и Е. В. Панкратьев.

2. Предварительные факты

Основные понятия и факты изложены в [5, 7—9]. В этой статье мы работаем только с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Определение 1. Оператор $'$, действующий на коммутативном кольце $\mathbb{K}$ с единицей, называется дифференцированием, если он линеен, $(a+b)' = a' + b'$, и выполняется правило Лейбница $(ab)' = a'b + ab'$ для всех элементов $a, b \in \mathbb{K}$.

Дифференциальным кольцом будем называть коммутативное кольцо $\mathbb{K}$ с дифференцированием.

Пусть

$$\mathbb{R} = \mathbb{K}\{y_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\} := \mathbb{K}[y_j, y_j', y_j'', \ldots \mid 1 \leqslant j \leqslant n] -$$

кольцо коммутативных многочленов с коэффициентами в $\mathbb{K}$ от бесконечного числа переменных. Кольцо $\mathbb{R}$ называется кольцом дифференциальных многочленов от дифференциальных переменных $y_1, \ldots, y_n$ с коэффициентами в $\mathbb{K}$.

Всюду в дальнейшем мы полагаем, что кольцо $\mathbb{K}$ является алгебраически замкнутым дифференциальным полем $\mathcal{F}$ характеристики 0. Идеал I называется дифференциальным, если $f' \in I$ для всех $f \in I$. Будем обозначать через $[I]$ наименьший дифференциальный идеал, содержащий I, а через $\{I\}$ — наименьший радикальный дифференциальный идеал, содержащий I. Простой компонентой идеала $\{I\}$ будем называть простой дифференциальный идеал, содержащий $\{I\}$.

Наименьшую простую компоненту называют существенной. Согласно [7, теорема 1, с. 126] каждый радикальный дифференциальный идеал имеет конечное число существенных простых компонент и является их пересечением.

Каждому радикальному дифференциальному идеалу I кольца $\mathbb{R}$ ставится в соответствие множество его общих нулей:

$$Z(I) = \{(\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathcal{F}^n \colon f(\eta_1, \dots, \eta_n) = 0 \text{ для всех } f \in I\}.$$

Подмножество $\mathcal{F}^n$, которое является общим нулём некоторого радикального дифференциального идеала, называется дифференциальным алгебраическим множеством. Если $\mathcal{P}$ — простой дифференциальный идеал, множество $Z(\mathcal{P})$ можно рассматривать как расширение дифференциального поля $\mathcal{F}$, и размерность этого расширения (т. е. максимально возможное число дифференциально независимых образующих) будем называть дифференциальной размерностью (иногда просто размерностью) идеала $\mathcal{P}$.

Определение 2. Ранжиром на $\{y_1, \dots, y_n\}$ будем называть полный порядок $\leqslant$ на множестве производных $T = \{y_j,\, y'_j,\, y''_j, \dots,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$, удовлетворяющий таким двум условиям:

— $u \leqslant u'$ для всех $u \in T$;

— если $u \leqslant v$, то $u' \leqslant v'$ для любых $u \in T$, $v \in T$.

Ранжир называется степенным, если $y_i \leqslant y'_k$ для всех $1 \leqslant i, k \leqslant n$.

Пусть задан ранжир на множестве $\{y_1, \dots, y_n\}$ и $A \in \mathbb{R}$. Тогда

$$A = \sum_{i=0}^{d} I_i \mathbf{u}_A^i,$$

где $\mathbf{u}_A$ — производная, имеющая максимальный ранжир из входящих в A. $\mathbf{u}_A$ будем называть лидером A, а

$$S_A = \sum_{i=1}^{d} i I_i \mathbf{u}_A^{i-1} \text{ —}$$

сепарантой A. Многочлен $B \in \mathcal{F}\{y_1, \dots, y_n\}$, $B \neq 0$, назовём редуцированным относительно $A \in \mathcal{F}\{y_1, \dots, y_n\}$, если никакая производная лидера $\mathbf{u}_A$ не входит в B, а степень, с которой $\mathbf{u}_A$ встречается в B, не выше d.

Определим

$$\mathcal{P}(A) = [A] : S_A^{\infty} \tag{1}$$

как множество многочленов $f \in \mathbb{R}$, для которых существует степень k, такая что $S_A^k f \in [A]$.

Согласно [7, теорема 3, с. 155] для каждого неразложимого дифференциального многочлена $A \in \mathbb{R}$ дифференциальный идеал $\mathcal{P}(A)$ является существенной простой компонентой идеала $\{A\}$ (и называются главной компонентой). Общий нуль главной компоненты будем называть главным решением уравнения $A = 0$. Все остальные компоненты идеала $\{A\}$ содержат сепаранту S_A и называются сингулярными. Если у $\{A\}$ нет сингулярных компонент, множество $Z(\{A\})$

будем называть решением уравнения $A = 0$. Каждая сингулярная компонента является главной для некоторого неразложимого многочлена [7, теорема 5, с. 185].

Как следует из [7, лемма 8, с. 82], идеал $\mathcal{P}(A)$ не содержит многочленов, редуцированных относительно A.

3. Основные результаты

В книге Дж. Ритта [9, с. 133] дан пример обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка $F = 0$ от трёх переменных u, v, y, главное решение которого даёт в пересечении с гиперплоскостью $y = 0$ точку $(0, 0, 0)$. Отметим, что дифференциальная размерность (любой) компоненты одного нетривиального дифференциального многочлена от n неизвестных равна $n - 1$ (теорема о компонентах [7, с. 185]).

Пример 1 (уравнение Ритта)**.** Пусть

$$F = u^5 - v^5 + y(u'v - v'u)^2 \subset \mathcal{F}\{u, v, y\}. \tag{2}$$

Пересечение главного решения $F = 0$ с дифференциальным множеством $y = 0$ является точкой $u = 0$, $v = 0$, $y = 0$.

Доказательство. Прямым вычислением найдём, что $Z\big(\mathcal{P}(F)\big) \cap Z([y]) \subset Z([u, v, y])$. Как показывает пакет essential_components, многочлен F имеет две существенные характеризуемые компоненты:

$$\{F\} = [F] : S_F^\infty \cap [u^5 - v^5] : u^\infty.$$

Найдём базис Грёбнера $\mathrm{gbasis}([h\nabla - 1, F, \mathrm{differentiate}(F, x, R)], T)$ алгебраического идеала, здесь

$$\nabla = u'v - uv', \tag{3}$$

h, u, v, y, u', v', u'', v'' — алгебраические переменные, T — исключающий (переменную h) порядок, R — дифференциальное кольцо.

Базис Грёбнера содержит многочлены, которые не принадлежат сингулярной компоненте $\{F\}$. Таким, например, является

$$G = 5u^4 + 2yu''v^2 - 2yvv''u + y'u'v^2 - y'vv'u - 5v'u'vy + 5yv'^2u.$$

Добавим G к системе образующих $\mathcal{P}(F)$ (неизвестно, верно ли $\mathcal{P}(F) = \{F, G\}$, но уравнение $G(u, v, y) = 0$ на множестве общих нулей $Z\big(\mathcal{P}(F)\big)$ должно выполняться). Так как разложение Розенфельда—Грёбнера $\mathrm{Rosenfeld\_Groebner}([F, G, y], R)$ имеет только одну компоненту, $[u, v, y]$, дифференциальная размерность пересечения $Z\big(\mathcal{P}(F)\big) \cap Z([y])$ не может быть больше 0. Как заметил Дж. Ритт, из соображений однородности многочлена F это пересечение не является пустым, поэтому множества $Z\big(\mathcal{P}(F)\big)$ и $Z([y])$ пересекаются по точке. □

Будем называть многочлен F (см. (2)) уравнением Ритта. В более общем виде, уравнением Ритта будем называть многочлен

$$F = u^n - v^n + y\nabla^k, \quad n, k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

∇ определён в (3).

Утверждение 1. *Пусть* F — *уравнение Ритта* (4), $n = 1$, $k \geqslant 1$. *Для* $k \geqslant 2$ *пересечение* $Z(\mathcal{P}(F)) \cap Z([y])$ *является пустым. Для* $k = 1$ $Z(\mathcal{P}(F)) \cap Z([y]) = Z([y, u - v])$.

Доказательство. Пусть $k = 1$. По теореме о малых степенях (см. [7, теорема 6, с. 187]) сингулярная компонента $\{F\}$ не является существенной, и значит, $\mathcal{P}(F) = \{F\}$. Имеем $Z(\{F\}) \cap Z([y]) = Z[y, u - v]$.

Пусть теперь $k > 1$. Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &u - v = -y\nabla^k, \\ &u' - v' = -y'\nabla^k - ky\nabla^{k-1}\nabla'. \end{aligned} \tag{5}$$

Легко видеть, что

$$\nabla = u'v - v'u = (u' - v')v - (u - v)v'$$

(это соотношение получается разложением ∇ через левые части системы (5)). Отсюда ввиду (5) имеем

$$\nabla = -(y'\nabla^k + ky\nabla^{k-1}\nabla')v + y\nabla^k v' \bmod [F].$$

Так как $k > 1$ и

$$\nabla + (y'\nabla^k + ky\nabla^{k-1}\nabla')v - y\nabla^k v' \in [F],$$

в идеале $[F] : \nabla^\infty$ выполняется соотношение

$$1 + y'v\nabla^{k-1} + kyv\nabla^{k-2}\nabla' - y\nabla^{k-1}v' = 1 + f \in \mathcal{P}(F), \quad f(u, v, y) \in [y].$$

Так как система дифференциальных уравнений $y = 0$, $1 + f(u, v, y) = 0$ для $f \in [y]$ несовместна, утверждение доказано. □

Нам потребуется лемма.

Лемма 1. *Пусть* F — *уравнение Ритта* (4), *и пусть у* $\{F\}$ *нет существенных сингулярных компонент. Тогда пересечение* $Z(\mathcal{P}(F)) \cap Z([y])$ *является объединением прямых* (*дифференциальных множеств размерности* 1).

Доказательство. Так как у F нет существенных сингулярных компонент, $\{F\} = \mathcal{P}(F)$, поэтому

$$Z(\mathcal{P}) \cap Z([y]) = Z(\{F, y\}) = Z([u^n - v^n, y]) = \bigcup_{i=1}^{n} Z([y, u - \lambda_i v]),$$

где λ_i — различные корни уравнения $\lambda^n - 1$ в поле $\mathcal{F}$. □

Утверждение 2. *Пусть F — уравнение Ритта* (4), *$k = 1$. Тогда $Z(\mathcal{P}(F)) \cap$ $\cap\, Z([y])$ является объединением n прямых.*

Доказательство. По теореме о малых степенях сингулярные компоненты $\{F\}$ не являются существенными, поэтому утверждение сразу следует из леммы 1. □

Утверждение 3. *Пусть F — уравнение Ритта* (4), *$k = 2$, $n = 2$. Тогда пересечение главного решения $F = 0$ с решением $y = 0$ является пустым.*

Доказательство. Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
&u^2 - v^2 = y\nabla^2, \\
&uu' - vv' = y'\nabla^2 + 2y\nabla\nabla'.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

По теореме Гильберта о нулях $\nabla \in \sqrt{(u^2 - v^2, uu' - vv')}$ (здесь $\sqrt{\ }$ — радикал алгебраического идеала в кольце многочленов от u, u', v, v', u'', v''). Найдём минимальную степень p, для которой $\nabla^p \in (u^2 - v^2, uu' - vv')$. Вычислить такую степень и найти разложение ∇^p по многочленам $u - v$, $uu' - v'$ можно с помощью техники базисов Грёбнера. Получим

$$
\nabla^2 = (u'^2 - v'^2)(u^2 - v^2) - (uu' - vv')^2. \tag{7}
$$

Из уравнений (6), (7) будем иметь следующее соотношение:

$$
\nabla^2 - y\nabla^2(u'^2 - v'^2) - (y'\nabla^2 + 2y\nabla\nabla')^2 \in [F]
$$

(константы перед мономами, кратными y, y', значения не имеют).

Так как мы рассматриваем дробный идеал $[F] : \nabla^\infty$, последнее соотношение можно сократить на ∇^2. Получим

$$
1 + y\alpha + y'\beta \in \mathcal{P}(F), \quad \alpha, \beta \in \mathcal{F}[u, v, y, u', v', y', u'', v''].
$$

Так как система алгебраических уравнений $y = 0$, $y' = 0$, $1 + y\alpha + y'\beta = 0$ несовместна, утверждение доказано.

Отметим, что справедливость утверждения, как и справедливость утверждения 1 (для небольших k) можно установить, используя Maple. □

Аналогично доказывается случай, когда $n = 2$, $k > 2$.

Утверждение 4. *Пусть F — уравнение Ритта* (4), *$k \geqslant 2$, $n = 2$. Тогда пересечение главного решения $F = 0$ с решением $y = 0$ является пустым.*

Переходим к случаю $n = 3$. Если $k = 2$, то пока неизвестно, каким будет пересечение множества нулей главной компоненты уравнения Ритта с плоскостью $y = 0$. Добавление уравнений базиса Грёбнера $(F, F') : \nabla^\infty$ к образующим идеала $\{F, y\}$ влечёт $u, v \in \{\mathcal{P}(F), y\}$, поэтому искомое пересечение может быть либо точкой, либо пустым.

На данный момент нет алгоритма нахождения образующих дробного идеала даже в таком частном случае, а вычисление базиса Грёбнера идеалов $(F, F', F'', \ldots) : \nabla^\infty$ в Maple не принесло результата (уже для F''' вычисление занимает часы). С другой стороны, неизвестно, сколько производных нужно взять для проверки пустоты пересечения.

Утверждение 5. *Пусть F — уравнение Ритта* (4), *$k \geqslant 5$, $n = 3$. Тогда пересечение главного решения $F = 0$ с решением $y = 0$ является пустым.*

Доказательство. Рассуждения аналогичны доказательству утверждения 3. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &u^3 - v^3 = -y\nabla^k, \\ &u'u^2 - v'v^2 = -y'\nabla^k - ky\nabla^{k-1}\nabla'. \end{aligned}$$

Найдём подходящую степень ∇^p. Это $p = 4$. Получаем соотношение

$$\nabla^4 - y\nabla^k\alpha - y'\nabla^k\beta + y\nabla^{k-1}\gamma \in [F].$$

Так как $k \geqslant 5$, разделим соотношение на ∇^4, откуда получим истинность утверждения. $\square$

Следующие два утверждения можно проверить прямым вычислением.

Утверждение 6. *Пусть F — уравнение Ритта* (4), *$k = 4$, $n = 3$. Тогда пересечение главного решения $F = 0$ с решением $y = 0$ является пустым.*

Доказательство. Вычислим базис Грёбнера идеала $(F, f') : \nabla^\infty$. В нём есть элемент

$$\begin{aligned} G = {}&3 + 3u'^4vy - 21yv'^4u - 6yv'^7y'u^2v + 24y^2v'^6v^2u''u - 24y^2v'^6u^2vv'' + \\ &+ 18y^2v'^8u^2 - 4yu''v^2v'^2 + v'^3y'uv + 4yuv^2v''v + 4yv''u^2u^2 + 18y^2v'^6v^2u'^2 - \\ &- 18y^2v'^3u'^5v^2 - 18y^2v'^5u^2u'^3 - 9yv'uu'^3 - 9u'vv'^3y + 3y'v'u^2u^2 - \\ &- uy'u'^3v - 3u'v^2v'^2y^2 - 24u'y^2v'^5v^3u'' - 8u'v^2yv'v'' + 24u'^4y^2v'^2uv''v^2 - \\ &- 36u'y^2v'^7vu + 32u'^2y^2v'^4u^3v'' + 8v^3u'^4y^2u''v'^2 + 36y^2v'^4uu'^4v - \\ &- 12yv'^4y'u^2u'^3v - 6yv'^5v^3y'u'^2 + 6yv'^3uy'u'^4v^2 + 6yv'^5u'^2y'u^3 - 4u'^2vuyu'' - \\ &- 8v^3y^2v'v''u'^5 + 24u'v^2y^2v'^5v''u + 12u'yv'^6v^2y'u - 8u'u^3y^2u''v'^5 - \\ &- 48u'^3y^2v'^3u^2v''v + 8u'u^2yu''v'. \end{aligned}$$

$G \in \mathcal{P}(F)$, но система дифференциальных уравнений $G = 0$, $y = 0$ несовместна. Отсюда следует наше утверждение.

Можно рассуждать иначе. Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &u^3 - v^3 = y\nabla^4, \\ &3u^2u' - 3v^2v' = y'\nabla^4 + 4y\nabla^3\nabla'. \end{aligned} \tag{8}$$

Домножим первое уравнение на $3v'$, второе на v, получим $u^2\nabla = \alpha\nabla^3 \bmod [F]$, где $\alpha \in [y]$. Аналогично $v^2\nabla = \beta\nabla^3 \bmod [F]$, где $\beta \in [y]$. Поэтому $u^2 = \alpha\nabla^2$, $v^2 = \beta\nabla^2 \bmod \mathcal{P}(F)$. После дифференцирования получим

$$uu' - \alpha_1\nabla \in \mathcal{P}(F), \quad vv' - \beta_1\nabla \in \mathcal{P}(F), \quad \alpha_1, \beta_1 \in [y].$$

Как уже отмечалось, минимальная степень ∇, для которой выполняется $\nabla^p \in (u^3 - v^3, u^2u' - v^2v')$, равна 4. Нам теперь нужны коэффициенты такого разложения. Используя технику базисов Грёбнера, получаем

$$\nabla^4 = A(u^3 - v^3) + B(u^2u' - v^2v')^2 + (u'^3 - v'^3)uv(u^2u' - v^2v')$$

для некоторых многочленов $A, B \in \mathcal{F}\{u, v, y\}$. Ввиду системы (8) имеем

$$\begin{aligned}\nabla^4 = C\nabla^4 + (u'^2v * uu' - uv'^2 * vv')(u^2u' - v^2v') \bmod [F] = \\ = C\nabla^4 + (u'^2v\alpha_1 - v'^2u\beta_1)\nabla D\nabla^3 \bmod [F],\end{aligned}$$

где $C, D \in [y]$. Отсюда, сократив на ∇^4, получаем, что $1 \bmod [y] \in \mathcal{P}(F)$, что и требовалось доказать. □

Утверждение 7. *Пусть F — уравнение Ритта* (4), *$k = 3$, $n = 3$. Тогда пересечение главного решения $F = 0$ с решением $y = 0$ является пустым.*

Доказательство. Здесь также можно провести доказательство прямым подсчётом. В базисе Грёбнера идеала $(F, f') : \nabla^\infty$ есть элемент, равный 1 по модулю $[y]$:

$$\begin{aligned}&-9 + 6yv'^5y'v + 18y^2v'^4v''v - v'^4y'^2v^2 - 9yv'^3u'^2y'u - 9y^3v'^5u''^2uv + \\ &+ 18yv'^3 - 9y^2v''^2v'^2v^2 - 9y^2v'^6 - 6yv''v'^3v^2y' + 9y^3v''^2v'^2u'^3v^2 + \\ &+ 27u'y^2u''v'^3u - 6v'^2y'v - 6u'^2y'u - 18u'yu''u - 18yv'v''v + 18u'^3y + \\ &+ 9y^2u''^2v'^2uv + 6u'yu''v'^2y'uv + 6yv''u'^2y'v'uv + 9y^2v''^2u'^2uv + \\ &+ 18y^2u'^3v'^3 - u'^2y'^2u^2 + 18y^2u'^4u''u - 9u'y^3u''v'^6u + 3u'y^2u''v'^5y'uv + \\ &+ 27u'y^3u''v'^4v''uv + 2v'^2y'^2u'^2uv + 9y^2u'^4v'^2v''u^2y' - 54y^2v''v'^2uu' - \\ &- 6yu''u^2y'u'^3 - 27y^2u''v'^2u'^2v - 9y^2v''v'^4u'^2y'uv + 18y^3v''v'^5u'^2u + \\ &+ 6y^2v''v'^3u'^3v^2y' - 27y^3v''^2v'^3u'^2uv - 18y^3v''v'^4u'^3v - 18y^3v''v'^2u'^5u - \\ &- 9y^2u''^2u'^2u^2 + 9y^3u''^2u'^2v'^3u^2 - 9y^3u'^5v''^2uv - 9yu'^3v'^2y'v + \\ &+ 6yu'^5y'u - 6y^2u'^5v''y'v'uv + 18y^3v''v'u'^6v - 3u'^3y^2u''v'^3y'u^2 + \\ &+ 9u'^4y^3u''v'^3u - 9u'^5y^3u''v'^2v - 27u'^3y^3u''v'^2v''u^2 + 3u'^6y'y^2v'^2v + \\ &+ 3u'^2y'y^2v'^6u - 3u'^5y'y^2v'^3u - 3u'^3y'y^2v'^5v + u'^3y'^2yv'^4v^2 - \\ &- u'^2y'^2yv'^5uv + u'^4y'^2yv'^3u^2 - u'^5y'^2yv'^2uv + 9y^3u''v'^5u'^2v - 9y^2u'^6 + \\ &+ 27y^3u'^4v'v''^2u^2,\end{aligned}$$

и это доказывает наше утверждение. □

Наконец, перейдём к случаю, когда пересечение, как и в примере Ритта, является точкой. В отличие от примера 1, здесь многочлен не является однородным по степени.

Утверждение 8. *Пусть F — уравнение Ритта* (4), *$k = 2$, $n = 4$. Тогда пересечение главного решения $F = 0$ с решением $y = 0$ является точкой.*

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$G = -4u^3 + 2yv^2u'' - 2vyv''u + y'u'v^2 - y'v'uv - 4yv'u'v + 4yv'^2u \in \mathcal{P}(F)$$

(как и в примере 1, этот многочлен найден с использованием техники базисов Грёбнера). Очевидно, что из системы дифференциальных уравнений $G = 0$, $y = 0$, $F = 0$ следует $u = 0$, $v = 0$, $y = 0$, поэтому искомое пересечение либо пустое, либо является точкой.

Рассмотрим следующую градуировку в кольце $\mathcal{F}\{u, v, y\}$, полагая вес производных y равным 0, а вес остальных переменных равным 1. Отметим, что F и S_F являются однородными относительно введённой градуировки, следовательно, идеал $\mathcal{P}(F)$ также является однородным.

Предположим, что пересечение является пустым. Тогда найдётся многочлен $f \in [y]$, такой что $1 + f \in \mathcal{P}(F)$. Так как $\mathcal{P}(F)$ однороден по весу, f можно выбрать веса 0. Это означает, что f не содержит переменных u, v. Рассмотрим степенной ранжир на множестве $\{u, v, y\}$ (см. определение 2). Как отмечалось выше, идеал $[F] : S_F^\infty$ не содержит многочленов, редуцированных относительно F. Лидер F — это u'', а $1 + f$ содержит только производные y. Полученное противоречие доказывает утверждение. □

Исследование выполнено при поддержке НИР кафедры вычислительной математики механико-математического факультета МГУ «Разработка теории и программного обеспечения для задач вычислительной математики и её приложений» и Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект».

Литература

[1] Кондратьева М. В. Оценка типовой дифференциальной размерности системы линейных дифференциальных уравнений // Фундамент. и прикл. матем. — 2019. — Т. 22, вып. 5. — С. 259—269.

[2] Кондратьева М. В. Типовая размерность системы дифференциальных уравнений первого порядка // Фундамент. и прикл. матем. — 2023. — Т. 24, вып. 3. — С. 129—138.

[3] Кондратьева М. В. О гипотезе Жане для системы дифференциальных уравнений в частных производных // Фундамент. и прикл. матем. — 2024. — Т. 25, вып. 1. — С. 123—131.

[4] Кондратьева М. В., Михалёв А. В., Панкратьев Е. В. Граница Якоби для систем алгебраических дифференциальных уравнений // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 4. — С. 151—166.

[5] Панкратьев Е. В. Стандартные базисы идеалов в дифференциальной алгебре и приложения. — М.: Интуит, 2018.

[6] Golubitsky O. D., Kondratieva M. V., Ovchinnikov A. I. On the generalized Ritt problem as a computational problem // J. Math. Sci. — 2009. — Vol. 163, no. 5. — P. 515—522.

[7] Kolchin E. R. Differential Algebra and Algebraic Groups. — Academic Press, 1973.

[8] Kondratieva M. V., Levin A. B., Mikhalev A. V., Pankratiev E. V. Differential and Difference Dimension Polynomials. — Kluwer Academic, 1999.

[9] Ritt J. Differential Algebra. — New York: Amer. Math. Soc., 1950.