Классификация коммутативных подалгебр длины $n-2$ в алгебре матриц порядка n в общем случае

О. В. МАРКОВА
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Петербургский государственный университет
путей сообщения императора Александра I*
e-mail: ov_markova@mail.ru

УДК 512.643

Ключевые слова: функция длины алгебры, коммутативная матричная подалгебра, индекс нильпотентности, циклическая матрица, разбиение натурального числа.

Аннотация

В данной работе получена классификация с точностью до сопряжённости коммутативных подалгебр длины $n-2$ в алгебре матриц порядка n в общем случае: над полями достаточно большой мощности и при условии $n \geqslant 5$. Для $n = 3, 4$ также получена классификация при дополнительном ограничении, что алгебры содержат матрицу максимально возможной степени, соответствующем общему случаю алгебр больших порядков.

Abstract

O. V. Markova, Classification of commutative subalgebras of length $n-2$ in the matrix algebra of order n in the general case, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 4, pp. 143—171.

In this paper, a classification of commutative subalgebras of length $n-2$ in the algebra of matrices of order n in the general case over fields of sufficiently large cardinality and under the condition $n \geqslant 5$ is obtained. For $n = 3$, 4, a classification under the additional restriction that the algebras contain a matrix of the largest possible degree, corresponding to the general case of algebras of large orders, is also obtained.

1. Введение

Изучение коммутативных матричных подалгебр является классической областью исследований, которая активно развивалась в течение XX века и в настоящее время продолжает привлекать интерес математиков по всему миру. Здесь можно отметить такие направления исследований, как изучение возможных значений числовых характеристик коммутативных матричных подалгебр, вопросы построения и классификации. На стыке данных направлений находится вопрос классификации коммутативных матричных подалгебр в алгебре матриц порядка n с заданными значениями некоторых из их числовых характеристик.

Фундаментальная и прикладная математика, 2025, том 25, № 4, с. 143—171.

Одним из таких числовых параметров является длина алгебры (длина понимается в смысле определения 2.4). Длина играет важную роль в изучении конечномерных алгебр, поскольку в некотором смысле эта характеристика измеряет мультипликативную сложность порождающей системы или алгебры в целом. Поэтому она важна в ряде задач вычислительных методов теории матриц (см., например, [8,16]). Заметим, что длина является нетривиальной для вычисления характеристикой, поскольку для нахождения длины алгебры требуется найти длины всех её систем порождающих.

Исследование длины коммутативных подалгебр алгебры матриц восходит к работе А. Паза [21] 1984 г., в которой было установлено, что длина любой коммутативной подалгебры алгебры матриц порядка n над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ не больше $n-1$. В [18] показано, что эта оценка справедлива в случае произвольного поля и является точной.

Теорема 1.1 [18, теорема 6.1]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$. Тогда $l(\mathcal{A}) \leqslant n-1$.*

Таким образом, можно говорить о коммутативных подалгебрах $M_n(\mathbb{F})$ длины $n-1$ как о коммутативных подалгебрах *максимальной длины*. С другой стороны, пример однопорождённых подалгебр показывает, что коммутативная подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$ может иметь любую целую длину из отрезка $[0, n-1]$.

Естественным образом возник вопрос описания коммутативных подалгебр в $M_n(\mathbb{F})$ заданной длины $k \in [0, n-1]$. В [4,9,18] охарактеризован класс коммутативных подалгебр, для которых длина максимальна (подробнее см. раздел 2). Для алгебр минимальной нетривиальной длины 1 классификация с точностью до сопряжённости получена в [5]. Над алгебраически замкнутыми полями также известна классификация алгебр длины $n-2$ с точностью до сопряжённости (см. [10]). В частности, показано, что для фиксированного n количество попарно несопряжённых коммутативных алгебр длины $n-2$ конечно, получена формула их количества с использованием числа разбиений натуральных чисел.

В данной работе продолжено исследование коммутативных алгебр длины $n-2$ в общем случае: над полями достаточно большой мощности. Для поля действительных чисел и больших конечных полей показано, что количество попарно несопряжённых алгебр указанного типа в алгебре матриц фиксированного порядка конечно и получена формула количества различных алгебр с использованием числа разбиений. Построены примеры полей, для которых несопряжённых алгебр бесконечно много.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 вводится система обозначений, здесь же представлены некоторые вспомогательные результаты относительно длины алгебр, матричных подалгебр, порождённых циклическими матрицами и их прямых сумм. В разделе 3 описаны некоторые общие свойства коммутативных алгебр длины $n-2$, в частности, найдены возможные значения других их числовых параметров. В разделе 4 задача описания коммутативных алгебр длины $n-2$ сводится к задаче описания нильпотентных и локальных алгебр длины $n-2$ и их прямых сумм с коммутативными алгебрами максимальной длины. В разделе 5 представлен основной результат данной работы (теорема 2.23) — получено описание с точностью до сопряжённости коммутативных подалгебр длины $n-2$ в алгебре матриц порядка n в общем случае: над полями достаточно большой мощности и при условии $n \geqslant 5$. Для $n = 3, 4$ также получена классификация при дополнительном ограничении, что алгебры содержат матрицу максимально возможной степени, соответствующем общему случаю алгебр больших порядков.

2. Обозначения, определения и известные результаты

В данном разделе вводится система обозначений, здесь же представлены некоторые вспомогательные результаты относительно длины алгебр, строения коммутативных нильпотентных матричных алгебр и матричных подалгебр, порождённых циклическими матрицами.

Понятия теории колец и алгебр, использованные в статье, можно найти, например, в [13]. Все рассматриваемые в работе алгебры — ассоциативные конечномерные алгебры с единицей над полями.

2.1. Системы порождающих и длина

Важную роль в изучении конечномерных алгебр играет такой инвариант алгебры, как *длина*; определим её согласно [20].

Пусть $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ — непустое конечное множество (алфавит). Конечные последовательности букв из B назовём словами. Пусть B^* обозначает множество всех слов в алфавите B, F_B — свободную полугруппу над алфавитом B, т. е. B^* с операцией конкатенации.

Определение 2.1. *Длина* слова $b_{i_1} \ldots b_{i_t}$, где $b_{i_j} \in B$, равна t. Будем считать 1 (пустое слово) словом от элементов B *длины* 0.

Пусть B^i обозначает множество всех слов в алфавите B длины не большей i, $i \geqslant 0$.

Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ над произвольным полем $\mathbb{F}$ и её конечную систему порождающих $\mathcal{S}$. Произведения элементов из порождающего множества $\mathcal{S}$ можно рассматривать как образы элементов свободного моноида $F_{\mathcal{S}}$ при естественном гомоморфизме, и их также можно называть словами от образующих и использовать естественное обозначение $\mathcal{S}^i$.

Положим $\mathcal{S}^0 = \{1_{\mathcal{A}}\}$, если алгебра $\mathcal{A}$ содержит единицу $1_{\mathcal{A}}$, иначе, положим $\mathcal{S}^0 = \varnothing$.

Обозначение 2.2. Положим $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{S}^i \rangle$, где $\langle S \rangle$ обозначает линейную оболочку множества S в некотором линейном пространстве над полем $\mathbb{F}$. Заметим, что $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle = \mathbb{F}$ для алгебр с единицей и $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = 0$ иначе. Пусть также $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ обозначает линейную оболочку всех слов в алфавите $\{a_1, \ldots, a_k\}$.

Из конечномерности $\mathcal{A}$ получаем, что найдётся такой номер h, что $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$. Если для некоторого $h \geqslant 0$ выполнено $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$, то

$$\mathcal{L}_{h+2}(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\rangle = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\rangle = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$$

и также $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_h(\mathcal{S})$ для всех $i \geqslant h$.

Определение 2.3. *Длиной системы порождающих* $\mathcal{S}$ алгебры $\mathcal{A}$ называется число $l(\mathcal{S}) = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ \colon \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}$.

Определение 2.4. *Длиной алгебры* $\mathcal{A}$ называется число

$$l(\mathcal{A}) = \max\{l(\mathcal{S}) \colon \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}.$$

Обозначение 2.5. Пусть $a \in \mathcal{A}$ и $\deg a$ обозначает степень минимального многочлена элемента a над полем $\mathbb{F}$. Из конечномерности алгебры $\mathcal{A}$ следует, что для любого $a \in \mathcal{A}$ справедлива оценка $\deg a \leqslant \dim \mathcal{A}$.

Тогда положим

$$m(\mathcal{S}) = \max\{\deg w, w \in \mathcal{S}\},$$
$$m(\mathcal{A}) = \max_{\mathcal{S}} m(\mathcal{S}) = \max_{a \in \mathcal{A}}\{\deg a\}.$$

Предложение 2.6 [18, предложение 5.1]. *Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная алгебра с единицей над полем $\mathbb{F}$. Тогда для любого расширения $\mathbb{K}$ поля $\mathbb{F}$ выполняется неравенство $l(\mathcal{A}_{\mathbb{F}}) \leqslant l(\mathcal{A}_{\mathbb{K}})$.*

2.2. Циклические матрицы

Пусть далее $M_n(\mathbb{F})$ обозначает алгебру матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$, $T_n(\mathbb{F})$ — подалгебру верхнетреугольных матриц в $M_n(\mathbb{F})$, $N_n(\mathbb{F})$ — подалгебру нильпотентных матриц в $T_n(\mathbb{F})$ (иными словами, алгебру верхних нильтреугольных матриц). Через $E_{i,j}$ будем обозначать матричную единицу, т. е. матрицу с 1 на позиции (i, j) и нулями на остальных местах. Для матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$ через a_{ij} и $(A)_{ij}$ будем обозначать её элемент, стоящий на позиции (i, j). Через $\sigma(A)$ обозначим спектр, т. е. множество собственных значений, матрицы A.

Нам потребуется следующий специальный класс матриц.

Определение 2.7. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Матрица $C \in M_n(\mathbb{F})$ называется *циклической*, если $\deg C = n$.

Известно больше десятка других содержательных эквивалентных описаний циклических матриц (см., например, [17]).

Пусть $C \in M_n(\mathbb{F})$ — циклическая матрица. Напомним эквивалентные определения цикличности матрицы, которые будут использованы в статье. В случае когда поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, цикличность матрицы равносильна тому, что каждое собственное число имеет геометрическую кратность 1, т. е. каждому собственному числу в жордановой нормальной форме соответствует ровно одна жорданова клетка.

Другое условие сформулируем через сопровождающие матрицы.

Определение 2.8. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $n \in \mathbb{N}$ и

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{F}[x]$$

(многочлен со старшим коэффициентом 1 будем называть *унитарным*). *Сопровождающей матрицей многочлена* $f(x)$ называется матрица

$$C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$

Теорема 2.9 [19, теорема 3.3.15]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $n \in \mathbb{N}$ и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Матрица A является циклической тогда и только тогда, когда она подобна сопровождающей матрице своего характеристического многочлена.*

Следствие 2.10. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $n \in \mathbb{N}$. Циклические матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ с одинаковыми характеристическими многочленами подобны.*

Теорема 2.11 [9, теорема 4.1]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим циклические матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ и порождённые ими подалгебры $\mathcal{A} = \mathcal{L}(A)$, $\mathcal{B} = \mathcal{L}(B)$. Пусть $\mu_A(x), \mu_B(x) \in \mathbb{F}[x]$ — минимальные многочлены матриц A, B, а также $\mathfrak{A} = \mathbb{F}[x]/\big(\mu_A(x)\big)$, $\mathfrak{B} = \mathbb{F}[x]/\big(\mu_B(x)\big)$. Тогда подалгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ сопряжены в $M_n(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда изоморфны алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.*

Лемма 2.12 [18, лемма 6.3]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$. Если существует циклическая матрица $A \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ является подалгеброй, порождённой матрицей A, и $l(\mathcal{A}) = n-1$.*

Связь функции длины с циклическими матрицами установлена в следующей теореме.

Теорема 2.13 [4, теорема 3]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Коммутативная подалгебра $\mathcal{A}$ в $M_n(\mathbb{F})$ имеет длину $n-1$ тогда и только тогда, когда она порождена циклической матрицей.*

Отметим некоторые циклические матрицы специального вида, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Предложение 2.14. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $n \geqslant 3$. Рассмотрим матрицу $C \in M_n(\mathbb{F})$, $C = E_{1,2} + \ldots + E_{n-2,n-1} + E_{n,n} + \gamma E_{1,n} + \beta E_{n,n-1}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{F}$. Тогда матрица C является циклической матрицей с собственными значениями 0, 1 при любых $\beta, \gamma \in \mathbb{F}$.*

Доказательство. Положим

$$A = E_{1,2} + \ldots + E_{n-2,n-1} \in N_n(\mathbb{F}), \quad B = E_{n,n} + \gamma E_{1,n} + \beta E_{n,n-1} \in M_n(\mathbb{F}).$$

Имеем

$$C = A + B, \quad AB = BA = 0, \quad C^k = (A+B)^k = A^k + B^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, в частности, следует, что множество собственных значений матрицы C совпадает с множеством собственных значений матрицы B.

Также

$$B^2 = \beta\gamma E_{1,n-1} + E_{n,n} + \gamma E_{1,n} + \beta E_{n,n-1} = \beta\gamma E_{1,n-1} + B, \quad B^3 = B^2.$$

Многочлен $x^2(x-1)$ аннулирует матрицу B, поэтому собственных значений отличных от 0 и 1 у матрицы B быть не может. При этом матрица B не нильпотентна и $B \neq E$, следовательно, оба числа 0, 1 являются собственными значениями матрицы B.

Нам осталось показать, что множество матриц $E, C, \ldots, C^{n-1}$ линейно независимо.

Имеем

$$(A+B)^{n-1} = A^{n-1} + B^{n-1} = B^{n-1} = B^2 = \beta\gamma E_{1,n-1} + B,$$
$$(A+B)^{n-2} = A^{n-2} + B^{n-2} = E_{1,n-1} + B^2 = (1+\beta\gamma)E_{1,n-1} + B,$$

значит,

$$\langle (A+B)^{n-2}, (A+B)^{n-1} \rangle = \langle A^{n-2} = E_{1,n-1}, B \rangle.$$

Матрицы $A, \ldots, A^{n-2}, B$ линейно независимы по построению,

$$(A+B)^i = A^i + B^2 = A^i + \beta\gamma E_{1,n-1} + B, \quad i = 2, \ldots, n-3,$$

следовательно,

$$\dim\langle (A+B), \ldots, (A+B)^{n-1} \rangle = \dim\langle A, \ldots, A^{n-2}, B \rangle = n-1.$$

Также $(A^i)_{1,1} = B_{1,1} = 0$, откуда получаем, что $E \notin \langle A, \ldots, A^{n-2}, B \rangle$.

Таким образом,

$$\dim\langle E, C, \ldots, C^{n-1} \rangle = \dim\langle E, A, \ldots, A^{n-2}, B \rangle = n. \qquad \square$$

2.3. Прямая сумма алгебр, порождённых циклическими матрицами

В данном разделе показано, при каких условиях на поле прямая сумма алгебр, порождённых циклическими матрицами, также порождена циклической матрицей.

Предложение 2.15 [6, предложение 4.26]. *Пусть $k, m, n \in N$, $n = k + m$, $\mathbb{F}$ — поле, содержащее не менее $[n^2/4] + 1$ различных элементов, где $[\,.\,]$ обозначает целую часть числа. Рассмотрим подалгебры $\mathcal{A} \subseteq M_k(\mathbb{F})$, $\mathcal{B} \subseteq M_m(\mathbb{F})$, порождённые циклическими матрицами. Обозначим $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ блочно-диагональную подалгебру в $M_n(\mathbb{F})$. Тогда $\mathcal{C}$ порождена циклической матрицей.*

Докажем уточнение данного результата, в котором ослаблено ограничение на поле за счёт рассмотрения фиксированного спектра одной из матриц.

Предложение 2.16. *Пусть* $k, m, m', n \in N$, $n = k + m'$, $m \leqslant m'$, $\mathbb{F}$ *— поле, содержащее не менее* $m' + 2$ *различных элементов. Рассмотрим подалгебры* $\mathcal{A} \subseteq M_k(\mathbb{F})$, $\mathcal{B} \subseteq M_{m'}(\mathbb{F})$, *порождённые циклическими матрицами, причём алгебра* $\mathcal{A}$ *порождена циклической матрицей с двумя собственными числами* 0, 1 *либо с одним собственным числом* $\lambda \in \mathbb{F}$. *Обозначим* $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ *блочно-диагональную подалгебру в* $M_n(\mathbb{F})$. *Тогда* $\mathcal{C}$ *порождена циклической матрицей.*

Доказательство. Рассмотрим циклические матрицы $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. В случае если у матрицы A одно собственное число $\lambda \in \mathbb{F}$, можно заменить A на циклическую матрицу $A - \lambda E$ с собственным числом 0. Поэтому далее считаем, что у A собственные числа 0 и, возможно, 1.

Положим

$$A' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}, \quad B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{C}, \quad E' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \in \mathcal{C}.$$

Пусть $\bar{\mathbb{F}}$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}$. Пусть $0 \leqslant s \leqslant m$ — такой индекс, что $\beta_1, \ldots, \beta_s \in \mathbb{F}$, $\beta_{s+1}, \ldots, \beta_m \in \bar{\mathbb{F}} \setminus \mathbb{F}$ — все различные собственные числа матрицы B. Заметим, что для любых различных $u, v = s+1, \ldots, m$ и произвольного $\gamma \in \mathbb{F}$ $\beta_u + \gamma \neq \beta_v + \gamma$ и $\beta_u + \gamma \notin \mathbb{F}$, поэтому, в частности, с собственными числами матрицы A совпадений не будет ни при каком $\gamma \in \mathbb{F}$. Если $0, 1 \notin \{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$, в частности, если $s = 0$, то матрица $C = A' + B'$ циклическая и утверждение верно.

Пусть далее $s > 0$ и $\{0, 1\} \cap \{\beta_1, \ldots, \beta_s\} \neq \varnothing$. Обозначим через $m_1, \ldots, m_s$ размеры жордановых клеток жордановой нормальной форме матрицы B, соответствующих числам $\beta_1, \ldots, \beta_s$. Тогда характеристический многочлен матрицы B раскладывается в произведение $(x - \beta_1)^{m_1} \cdots (x - \beta_s)^{m_s} g(x)$, где множитель $g(x)$ имеет корни $\beta_{s+1}, \ldots, \beta_m$. Используя обобщённую жорданову нормальную форму [3, гл. IV, § 15.5, теорема 6], получаем, что матрица B подобна над полем $\mathbb{F}$ блочно-диагональной матрице $B_1 = J \oplus \tilde{B}$, где $J = J_{m_1}(\beta_1) \oplus \ldots \oplus J_{m_s}(\beta_s)$, матрица $\tilde{B}$ соответствует обобщённым жордановым клеткам для многочлена $g(x)$, $B = T^{-1} B_1 T$. Рассмотрим алгебру $\mathcal{B}_T = T \mathcal{B} T^{-1}$.

Поскольку числа $\beta_1, \ldots, \beta_s$ не являются собственными числами матрицы $\tilde{B}$, то $g(\beta_i) = \gamma_i \neq 0$ при $i = 1, \ldots, s$. Рассмотрим матрицу $g(B_1)$. Имеем

$$g(B_1) = \begin{pmatrix} g(J) & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Поскольку по построению матрица J является верхнетреугольной с константами $\beta_1, \ldots, \beta_s$ на главной диагонали, то матрица $g(J)$ является верхнетреугольной с константами $g(\beta_i) = \gamma_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, s$ на главной диагонали, и как следствие, $g(J)$ — невырожденная матрица. Для любой невырожденной матрицы M верно, что существует такой многочлен $h(x) \in F[x]$, для которого $E = h(M)$. В частности, утверждение верно для $M = g(J)$. Тогда для многочлена $k(x) = h\big(g(x)\big)$

выполнено матричное равенство

$$k(B_1) = \begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_T$$

и также

$$E - k(B_1) = \begin{pmatrix} O & O \\ O & E \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_T.$$

Докажем, что в алгебре $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}_T$ содержится циклическая матрица. Из доказанного выше следует, что в этой алгебре содержатся все матрицы C_f вида

$$C_f = \begin{pmatrix} A & O & O \\ O & f(J) & O \\ O & O & \tilde{B} \end{pmatrix},$$

где $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ — произвольный многочлен.

Заметим, что для цикличности матрицы C_f достаточно подобрать многочлен $f(x)$ таким образом, чтобы матрица $f(J)$ была циклической и не пересекались множества собственных чисел матриц A и $f(J)$. Из условия на мощность поля можно взять s попарно различных чисел $\delta_1, \ldots, \delta_s$, среди которых нет 0 и 1. Заметим, что, как описано выше, алгебра $\mathcal{L}(J)$, порождённая матрицей J, имеет блочно-полосатый вид $\bigoplus\limits_{j=1}^{s} \mathcal{N}_{m_j}$. Отсюда видно, что она содержит циклическую матрицу $J_{m_1}(\delta_1) \oplus \ldots \oplus J_{m_s}(\delta_s)$, которая из условия на структуру алгебры $\mathcal{L}(J)$ совпадает с матрицей $f(J)$ для некоторого $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. Тогда матрица C_f является искомой.

Требуемой циклической матрицей в алгебре $\mathcal{C}$ является матрица $U^{-1}C_fU$, где

$$U = \begin{pmatrix} E & O \\ O & T \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Предложение 2.17. *Пусть $m, m', n \in N$, $n = m' + 2$, $m \leqslant m'$, $\mathbb{F}$ — поле, содержащее не менее n различных элементов. Рассмотрим подалгебры $\mathcal{A} \subseteq M_2(\mathbb{F})$, $\mathcal{B} \subseteq M_{m'}(\mathbb{F})$, порождённые циклическими матрицами. Обозначим $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ блочно-диагональную подалгебру в $M_n(\mathbb{F})$. Тогда $\mathcal{C}$ порождена циклической матрицей.*

Доказательство. Заметим, что если мощность поля больше $n^2/4+1$, в частности для бесконечных полей, утверждение доказано для матрицы A произвольного порядка (см. предложение 2.15). Поэтому в дальнейшем доказательстве без ограничения общности будем рассматривать только конечные поля: $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$. Из условия теоремы видно, что $q \geqslant n = m' + 2 > 2$.

Рассмотрим циклические матрицы $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Пусть $\bar{\mathbb{F}}$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}$. Существует такой индекс $0 \leqslant s \leqslant m$, что $\beta_1, \ldots, \beta_s \in \mathbb{F}$, $\beta_{s+1}, \ldots, \beta_m \in \bar{\mathbb{F}} \setminus \mathbb{F}$ — все различные собственные числа матрицы B.

Положим

$$A' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C},\ B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{C},\ E' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix} \in \mathcal{C},\ E'' = \begin{pmatrix} O & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \in \mathcal{C}.$$

Рассмотрим все возможные варианты собственных значений матрицы $\mathcal{A}$.

1. Пусть у матрицы A два различных собственных числа $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Тогда матрица $A_0 = (\beta-\alpha)^{-1}(A-\alpha E) \in \mathcal{A}$ — циклическая матрица с собственными числами 0, 1 и утверждение следует из предложения 2.16.

2. Пусть у A одно собственное число $\alpha \in \mathbb{F}$ кратности 2. Если $\alpha \notin \{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$, в частности если $s=0$, то матрица $C = A' + B'$ циклическая и утверждение верно. Допустим, что $s > 0$ и $\alpha \in \{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$. По условию на мощность поля найдётся $\gamma \in \mathbb{F} \setminus \{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$. Тогда $A' + (\gamma-\alpha)E' + B' \in \mathcal{C}$ — циклическая матрица.

3. Минимальный многочлен $\mu_A(t)$ матрицы A неприводим над $\mathbb{F}$. Если $\mu_A(t) \nmid \chi_B(t)$, то матрица $C = A' + B'$ циклическая и утверждение верно. Допустим, что $\mu_A(t) | \chi_B(t)$.

Для произвольного унитарного неприводимого многочлена $g(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ степени m верно, что $\mathbb{F}_q[x]/\big(g(x)\big) \cong \mathbb{F}_{q^m}$ (см., [2, глава 1, теорема 1.86; глава 2, теоремы 2.5 и 2.10]). Поэтому по теореме 2.11 все подалгебры в $M_2(\mathbb{F}_q)$, порождённые циклическими матрицами с неприводимыми характеристическими многочленами сопряжены между собой в $M_2(\mathbb{F}_q)$ и, следовательно, сопряжены с алгеброй $\mathcal{A}$. Поскольку характеристический многочлен матрицы не меняется при сопряжении, то отсюда следует, что в алгебре $\mathcal{A}$ содержится циклическая матрица с любым неприводимым квадратичным характеристическим многочленом. Осталось показать, что можно выбрать циклическую матрицу $A_2 \in \mathcal{A}$, минимальный многочлен которой не делит $\chi_B(t)$. В этом случае матрица

$$A_2' + B' = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$$

циклическая по доказанному выше.

У многочлена $\chi_B(t)$ степени m' не более $M = [m'/2]$ различных унитарных неприводимых делителей второй степени, поэтому достаточно показать, что над полем $\mathbb{F}_q$ существует не менее $M+1$ унитарного неприводимого многочлена второй степени. Используя общую формулу для числа унитарных неприводимых многочленов над конечным полем [2, глава 3, теорема 3.25], для числа $N_q(2)$ многочленов второй степени над $\mathbb{F}_q$ получаем равенство $N_q(2) = (1/2)(q^2-q)$. Для полей мощности $q \geqslant 3$ имеем $N_q(2) \geqslant q \geqslant m'+2 > M+1$. □

2.4. Алгебры, порождённые циклическими матрицами, и алгебры длины $n-2$ над алгебраически замкнутыми полями

В данном разделе приведём основные классификационные и количественные результаты для коммутативных алгебр длин $n-2$ и $n-1$ над алгебраически замкнутыми полями. Нам понадобятся следующие сведения из теории чисел.

Определение 2.18. *Разбиение* натурального числа n — это представление n в виде суммы положительных целых чисел, называемых частями, так, что порядок следования частей не учитывается (т. е. разбиения, отличающиеся только порядком частей, считаются равными). В канонической записи разбиения части перечисляются в невозрастающем порядке.

Число разбиений $P(n)$ натурального числа n и его вычисление в виде функции от n является одним из фундаментальных объектов изучения в теории чисел. Асимптотическое равенство для числа разбиений предложено Г. Х. Харди и С. Рамануджаном (см., например, [15, глава 5] и последовательность A000041 в энциклопедии целочисленных последовательностей OEIS [11]): при $n \to \infty$

$$P(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

Обозначение 2.19. Рассмотрим циклическую матрицу $C \in M_n(\mathbb{F})$. В жордановой нормальной форме матрицы C каждому собственному значению γ_j соответствует единственная жорданова клетка размера n_j, причём $\sum\limits_j n_j = n$. Известно, что жорданова нормальная форма матрицы единственна с точностью до порядка клеток. Таким образом, жордановой нормальной форме матрицы C можно поставить в соответствие разбиение числа n. Обозначим его $p_J(C)$.

Обозначение 2.20. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$, порождённую циклической матрицей. Тогда через $p_J(\mathcal{A})$ обозначим разбиение, соответствующее произвольной циклической матрице в алгебре $\mathcal{A}$.

Обозначение 2.21. Обозначим $J_k = \sum\limits_{i=1}^{k-1} E_{i,i+1} \in T_k(\mathbb{F})$ жорданову клетку размера k с собственным числом 0 и возьмём порождённую ей алгебру $\mathcal{N}_k = \langle E_k, J_k^i \mid i = 1, \dots, k-1 \rangle \subset T_k(\mathbb{F})$.

Пусть дано разбиение $\mathbf{p} = (n_1, \dots, n_m)$ числа n, где $n \geqslant n_1 \geqslant \dots \geqslant n_m \geqslant 0$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$. Поставим ему в соответствие алгебру $\mathcal{T}_{\mathbf{p}} = \bigoplus\limits_{j=1}^{m} \mathcal{N}_{n_j} \subset T_n(\mathbb{F})$, где прямая сумма понимается как алгебра блочно-диагональных матриц.

Теорема 2.22 [9, теорема 3.6]. *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Рассмотрим коммутативные подалгебры $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset M_n(\mathbb{F})$, порождённые циклическими матрицами. Тогда*

1) *подалгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ сопряжены в $M_n(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда $p_J(\mathcal{A}) = p_J(\mathcal{B})$;*
2) *в $M_n(\mathbb{F})$ содержится ровно $P(n)$ различных с точностью до сопряжённости подалгебр, порождённых циклическими матрицами;*
3) *подалгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с верхнетреугольной подалгеброй $\mathcal{T}_{p_J(\mathcal{A})}$.*

Теорема 2.23 [10, теорема 6.2]. *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$, содержащую единичную матрицу. Тогда справедливо следующее.*

I. *$l(\mathcal{A}) = n - 2$ тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена в $M_n(\mathbb{F})$ с одной из следующих алгебр:*

(1) $\mathbb{F}E_n$, *если* $n = 2$;

при $n \geqslant 3$

(2) $\mathbb{F}E_2 \oplus \mathcal{T}_{\mathbf{p}(n-2)}$, *где* $\mathbf{p}(n-2)$ — *всевозможные разбиения числа* $n-2$, *а* $\mathcal{T}_{\mathbf{p}(n-2)}$ — *соответствующие им в смысле обозначения* 2.21 *подалгебры в* $M_{n-2}(\mathbb{F})$;

(3) $\mathcal{A}_{0;n} = \langle E_n, A, A^2, \ldots, A^{n-2}\rangle$, $A = E_{1,2} + \ldots + E_{n-2,n-1} \in N_n(\mathbb{F})$;

(4) $\mathcal{A}_{1;n} = \langle E_{1,n},\ C|\ C \in \mathcal{A}_{0;n}\rangle$;

(5) $\mathcal{A}_{2;n} = \langle E_{n,n-1},\ C|\ C \in \mathcal{A}_{0;n}\rangle$;

(6) *при* $n = 4$ $\mathcal{A}_{3;4}(1) = \langle E_{1,n} + E_{n,n-1},\ C|\ C \in \mathcal{A}_{0;n}\rangle$;

(7) *при* $n = 4$, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 2$, $\mathcal{A}_{4;4} = \langle E_4,\ E_{1,2} + E_{3,4},\ E_{1,3} + E_{2,4},\ E_{1,4}\rangle$;

(8.$j.m$) *при* $j \in \{0,1,2\}$, $m \in \{3,\ldots,n-1\}$ $\mathcal{A}_{j;m} \oplus \mathcal{T}_{\mathbf{p}(n-m)}$, *где* $\mathbf{p}(n-m)$ — *всевозможные разбиения числа* $n-m$, *а* $\mathcal{T}_{\mathbf{p}(n-m)}$ — *соответствующие им подалгебры в* $M_{n-m}(\mathbb{F})$.

II. *Различные алгебры попарно не сопряжены.*

III. (1) *В* $M_2(\mathbb{F})$ *есть ровно одна подалгебра длины* 0 — *алгебра* $\mathbb{F}E_2$.

(2) *В* $M_3(\mathbb{F})$ *содержится четыре различных с точностью до сопряжённости подалгебры длины* 1.

(3) *В* $M_4(\mathbb{F})$ *содержится девять различных с точностью до сопряжённости подалгебр длины* 2, *если* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, *и десять в противном случае.*

(4) *При* $n \geqslant 5$ $M_n(\mathbb{F})$ *содержит* $P(n-2) + 3\sum\limits_{m=3}^{n-1} P(n-m) + 3$ *различных с точностью до сопряжённости подалгебр длины* $n-2$.

3. Общие свойства коммутативных матричных алгебр длины $n-2$

В данном разделе будет показано, что значение длины коммутативной алгебры, близкое к максимальному, определяет другие её числовые характеристики, такие как размерность и максимальная степень минимального многочлена элемента алгебры. Также значением длины такой алгебры определяется нормальная форма некоторых входящих в неё матриц.

Сперва покажем, что значение длины $n-2$ определяет возможные значения её размерности.

Лемма 3.1. *Пусть* $\mathbb{F}$ — *произвольное поле,* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, *и пусть* $\mathcal{A}$ — *коммутативная подалгебра в* $M_n(\mathbb{F})$ *длины* $l(\mathcal{A}) = n-2$. *Тогда* $\dim\mathcal{A} \in \{n-1, n\}$.

Доказательство. Обозначим через $\bar{\mathbb{F}}$ алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}$. Рассмотрим подалгебру $\mathcal{A}_{\bar{\mathbb{F}}} \subseteq M_n(\bar{\mathbb{F}})$, $\mathcal{A}_{\bar{\mathbb{F}}} = \mathcal{A} \otimes \bar{\mathbb{F}}$. Согласно предложению 2.6 и теореме 1.1, имеем

$$n - 2 = l(\mathcal{A}) \leqslant l(\mathcal{A}_{\bar{\mathbb{F}}}) \leqslant n - 1,$$

т. е. $l(\mathcal{A}_{\bar{\mathbb{F}}}) \in \{n-2, n-1\}$. Тогда по теореме 2.13 либо по теореме 2.23 о характеризации алгебр длин $n-2$ и $n-1$ над алгебраически замкнутыми полями получаем, что $\dim_{\bar{\mathbb{F}}} \mathcal{A}_{\bar{\mathbb{F}}} \in \{n-1, n\}$. По построению размерность не меняется при расширении поля коэффициентов, т. е. $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A} = \dim_{\bar{\mathbb{F}}} \mathcal{A}_{\bar{\mathbb{F}}}$, значит, $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A} \in \{n-1, n\}$. □

Теперь покажем, что данное значение длины определяет максимальную степень минимального многочлена элементов алгебры в случае алгебры матриц порядка не менее 5.

Предложение 3.2 [6, предложение 4.56]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, и пусть $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — коммутативная подалгебра, содержащая единичную матрицу. Тогда*

1) *если $m(\mathcal{A}) = n-1$ и $\dim \mathcal{A} \leqslant 2n-3$, то $l(\mathcal{A}) \leqslant n-2$;*
2) *если $m(\mathcal{A}) \leqslant n-2$ и $\dim \mathcal{A} \leqslant 2n-5$, то $l(\mathcal{A}) \leqslant n-3$.*

Лемма 3.3. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$, и пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$ длины $l(\mathcal{A}) = n-2$. Тогда $m(\mathcal{A}) = n-1$.*

Доказательство. По лемме 2.12 выполнена верхняя оценка $m(\mathcal{A}) \leqslant n-1$. С другой стороны, если $m(\mathcal{A}) < n-1$ и $n \leqslant 2n-5$, то из предложения 3.2 получаем, что $l(\mathcal{A}) \leqslant n-3$. Следовательно, $m(\mathcal{A}) = n-1$. □

Следующее несложное предложение показывает блочную структуру матрицы со степенью минимального многочлена $n-1$ над произвольным полем.

Предложение 3.4. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Рассмотрим матрицу $B \in M_n(\mathbb{F})$, $n \geqslant 2$, такую что $\deg B = n-1$. Тогда*

1) *найдётся $\gamma \in \mathbb{F}$, являющееся собственным значением матрицы B кратности $s \geqslant 2$, такое что в жордановой нормальной форме матрицы B ему соответствуют две клетки $J_{s-1}(\gamma)$ и $J_1(\gamma)$ размеров $(s-1)\times(s-1)$ и 1×1 соответственно;*
2) *существует невырожденная матрица $T \in M_n(\mathbb{F})$, такая что если $s = n$, то $T^{-1}BT = J_{n-1}(\gamma) \oplus J_1(\gamma)$, если $s < n$, то $T^{-1}BT = J_{s-1}(\gamma) \oplus J_1(\gamma) \oplus C$, где матрица $C \in M_{n-s}(\mathbb{F})$ является циклической и число γ не является собственным значением матрицы C.*

Доказательство. Пусть $\chi_B(t)$ обозначает характеристический многочлен матрицы B, $\mu_B(t)$ — минимальный. По условию $\deg \chi_B(t) = n$, $\deg \mu_B(t) = n-1$.

Докажем первое утверждение. Из факториальности кольца многочленов $\mathbb{F}[t]$, следует, что существует многочлен $q(t) \in \mathbb{F}[t]$, $\deg q(t) = 1$, такой что $\chi_B(t) = q(t)\mu_B(t)$.

Линейный многочлен $q(t)$ имеет корень $\gamma \in \mathbb{F}$, который также является корнем $\chi_B(t)$. Кратность корня γ в $\chi_B(t)$ обозначим через s. Каждый корень характеристического многочлена матрицы является также корнем её минимального многочлена, значит, $\mu_B(\gamma) = 0$.

Обозначим через $k \in \mathbb{N}$ кратность корня γ в $\mu_B(t)$,

$$\mu_B(t) = (t-\gamma)^k \cdot g(t), \quad g(\gamma) \neq 0.$$

Тогда

$$\chi_B(t) = (t-\gamma)^{k+1} \cdot g(t),$$

т. е. $s = k+1$.

Пусть $m_1, \ldots, m_r$ обозначают размеры жордановых клеток в жордановой нормальной форме матрицы B, соответствующих числу γ. Заметим, что по определению сумма размеров клеток равна кратности корня γ в $\chi_B(t)$, кратность корня γ в $\mu_B(t)$ совпадает с максимальным размером клетки, т. е. в данном случае получаем

$$m_1 + \ldots + m_r = k+1 = s, \quad \max_{i=1,\ldots,r}\{m_i\} = k = s-1.$$

Следовательно, $r \geqslant 2$, при этом и $s \geqslant 2$, и существует индекс $i \in \{1, \ldots, r\}$, такой что $m_i = k = s-1$. Тогда

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} m_j = 1,$$

откуда получаем, что $r = 2$, $m_{3-i} = 1$.

Таким образом, собственное значение γ искомое.

Докажем второе утверждение. Пусть $s = n$. В этом случае матрица B имеет единственное собственное значение γ и γ лежит в основном поле $\mathbb{F}$. В этом случае матрица B приводится к жордановой нормальной форме над полем $\mathbb{F}$, т. е. существует невырожденная матрица $T \in M_n(\mathbb{F})$, такая что $T^{-1}BT = J_{n-1}(\gamma) \oplus J_1(\gamma)$.

Пусть $s \leqslant n-1$. Тогда, используя обобщённую жорданову нормальную форму [3, глава IV, § 15.5, теорема 6], получаем, что матрица B подобна над полем $\mathbb{F}$ блочно-диагональной матрице $J_{s-1}(\gamma) \oplus J_1(\gamma) \oplus C$, где матрица соответствует обобщённым жордановым клеткам для многочлена $g(t)$. Поскольку многочлены $g(t)$ и $t-\gamma$ взаимно просты, то многочлен $g(t)$ будет и характеристическим, и минимальным многочленом матрицы C, т. е. эта матрица циклическая. □

4. Редукция к прямым суммам локальных алгебр и алгебр, порождённых циклическими матрицами

Как показано в [14], многие задачи, связанные с коммутативными матричными подалгебрами, сводятся к вопросам изучения нильпотентных алгебр. Основываясь на результатах предыдущего раздела, опишем структуру коммутативных алгебр длины $n-2$ через разложения в прямые суммы алгебр максимальной длины и локальных алгебр длины $n-2$. В соответствии с общим подходом это означает, что задача описания коммутативных алгебр длины $n-2$ для всех больших полей сводится к задаче описания нильпотентных и локальных алгебр длины $n-2$ и их прямых сумм с коммутативными алгебрами максимальной длины. Полученное структурное описание позволит также сразу воспользоваться результатами [10, разд. 3 и 4].

Теорема 4.1. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Рассмотрим коммутативную алгебру $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$, содержащую матрицу $A = B \oplus C$, где $B = J_{s-1}(\gamma) \oplus J_1(\gamma)$, $s < n$, матрица $C \in M_{n-s}(\mathbb{F})$ является циклической и число γ не является собственным значением матрицы C. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$ (в частности, как алгебра блочно-диагональных матриц), где $\mathcal{B} \subset M_s(\mathbb{F})$ — коммутативная алгебра, содержащая матрицу B, $\mathcal{C} \subset M_{n-s}(\mathbb{F})$ — коммутативная алгебра, порождённая циклической матрицей C.*

Доказательство. По теореме об общем виде матрицы, коммутирующей с данной (см. [3, § 16.6]), любая матрица X, коммутирующая с A, имеет блочно-диагональный вид:

$$X = \begin{pmatrix} Y & O \\ O & Z \end{pmatrix},$$

$Y \in M_s(\mathbb{F})$ коммутирует с B, $Z \in M_{n-s}(\mathbb{F})$ коммутирует с C. Таким образом, все матрицы из алгебры $\mathcal{A}$ имеют блочно-диагональное строение. Пусть $\mathcal{B} \subset M_s(\mathbb{F})$ — подалгебра, состоящая из всех верхних левых блоков матриц из $\mathcal{A}$, $\mathcal{C} \subset M_{n-s}(\mathbb{F})$ — подалгебра, состоящая из всех нижних правых блоков матриц из $\mathcal{A}$.

Докажем, что $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$. Пусть $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ — минимальный многочлен матрицы C. Поскольку число γ не является собственным числом матрицы C, $f(\gamma) = \alpha \neq 0$. Рассмотрим матрицу $f(A)$. Имеем

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(B) & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Поскольку по построению матрица B является верхнетреугольной с константой γ на главной диагонали, то матрица $f(B)$ является верхнетреугольной с константой $f(\gamma) = \alpha \neq 0$ на главной диагонали, в частности, $f(B)$ — невырожденная матрица. Для любой невырожденной матрицы M верно, что существует такой многочлен $g(x) \in F[x]$, для которого $E = g(M)$. В частности, утверждение верно для $M = f(B)$. Тогда для многочлена $h(x) = g\big(f(x)\big)$ выполнено матричное равенство

$$h(A) = \begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Поскольку $E \in \mathcal{A}$, то

$$E - h(A) = \begin{pmatrix} O & O \\ O & E \end{pmatrix} \in \mathcal{A}.$$

Таким образом, алгебра $\mathcal{A}$ раскладывается в прямую сумму $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$.

По построению $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$. По лемме 2.12 получаем, что алгебра $\mathcal{C}$ является коммутативной алгеброй, порождённой циклической матрицей C. $\square$

Определение 4.2. Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная алгебра над полем $\mathbb{F}$. *Нильпотентный элемент* (или *нильпотент*) a алгебры $\mathcal{A}$ — элемент, удовлетворяющий равенству $a^n = 0$ для некоторого натурального n. Минимальное значение n, для которого справедливо это равенство, называется *индексом нильпотентности* элемента a. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *ниль-алгеброй*, если каждый её элемент является нильпотентным; *ниль-индексом* $\nu(\mathcal{A})$ ниль-алгебры $\mathcal{A}$ назовём максимальный индекс нильпотентности её элементов. *Индексом нильпотентности алгебры* $\mathcal{A}$ называется число k, такое что $\mathcal{A}^k = (0)$, но $\mathcal{A}^{k-1} \neq (0)$. Если такое k существует, алгебра называется *нильпотентной индекса* k. Любая нильпотентная алгебра очевидно является ниль-алгеброй.

Определение 4.3. Ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$ называется *локальной*, если фактор-алгебра по радикалу Джекобсона $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ является алгеброй с делением.

Лемма 4.4. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Рассмотрим коммутативную алгебру $\mathcal{B} \subset M_s(\mathbb{F})$, $s \geqslant 3$, содержащую жорданову матрицу $B = J_{s-1}(\gamma) \oplus J_1(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{F}$. Тогда либо $\mathcal{B}$ содержит циклическую матрицу с двумя собственными числами 0 и 1, либо является локальной алгеброй вида $\mathbb{F}E + J(\mathcal{B})$.*

Доказательство. По теореме об общем виде матрицы, коммутирующей с данной жордановой матрицей (см. [3, § 16.6; 14, глава 3, § 1]), любая матрица $X = (x_{ij})$, коммутирующая с B, имеет блочно-диагональный вид:

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

$X_{11} \in T_{s-1}(\mathbb{F})$ — многочлен от матрицы $J_{s-1}(\gamma)$, $X_{22} = x_{ss}$,

$$X_{12} = \begin{pmatrix} x_{1s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_{s,s-1} \end{pmatrix}.$$

Допустим, найдётся такая матрица $X \in \mathcal{B}$, что $x_{11} \neq x_{s,s}$. Нильпотентная матрица $B - \gamma E$ лежит в $\mathcal{B}$, поэтому алгебра $\mathcal{B}$ содержит и все многочлены от этой матрицы. Выберем такой многочлен $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, что $f(B - \gamma E)_{11} - X_{11} = x_{11}E_{s-1}$. Рассмотрим линейную комбинацию $(x_{ss} - x_{11})^{-1}(X - f(B - \gamma E) - x_{11}E) + (B - \gamma E) \in \mathcal{B}$. Эта матрица совпадает с матрицей C из предложения 2.14, соответственно, является циклической с двумя собственными числами 0 и 1. Тогда алгебра $\mathcal{B}$ порождена этой циклической матрицей и имеет длину $s-1$.

В противном случае для всякой матрицы $X \in \mathcal{B}$ выполнено равенство $x_{11} = x_{ss}$. В этом случае матрица $X - x_{11}E$ нильпотентна (см., [14, глава 3, § 1]) и лежит в радикале $J(\mathcal{B})$. Следовательно, $\mathcal{B}$ является локальной алгеброй вида $\mathbb{F}E + J(\mathcal{B})$. □

Лемма 4.4 устанавливает взаимосвязь задачи исследования коммутативных алгебр длины $n-2$ с результатами о локальных алгебрах.

Теорема 4.5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ и $\mathbb{F}$ — произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant n$. Рассмотрим коммутативную алгебру $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ длины $l(\mathcal{A}) = n-2$, имеющую вид $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$ (в частности, как алгебра блочно-диагональных матриц), где $\mathcal{B} \subset M_s(\mathbb{F})$ — коммутативная алгебра, содержащая матрицу $B = J_{s-1}(\gamma) \oplus J_1(\gamma)$, $2 \leqslant s < n$, $\mathcal{C} \subset M_{n-s}(\mathbb{F})$ — коммутативная алгебра, порождённая циклической матрицей C. Тогда $\mathcal{B}$ является локальной алгеброй вида $\mathbb{F}E + J(\mathcal{B})$, имеет длину $s-2$ и индекс нильпотентности радикала $s-1$.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно две возможности для s.

1. Пусть $s = 2$. Допустим в алгебре $\mathcal{B}$ есть нескалярная матрица. Любая нескалярная матрица порядка 2 является циклической, поэтому в этом случае алгебра $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям предложения 2.17, и следовательно, $\mathcal{A}$ порождена циклической матрицей и имеет длину $n-1$. Противоречие. Таким образом, $\mathcal{B} = \mathbb{F}E$. В этом случае $\mathcal{B}$ является локальной алгеброй вида $\mathbb{F}E + J(\mathcal{B})$, где $J(\mathcal{B}) = 0$, имеет индекс нильпотентности радикала $1 = s-1$ и длину $0 = s-2$.

2. Пусть $s \geqslant 3$. Тогда алгебра $\mathcal{B}$ удовлетворяет условиям леммы 4.4, поэтому либо $\mathcal{B}$ содержит циклическую матрицу с двумя собственными числами 0 и 1, либо является локальной алгеброй вида $\mathbb{F}E + J(\mathcal{B})$. Если $\mathcal{B}$ содержит циклическую матрицу с двумя собственными числами 0 и 1, то алгебра $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям предложения 2.16, и следовательно, $\mathcal{A}$ порождена циклической матрицей и имеет длину $n-1$. Противоречие. Таким образом, единственная возможность, что $\mathcal{B}$ является локальной алгеброй вида $\mathbb{F}E + J(\mathcal{B})$. В этом случае по [10, лемма 3.1] для длины алгебры $\mathcal{B}$ есть две возможности: $l(\mathcal{B}) = s-2$ либо $l(\mathcal{B}) = s-1$. Покажем, что второй случай невозможен. Действительно, если $l(\mathcal{B}) = s-1$, то по теореме 2.13 алгебра $\mathcal{B}$ порождена циклической матрицей B'. По условию на алгебру $\mathcal{B}$ матрица B' имеет одно собственное число, поэтому алгебра $\mathcal{A}$ также удовлетворяет условиям предложения 2.16, и следовательно, $\mathcal{A}$ порождена циклической матрицей и имеет длину $n-1$. Противоречие. Таким образом, $\mathcal{B}$ является локальной алгеброй вида $\mathbb{F}E + J(\mathcal{B})$ длины $l(\mathcal{B}) = s-2$. Индекс нильпотентности радикала $J(\mathcal{B})$ равен $s-1$ по [10, лемма 4.1]. $\square$

Обозначение 4.6. Пусть $n \geqslant 3$ и пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Пусть

$$A = E_{1,2} + \ldots + E_{n-2,n-1} \in N_n(\mathbb{F}).$$

Положим

$$\mathcal{B}_{0;n} = \langle A, A^2, \ldots, A^{n-2} \rangle \subset N_n(\mathbb{F}), \quad \mathcal{A}_{0;n} = \langle E_n, A, A^2, \ldots, A^{n-2} \rangle \subset T_n(\mathbb{F});$$
$$\mathcal{B}_{1;n} = \langle E_{1,n},\ B \mid B \in \mathcal{B}_{0;n} \rangle \subset T_n(\mathbb{F}), \quad \mathcal{A}_{1;n} = \langle E_{1,n},\ C \mid C \in \mathcal{A}_{0;n} \rangle \subset T_n(\mathbb{F});$$
$$\mathcal{B}_{2;n} = \langle E_{n,n-1},\ B \mid B \in \mathcal{B}_{0;n} \rangle \subset M_n(\mathbb{F}), \quad \mathcal{A}_2 = \langle E_{n,n-1},\ C \mid C \in \mathcal{A}_{0;n} \rangle \subset M_n(\mathbb{F});$$
$$\mathcal{B}_{3;n}(\alpha) = \langle E_{1,n} + \alpha E_{n,n-1},\ B| \ B \in \mathcal{B}_{0;n} \rangle \subset M_n(\mathbb{F}),$$
$$\mathcal{A}_{3;n}(\alpha) = \langle E_{1,n} + \alpha E_{n,n-1},\ C \mid C \in \mathcal{A}_{0;n} \rangle \subset M_n(\mathbb{F}), \quad n \geqslant 4, \quad \alpha \in \mathbb{F}, \quad \alpha \neq 0;$$

$$\mathcal{B}_{4;4} = \langle E_{1,2} + E_{3,4},\ E_{1,3} + E_{2,4},\ E_{1,4} \rangle \subset N_4(\mathbb{F}),$$
$$\mathcal{A}_{4;4} = \langle E_4, E_{1,2} + E_{3,4},\ E_{1,3} + E_{2,4},\ E_{1,4} \rangle \subset T_4(\mathbb{F}).$$

Теорема 4.7 [7, теорема 2.1]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда произвольная коммутативная нильпотентная подалгебра $\mathcal{A}$ в $M_3(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности 2 сопряжена с одной из следующих попарно несопряжённых алгебр:*
(1) $\mathcal{B}_{0;3} = \langle E_{1,2} \rangle$;
(2) $\mathcal{B}_{1;3} = \langle E_{1,2},\ E_{1,3} \rangle$;
(3) $\mathcal{B}_{2;3} = \langle E_{1,2},\ E_{3,2} \rangle$.

Теорема 4.8 [7, теорема 2.3]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле характеристики отличной от 2. Обозначим через $\mathbb{F}^*$ мультипликативную группу поля $\mathbb{F}$, через Q — подгруппу $\mathbb{F}^*$, образованную квадратами элементов из $\mathbb{F}^*$. Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная нильпотентная подалгебра в $M_4(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности 3. Тогда алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с одной из попарно несопряжённых алгебр $\mathcal{B}_{0;4}, \mathcal{B}_{1;4}, \mathcal{B}_{2;4}, \mathcal{B}_{3;4}(\alpha_1), \ldots, \mathcal{B}_{3;4}(\alpha_i), \ldots$,* где *$\{\alpha_j\}$ — полная система представителей $\mathbb{F}^*$ по модулю Q.*

Теорема 4.9 [7, теорема 2.4]. *Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики 2. Обозначим через $\mathbb{F}^*$ мультипликативную группу поля $\mathbb{F}$, через Q — подгруппу $\mathbb{F}^*$, образованную квадратами элементов из $\mathbb{F}^*$. Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная нильпотентная подалгебра в $M_4(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности 3. Тогда алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с одной из попарно несопряжённых алгебр $\mathcal{B}_{0;4}, \mathcal{B}_{1;4}, \mathcal{B}_{2;4}, \mathcal{B}_{4;4}, \mathcal{B}_{3;4}(\alpha_1), \ldots, \mathcal{B}_{3;4}(\alpha_i), \ldots$,* где *$\{\alpha_j\}$ — полная система представителей $\mathbb{F}^*$ по модулю Q.*

Теорема 4.10 [7, теорема 3.10]. *Пусть $n \geqslant 5$, и пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant n$. Тогда произвольная коммутативная нильпотентная подалгебра $\mathcal{A}$ в $M_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности $n-1$ содержит элемент A индекса нильпотентности $n-1$.*

Теорема 4.11 [7, теорема 3.11]. *Пусть $n \geqslant 5$, и пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant n$. Обозначим через $\mathbb{F}^*$ мультипликативную группу поля $\mathbb{F}$, через Q — подгруппу $\mathbb{F}^*$, образованную квадратами элементов из $\mathbb{F}^*$. Положим $A = E_{1,2} + \ldots + E_{n-2,n-1} \in N_n(\mathbb{F})$. Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная нильпотентная подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности $n-1$. Тогда справедливо следующее.*

1. *Алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена в $M_n(\mathbb{F})$ с одной из следующих подалгебр:*
   (i) $\mathcal{B}_{0;n}$,
   (ii) $\mathcal{B}_{1;n}$,
   (iii) $\mathcal{B}_{2;n}$,
   (iv) $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha)$, где $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$.
2. *Подалгебры разных типов не сопряжены между собой; подалгебры типов* (ii)—(iv) *являются максимальными по включению коммутативными нильпотентными подалгебрами и содержат подалгебру $\mathcal{B}_{0;n}$, не являющуюся максимальной по включению.*

3. *При нечётном n и произвольном $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$ подалгебра $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha)$ сопряжена с подалгеброй $\mathcal{B}_{3;n}(1)$; при чётном n и произвольном $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$ подалгебра $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha)$ сопряжена с одной из попарно несопряжённых подалгебр $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha_1), \ldots, \mathcal{B}_{3;n}(\alpha_i), \ldots$, где $\{\alpha_j\}$ — полная система представителей $\mathbb{F}^*$ по модулю Q.*

Теорема 4.12 [10, теорема 4.11]. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, и пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда*

1) $l(\mathcal{B}_{0;n}) = l(\mathcal{A}_{0;n}) = n - 2$;
2) $l(\mathcal{B}_{1;n}) = l(\mathcal{A}_{1;n}) = n - 2$;
3) $l(\mathcal{B}_{2;n}) = l(\mathcal{A}_{2;n}) = n - 2$;
4) $l(\mathcal{B}_{4;4}) = l(\mathcal{A}_{4;4}) = 2$.

Теорема 4.13 [6, теорема 4.11]. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, и пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$ выполнено*

$$l\big(\mathcal{B}_{3;4}(\alpha)\big) = l\big(\mathcal{A}_{3;4}(\alpha)\big) = 2,$$
$$l\big(\mathcal{B}_{3;n}(\alpha)\big) = l\big(\mathcal{A}_{3;n}(\alpha)\big) = n - 3 \quad \text{при} \quad n \geqslant 5.$$

Теорема 4.14. *Пусть $n_1, n_2, n \in \mathbb{N}$, $n_1 \geqslant 2$ и $n = n_1 + n_2$. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant n_2 + 1$. Рассмотрим коммутативную локальную подалгебру $\mathcal{B}$ в $M_{n_1}(\mathbb{F})$ вида $\mathcal{B} = \mathbb{F}E + J(\mathcal{B})$ длины $l(\mathcal{B}) = n_1 - 2$, содержащую матрицу со степенью минимального многочлена $n_1 - 1$. Будем предполагать, что при $n_1 = 4$ алгебра $\mathcal{B}$ не сопряжена с алгебрами $\mathcal{A}_{3,4}(\alpha)$. Пусть $\mathcal{C} \subseteq M_{n_2}(\mathbb{F})$ — коммутативная подалгебра, порождённая циклической матрицей. Положим $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{C} \subseteq M_n(\mathbb{F})$. Тогда $l(\mathcal{A}) = n - 2$.*

Доказательство. Доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 5.1 из [10] с тем отличием, что в [10] наличие матрицы со степенью минимального многочлена $n_1 - 1$ следовало из ограничения на мощность поля, а здесь ограничение на поле снято, существование нужной матрицы гарантировано условием. □

Лемма 4.15 [10, лемма 5.2]. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, и пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{C} \subseteq M_m(\mathbb{F})$, порождённую циклической матрицей, и подалгебру*

$$\mathcal{A}_{3;4}(\alpha) = \langle A = E_{1,2} + E_{2,3},\ B = E_{1,4} + \alpha E_{4,3},\ E_{1,3}\rangle \subseteq M_4(\mathbb{F}),$$

где $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$. Положим

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{3;4}(\alpha) \oplus \mathcal{C} \subseteq M_{m+4}(\mathbb{F}).$$

Тогда $l(\mathcal{A}) \leqslant m + 1$.

Лемма 4.16 [10, лемма 5.3]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Рассмотрим алгебры*

$$\mathcal{A}_{3;4}(\alpha) = \langle A = E_{1,2} + E_{2,3},\ B = E_{1,4} + \alpha E_{4,3},\ E_{1,3}\rangle \subseteq M_4(\mathbb{F}),$$

где $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$, *и*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{3;4}(\alpha) \oplus \mathbb{F} \subseteq M_5(\mathbb{F}).$$

Тогда $l(\mathcal{A}) = 2$.

Лемма 4.17 [10, лемма 5.4]. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, *и пусть* $\mathbb{F}$ — *произвольное поле. Рассмотрим коммутативную подалгебру* $\mathcal{C} \subseteq M_m(\mathbb{F})$, *порождённую невырожденной циклической матрицей* $C \in \mathcal{C}$, *и подалгебру*

$$\mathcal{A}_{3;4}(\alpha) = \langle A = E_{1,2} + E_{2,3},\ B = E_{1,4} + \alpha E_{4,3},\ E_{1,3}\rangle \subseteq M_4(\mathbb{F}),$$

где $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$. *Положим*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{3;4}(\alpha) \oplus \mathcal{C} \subseteq M_{m+4}(\mathbb{F}).$$

Тогда $l(\mathcal{A}) = m + 1$.

Лемма 4.18 [10, лемма 5.5]. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, *и пусть* $\mathbb{F}$ — *произвольное поле мощности* $|\mathbb{F}| \geqslant m + 1$. *Рассмотрим коммутативную подалгебру* $\mathcal{C} \subseteq M_m(\mathbb{F})$, *порождённую циклической матрицей, и подалгебру*

$$\mathcal{A}_{3;4}(\alpha) = \langle A = E_{1,2} + E_{2,3},\ B = E_{1,4} + \alpha E_{4,3},\ E_{1,3}\rangle \subseteq M_4(\mathbb{F}),$$

где $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$. *Положим*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{3;4}(\alpha) \oplus \mathcal{C} \subseteq M_{m+4}(\mathbb{F}).$$

Тогда $l(\mathcal{A}) = m + 1$.

Лемма 4.19 [10, лемма 5.6]. *Пусть* $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ — *поле из двух элементов. Рассмотрим алгебры*

$$\mathcal{A}_{3;4}(\alpha) = \langle A = E_{1,2} + E_{2,3},\ B = E_{1,4} + \alpha E_{4,3},\ E_{1,3}\rangle \subseteq M_4(\mathbb{F}),$$

где $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$, *т. е. в данном случае* $\alpha = 1$, *и*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{3;4}(1) \oplus D_2(\mathbb{F}_2) \subseteq M_6(\mathbb{F}_2).$$

Тогда $l(\mathcal{A}) = 3$.

Следствие 4.20 [10, следствие 5.7]. *Пусть* $\mathbb{F}$ — *произвольное поле. Рассмотрим алгебры*

$$\mathcal{A}_{3;4}(\alpha) = \langle A = E_{1,2} + E_{2,3},\ B = E_{1,4} + \alpha E_{4,3},\ E_{1,3}\rangle \subseteq M_4(\mathbb{F}),$$

где $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$, *и*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{3;4}(\alpha) \oplus D_2(\mathbb{F}) \subseteq M_6(\mathbb{F}).$$

Тогда $l(\mathcal{A}) = 3$.

Лемма 4.21 [10, лемма 5.8]. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, *и пусть* $\mathbb{F}$ — *произвольное поле характеристики* 2. *Рассмотрим коммутативную подалгебру* $\mathcal{C} \subseteq M_k(\mathbb{F})$, *порождённую циклической матрицей, и подалгебру*

$$\mathcal{A}_{4;4} = \langle E_4,\ B_1 = E_{1,2} + E_{3,4},\ B_2 = E_{1,3} + E_{2,4},\ E_{1,4}\rangle \subseteq T_4(\mathbb{F}).$$

Положим

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{4;4} \oplus \mathcal{C} \subseteq M_{k+4}(\mathbb{F}).$$

Тогда $l(\mathcal{A}) \leqslant k + 1$.

5. Описание с точностью до подобия коммутативных матричных алгебр длины $n-2$ над большими полями

На основе результатов предыдущих разделов и классификации коммутативных матричных подалгебр максимальной длины в данном разделе будет получено описание коммутативных матричных алгебр длины $n-2$.

Теорема 5.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$ и $\mathbb{F}$ — произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant n$. Если $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$ длины $l(\mathcal{A}) = n-2$, то $\mathcal{A}$ сопряжена в $M_n(\mathbb{F})$ с одной из следующих алгебр:*

(1) $\mathcal{A}_{0;n}$;

(2) $\mathcal{A}_{1;n}$;

(3) $\mathcal{A}_{2;n}$;

(4) $\mathbb{F}E_2 \oplus \mathcal{C}$, *где $\mathcal{C} \subset M_{n-2}(\mathbb{F})$ — подалгебра, порождённая циклической матрицей*;

(5.$j.m$) *при $j \in \{0,1,2\}$, $m \in \{3,\dots,n-1\}$ $\mathcal{A}_{j;m} \oplus \mathcal{C}$, где $\mathcal{C} \subset M_{n-m}(\mathbb{F})$ — подалгебра, порождённая циклической матрицей.*

Доказательство. По лемме 3.3 в алгебре $\mathcal{A}$ есть матрица A с минимальным многочленом степени $n-1$ и порождённая ей подалгебра $\mathcal{A}_0$ размерности $\dim \mathcal{A}_0 = n-1$. Согласно предложению 3.4 найдутся число $\gamma \in \mathbb{F}$, индекс s, $2 \leqslant s \leqslant n$, и обратимая матрица $T \in M_n(\mathbb{F})$, такие что если $s = n$, то $T^{-1}AT = J_{n-1}(\gamma) \oplus J_1(\gamma)$, и если $s < n$, $T^{-1}AT = J_{s-1}(\gamma) \oplus J_1(\gamma) \oplus C$, где матрица $C \in M_{n-s}(\mathbb{F})$ является циклической и число γ не является собственным значением матрицы C. Обозначим $B = J_{s-1}(\gamma) \oplus J_1(\gamma) \in M_s(\mathbb{F})$. Поскольку утверждение теоремы описывает алгебру с точностью до подобия, можем далее рассматривать алгебру $\mathcal{A}_T = \{T^{-1}MT \mid M \in \mathcal{A}\}$, сопряжённую с $\mathcal{A}$. По теореме 4.1 при $s < n$ $\mathcal{A}_T = \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$, где $\mathcal{B} \subset M_s(\mathbb{F})$ — коммутативная алгебра, содержащая матрицу B, $\mathcal{C} \subset M_{n-s}(\mathbb{F})$ — коммутативная алгебра, порождённая циклической матрицей C.

Из леммы 3.1 следует, что возможны два варианта для размерности $\dim \mathcal{A} \in \{n-1, n\}$. Рассмотрим эти два случая отдельно, при этом алгебры разных размерностей заведомо не сопряжены.

1. Если $\dim \mathcal{A} = n-1 = \dim \mathcal{A}_0$, то $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$, т. е. является однопорождённой алгеброй. В этом случае $\dim \mathcal{B} = s-1$, т. е. $\mathcal{B}$ тоже однопорождённая алгебра, $\mathcal{B} = \mathcal{L}(B)$. Заметим, что в силу наличия в алгебрах единичной матрицы структура алгебры $\mathcal{B}$ постоянна при всех значениях $\gamma \in \mathbb{F}$, поэтому можно без ограничения общности взять $\gamma = 0$. Для этого значения получаем алгебру $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{0;n}$.

Таким образом, при $s = n$ алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с $\mathcal{A}_{0;n}$, при $3 < s < n$ с $\mathcal{A}_{0;s} \oplus \mathcal{C}$ и при $s = 2$ с $\mathbb{F}E_2$.

2. Предположим, $\dim \mathcal{A} = n$. В этом случае $\dim \mathcal{B} = s$. По теореме 4.5 алгебра $\mathcal{B}$ является локальной алгеброй вида $\mathbb{F}E + J(\mathcal{B})$, имеет длину $s-2$ и индекс

нильпотентности радикала $s-1$. Тогда применяем к $\mathcal{B}$ классификационные теоремы 4.7—4.11, теоремы о длине 4.12—4.13 локальных алгебр и к длине прямой суммы утверждения 4.14—4.21, получим, что $\mathcal{B}$ сопряжена с одной из алгебр $\mathcal{A}_{1;s}$ либо $\mathcal{A}_{2;s}$. Случай алгебры $\mathcal{A}_{3;4}(\alpha)$ не реализуется, поскольку при $s=n$ верна оценка $s \geqslant 5$. $\square$

Следующая теорема обобщает теорему 6.1 из [10] на произвольные большие поля.

Теорема 5.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ и $\mathbb{F}$ — произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant n$. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ длины $n-2$. Пусть $\mathcal{A}$ сопряжена в $M_n(\mathbb{F})$ с алгебрами блочно-диагональных матриц*

$$\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{C}_1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_2 & 0 \\ 0 & \mathcal{C}_2 \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{A}_i \subset M_{k_i}(\mathbb{F})$ — локальная коммутативная подалгебра вида $\mathbb{F}E_{k_i} + J(\mathcal{A}_i)$ длины $k_i - 2$, $\mathcal{C}_i \subset M_{n-k_i}(\mathbb{F})$ — подалгебра, порождённая циклической матрицей, $\mathcal{R}_i = \mathcal{A}_i \oplus \mathcal{C}_i$, $i = 1, 2$. Тогда

1) $k_1 = k_2$;
2) *алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ сопряжены в $M_{k_1}(\mathbb{F})$;*
3) *алгебры $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ сопряжены в $M_{n-k_1}(\mathbb{F})$.*

Доказательство. Заметим, что при $n - k_i = 0$ алгебра $\mathcal{A}$ локальна и не локальна при $n - k_i > 0$ как прямая сумма двух алгебр с единицей. Поэтому одновременно либо $n - k_1 = n - k_2 = 0$, либо $n - k_1 > 0$, $n - k_2 > 0$.

Если $n-k_1 = n-k_2 = 0$, то локальные алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ сопряжены в $M_n(\mathbb{F})$ и сопряжены с алгеброй $\mathcal{A}$ по условию.

Далее будем предполагать, что $n - k_1 > 0$ и $n - k_2 > 0$.

Поскольку $n - k_1 > 0$, то из леммы 4.21 следует, что алгебра $\mathcal{A}_1$ не сопряжена с алгеброй $\mathcal{A}_{4,4}$. Тогда из теорем 4.7, 4.9, 4.8, 4.11 следует, что алгебра $\mathcal{A}_1$ содержит матрицу A_1 со степенью минимального многочлена $k_1 - 1$. Пусть C_1 — циклическая матрица из алгебры $\mathcal{C}_1$. Поскольку в поле $\mathbb{F}$ не менее n элементов, а $|\sigma(C_1) \cap \mathbb{F}| \leqslant |\sigma(C_1)| \leqslant n - k_1 < n$, то существует $\lambda_1 \in \mathbb{F}$, $\lambda_1 \notin \sigma(C_1)$, для которого $\sigma(A_1 + \lambda_1 E_{k_1}) \cap \sigma(C_1) = \varnothing$. Следовательно, матрица $A = (A_1 + \lambda_1 E_{k_1}) \oplus C_1 \in \mathcal{R}_1$ имеет степень минимального многочлена $n-1$. Она сопряжена в $M_n(\mathbb{F})$ с некоторой матрицей B из $\mathcal{R}_2$. По определению $B = A_2 \oplus C_2$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$, $C_2 \in \mathcal{C}_2$. Для блочной матрицы справедливо неравенство $\deg B \leqslant \deg A_2 + \deg C_2$, которое превращается в равенство, если и только если $\sigma(A_2) \cap \sigma(C_2) = \varnothing$. Алгебра $\mathcal{A}_2$ не содержит циклической матрицы, поэтому $\deg A_2 \leqslant k_2 - 1$, откуда следует, что $n-1 = \deg B \leqslant \deg A_2 + \deg C_2 \leqslant$ $\leqslant k_2 - 1 + n - k_2 = n - 1$. Значит, $\deg A_2 + \deg C_2 = n - 1$, откуда следует, что $\deg A_2 = k_2 - 1$, $\deg C_2 = n - k_2$ и $\sigma(A_2) \cap \sigma(C_2) = \varnothing$. Матрица A имеет одно собственное число $\lambda_1 \in \mathbb{F}$ алгебраической кратности k_1 и геометрической кратности 2. По свойству циклической матрицы все собственные числа C_1 над алгебраическим замыканием $\bar{\mathbb{F}}$ поля $\mathbb{F}$ имеют геометрическую кратность 1.

Матрица B имеет одно собственное число над $\mathbb{F}$ алгебраической кратности k_2 геометрической кратности 2, все остальные её собственные числа над $\bar{\mathbb{F}}$ имеют геометрическую кратность 1. Поскольку при сопряжении в $M_n(\bar{\mathbb{F}})$ кратности собственных значений сохраняются, то $k_1 = k_2$. Также $\sigma(A_1) = \sigma(A_2) = \{\lambda_1\} \subset \mathbb{F}$ и $\sigma(C_1) = \sigma(C_2)$ в $\bar{\mathbb{F}}$.

Рассмотрим матрицу $T \in M_n(\mathbb{F})$, для которой $T^{-1}\mathcal{R}_1 T = \mathcal{R}_2$. Условие $T^{-1}AT = B$ влечёт совместность уравнения $AT = TB$. Разобьём матрицу T на блоки в соответствии с блочным разбиением A и B:

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} A_1T_1 = T_1A_2, \\ A_1T_2 = T_2C_2, \\ C_1T_3 = T_3A_2, \\ C_1T_4 = T_4C_2. \end{cases}$$

В силу условия на спектры матриц A_i и C_i, $i = 1, 2$, уравнения $A_1T_2 = T_2C_2$ и $C_1T_3 = T_3A_2$ имеют только нулевые решения (см. [1, глава VII, § 1, теорема 1]), т. е. $T_2 = 0$ и $T_3 = 0$. Таким образом, $T_1^{-1}\mathcal{A}_1T_1 = \mathcal{A}_2$, $T_4^{-1}\mathcal{C}_1T_4 = \mathcal{C}_2$. $\square$

Заметим, что в случае матриц третьего порядка изучаемое значение длины равно 1, поэтому возможно применить классификацию алгебр длины 1 из [5].

Теорема 5.3 [5, теорема 3.5]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$, и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Пусть $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ — коммутативная подалгебра, содержащая единичную матрицу. Тогда $l(\mathcal{A}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ сопряжена с одной из следующих подалгебр:*

(1) $\mathcal{B}_n(m, V) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} xE_m & Z \\ \hline O_{(n-m)\times m} & xE_{n-m} \end{array} \right) \;\middle|\; x \in \mathbb{F},\ Z \in V \right\}$, *где* $V \subseteq M_{m,(n-m)}(\mathbb{F})$ — *ненулевое подпространство*;

(2) $\mathcal{D}_n(m) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} xE_m & O_{m\times(n-m)} \\ \hline O_{(n-m)\times m} & yE_{n-m} \end{array} \right) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{F} \right\}$;

(3) $\mathcal{C}_k(\alpha, \beta) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{\alpha,\beta}(a,b) & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & C_{\alpha,\beta}(a,b) & \dots & O_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & O_2 & \dots & C_{\alpha,\beta}(a,b) \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{F} \right\}$, *где* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $C_{\alpha,\beta}(a,b) = \begin{pmatrix} a & -\beta b \\ b & a - \alpha b \end{pmatrix}$, *многочлен* $x^2 + \alpha x + \beta$ *неприводим над* $\mathbb{F}$, $n = 2k$.

Алгебры типов (1)—(3) не сопряжены друг с другом.

Следствие 5.4 [5, следствие 3.6]. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Пусть $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F}_2)$ — коммутативная подалгебра, содержащая единичную матрицу. Тогда $l(\mathcal{A}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ сопряжена с одной из следующих подалгебр:*

(1) $\mathcal{B}_n(m,V) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} xE_m & Z \\ \hline O_{(n-m)\times m} & xE_{n-m} \end{array} \right) \;\middle|\; x \in \mathbb{F}_2,\ Z \in V \right\}$, *где* $V \subseteq M_{m,(n-m)}(\mathbb{F}_2)$ — *ненулевое подпространство;*

(2) $\mathcal{D}_n(m) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} xE_m & O_{m\times(n-m)} \\ \hline O_{(n-m)\times m} & yE_{n-m} \end{array} \right) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{F}_2 \right\}$;

(3) $\mathcal{D}_{3,n}(m,r) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} xE_m & O_{m\times r} & O_{m\times(n-m-r)} \\ \hline O_{r\times m} & yE_r & O_{r\times(n-m-r)} \\ \hline O_{(n-m-r)\times m} & O_{(n-m-r)\times r} & zE_{n-m-r} \end{array} \right) \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{F}_2 \right\}$, *где* $m, r \in \mathbb{N}$, $m + r < n$;

(4) $\mathcal{C}_k(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{1,1}(a,b) & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & C_{1,1}(a,b) & \dots & O_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & O_2 & \dots & C_{1,1}(a,b) \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{F}_2 \right\}$, *где* $n = 2k$.

Алгебры типов (1)—(4) не сопряжены друг с другом.

Теорема 5.5. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, и пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в $M_3(\mathbb{F})$. Тогда $l(\mathcal{A}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ сопряжена в $M_3(\mathbb{F})$ с одной из следующих попарно несопряжённых алгебр:*

(1) $\mathcal{A}_{0;3} = \langle E_3,\, E_{1,2} \rangle$;

(2) $\mathcal{A}_{1;3} = \langle E_3,\, E_{1,2},\, E_{1,3} \rangle$;

(3) $\mathcal{A}_{2;3} = \langle E_3,\, E_{1,2},\, E_{3,2} \rangle$;

(4) $\mathcal{D}_3(2) = \mathbb{F}E_2 \oplus \mathbb{F} \subset D_3(\mathbb{F})$.

Доказательство. Достаточность следует из теорем 4.12 и 5.5.

Необходимость. Пусть $l(\mathcal{A}) = 1$. Воспользуемся теоремой 5.5. Заметим, что случай алгебры типа (3) реализуется только для чётных порядков матриц, поэтому остаётся рассмотреть алгебры типов (1) и (2).

Пусть алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с алгеброй типа (1). По построению такая алгебра является локальной вида $\mathbb{F}E + J(\mathcal{A})$, и, пользуясь теоремами 4.7 и 4.12, с точностью до подобия получаем одну из алгебр $\mathcal{A}_{i;3}$, $i = 0, 1, 2$.

Пусть теперь $\mathcal{A}$ сопряжена с алгеброй типа (2). Для $n = 3$ подходят два значения параметра m: 1 и 2. При этом алгебра $\mathcal{D}_3(2)$ сопряжена с алгеброй $\mathcal{D}_3(1)$, сопряжение осуществляется матрицей циклического сдвига базиса

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Теорема 5.6. *Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в $M_3(\mathbb{F}_2)$. Тогда $l(\mathcal{A}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ сопряжена в $M_3(\mathbb{F}_2)$ с одной из следующих попарно несопряжённых алгебр:*

(1) $\mathcal{A}_{0;3} = \langle E_3,\ E_{1,2}\rangle$;
(2) $\mathcal{A}_{1;3} = \langle E_3,\ E_{1,2},\ E_{1,3}\rangle$;
(3) $\mathcal{A}_{2;3} = \langle E_3,\ E_{1,2},\ E_{3,2}\rangle$;
(4) $\mathcal{D}_3(2) = \mathbb{F}E_2 \oplus \mathbb{F} \subset D_3(\mathbb{F}_2)$;
(5) $D_3(\mathbb{F}_2)$.

Доказательство. Эта теорема доказывается аналогично предыдущей с использованием следствия 5.4 вместо теоремы 5.5.

В случае алгебры $\mathcal{D}_{3,n}(m,r)$ типа (3) из условия $n = 3$ следует, что $m = r = 1$ и $\mathcal{D}_{3,3}(1,1) = D_3(\mathbb{F}_2)$. □

В случае $n = 4$ не работает доказательство леммы 3.3 и, действительно, неверно само утверждение о наличии элемента максимальной степени минимального многочлена. Этот случай порождает множество исключительных алгебр, которым будет посвящена отдельная работа. В данном разделе в контексте общего подхода для $n = 4$ мы заменим лемму 3.3 дополнительным предположением о наличии в алгебре нужной матрицы.

Теорема 5.7. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant 4$. Обозначим через $\mathbb{F}^*$ мультипликативную группу поля $\mathbb{F}$, через Q — подгруппу $\mathbb{F}^*$, образованную квадратами элементов из $\mathbb{F}^*$. Если $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в $M_4(\mathbb{F})$ длины $l(\mathcal{A}) = 2$, содержащая матрицу с минимальным многочленом степени 3, то $\mathcal{A}$ сопряжена в $M_4(\mathbb{F})$ с одной из следующих алгебр:*

(1) $\mathcal{A}_{0;4}$;
(2) $\mathcal{A}_{1;4}$;
(3) $\mathcal{A}_{2;4}$;
(4) $\mathcal{A}_{3;4}(\alpha_1), \ldots, \mathcal{A}_{3;4}(\alpha_i), \ldots$, где $\{\alpha_j\}$ — *полная система представителей $\mathbb{F}^*$ по модулю Q*;
(5) $\mathbb{F}E_2 \oplus \mathcal{C}$, *где $\mathcal{C} \subset M_2(\mathbb{F})$ — подалгебра, порождённая циклической матрицей*;
(6) $\mathcal{A}_{0;3} \oplus \mathbb{F}$;
(7) $\mathcal{A}_{1;3} \oplus \mathbb{F}$;
(8) $\mathcal{A}_{2;3} \oplus \mathbb{F}$.

При этом алгебры разных типов не сопряжены между собой, алгебры внутри пункта (5) *сопряжены, если и только если сопряжены соответствующие им подалгебры, порождённые циклическими матрицами, в $M_2(\mathbb{F})$.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 5.1 с тем ограничением, что наличие в алгебре матрицы A с минимальным многочленом степени 3 требуется по условию.

Второе утверждение следует из теоремы 5.2. □

Объединяя теоремы 4.12—4.13, леммы 4.14—4.21, теоремы 5.1 и 5.2, получаем основной результат данной работы.

Теорема 5.8. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$ и $\mathbb{F}$ — произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant n$. Коммутативная подалгебра $\mathcal{A}$ в $M_n(\mathbb{F})$ имеет длину $l(\mathcal{A}) = n-2$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ сопряжена в $M_n(\mathbb{F})$ с одной из следующих алгебр:*

(1) $\mathcal{A}_{0;n} = \langle E_n, A, A^2, \ldots, A^{n-2}\rangle$, $A = E_{1,2} + \ldots + E_{n-2,n-1} \in N_n(\mathbb{F})$;

(2) $\mathcal{A}_{1;n} = \langle E_{1,n},\, C \mid C \in \mathcal{A}_{0;n}\rangle$;

(3) $\mathcal{A}_{2;n} = \langle E_{n,n-1},\, C \mid C \in \mathcal{A}_{0;n}\rangle$;

(4) $\mathbb{F}E_2 \oplus \mathcal{C}$, *где $\mathcal{C} \subset M_{n-2}(\mathbb{F})$ — подалгебра, порождённая циклической матрицей;*

(5.m) *при $m \in \{3, \ldots, n-1\}$ $\mathcal{A}_{0;m} \oplus \mathcal{C}$, где $\mathcal{C} \subset M_{n-m}(\mathbb{F})$ — подалгебра, порождённая циклической матрицей;*

(6.m) *при $m \in \{3, \ldots, n-1\}$ $\mathcal{A}_{1;m} \oplus \mathcal{C}$, где $\mathcal{C} \subset M_{n-m}(\mathbb{F})$ — подалгебра, порождённая циклической матрицей;*

(7.m) *при $m \in \{3, \ldots, n-1\}$ $\mathcal{A}_{2;m} \oplus \mathcal{C}$, где $\mathcal{C} \subset M_{n-m}(\mathbb{F})$ — подалгебра, порождённая циклической матрицей.*

Алгебры разных типов не сопряжены между собой. Алгебры внутри пункта (4) сопряжены, если и только если сопряжены соответствующие им подалгебры, порождённые циклическими матрицами, в $M_{n-2}(\mathbb{F})$. Если $m \neq m'$, то алгебры типов (5.m) и (5.m'), (6.m) и (6.m'), (7.m) и (7.m') не сопряжены. Алгебры внутри пунктов (5.m), (6.m) и (7.m) при фиксированном m сопряжены, если и только если сопряжены соответствующие им подалгебры, порождённые циклическими матрицами, в $M_{n-m}(\mathbb{F})$.

Отметим, что количество несопряжённых алгебр длины 1 в алгебре матриц третьего порядка всегда конечно. Начиная с порядка 4 из теорем 5.7 и 5.8 видно, что количество алгебр длины $n-2$ определяется количеством алгебр, порождённых циклическими матрицами. Для этого числа применимы результаты [9]. В частности, для алгебраически замкнутых полей это количество конечно и определяется числом разбиений числа n (см. формулы в [10, теорема 6.2]). Проведём вычисления для полей рациональных и вещественных чисел и конечных полей.

Теорема 5.9. *Для любого $n \geqslant 4$ в алгебре $M_n(\mathbb{Q})$ матриц над полем рациональных чисел содержится бесконечно много несопряжённых коммутативных подалгебр длины $n-2$.*

Доказательство. Если $n = 4$, то по [9, теорема 4.3] бесконечно много несопряжённых подалгебр, порождённых циклическими матрицами, в алгебре $M_2(\mathbb{Q})$, которые дают бесконечно много несопряжённых алгебр в пункте (5) теоремы 5.7. Кроме того, бесконечна система представителей по модулю подгруппы квадратов, т. е. бесконечно много несопряжённых алгебр и в пункте (4) теоремы 5.7.

Для $n \geqslant 5$ по [9, теорема 4.3] бесконечно много несопряжённых подалгебр, порождённых циклическими матрицами, в алгебре $M_{n-2}(\mathbb{Q})$, которые дают бесконечно много несопряжённых алгебр в пункте (4) теоремы 5.8. □

Теперь перейдём к действительным алгебрам.

Теорема 5.10. *Если $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в алгебре $M_4(\mathbb{R})$ матриц над полем действительных чисел длины $l(\mathcal{A}) = 2$, содержащая матрицу с минимальным многочленом степени 3, то $\mathcal{A}$ сопряжена в $M_4(\mathbb{R})$ с одной из следующих попарно несопряжённых алгебр*:

(1) $\mathcal{A}_{0;4}$;
(2) $\mathcal{A}_{1;4}$*5;*
(3) $\mathcal{A}_{2;4}$;
(4) $\mathcal{A}_{3;4}(1)$;
(5) $\mathcal{A}_{3;4}(-1)$;
(6) $\mathbb{F}E_2 \oplus D_2(\mathbb{R})$;
(7) $\mathbb{F}E_2 \oplus \mathcal{N}_2$;
(8) $\mathbb{F}E_2 \oplus \mathcal{C}$, $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$;
(9) $\mathcal{A}_{0;3} \oplus \mathbb{R}$;
(10) $\mathcal{A}_{1;3} \oplus \mathbb{R}$;
(11) $\mathcal{A}_{2;3} \oplus \mathbb{R}$.

Доказательство. Используем теорему 5.7. В поле вещественных чисел два представителя по модулю группы квадратов — числа ± 1, поэтому из пункта (4) теоремы 5.7 получаем две несопряжённые алгебры $\mathcal{A}_{3;4}(1)$ и $\mathcal{A}_{3;4}(-1)$.

Над полем действительных чисел существует три типа многочленов второй степени: приводимые с двумя различными корнями, приводимые с одним кратным корнем и неприводимые, поэтому по [9, теорема 4.4] в пункте (5) теоремы 5.7 получаем три несопряжённые подалгебры в $M_2(\mathbb{R})$, порождённые циклическими матрицами с многочленами соответствующих видов. В качестве представителей можно взять алгебру $D_2(\mathbb{R})$, порождённую диагональной матрицей с двумя разными собственными числами, алгебру $\mathcal{N}_2$, порождённую жордановой клеткой $J_2(0)$ и алгебру

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

порождённую матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

с комплексными собственными числами. □

Теорема 5.11. *При $n \geqslant 5$ алгебре $M_n(\mathbb{R})$ содержится*

$$3 + P_2(n-2) + 3\sum_{m=3}^{n-1} P_2(n-m)$$

различных с точностью до подобия коммутативных подалгебр длины $n-2$, где функция

$$P_2(m) = P(m) + \sum_{j=1}^{[\frac{m}{2}]} P(j)P(m-2j)$$

задаёт количество различных подалгебр, порождённых циклическими матрицами в $M_m(\mathbb{R})$.

Доказательство. Нужно применить теорему 5.8 и [9, теорема 4.4]. □

Теорема 5.12. *Пусть $q > 4$ — нечётное число, являющееся степенью простого, $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов и $\alpha \in \mathbb{F}_q$ — произвольный элемент, не являющийся квадратом в $\mathbb{F}_q$. Если $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в $M_4(\mathbb{F}_q)$ длины $l(\mathcal{A}) = 2$, содержащая матрицу с минимальным многочленом степени 3, то $\mathcal{A}$ сопряжена в $M_4(\mathbb{F}_q)$ с одной из следующих попарно несопряжённых алгебр:*

(1) $\mathcal{A}_{0;4}$;
(2) $\mathcal{A}_{1;4}$;
(3) $\mathcal{A}_{2;4}$;
(4) $\mathcal{A}_{3;4}(1)$;
(5) $\mathcal{A}_{3;4}(\alpha)$;
(6) $\mathbb{F}E_2 \oplus D_2(\mathbb{R})$;
(7) $\mathbb{F}E_2 \oplus \mathcal{N}_2$;
(8) $\mathbb{F}E_2 \oplus \mathcal{C}$, $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & \alpha b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{F}_q \right\}$;
(9) $\mathcal{A}_{0;3} \oplus \mathbb{F}_q$;
(10) $\mathcal{A}_{1;3} \oplus \mathbb{F}_q$;
(11) $\mathcal{A}_{2;3} \oplus \mathbb{F}_q$.

Доказательство. Используем теорему 5.7. В мультипликативной группе конечного поля $\mathbb{F}_q$ содержится $q-1$ элемент, для нечётного q это число чётно, поэтому в группе квадратов $(q-1)/2$ элемент. Следовательно, два представителя по модулю группы квадратов, (можно взять 1 и α), поэтому из пункта (4) теоремы 5.7 получаем две несопряжённые алгебры $\mathcal{A}_{3;4}(1)$ и $\mathcal{A}_{3;4}(\alpha)$.

Над конечным полем также существует три типа многочленов второй степени: приводимые с двумя различными корнями, приводимые с одним кратным корнем и неприводимые, поэтому по [9, теорема 4.7] в пункте (5) теоремы 5.7 получаем три несопряжённые подалгебры в $M_2(\mathbb{F}_q)$, порождённые циклическими матрицами с многочленами соответствующих видов. В качестве представителей можно взять алгебру $D_2(\mathbb{F}_q)$, порождённую диагональной матрицей с двумя разными собственными числами, алгебру $\mathcal{N}_2$, порождённую жордановой клеткой $J_2(0)$ и алгебру

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & \alpha b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{F}_q \right\},$$

порождённую матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

с минимальным многочленом $x^2 - \alpha$ (неприводим над $\mathbb{F}_q$ в силу выбора α). $\square$

Теорема 5.13. *Пусть $q = 2^s$, $s \geqslant 2$, $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов и $x^2 + \alpha x + \beta$ — произвольный неприводимый многочлен над $\mathbb{F}_q$. Если $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в $M_4(\mathbb{F}_q)$ длины $l(\mathcal{A}) = 2$, содержащая матрицу с минимальным многочленом степени 3, то $\mathcal{A}$ сопряжена в $M_4(\mathbb{F}_q)$ с одной из следующих попарно несопряжённых алгебр:*

(1) $\mathcal{A}_{0;4}$;
(2) $\mathcal{A}_{1;4}$;
(3) $\mathcal{A}_{2;4}$;
(4) $\mathcal{A}_{3;4}(1)$;
(5) $\mathbb{F}E_2 \oplus D_2(\mathbb{R})$;
(6) $\mathbb{F}E_2 \oplus \mathcal{N}_2$;
(7) $\mathbb{F}E_2 \oplus \mathcal{C}$, $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\beta b \\ b & a - \alpha b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{F}_q \right\}$;
(8) $\mathcal{A}_{0;3} \oplus \mathbb{F}_q$;
(9) $\mathcal{A}_{1;3} \oplus \mathbb{F}_q$;
(10) $\mathcal{A}_{2;3} \oplus \mathbb{F}_q$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы. В данном случае возведение в квадрат является автоморфизмом поля, поэтому по модулю группы квадратов ровно один представитель. $\square$

Теорема 5.14. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$ и $q \geqslant n$ — степень простого. В алгебре $M_n(\mathbb{F}_q)$ содержится*

$$3 + P_g(n-2) + 3\sum_{m=3}^{n-1} P_g(n-m)$$

различных с точностью до подобия коммутативных подалгебр длины $n-2$, где функция $P_g(m)$ задаёт количество различных подалгебр, порождённых циклическими матрицами в $M_m(\mathbb{F}_q)$ (последовательность A006171 *в энциклопедии целочисленных последовательностей* [11]*), в частности, эта функция только от n и от q количество алгебр не зависит.*

Доказательство. Нужно применить теорему 5.8 и [9, теорема 4.7]. $\square$

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 25-11-00348).

Литература

[1] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988.

[2] Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. — М.: Мир, 1988.

[3] Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1975.

[4] Маркова О. В. Характеризация коммутативных матричных подалгебр максимальной длины над произвольным полем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2009. — № 5. — С. 53—55.

[5] Маркова О. В. Классификация матричных подалгебр длины 1 // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 1. — С. 169—188.

[6] Маркова О. В. Функция длины и матричные алгебры // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 6. — С. 65—173.

[7] Маркова О. В. Коммутативные нильпотентные подалгебры индекса нильпотентности $n-1$ в алгебре матриц порядка n // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2016. — Т. 453. — С. 219—242.

[8] Маркова О. В. Функция длины и одновременная триангулизуемость пар матриц // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2022. — Т. 514. — С. 126—137.

[9] Маркова О. В. Коммутативные матричные алгебры, порождённые циклическими матрицами // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2023. — Т. 524. — С. 112—124.

[10] Маркова О. В. Классификация коммутативных подалгебр длины $n-2$ в алгебре матриц порядка n над алгебраически замкнутыми полями // Фундамент. и прикл. матем. — 2024. — Т. 25, вып. 1. — С. 133—159.

[11] Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей (On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS). — `https://oeis.org/`.

[12] Павлов И. А. О коммутативных нильпотентных алгебрах матриц // ДАН БССР. — 1967. — Т. 11, № 10. — С. 870—872.

[13] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир, 1986.

[14] Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Перестановочные матрицы. — М.: УРСС, 2003.

[15] Эндрюс Г. Теория разбиений. — М.: Наука, 1982.

[16] Al'pin Yu. A., Ikramov Kh. D. Reducibility theorems for pairs of matrices as rational criteria // Linear Algebra Appl. — 2000. — Vol. 313. — P. 155—161.

[17] Dolinar G., Guterman A., Kuzma B., Oblak P. Extremal matrix centralizers // Linear Algebra Appl. — 2013. — Vol. 438, no. 7. — P. 2904—2910.

[18] Guterman A. E., Markova O. V. Commutative matrix subalgebras and length function // Linear Algebra Appl. — 2009. — Vol. 430. — P. 1790—1805.

[19] Horn R., Johnson C. Matrix Analysis. — Cambridge Univ. Press, 2013.

[20] Pappacena C. J. An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra // J. Algebra. — 1997. — Vol. 197. — P. 535—545.

[21] Paz A. An application of the Cayley—Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables // Linear Multilinear Algebra. — 1984. — Vol. 15. — P. 161—170.