Матроиды и жёсткость планарных ферм

А. М. РЕВЯКИН
Национальный исследовательский университет МИЭТ
e-mail: arevyakin@mail.ru

УДК 519.1

Ключевые слова: матроид, жадный алгоритм, жёсткость планарных ферм, фермы с удалёнными фрагментами, двудольный граф, циклический матроид двудольного графа.

Аннотация

Проверка жёсткости планарных квадратных решёток с некоторым набором диагональных стержней сводится к проверке связности специально построенного двудольного графа. Для каждой из рассматриваемых ферм найдено наименьшее число диагональных соединений, необходимых для её жёсткости. Указан алгоритм расположения диагональных соединений для жёсткости планарных ферм и квадратных решёток с удалёнными фрагментами.

Abstract

A. M. Revyakin, Matroids and rigidity of planar trusses, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 4, pp. 185—193.

Checking the rigidity of planar square lattices with a certain set of diagonal bars is reduced to checking the connectivity of a specially constructed bipartite graph. For each of the trusses under consideration, the smallest number of diagonal connections necessary for its rigidity is found. An algorithm for arranging diagonal connections for the rigidity of planar trusses and square lattices with removed fragments is indicated.

Светлой памяти замечательного учёного,
математика и педагога Евгения Васильевича Панкратьева

В работе используются терминология и обозначения монографии А. Речки [5]. Другие необходимые сведенияов из теории матроидов и графов можно найти в [1, 4, 6]. Матроид — система $\mathcal{I}$ подмножеств конечного множества S, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\varnothing \in \mathcal{I}$;
2) если $A \subseteq B$ и $B \in \mathcal{I}$, то $A \in \mathcal{I}$;
3) если $A, B \in \mathcal{I}$ и $|A| > |B|$, то найдётся $a \in A \setminus B$, такое что $B \cup b \in \mathcal{I}$.

Матроиды возникают в самых разнообразных комбинаторных и алгебраических контекстах. Такие понятия, как независимость и базис в векторных пространствах, алгебраическая зависимость, циклы и разрезы в графах, поверхности в проективных геометриях, точечные полумодулярные решётки, сводятся

Фундаментальная и прикладная математика, 2025, том 25, № 4, с. 185—193.

к одной и той же структуре матроида. Благодаря возможности при изложении теории матроидов использовать аппарат теории решёток, графов, векторных пространств и геометрический язык обнаружились неожиданные сходства между результатами теории графов, теории кодирования, алгебры, топологии, электротехники, геометрии и комбинаторики.

Множества из $\mathcal{I}$ в матроиде M называются независимыми, максимальные по включению независимые множества — базами. Подмножество A из S является зависимым, если $A \notin \mathcal{I}$. Минимальное по включению зависимое подмножество — цикл матроида.

Приведём криптоморфное определение матроида через циклы.

Пара $M = (S, \mathcal{C})$, где $\mathcal{C}$ — семейство подмножеств (циклов) из S, является матроидом, если:

1) никакое собственное подмножество цикла не является циклом,
2) если $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \neq C_2$ и $x \in C_1 \cap C_2$, то найдётся цикл $C_3 \in \mathcal{C}$, такой что $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$,

причем $A \in \mathcal{I}$, если A не содержит в качестве подмножеств члены из $\mathcal{C}$.

Пусть G — простой граф с множествами вершин V и рёбер E. Тогда семейство всех циклов графа G является множеством всех циклов некоторого матроида $M(G)$ на E, называемого циклическим матроидом графа G.

Рассмотрим следующую задачу дискретной оптимизации. Пусть S — конечное множество, каждому элементу a которого приписан неотрицательный вес $w(a)$. Весом подмножества $A \subseteq S$ называется сумма весов его элементов. Пусть $\mathcal{I}$ — некоторое семейство подмножеств множества S. Задача состоит в выборе в $\mathcal{I}$ подмножества максимального веса. Опишем так называемый «жадный» алгоритм:

а) упорядочить множество S по убыванию весов так, чтобы
$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad \text{где} \quad w(a_1) \geqslant w(a_2) \geqslant \ldots \geqslant w(a_n);$$
б) $A = \varnothing$, $i = 1$;
в) если $A \cup \{a_i\} \in \mathcal{I}$, то $A = A \cup \{a_i\}$ и перейти к пункту г);
г) если $i = n$, то конец, иначе $i = i + 1$ и перейти к пункту в).

Очевидно, что выходом жадного алгоритма является максимальное по включению множество из $\mathcal{I}$. Однако оно может оказаться немаксимального веса. Например, если $S = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{I} = \big\{\{a\}, \{a, c\}, \{b, c, d\}, \{b, d\}\big\}$, $w(a) = 4$, $w(b) = 3$, $w(c) = w(d) = 2$, то жадный алгоритм найдёт множество $\{a, c\}$ с весом 6, хотя $\{b, c, d\}$ имеет вес 7.

Возникает вопрос: когда же можно гарантировать получение подмножества максимального веса, решая задачу с помощью жадного алгоритма? Ответ на этот вопрос даёт теорема Р. Радо и Ж. Эдмондса [1, 6] о том, что если $M = (S, \mathcal{I})$ — матроид, то множество A, найденное жадным алгоритмом, является независимым множеством M с наибольшим весом. Напротив, если $(S, \mathcal{I})$ не является матроидом, то существует такая неотрицательная действительная функция $w(a)$, определённая на множестве S, что A не будет элементом семейства $\mathcal{I}$ с наибольшим весом.

Эффективность жадных алгоритмов вызывается тем, что элемент, один раз включённый в оптимальное решение, остаётся в нём до конца. Здесь не бывает проверок всех возможностей, характерных для алгоритмов с возвратом. Именно этим обусловлено широкое применение матроидов в задачах дискретной оптимизации для получения быстрых алгоритмов.

Рассмотрим квадратную решётку $k \times l$ как планарную ферму, состоящую из жёстких стержней и соединяющих их шарниров. Если добавить в некоторые квадраты дополнительно диагональные стержни, то в одних случаях ферма становится жёсткой, т. е. не поддаётся деформации, а в других нет. Возникает естественный вопрос: куда следует добавить диагональные стержни, чтобы ферма стала жёсткой?

Определим двудольный граф $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l\}$ и соединим в нём вершины x_i и y_j ребром в том и только в том случае, когда в квадрате сетки, соответствующем i-й строке и j-му столбцу, размещён диагональный стержень.

В 1977 году Е. Болкер и Г. Крапо доказали, что квадратная решётка с некоторым набором диагональных стержней жёстка тогда и только тогда, когда двудольный граф G связен. Следовательно, минимальное число диагональных стержней, которые необходимо добавить для жёсткости квадратной фермы $k \times l$, равно $k+l-1$. Именно это число равно числу рёбер в соответствующем остовном дереве графа G.

Например, ферма 3×3 на рис. 1 не является жёсткой, так как соответствующий ей двудольный граф не связен. Возможная деформация фермы также показана на рис. 1.

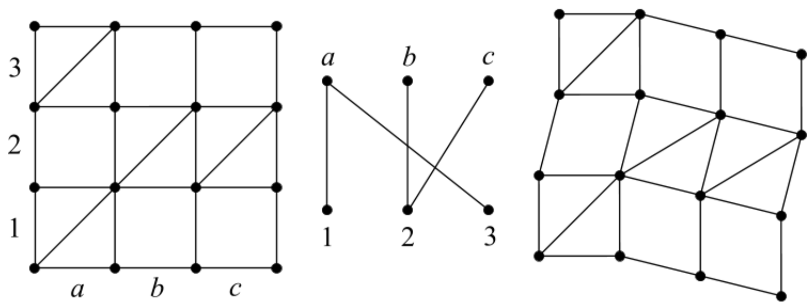


Рис. 1. Планарная ферма 3×3, её двудольный граф и деформация

Непосредственно из результата Е. Болкера и Г. Крапо следует, что всякая ферма $k \times l$ для своей жёсткости требует $k + l - 1$ диагональных стержней, причём эти $k + l - 1$ стержней делают ферму жёсткой тогда и только тогда, когда соответствующий двудольный граф является остовным деревом (остовом).

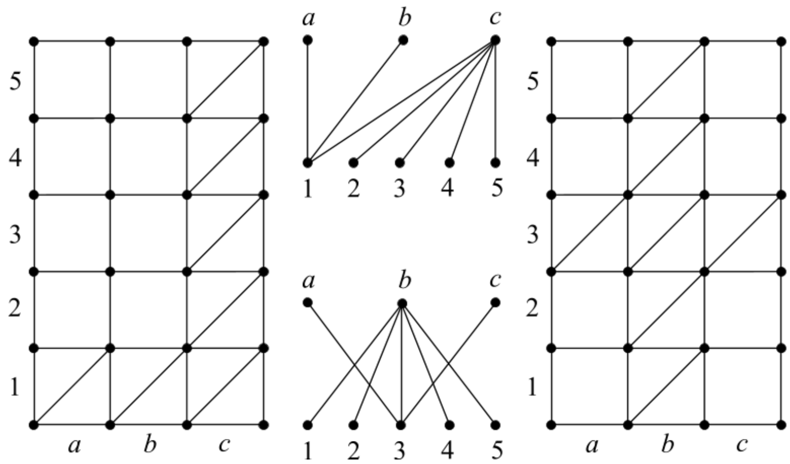


Рис. 2. Две жёсткие фермы с одинаковым числом добавленных диагональных стержней

На рис. 2 приведены две жёсткие фермы, в которые добавлено по $k + l - 1$ диагональных стержней. Оба соответствующих графа являются остовами.

Обе фермы на рис. 3 жёсткие с одним избыточным для жёсткости диагональным стержнем (всего в каждую ферму добавлено по шесть стержней вместо необходимых для этого пяти). Однако в их жёсткости есть существенные различия. При разрыве любого одного стержня в первой ферме она останется жёсткой. При разрыве одного стержня из клеток $(b, 3)$ или $(c, 2)$ вторая ферма деформируется. Очевидно, диагональный стержень является критическим, если соответствующее ему ребро в двудольном графе является разрезом.

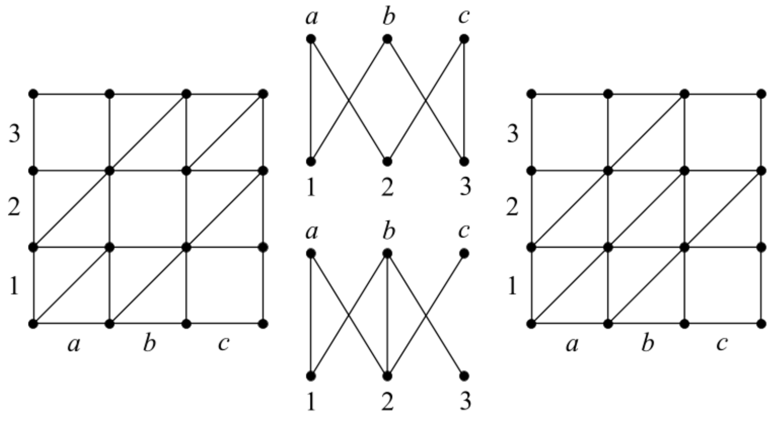
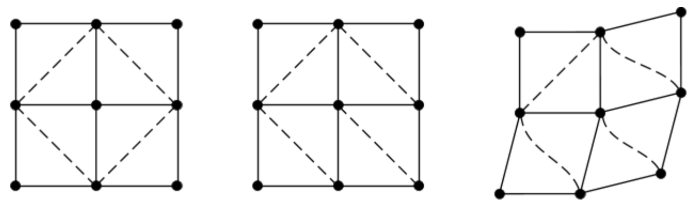


Рис. 3. Две жёсткие фермы

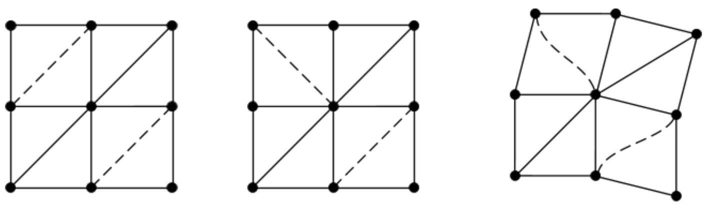
Рассмотрим фермы, в которые вместо жёстких диагональных стержней добавлены деформирующие (растягивающие) верёвки. В этой ситуации становится важным, по какой диагонали связали квадрат (снизу вверх или наоборот). На рис. 4 равным числом верёвок по-разному завязаны вершины квадрата. В результате первая ферма (*а*) становится жёсткой, а вторая (*б*) — нет. На рис. 4, *в* показана деформация второй фермы.



а *б* *в*

Рис. 4. Фермы с равным количеством добавленных соединительных верёвок и деформация второй фермы

Рассмотрим две «смешанные» фермы (добавлены как жёсткие стержни, так и верёвки) на рис. 5. Отличие этих ферм состоит в том, что по-разному привязаны верёвки. Первая ферма является жёсткой, а вторая — нет. Деформация второй фермы приведена на рис. 5, *в*. Превратим смешанные графы соответствующих ферм в орграфы заменой всех неориентированных рёбер парой дуг, направленных в противоположные стороны. Орграфы рассматриваемых ферм представлены на рис. 6.



а *б* *в*

Рис. 5. Смешанные фермы и деформация второй фермы

Рис. 6. Орграфы смешанных ферм, изображённых на рис. 5

Заметим, что орграф, соответствующий первой ферме, сильно связный, орграф второй фермы связный, но не сильно связный. Можно доказать, что ферма с добавленными диагональными элементами (стержнями или верёвками) является жёсткой в том и только в том случае, когда соответствующий ей орграф сильно связен. Следовательно, чтобы планарную ферму $k \times l$ сделать жёсткой, используя верёвки, нужно добавить по крайней мере $2\max\{k, l\}$ элементов.

Рассмотрим теперь более сложную ферму, получаемую из квадратной решётки $k \times l$ удалением некоторого фрагмента $s \times u$ ($s, u \geqslant 2$). Пример такой фермы приведён на рис. 7.

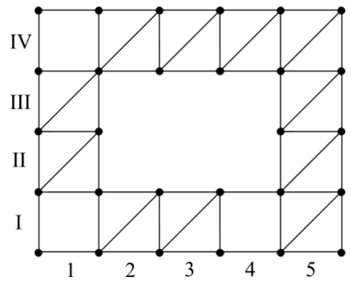


Рис. 7. Ферма 5×4 с удалённым фрагментом 3×2

Спрашивается, какова теперь минимальная система диагональных стержней, которая сделает ферму жёсткой? Для ответа на этот вопрос модернизируем прежний двудольный граф. Заменим каждую вершину y_{t+i}, $i = 1, 2, \ldots, u$, парой вершин, называя их соответственно левой и правой копией вершины $(t+i)$-й строки. Каждую левую и правые копии одной вершины соединим красным ребром (на рисунках красные рёбра обозначаются ●━━●). Аналогично поступаем с вершинами x_{r+j}, $j = 1, 2, \ldots, s$, соединяя каждую их пару зелёным ребром (на рисунках зелёные рёбра обозначаются ●━ ━●). Рёбра между вершинами x_i и y_j, у которых $i \notin (r, r+s]$ и $j \notin (t, t+u]$, оставляем прежними. Для рёбер (x_i, y_j) в G, у которых $i \leqslant r$ ($i > r+s$), вершину x_i соединяем с левым концом (соответственно с правым концом) каждого красного ребра. Аналогично для ребра (x_i, y_j) в G вершину y_j, у которой $j \leqslant t$ ($j > t+u$), соединяем с левым концом

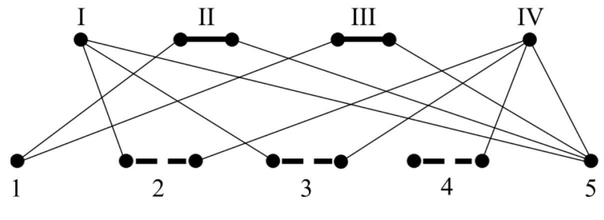


Рис. 8. Граф $G_{5,4,3,2}$

(соответственно с правым концом) зелёного ребра. Полученный «новый» граф обозначим через $G_{k,l,s,u}$. Граф $G_{5,4,3,2}$ для фермы на рис. 7 изображён на рис. 8.

Пусть из квадратной решётки $k \times l$ удалён фрагмент $s \times u$ $(s, u \geqslant 2)$. Тогда добавление к ферме $k + l + s + u - 3$ диагональных стержней делает рассматриваемую ферму жёсткой тогда и только тогда, когда добавленное множество будет образовывать базу циклического матроида двудольного графа $G_{k,l,s,u}$ после добавления к нему по одному ребру красного и зелёного цветов. Другими словами, добавленные диагонали должны образовывать в графе $G_{k,l,s,u}$ трёхкомпонентный лес F и должны найтись красное ребро a и зелёное ребро b, такие что $F \cup \{a, b\}$ — дерево в $G_{k,l,s,u}$.

Например, для квадратной решётки 5×4, в которой удалён фрагмент 3×2 для жёсткости понадобится добавить 11 диагональных стержней. В циклическом матроиде графа $G_{5,4,3,2}$ у 210 баз ровно по одному красному и зелёному ребру. Каждой такой базе соответствует жёсткая ферма. Таким образом, ферма на рис. 7 является жёсткой, поскольку граф на рис. 9 удовлетворяет всем требованиям.

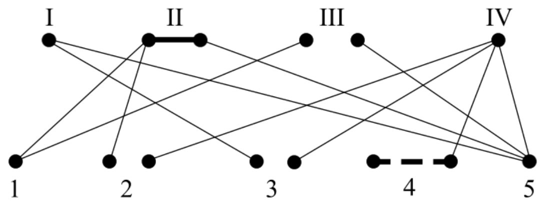


Рис. 9. База циклического матроида графа $G_{5,4,3,2}$ с одним красным и одним зелёным ребром

Рассмотрим теперь ферму, получаемую из квадратной решётки $k \times l$ удалением двух параллельных прямоугольных фрагментов $s \times u$ $(s, u \geqslant 2)$ (рис. 10).

Модернизируем прежний двудольный граф. Заменим каждую вершину y_{t+i}, $i = 1, 2, \ldots, u$, тройкой вершин. Соединим первую и вторую копии вершины

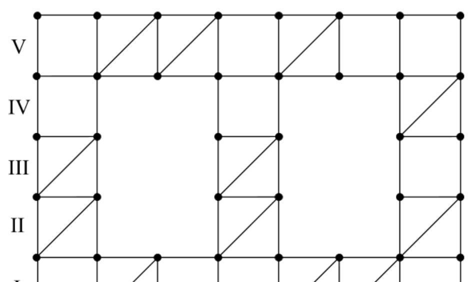


Рис. 10. Ферма с двумя параллельными удалёнными прямоугольными фрагментами

ребром красного цвета, а вторую и третью копии — ребром синего цвета (на рисунках синие рёбра обозначаются ●┅┅●). Заменим каждую вершину x_j, над которой есть удалённые клетки, парой вершин, соединив их ребром зелёного или жёлтого цветов в зависимости от номера удалённого фрагмента (на рисунках жёлтые рёбра обозначаются ●═●). Рёбра между вершинами без копий оставляем прежними. Вершины x_i, лежащие до вершин с копиями, соединяем с первыми копиями вершин y_j, вершины x_i, лежащие между вершинами с копиями, соединяем ребром со вторыми копиями вершин y_j, а вершины x_i, после которых уже нет вершин с копиями, соединяем ребром с третьей копией вершины y_j. Полученный граф обозначим через $G_{k,l,2s,2u}$. Для фермы, изображённой на рис. 10, граф $G_{5,4,6,4}$ представлен на рис. 11.

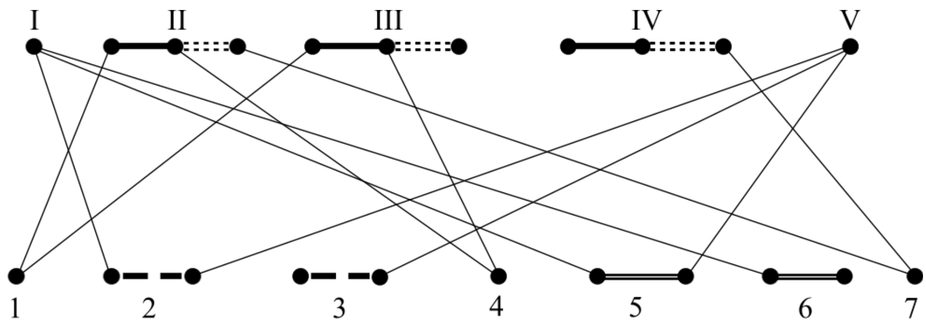


Рис. 11. Граф $G_{5,4,6,4}$

Пусть из квадратной решётки $k \times l$ удалено два параллельных прямоугольных фрагмента $s \times u$ $(s, u \geqslant 2)$. Тогда добавление к ферме $k + l + 2s + 2u - 5$ диагональных стержней делает рассматриваемую ферму жёсткой тогда и только тогда, когда добавленное множество будет образовывать базу циклического матроида двудольного графа $G_{k,l,2s,2u}$ после добавления к нему по одному ребру красного, синего, жёлтого и зелёного цветов.

Например, для квадратной решётки 7×5, в которой удалены два параллельных фрагмента 3×2 (рис. 10), для жёсткости понадобится добавить 17 диагональных стержней. Доказано, что добавление 16 диагональных стержней оставляет такую решётку нежёсткой.

Отметим, что часть из приведённых в работе результатов были получены совместно с А. Речки на основе его критерия жёсткости [2].

Пусть задана цена или надёжность размещения каждого диагонального элемента в планарной ферме. Тогда задача построения наиболее надёжной (или дешёвой) жёсткой фермы эффективно решается с помощью жадного алгоритма (или двойственных жадному алгоритмов Краскала и Прима) нахождения остова максимального (или минимального) веса.

Литература

[1] Ревякин А. М. Матроиды // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2000. — Т. 72.

[2] Ревякин А. М., Речки А. Жесткость планарных квадратных ферм с удаленными фрагментами // Материалы VIII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (2—6 февраля 2004 г.) / Под ред. О. Б. Лупанова. — М.: МГУ, 2004. — С. 222—224.

[3] Bolker E. D., Crapo H. How to brace a one-story building // Environ. Plan. B. — 1977. — Vol. 4, no. 2. — P. 125—152.

[4] Oxley J. G. Matroid Theory. — New York: Oxford Univ. Press, 2006.

[5] Recski A. Matroid Theory and Its Applications in Electric Network Theory and in Statics. — Budapest: Akad. Kiado, 1989.

[6] Welsh D. J. A. Matroid Theory. — London: Academic Press, 1976.