Полунётеровы модули над непримитивными HNP-кольцами

А. А. ТУГАНБАЕВ
Национальный исследовательский университет МЭИ,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.5

Ключевые слова: полунётеров модуль, максимальный подмодуль, max-модуль.

Аннотация

Исследуются полунётеровы модули над непримитивными наследственными нётеровыми первичными кольцами.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Semi-Noetherian modules over non-primitive HNP rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 25 (2025), no. 4, pp. 195—205.

We study semi-Noetherian modules over non-primitive hereditary Noetherian rings.

1. Введение

Рассматриваются только ассоциативные кольца с ненулевой единицей и унитарные модули. Выражения типа «A — нётерово кольцо» означают, что оба модуля A_A и ${}_AA$ нётеровы. Под A-модулем обычно понимается правый A-модуль. Все не определённые в статье, но используемые в ней понятия стандартны (см., например, [1, 4, 7, 9, 10, 18, 21]).

Модуль называется *полунётеровым* (*max-модулем*), если каждый его ненулевой подфактор (соответственно подмодуль) имеет максимальный подмодуль (см. [18, гл. 1; 1.35, 1.36]). Иными словами, полунётеровы модули — это модули, у которых все фактор-модули — max-модули (т. е. все подфакторы — max-модули); max-модули рассматривались, например, в [2, 3, 6, 12, 19]. Каждый нётеров модуль является полунётеровым. Все полупростые модули полунётеровы, но являются нётеровыми, только если они конечно порождены.

1.1. Замечание. Наследственные нётеровы первичные кольца также называются *HNP-кольцами*. В [11] доказано, что любое HNP-кольцо A примитивное (справа и слева) или ограниченное (справа и слева), причём если A примитивное и ограниченное, то A — простое артиново кольцо. Поэтому непримитивные HNP-кольца совпадают с неартиновыми ограниченными HNP-кольцами.

Фундаментальная и прикладная математика, 2025, том 25, № 4, с. 195—205.

Основным результатом данной статьи является теорема 1.2; соответствующие определения и обозначения приведены после этой теоремы.

1.2. Теорема. *Пусть A — непримитивное наследственное нётерово первичное кольцо.*

1. *Каждая прямая сумма циклических сингулярных A-модулей является max-модулем, причём каждый сингулярный A-модуль является гомоморфным образом прямой суммы циклических сингулярных модулей.*
2. *Если M — сингулярный A-модуль, то модуль M является полунётеровым в точности тогда, когда каждая примарная компонента модуля M имеет ненулевой аннулятор, а также в точности тогда, когда каждая примарная компонента модуля M является прямой суммой циклических цепных модулей, композиционные длины которых ограничены в совокупности.*
3. *Каждый max-A-модуль не имеет ненулевых инъективных подмодулей.*
4. *Если M — проективный A-модуль, то M — max-модуль, который является полунётеровым в точности тогда, когда M — нётеров модуль. Поэтому существуют проективные max-A-модули, не являющиеся полунётеровыми.*

Доказательство теоремы 1.2 разбито на несколько утверждений (см. 2.12 и 3.10).

1.3. Подмодуль X модуля M называется *максимальным*, если фактор-модуль M/X прост, т. е. M/X — единственный ненулевой подмодуль в M/X. Подмодуль X модуля M называется *существенным*, если $X \cap Y \neq 0$ для каждого ненулевого подмодуля Y в M. Модуль M называется *равномерным* (или *однородным*), если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение, т. е. если любой ненулевой подмодуль в M является существенным. Модуль M называется *цепным*, если решётка всех его подмодулей является цепью, т. е. в M любые два подмодуля сравнимы по включению (эквивалентно, любые два циклических подмодуля сравнимы по включению). Каждый цепной модуль равномерен, и каждый равномерный модуль неразложим. Модуль M называется *бесконечномерным*, если M содержит подмодуль, являющийся прямой суммой бесконечного числа ненулевых модулей. Модуль M называется *конечномерным*, если M не имеет подмодулей, являющихся прямыми суммами бесконечного числа ненулевых модулей. Модуль называется *нётеровым*, если все его подмодули конечно порождены. Модуль называется *проективным*, если он является прямым слагаемым свободного модуля. Модуль называется *наследственным*, если все его подмодули проективны. Модуль называется *инъективным*, если он является прямым слагаемым в любом содержащем его модуле. Модуль называется *вполне инъективным*, если все его гомоморфные образы инъективны.

1.4. Если N — подмножество правого (левого) A-модуля M, то через $r(N)$ (соответственно $\ell(N)$) обозначается правый (соответственно левый) аннулятор множества N в A, т. е. $r(N) = \{a \in A \mid Na = 0\}$ ($\ell(N) = \{a \in A \mid aN = 0\}$). Правый (левый) модуль M называется *точным*, если $r(M) = 0$ (соответственно

$\ell(M) = 0$). Кольцо A называется *примитивным справа* (*примитивным слева*), если существует точный простой правый (соответственно левый) A-модуль. Кольцо называется *непримитивным*, если оно не является примитивным справа или слева. Кольцо называется *первичным* (*областью*), если произведение любых двух его ненулевых идеалов (соответственно элементов) не равно нулю. Кольцо A называется *полупервичным*, если A не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. Конечномерное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов называется *правым кольцом Голди*. Кольцо A называется *ограниченным справа* (*слева*), если каждый его существенный правый (соответственно левый) идеал содержит ненулевой идеал кольца A.

1.5. Через $\operatorname{Sing} M$ обозначается множество всех таких элементов m правого (левого) A-модуля M, что $r(m)$ (соответственно $\ell(m)$) — существенный правый (соответственно левый) идеал кольца A. Хорошо известно, что $\operatorname{Sing} M$ — вполне инвариантный подмодуль модуля M; он называется *сингулярным подмодулем* модуля M. Если $\operatorname{Sing} M = M$ ($\operatorname{Sing} M = 0$), то модуль M называется *сингулярным* (соответственно *несингулярным*). Элемент a кольца A называется *регулярным*, если $r(a) = \ell(a) = 0$. Через $T(M)$ обозначается множество всех таких элементов m модуля M_A, что $r(m)$ содержит регулярный элемент кольца A; это множество называется *периодической частью* модуля M. Модуль M называется *периодическим* (*модулем без кручения*), если $T(M) = M$ (соответственно $T(M) = 0$). Модуль M называется *делимым*, если $M = Ma$ для каждого регулярного элемента $a \in A$.

1.6. Максимальные обратимые идеалы. Примарные компоненты. Пусть кольцо A обладает классическим кольцом частных Q. Идеал B кольца A называется *обратимым*, если существует такой подбимодуль B^{-1} бимодуля ${}_AQ_A$, что $BB^{-1} = B^{-1}B = A$. Максимальные элементы множества всех собственных обратимых идеалов кольца A называются *максимальными обратимыми* идеалами. Множество всех максимальных обратимых идеалов кольца A обозначается через $\mathcal{P}(A)$. Если M — A-модуль и $P \in \mathcal{P}(A)$, то подмодуль

$$\{m \in M \mid mP^n = 0,\ n = 1, 2, \ldots\}$$

называется *P-примарной компонентой* модуля M и обозначается через $M(P)$. Если $M = M(P)$ для некоторого $P \in \mathcal{P}(A)$, то M называется *примарным* или *P-примарным* модулем.

1.7. Замечание. Пусть A — непримитивное HNP-кольцо, M — сингулярный A-модуль и $\{M(P_i)\}_{i \in I}$ — множество всех примарных компонент модуля M. Хорошо известны свойства примарных компонент модуля M (см., например, [13—15]. Эти свойства аналогичны свойствам примарных компонент периодических абелевых групп. Например, $M = \bigoplus_{i \in I} M(P_i)$, все примарные компоненты $M(P_i)$ вполне инвариантны в M, для любого подмодуля X модуля M имеем $X = \bigoplus_{i \in I} X \cap M(P_i)$, где $X \cap M(P_i)$ — примарные компоненты модуля X, и т. п.

2. Сингулярные модули

2.1. Предложение [7, 4.19, 4.20]. *Кольцо A является нётеровым справа кольцом в точности тогда, когда каждый инъективный правый A-модуль является прямой суммой равномерных инъективных модулей, а также в точности тогда, когда все прямые суммы инъективных правых A-модулей инъективны.*

2.2. Предложение.

1. *Каждый инъективный модуль является делимым* [10, следствие 3.17′].
2. *Если A — полупервичное правое кольцо Голди, то каждый несингулярный делимый правый A-модуль инъективен* [7, 6.12].

2.3. Предложение. *Пусть A — наследственное справа кольцо и Q — инъективная оболочка модуля A_A.*

1. *Любой инъективный правый A-модуль M вполне инъективен и делим.*
2. *Любой неразложимый инъективный правый A-модуль является гомоморфным образом инъективной оболочки модуля A_A.*
3. *Пусть $Q \neq A_A$. Тогда Q/A_A — ненулевой сингулярный инъективный модуль. Кроме того, если кольцо A нётерово справа, то существуют ненулевые равномерные сингулярные инъективные модули, каждый из которых является гомоморфным образом модуля Q.*

Доказательство. 1. Модуль M вполне инъективен в силу [4, теорема 5.4] и делим в силу утверждения 1 предложения 2.2.

2. См., например, [5, следствие 8].

3. Так как по утверждению 1 модуль Q вполне инъективен, модуль Q/A_A инъективен. Кроме того, модуль Q/A_A сингулярен. Ненулевой сингулярный инъективный модуль Q/A_A является прямой суммой ненулевых равномерных модулей X_i, $i \in I$, в силу предложения 2.1. В силу утверждения 2 все модули X_i — гомоморфные образы модуля Q. □

2.4. Предложение. *Пусть A — непримитивное HNP-кольцо, M — сингулярный правый A-модуль, $\{M(P_i)\}$ — множество всех примарных компонент модуля M.*

1. *Все конечно порождённые подмодули модуля M являются конечными прямыми суммами циклических цепных модулей конечной длины.*
2. *Каждый неинъективный подмодуль модуля M имеет ненулевое циклическое цепное прямое слагаемое конечной длины.*
3. *M — инъективный модуль в точности тогда, когда каждая примарная компонента $M(P_i)$ является инъективным модулем, а также в точности тогда, когда каждая примарная компонента $M(P_i)$ является прямой суммой цепных инъективных модулей.*

Доказательство. 1, 2. Утверждения доказаны в [14] и [15].

3. Утверждение следует из утверждений 1 и 2 и предложения 2.1. □

2.5. Замечание. Кольцо A называется *полупримарным*, если его радикал Джекобсона нильпотентен, а фактор-кольцо $A/J(A)$ артиново. Непосредственно проверяется, что каждый модуль над полупримарным кольцом является полунётеровым.

2.6. Замечание. Пусть A — кольцо и M — правый A-модуль. Непосредственно проверяется, что модуль M_A полунётеров в точности тогда, когда естественный модуль $M_{A/B}$ полунётеров. Следовательно, если фактор-кольцо $A/r(M)$ полупримарно, то из замечания 2.5 вытекает, что модуль M полунётеров.

2.7. Лемма. *Пусть A — непримитивное HNP-кольцо, M — сингулярный правый A-модуль и $\{M(P_i)\}$ — множество всех примарных компонент модуля M.*

1. *Если каждая примарная компонента $M(P_i)$ модуля M полунётерова, то модуль M полунётеров.*
2. *Если каждая примарная компонента $M(P_i)$ модуля M имеет ненулевой аннулятор, то модуль M полунётеров.*

Доказательство. 1. С учётом замечания 1.7 утверждение проверяется непосредственно.

2. Утверждение вытекает из утверждения 1 и замечания 2.6. □

2.8. Предложение. *Пусть A — непримитивное HNP-кольцо, M — инъективный неразложимый ненулевой сингулярный модуль, $M(P)$ — примарная компонента модуля M, где P — максимальный обратимый идеал кольца A.*

1. *M — цепной нециклический примарный модуль без максимальных подмодулей, все собственные подмодули модуля M цикличны, имеют конечную длину и образуют счётную цепь $0 = X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_k \subset \ldots$, где X_k/X_{k-1} — простой модуль для любого k и существует такое натуральное число n, что $X_j/X_{j-1} \cong X_k/X_{k-1}$ тогда и только тогда, когда $j-k$ делится на n.*
2. *Если $\bar{M}$ — любой ненулевой гомоморфный образ модуля M, то для любого циклического подмодуля $\bar{X}$ модуля $\bar{M}$ длины не меньше $k+n$ существует эпиморфизм $\bar{X} \to X_k$ с ненулевым ядром, где X_k — произвольный циклический подмодуль из утверждения 1.*
3. *Если Y — произвольный циклический цепной P-примарный модуль, то он изоморфен подфактору модуля M и аннулируется некоторой степенью идеала P.*
4. *Если $\bigoplus\limits_{i\in I} Y_i$ — P-примарный модуль, где все Y_i — циклические цепные модули, композиционные длины которых ограничены в совокупности, то модуль аннулируется некоторой натуральной степенью идеала P.*
5. *Если $\bigoplus\limits_{i\in I} Y_i$ — P-примарный модуль, где все Y_i — циклические цепные модули, композиционные длины которых не ограничены в совокупности, то для некоторых подфакторов $\bar{Y}_i$ модулей Y_i существует эпиморфизм $\bigoplus\limits_{i\in I} \bar{Y}_i \to M$ и модули $\bigoplus\limits_{i\in I} Y_i$, $\bigoplus\limits_{i\in I} \bar{Y}_i$ не являются полунётеровыми.*

Доказательство. 1, 2, 3, 4. Утверждения следуют из предложения 2.4 и результатов [14, 15].

5. Хорошо известно, что если $Z_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n = 1, 2, \ldots$, то существует эпиморфизм абелевой группы $\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ на квазициклическую p-группу $\mathbb{Z}(p^\infty)$ (см. [8, упражнение 16, с. 19]). Нетрудно использовать утверждение 1, чтобы аналогично доказать существование некоторого эпиморфизма $\bigoplus\limits_{i\in I} \bar{Y}_i \to M$. Модуль $\bigoplus\limits_{i\in I} \bar{Y}_i$ не полунётеров, поскольку модуль M не имеет максимальных подмодулей в силу утверждения 1. Поэтому модуль $\bigoplus\limits_{i\in I} Y_i$ тоже не полунётеров. □

2.9. Предложение. *Пусть A — непримитивное наследственное нётерово первичное кольцо и M — ненулевой сингулярный A-модуль.*

1. *Если M — прямая сумма циклических сингулярных модулей, то каждый подмодуль модуля M — прямая сумма циклических сингулярных модулей.*
2. *Модуль M содержит такой подмодуль X, что X — прямая сумма цепных сингулярных модулей и модуль M/X инъективен.*
3. *Если M — $\max$-модуль, то M не содержит ненулевых инъективных подмодулей.*
4. *Если M — $\max$-модуль, то M содержит такой подмодуль X, что X — прямая сумма циклических цепных сингулярных модулей и модуль M/X инъективен.*
5. *Если модуль M полунётеров, то M — прямая сумма циклических цепных сингулярных модулей.*

Доказательство. 1, 2. Утверждения являются частными случаями теоремы 4 из [14] и теоремы 1 из [16] соответственно.

3. Допустим противное. Тогда M содержит ненулевое инъективное прямое слагаемое, являющееся $\max$-модулем. В силу утверждения 3 предложения 2.4 M имеет ненулевое цепное инъективное сингулярное прямое слагаемое N, являющееся $\max$-модулем. Это противоречит утверждению 1 предложения 2.8.

4. Из утверждений 2 и 3 вытекает, что M содержит такой подмодуль $X = \bigoplus\limits_{i\in I} X_i$, что все X_i — цепные сингулярные неинъективные модули и модуль M/X инъективен. По утверждению 1 предложения 2.8 все модули X_i цикличны.

5. По утверждению 4 M содержит такой подмодуль X, что X — прямая сумма циклических цепных сингулярных модулей и M/X — инъективный сингулярный полунётеров модуль. Применяя утверждение 3 к инъективному сингулярному $\max$-модулю M/X, получаем $M = X$. □

2.10. Предложение. *Пусть A — непримитивное наследственное нётерово первичное кольцо и M — ненулевой сингулярный A-модуль. Равносильны условия:*

1) *M — полунётеров модуль;*

2) *каждая примарная компонента модуля M — полунётеров модуль*;
3) *каждая примарная компонента модуля M является прямой суммой циклических цепных модулей, композиционные длины которых ограничены в совокупности*;
4) *каждая примарная компонента модуля M имеет ненулевой аннулятор.*

Доказательство. С учётом замечания 1.7 эквивалентность первого и второго условий проверяется непосредственно. Без ограничения общности можно считать, что M совпадает с одной из своих примарных компонент. Достаточно доказать эквивалентность условий 2, 3 и 4.

Из утверждения 5 предложения 2.8 следует импликация 2) $\Rightarrow$ 3).

Из утверждения 4 предложения 2.8 следует импликация 3) $\Rightarrow$ 4).

Из утверждения 2 леммы 2.7 следует импликация 4) $\Rightarrow$ 2). □

2.11. Замечание. Пусть A — кольцо, M — сингулярный правый A-модуль, $\tau = |M|$ — мощность множества M, $\{X_i\}_{i\in I}$ — множество представителей классов изоморфных циклических сингулярных правых A-модулей, X — прямая сумма всех модулей X_i и X^τ — прямая сумма τ экземпляров изоморфных копий модуля X. Непосредственно проверяется, что существует эпиморфизм $X^\tau \to M$.

2.12. Окончание доказательства утверждений 1 и 2 теоремы 1.2.

1. По утверждению 3 предложения 2.9 никакой сингулярный max-A-модуль не имеет ненулевых инъективных подмодулей. Так как каждая ненулевая прямая сумма циклических модулей обладает максимальным подмодулем, то из утверждения 1 предложения 2.9 вытекает, что каждая прямая сумма циклических сингулярных A-модулей является max-модулем. В силу замечания 2.11 каждый сингулярный A-модуль является гомоморфным образом прямой суммы циклических сингулярных модулей.

2. Утверждение следует из предложения 2.10.

3. Проективные полунётеровы модули

3.1. Известно, что каждый ненулевой проективный модуль имеет максимальный подмодуль (см., например, [9, теорема 9.6.3]). Поэтому каждый наследственный модуль является max-модулем.

3.2. Пусть A — наследственное справа кольцо. Известно, что каждый проективный правый A-модуль является наследственным (см., например, [4, теорема 5.4]). Поэтому из 3.1 следует, что каждый ненулевой проективный правый A-модуль P является max-модулем. Кроме того, из [21, 39.7] следует, что P изоморфен прямой сумме ненулевых наследственных правых идеалов кольца A.

3.3. Предложение. *Пусть A — полупервичное правое кольцо Голди.*

1. *Множество всех существенных правых идеалов кольца A совпадает со множеством всех правых идеалов кольца A, содержащих регулярные элементы. Следовательно, класс всех сингулярных (несингулярных) правых*

A-модулей совпадает с классом всех периодических правых A-модулей (соответственно A-модулей без кручения). Все существенные расширения сингулярных (несингулярных) правых A-модулей являются сингулярными (соответственно несингулярными) модулями. Для любого модуля M_A модуль $M/\operatorname{Sing}(M)$ несингулярен. Кольцо A имеет полупростое артиново правое классическое кольцо частных Q, причём (с точностью до A-модульного изоморфизма) ненулевые инъективные несингулярные равномерные правые A-модули совпадают с минимальными правыми идеалами полупростого артинова кольца Q; если A первично, то кольцо Q простое.

2. *Каждый непериодический правый A-модуль содержит ненулевой несингулярный подмодуль.*

Предложение 3.3 хорошо известно. Утверждение 1 доказано, например, в [7, 5.9, 5.10, 6.14, 6.10 (a)]. Утверждение 2 следует из утверждения 1.

3.4 [20, лемма 2.15]. Пусть A — кольцо и M — ненулевой правый A-модуль, не являющийся существенным расширением своего сингулярного подмодуля $\operatorname{Sing} X$. Тогда M содержит подмодуль, который изоморфен ненулевому правому идеалу кольца A.

3.5. Лемма. *Пусть A — первичное правое кольцо Голди.*

1. *Каждый ненулевой идеал B кольца A является существенным правым идеалом и содержит регулярный элемент.*
2. *Существует такое натуральное число n, что для любых ненулевых элементов $b_1, \ldots, b_n$ кольца A модуль $b_1A \oplus \ldots \oplus b_nA$ содержит изоморфную копию свободного циклического модуля A_A.*
3. *Если X — непериодический правый A-модуль и Y — прямая сумма бесконечного множества J изоморфных копий модуля X, то Y содержит ненулевой свободный подмодуль бесконечного ранга $|J|$.*
4. *Если кольцо A ограничено справа и существует простой сингулярный правый A-модуль X, то модуль X не является делимым*; в частности, *модуль X не инъективен в силу утверждения* 1 *предложения* 3.3.
5. *Если кольцо A ограничено справа и существует простой инъективный правый A-модуль X, то A — простое артиново кольцо.*

Доказательство. 1. В силу утверждения 1 предложения 3.3 достаточно доказать, что B — существенный правый идеал. Пусть C — такой правый идеал кольца A, что $B \cap C = 0$. Тогда $(AC)B \subseteq B \cap C = 0$. Так как кольцо A первично, то $C \subseteq AC = 0$ и B — существенный правый идеал.

2. По утверждению 1 предложения 3.3 первичное правое кольцо Голди A обладает классическим правым кольцом частных Q, которое для некоторого натурального числа n изоморфно кольцу всех $(n{\times}n)$-матриц над телом. Обозначим через B модуль $b_1A \oplus \ldots \oplus b_n$. Тогда Q-модуль $b_1Q \oplus \ldots \oplus b_nQ$ содержит изоморфную копию модуля Q_Q. Поэтому модуль B содержит изоморфную копию модуля A_A.

3. По 3.4 X содержит подмодуль, который изоморфен ненулевому главному правому идеалу bA кольца A. По утверждению 2 существует такое натуральное число n, что прямая сумма n изоморфных копий модуля bA_A содержит изоморфную копию свободного циклического модуля A_A. Тогда Y содержит ненулевой свободный подмодуль бесконечного ранга $|J|$.

4. Пусть $X = xA$. Тогда $xD = 0$ для некоторого существенного правого идеала D кольца A. Так как кольцо A ограничено, то D содержит ненулевой идеал B кольца A. По утверждению 1 B содержит некоторый регулярный элемент b. Тогда $Xb \subseteq xAbA = 0$. Тогда $X \neq Xb$ и модуль X не является делимым.

5. Пусть $X = xA$, $M = r(x) \subseteq A$, $X_A \cong A/M$. Если M — существенный правый идеал, то A/M — сингулярный инъективный простой модуль, что противоречит утверждению 4. Поэтому имеется такой ненулевой правый идеал Y кольца A, что $M \cap Y = 0$. Так как модуль A/M прост, то $Y \cong X$ — инъективный простой модуль, $A_A = M \oplus Y$ и первичное правое кольцо Голди A имеет ненулевой правый цоколь S, являющийся конечной прямой суммой инъективных простых правых идеалов, изоморфных Y. Применяя стандартные рассуждения, получаем, что A — простое артиново кольцо. □

3.6. Лемма. *Пусть A — наследственное справа кольцо, над которым существуют такие ненулевые правые модули P и Q, что P — свободный полунётеров модуль счётного ранга и Q — ненулевой счётно порождённый инъективный сингулярный модуль. Тогда существует простой сингулярный инъективный правый A-модуль S.*

Доказательство. Из условия следует, что существует эпиморфизм $P \to Q$. Так как модуль P полунётеров, то Q — ненулевой полунётеров модуль. Поэтому сингулярный модуль Q имеет простой сингулярный фактор-модуль S. По лемме 3.5 модуль S инъективен. □

3.7. Лемма. *Если A — непримитивное HNP-кольцо, то никакой инъективный правый A-модуль не имеет простых гомоморфных образов. В частности, A не имеет ненулевых инъективных правых max-модулей.*

Доказательство. Допустим, что существует ненулевой инъективный правый A-модуль Q с простым гомоморфным образом X. По утверждению 1 предложения 2.3 X — простой инъективный модуль. В силу утверждения 5 леммы 3.5 A — простое артиново кольцо. Получено противоречие. □

3.8. Предложение. *Никакое непримитивное HNP-кольцо A не имеет бесконечномерных несингулярных полунётеровых правых модулей.*

Доказательство. По утверждению 3 предложения 2.3 существует ненулевой равномерный сингулярный инъективный модуль X. По утверждению 1 предложения 2.4 модуль X счётно порождён. По лемме 3.7 модуль X не полунётеров.

Допустим, что существует несингулярный полунётеров правый A-модуль Y, содержащий подмодуль $M = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} M_i$, где все M_i — ненулевые несингулярные модули. В силу утверждения 3 леммы 3.5 M содержит ненулевой свободный подмодуль F бесконечного ранга. Так как модуль Y полунётеров, то модуль F полунётеров. Счётно порождённый модуль X является гомоморфным образом полунётерова модуля F. Поэтому модуль X полунётеров; получено противоречие. $\square$

3.9. Предложение. *Пусть A — непримитивное HNP-кольцо и P — ненулевой проективный правый A-модуль. Тогда P — max-модуль, причём P является полунётеровым модулем в точности тогда, когда P — нётеров правый A-модуль. В частности, существуют свободные max-A-модули, не являющиеся полунётеровыми.*

Доказательство. В силу 3.2 проективный модуль M является max-модулем. По 3.2 $P \cong \bigoplus_{i\in I} P_i$, где все P_i — ненулевые нётеровы правые идеалы кольца A. Если модуль P конечномерен, то множество I конечно и модуль P нётеров. Если модуль P нётеров, то P полунётеров. Если модуль P бесконечномерен, то P не может быть полунётеровым по предложению 3.8. $\square$

3.10. Окончание доказательства утверждений 3 и 4 теоремы 1.2.

3. Утверждение вытекает из леммы 3.7.

4. Утверждение вытекает из предложения 3.9.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-11-00052, `https://rscf.ru/project/22-11-00052`.

Литература

[1] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. — М.: Мир, 1979.

[2] Camillo V. P. Commutative rings whose quotients are Goldie // Glasgow Math. J. — 1975. — Vol. 54, no. 2. — P. 32—33.

[3] Camillo V. P. On some rings whose modules have maximal submodules // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 50. — P. 97—100.

[4] Cartan H., Eilenberg S. Homological Algebra. — Princeton: The Princeton University Press, 1956.

[5] Facchini A., Bien M. H. Injective modules and divisible modules over hereditary rings // Boll. Unione Mat. Ital. — 2015. — Vol. 7, no. 4. — P. 299—308.

[6] Faith C. Rings whose modules have maximal submodules // Publ. Mat. — 1995. — Vol. 39. — P. 201—214.

[7] Goodearl K. R., Warfield R. B. An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.

[8] Kaplansky I. Infinite Abelian Groups. — Ann Arbor: Univ. Michigan Press, 1969.

[9] Kasch F. Modules and Rings. — London: Academic Press, 1982.

[10] Lam T. Y. Lectures on Modules and Rings. — New York: Springer, 1999.

[11] Lenagan T. H. Bounded hereditary Noetherian prime rings // J. London Math. Soc. — 1973. — Vol. 6. — P. 241—246.

[12] Shock R. C. Dual generalizations of the Artinian and Noetherian conditions // Pacific J. Math. — 1974. — Vol. 54, no. 2. — P. 227—235.

[13] Singh S. Quasi-injective and quasi-projective modules over hereditary Noetherian prime rings // Can. J. Math. — 1974. — Vol. 26, no. 5. — P. 1173—1185.

[14] Singh S. Modules over hereditary Noetherian prime rings // Can. J. Math. — 1975. — Vol. 27, no. 4. — P. 867—883.

[15] Singh S. Modules over hereditary Noetherian prime rings. II // Can. J. Math. — 1976. — Vol. 28, no. 1. — P. 73—82.

[16] Singh S. (hnp)-rings over which every modules admits a basic submodule // Can. J. Math. — 1978. — Vol. 28, no. 1. — P. 73—82.

[17] Singh S. Some decomposition theorems on Abelian groups and their generalizations. II // Osaka J. Math. — 1979. — Vol. 16. — P. 45—55.

[18] Tuganbaev A. A. Semidistributive Rings and Modules. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.

[19] Tuganbaev A. A. Rings whose non-zero modules have maximal submodules // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 109, no. 3. — P. 1589—1640.

[20] Tuganbaev A. A. Automorphism-extendable and endomorphism-extendable modules // J. Math. Sci. — 2020. — Vol. 245, no. 2. — P. 234—284.

[21] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. — Gordon and Breach, 1991.