Современная математика. Фундаментальные направления. Том 37 (2010). С. 83–130

УДК 517.958, 517.977.5

ОБТЕКАНИЕ ТЕЛА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ: КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И МИНИЗАЦИЯ РАБОТЫ ЖИДКОСТИ

© 2010 г. **А. В. ФУРСИКОВ**

1. Введение

Цель этой работы — дать последовательное изложение решения задачи о минимизации работы, производимой вязкой несжимаемой жидкостью, обтекающей ограниченное трехмерное тело B. При этом минимизация проводится за счет управления скоростью жидкости с границы ∂B тела B. Для решения этой задачи необходимо построить специально приспособленную для указанной цели теорию неоднородных краевых задач для нестационарной трехмерной системы Навье—Стокса во внешности ограниченной области. Эта теория также будет изложена в данной работе.

В настоящий момент теория управления течением вязкой несжимаемой жидкости — это достаточно обширная область современной математической физики или, более конкретно, теории уравнений в частных производных. Мы не будем заниматься обзором работ этой области: достаточно подробный обзор, а также изложение современного состояния теории в случае стационарного потока жидкости имеется в недавней книге Г. А. Алексеева, Д. В. Терешко [3]. Основным источником для нас будут работы А. В. Фурсикова, М. Ганзбургера, С. Хоу [22–24], посвященные трехмерным нестационарным течениям жидкости, а также в некоторой степени работа тех же авторов [21] и книга А. В. Фурсикова [17, Гл. 5], посвященные аналогичным вопросам в двумерном случае. В этой работе дается относительно краткое, но практически со всеми доказательствами изложение основных результатов работ [22–24]. При этом задача оптимального управления рассмотрена в более общей постановке, чем в [24], которая кроме классической задачи обтекания содержит и другие интересные задачи, возникающие в приложениях, например, задачу о самодвижущихся телах (см. [26]).

Опишем рассматриваемые в работе задачи на примере классической задачи обтекания. Исследуемая задача оптимального управления имеет следующий вид:

$$\mathcal{J}(\mathbf{v}) \to \inf, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{NS}(\mathbf{v}, p_1) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}\big|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}\big|_{|\mathbf{x}|\to\infty} = \mathbf{v}_\infty, \quad \mathbf{v}\big|_{(0,T)\times\partial B} = \mathbf{b}, \tag{1.2}$$

$$R(\mathbf{b}) \leqslant M. \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ и $p_1(t,\mathbf{x})$ при $t \in [0,T]$ и $\mathbf{x} \in \Omega \equiv \mathbb{R}^3 \setminus B$ — это скорость и давление жидкости, обтекающей тело B. Далее, $\mathcal{J}(\mathbf{v})$ — функционал работы жидкости по преодолению сопротивления обтекаемого тела B, $\mathrm{NS}(\mathbf{v}, p_1) = \mathbf{0}$ — система Навье—Стокса, $\mathbf{v}_0$ — начальное условие, а $\mathbf{b}$ — граничное условие Дирихле, которое в рассматриваемой задаче является управлением. Хорошо известно (см., например, [17, Гл. 5]), что для физически корректной постановки задачи на управление $\mathbf{b}$ необходимо наложить условие (1.3), где $R(\mathbf{b})$ — некоторый функционал типа нормы, а константа M не должна быть очень большой.

В стационарном случае (когда зависимость от времени отсутствует), с которого началось исследование таких задач оптимального управления, в качестве R часто берут L^2-норму по границе $\partial\Omega = \partial B$ как наиболее простую и естественную с физической точки зрения. Однако в нестационарном случае такое R не подходит. Дело в том, что для построения системы оптимальности рассматриваемой задачи (а это — одна из основных наших целей) необходимо, чтобы решение задачи оптимального управления было достаточно гладким. Это следует из анализа условий, гарантирующих применимость принципа Лагранжа, обычно используемого при выводе необходимых условий экстремума, т. е. системы оптимальности. С другой стороны R определяет норму краевых условий Дирихле, а решение со значением на границе из L^2 не может иметь требуемую гладкость. Анализ, проведенный с помощью результатов[1] работы [22], приводит к выводу, что простейшим функционалом R минимально возможной гладкости, при котором экстремальная задача (1.1)–(1.3) является корректной, будет следующий функционал:

$$R(\mathbf{b}) \equiv \|\mathbf{b}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Sigma)} = \int\limits_{\Sigma} \left(|\partial_t \mathbf{b}|^2 + |\nabla_\tau \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{b}|^2 \right) ds\, dt, \tag{1.4}$$

где $\mathbf{H}^1(\Sigma)$ — пространство Соболева векторных полей, квадратично интегрируемых на $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$ вместе с первыми производными. Градиент ∇_τ на поверхности будет определен ниже; см. (6.12).

Помимо R, важным для правильной постановки задачи является выбор начального условия $\mathbf{v}_0$. Чтобы объяснить почему, заметим, что если от координат $\mathbf{x}$, привязанных к телу B, перейти к координатам, связанным с жидкостью в окрестности бесконечности, то экстремальная задача обтекания перейдет в задачу, связанную с движением тела в жидкости со скоростью $-\mathbf{v}_\infty$. Поэтому ясно, что рассматриваемая экстремальная задача обтекания весьма интересна при больших по модулю скоростях $\mathbf{v}_\infty$. С другой стороны легко понять, что степень гладкости решения, необходимая для применимости принципа Лагранжа, в точности та, которая требуется для доказательства единственности решения краевой задачи для системы Навье—Стокса. И хотя проблема о существовании «в целом» гладких решений краевой задачи для трехмерной системы Навье—Стокса (проблема миллениума) в общем случае пока не решена, в рассматриваемой конкретной задаче (1.1)–(1.3) удается строить гладкие решения при больших скоростях, если правильно выбрать начальное условие[2] $\mathbf{v}_0$ в (1.2).

Действительно, поставим нашу задачу следующим образом. Пусть тело B движется в жидкости в стационаром режиме со скоростью $-\mathbf{v}_\infty$, и в какой-то момент t_0 (скажем, при $t_0 = 0$) включается управление $\mathbf{b}$ на границе ∂B на время $t \in (0,T)$ для минимизации работы по преодолению сопротивления жидкости. В отличие от эволюционного случая, существование гладкого стационарного решения $\mathbf{v}_0$ трехмерной системы Навье—Стокса с нулевым (и не только) условием Дирихле на $\partial\Omega$ и любым вектором $\mathbf{v}_\infty$ на бесконечности доказано, если граница $\partial\Omega$ является связной. Взяв такое стационарное решение $\mathbf{v}_0$ в качестве начального условия в задаче (1.1)–(1.3), получим обтекающий поток с любой наперед заданной скоростью $\mathbf{v}_\infty$. Но в задаче (1.1)–(1.3) можно величину M взять в качестве малого параметра и доказывать разрешимость этой задачи с помощью хорошо известных локальных методов. Именно так мы и будем действовать в настоящей работе.

Отметим, что обойти проблему миллениума, связанную с существованием «в целом» гладких решений системы Навье—Стокса, и успешно изучать трехмерные нестационарные потоки жидкости в классах гладких векторных полей без каких-либо ограничений на величину скорости потока жидкости удается и в некоторых других задачах управления течением жидкости (см. [18, 20]).

С полным основанием можно утверждать, что задачи оптимального управления течением вязкой несжимаемой жидкости являются разделом теории краевых задач для системы Навье—Стокса. Действительно, подавляющая часть трудностей, возникающих при решении задачи оптимального управления, рассмотренной в этой работе, связана с проблемами, возникающими в тех или иных не совсем стандартных краевых задачах для системы Навье—Стокса.

Укажем на некоторые из этих трудностей. При выборе пространств в классической теории краевых задач обычно начинают с пространства решений, а по нему уже строят пространства граничных условий и правых частей. Например, для задачи

$$\Delta u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega, \qquad\qquad u|_{\partial\Omega} = g,$$

учитывая структуру оператора Лапласа, выбирают в качестве простейшего пространства решений пространство Соболева $H^2(\Omega)$. Тогда в качестве пространства правых частей необходимо

[1] Для экономии места эти результаты работы [22] и указанный анализ в настоящей работе не приводятся

[2] Интересно отметить, что хотя разрешимость стационарных краевых задач для трехмерной системы Навье—Стокса, так же как и соответствующие теоремы о гладкости решения — факт хорошо известный, построение необходимых условий экстремума для соответствующих экстремальных задач в стационарном случае удается провести лишь при малых числах Рейнольдса, т. е. при малых скоростях течения (см. [3, 11]).

брать пространство $L^2(\Omega)$, а в качестве краевых условий — пространство Соболева—Слободецкого $H^{3/2}(\partial\Omega)$. Такой подход к задаче (1.1)–(1.3) невозможен, так как выбор пространства краевых условий диктуется видом функционала R из (1.2): это должно быть пространство Соболева $H^1(\Sigma)$, где $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$. Брать же в исходной постановке в качестве R столь сложный функционал как, например, норма пространства $H^{3/2}$ было бы крайне неестественно. Таким образом, в этой работе приходится по норме краевого условия строить пространство решений, причем оно должно состоять из пространства достаточно гладких функций, да и желательно, чтобы при этом пространство правых частей было типа $L^2(Q)$, где $Q = (0,T) \times \Omega$. Реализовать эту программу удается с помощью построения соответствующего оператора продолжения векторных полей с границы Σ в пространственно-временной цилиндр Q. Это делается в разделах 2, 3 с помощью методов работ [22, 23]. При этом в разделе 2, на основе классических методов построения оператора продолжения с границы (см., например, [1, 12]) и классической теории дифференциальных форм (см. [8, 13, 19]) строится оператор продолжения с границы в соленоидальные векторные поля. Затем в разделе 3 гладкость поля, полученного в результате продолжения, увеличивается с помощью методов, базирующихся на теории интерполяции (см. [12]).

Теории краевых задач посвящены разделы 4, 5. Конечно, не представляет труда с помощью классических методов (см. [10, 14]) и построенного оператора продолжения доказать существование обобщенного решения краевой задачи для уравнения Осеена. Далее необходимо установить гладкость этого решения. Для этого, естественно, используются теоремы вложения Соболева (см. [2, 5, 15]), а также некоторое представление решения уравнения, составленного из главных членов, в нашем случае — уравнения Стокса. Чрезвычайно удобным и общепринятым в случае ограниченной области является представление решения этого уравнения в базисе, составленном из собственных функций оператора Стокса. Аналог такого представления в случае внешности ограниченной области приводится в разделе 4. Он строится с помощью прямых интегралов, общей спектральной теоремы и промежуточных пространств (см. [7]). С помощью этого представления доказана гладкость решений задачи Стокса, а в разделе 5 — и гладкость решений ряда других задач для уравнений типа Осеена. Там же приводится локальная теорема существования гладких решений для уравнений типа Навье—Стокса. Разделы 4, 5 базируются на результатах работ [23, 24].

Наконец, разделы 6–10 посвящены задаче минимизации работы обтекающего потока по преодолению сопротивления обтекаемого тела. Эти разделы базируются на работе [24].

В разделе 6 дается физическая постановка задачи, приводится точное описание используемого начального условия. Затем вводятся более удобные искомые функции и задача переписывается в новых зависимых переменных, после чего дается точная постановка экстремальной задачи (приведены две разные постановки: задача I и задача II), и проверяется корректность определения функционала работы.

Раздел 7 посвящен доказательству разрешимости поставленных экстремальных задач. При этом помимо некоторых общих принципов (см. [17]) широко используются результаты теории краевых задач из предыдущих разделов.

В разделе 8 выведены необходимые условия экстремума для задачи II. Для этого сначала формулируется общий принцип Лагранжа, доказанный в [4], с помощью которого выводятся необходимые условия. Оказывается, что из-за неограниченности области Ω, в которой определен поток жидкости, не удается в классе пространств Соболева найти подходящее функциональное пространство для применения принципа Лагранжа и приходится брать пересечение двух пространств Соболева с разными показателями суммируемости входящих в них функций. Но тогда сопряженное пространство, в котором ищется двойственная скорость для системы оптимальности, можно найти лишь в классе пространств Орлича, что и делается в указанном разделе. Это пространство и используется для вывода необходимых условий экстремума с помощью принципа Лагранжа. Подчеркнем, что при выводе необходимых условий экстремума автоматически доказывается существование двойственной скорости в этом пространстве Орлича.

Необходимые условия экстремума, полученные в разделе 8, являются слабой формой системы оптимальности, записанной в виде интегрального тождества. Раздел 9 посвящен выводу из этого тождества краевой задачи, которой удовлетворяют исходные и двойственные скорости и давления (при этом устанавливается и существование двойственного давления). Основным в разделе является доказательство дополнительной гладкости двойственных скорости и давления, позволяющей доказать возможность сужения этих функций на боковую поверхность Σ пространственно-временной области Q. В итоге выписывается сильная форма системы оптимальности для задачи II, т. е. краевая задача, которой удовлетворяют исходные и двойственные скорости и давления.

В разделе 10 кратко поясняется вывод слабой и сильной форм системы оптимальности для задачи I, и выписывается сильная форма системы оптимальности для этой задачи.

2. Теоремы о продолжении с границы

Главная проблема при построении теории неоднородных краевых задач для уравнений Стокса, Осеена и Навье—Стокса состоит в построении подходящего оператора продолжения векторного поля, заданного на боковой поверхности Σ пространственно-временного цилиндра Q до соленоидального векторного поля, определенного в Q. Этот раздел посвящен решению указанной проблемы.

2.1. Продолжение скалярных функций. Сначала введем некоторые обозначения и функциональные пространства. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, либо внешность такой области, либо $\mathbb{R}^d$. Пространством Соболева $H^k(\Omega)$, где k — натуральное число, называется пространство функций с конечной нормой

$$\|u\|^2_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_\Omega |D^\alpha u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ — мультииндекс ($\alpha_j \geqslant 0$ и целое), $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$, а $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/(\partial x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d})$. Пространство Соболева $H^s(\Omega)$ при произвольном $s > 0$ определяется с помощью $H^k(\Omega)$ посредством интерполяции (см. [12]). По определению $H^s_0(\Omega)$, $s > 0$ — это замыкание пространства $C_0^\infty(\Omega)$ в $H^s(\Omega)$. Пространство $H^{-s}(\Omega)$, $s > 0$, определяется как двойственное пространство к $H^s_0(\Omega)$, т. е. $H^{-s}(\Omega) = (H^s_0(\Omega))'$ с нормой

$$\|f\|_{H^{-s}(\Omega)} = \sup_{\phi \in H^s_0(\Omega),\, \phi\neq 0} \frac{\langle f, \phi\rangle}{\|\phi\|_{H^s_0(\Omega)}},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает соотношение двойственности между $H^{-s}(\Omega)$ и $H^s_0(\Omega)$, порожденное скалярным произведением в $L^2(\Omega)$ (см. [12]).

Пусть $(t, \mathbf{x}) = (t, x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Введем при $s \geqslant 0$ функциональное пространство

$$H^{1,s}(\mathbb{R}^{d+1}) = \{u(t,\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{R}; H^{s+1}(\mathbb{R}^d)) : \partial_t u(t,\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d))\},$$

снабженное нормой

$$\|u\|^2_{H^{1,s}(\mathbb{R}^{d+1})} = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \left[(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{s+1} + (1+|\tau|^2)(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^s\right] |\widehat{\mathbf{u}}(\tau,\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\tau d\boldsymbol{\xi},$$

где $\tau \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, а

$$\widehat{u}(\tau,\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{-i(t\tau + \mathbf{x}\,\boldsymbol{\xi})} u(t,\mathbf{x})\, d\mathbf{x} dt$$

— преобразование Фурье функции $u(t,\mathbf{x})$. Пространство $H^{1,s}(\mathbb{R}^d)$ функций $v(t,\mathbf{x}') = v(t, x_1, \ldots, x_{d-1})$ определяется аналогично.

В следующей лемме указано, как продолжить функции, заданные на гиперплоскости $\{(t,\mathbf{x}) = (t,\mathbf{x}', x_d) \in \mathbb{R}^{d+1} : x_d = 0\}$ до функций, определенных на $\mathbb{R}^{d+1}$.

Лемма 2.1. *Существует такой линейный оператор*

$$L : H^{1,1}(\mathbb{R}^d) \times H^{1,0}(\mathbb{R}^d) \to H^{1,3/2}(\mathbb{R}^{d+1}) \tag{2.1}$$

что для любых $w_0(t,\mathbf{x}') \in H^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ и $w_1(t,\mathbf{x}') \in H^{1,0}(\mathbb{R}^d)$ функция $L(w_0,w_1)(t,\mathbf{x})$ удовлетворяет условию

$$L(w_0,w_1)(t,\mathbf{x})\big|_{x_d=0}=w_0(t,\mathbf{x}'),\ \ \frac{\partial}{\partial x_d}L(w_0,w_1)(t,\mathbf{x})\big|_{x_d=0}=w_1(t,\mathbf{x}'),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_d^2}L(w_0,w_1)(t,\mathbf{x})\big|_{x_d=0}=0;$$

$\operatorname{supp} L(w_0,w_1)\subset\{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^{d+1}:|x_d|\leqslant\varepsilon\}$, *где* $\varepsilon>0$ — *заданное* (*малое*) *число.*

Доказательство. Здесь используется хорошо известный подход: см., например, [1,12,22]. Обозначим

$$a(\boldsymbol{\xi}')=1+|\boldsymbol{\xi}'|^2 \quad \text{и} \quad b(\tau)=1+|\tau|^2.$$

Пусть $\phi_k(r)\in C^\infty(\mathbb{R})$ с $\operatorname{supp}\phi_k\subset[-\varepsilon,\varepsilon]$ и $\phi_k(r)=r^k/k!$ при $|r|\leqslant\varepsilon/2$, $k=0,1$. Для $u(t,\mathbf{x})\in H^{1,3/2}(\mathbb{R}^{d+1})$ обозначим через

$$\widetilde{u}(\tau,\boldsymbol{\xi}',x_d)=(\widetilde{F}u)(\tau,\boldsymbol{\xi}',x_d)=\widetilde{u}(\tau,\xi_1,\ldots,\xi_{d-1},x_d)$$

преобразование Фурье функции $u(t,\mathbf{x})$ по переменным $(t,\mathbf{x}')$. Определим оператор продолжения L по формуле

$$L(w_0,w_1)=\beta_0w_0+\beta_1w_1. \tag{2.2}$$

Здесь β_k — это следующие операторы:

$$(\beta_kw_k)(t,\mathbf{x}',x_d)=\widetilde{F}^{-1}\big[\phi_k(a^{1/2}(\boldsymbol{\xi}')x_d)\,\widehat{w}_k(\tau,\mathbf{x}')\,a^{-k/2}(\boldsymbol{\xi}')\big],\qquad k=0,1, \tag{2.3}$$

где через $\widetilde{F}^{-1}$ обозначено обратное преобразование Фурье по переменным $(\tau,\boldsymbol{\xi}')$ от функций $\eta(\tau,\boldsymbol{\xi}',x_d)$, определенных на $\mathbb{R}^{d+1}$, а $\widehat{w}_k(\tau,\mathbf{x}')$ — это преобразование Фурье функций $w_k(t,\mathbf{x}')$, $k=0,1$. Используя определение функций ϕ_k легко проверить, что

$$(\beta_0w_0)\big|_{x_d=0}=\widetilde{F}^{-1}\big[\widehat{w}_0\big]=w_0,\qquad \frac{\partial(\beta_0w_0)}{\partial x_d}\Big|_{x_d=0}=0,\qquad \frac{\partial^2(\beta_0w_0)}{\partial x_d^2}\Big|_{x_d=0}=0, \tag{2.4}$$

$$(\beta_1w_1)\big|_{x_d=0}=0,\qquad \frac{\partial(\beta_1w_1)}{\partial x_d}\Big|_{x_d=0}=\widetilde{F}^{-1}\big[\widehat{w}_1\big]=w_1,\qquad \frac{\partial^2(\beta_1w_1)}{\partial x_d^2}\Big|_{x_d=0}=0. \tag{2.5}$$

Из этих равенств и (2.2) следуют утверждения 1 и 2. Сделав преобразование Фурье в (2.3), получим:

$$\widehat{\beta_kw_k}(\tau,\boldsymbol{\xi})=\frac{\widehat{w}_k(\tau,\boldsymbol{\xi})}{a^{(1+k)/2}(\boldsymbol{\xi}')}\widehat{\phi}_k(\xi_da^{-1/2}(\boldsymbol{\xi}'))$$

и значит

$$\|\beta_kw_k\|^2_{H^{1,3/2}(\mathbb{R}^{d+1})}=\int\limits_{\mathbb{R}^{d+1}}\Big[(a(\boldsymbol{\xi}')+\xi_d^2)^{\frac52}+b(\tau)(a(\boldsymbol{\xi}')+\xi_d^2)^{\frac32}\Big]\frac{|\widehat{w}_k|^2}{a^{1+k}(\boldsymbol{\xi}')}\,\widehat{\phi}_k(\xi_da^{-\frac12}(\boldsymbol{\xi}'))\,d\tau d\boldsymbol{\xi}=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{d+1}}\Big[(a(\boldsymbol{\xi}')+a(\boldsymbol{\xi}')y^2)^{5/2}+b(\tau)(a(\boldsymbol{\xi}')+a(\boldsymbol{\xi}')y^2)^{3/2}\Big]\times\frac{|\widehat{w}_k|^2}{a^{k+1/2}(\boldsymbol{\xi}')}\,\widehat{\phi}_k(y)\,d\tau d\boldsymbol{\xi}'dy\leqslant$$
$$\leqslant C\int\limits_{\mathbb{R}^d}[a^{2-k}(\boldsymbol{\xi}')+b(\tau)a^{1-k}(\boldsymbol{\xi}')]\,|\widehat{w}_k|^2\,d\tau d\boldsymbol{\xi}'=\|w_k\|^2_{H^{1,1-k}(\mathbb{R}^d)},\qquad k=0,1.$$

Приведенная выкладка доказывает ограниченность оператора L, определенного в (2.2) и действующего из $H^{1,1}(\mathbb{R}^d)\times H^{1,0}(\mathbb{R}^d)$ в $H^{1,3/2}(\mathbb{R}^{d+1})$. □

Оператор (2.1), удовлетворяющий условиям 1 и 2, называется оператором продолжения.

Пусть Ω — ограниченная пространственная область с границей класса C^∞ или внешность такой области. Положим $Q=(0,T)\times\Omega$ и $\Sigma=(0,T)\times\partial\Omega$. С помощью установленного выше результата о продолжении функций с гиперплоскости на полупространство, получим аналогичный результат о продолжении функции с Σ на Q. Для $s\geqslant 0$ определим пространства

$$H^{1,s}(Q)=\{y(t,\mathbf{x})\in L^2(0,T;H^{s+1}(\Omega):\partial_ty\in L^2(0,T;H^s(\Omega))\}$$

и

$$H^{1,s}(\Sigma)=\{y(t,\mathbf{x})\in L^2(0,T;H^{s+1}(\partial\Omega):\partial_ty\in L^2(0,T;H^s(\partial\Omega))\}.$$

Теорема 2.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие линейные непрерывные операторы*

$$E_k : H^{1,1-k}(\Sigma) \to H^{1,3/2}(Q), \qquad k = 0, 1,$$

что операторы сужения, выписанные ниже, корректно определены для $E_k w$, $k = 0, 1$, и

$$E_0 w\big|_\Sigma = w, \qquad \partial_n(E_0 w)\big|_\Sigma = 0, \qquad \partial_{nn}(E_0 w)\big|_\Sigma = 0,$$
$$E_1 w\big|_\Sigma = 0, \qquad \partial_n(E_1 w)\big|_\Sigma = w, \qquad \partial_{nn}(E_1 w)\big|_\Sigma = 0,$$

где ∂_n и ∂_{nn} — это производные по нормали соответственно первого и второго порядка. При этом носители функций $E_k w$, $k = 0, 1$, лежат в ε-окрестности границы Σ.

Доказательство. Теорема легко выводится из леммы 2.1 с помощью разбиения единицы и выпрямления границы Σ. □

2.2. Уравнение для дифференциальных форм. Из теоремы 2.1 сразу следует аналогичная теорема о продолжении с Σ на Q векторнозначных функций, т. е. векторных полей, с компонентами, принадлежащими $H^{1,s}(\Sigma)$ с соответствующим s. Ниже (до теоремы 2.2), мы будем рассматривать только пространственные (т. е. не зависящие от времени) векторные поля. Чтобы продолжить векторное поле, определенное на $\partial\Omega$, до соленоидального векторного поля на Ω, мы будем использовать специальные локальные координаты в окрестности $\partial\Omega$. Предположим здесь, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Пусть Γ_i — это связная компонента $\partial\Omega$. Для удобства обозначений опустим индекс i у Γ_i, т. е. будем писать Γ вместо Γ_i. Рассмотрим ограниченную область

$$\Theta (= \Theta_{i,\delta}) \equiv \{\mathbf{x} \in \Omega : \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \Gamma) < \delta\},$$

где $\delta > 0$ — достаточно малое число.

Нам понадобится следующая лемма, доказанная, например, в [22, лемма 4.4].

Лемма 2.2. *Положим*

$$y_3(\mathbf{x}) = dist(\mathbf{x}, \Gamma), \qquad \mathbf{x} \in \Theta. \tag{2.6}$$

Тогда существует такое конечное покрытие $\{U_j\}$ множества Θ, что в каждом U_j существует локальная система координат $(y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), y_3(\mathbf{x}))$ с y_3, определенным в (2.6), *которая ориентирована как (x_1, x_2, x_3) и удовлетворяет соотношениям*

$$\nabla y_j(\mathbf{x})\, \nabla y_k(\mathbf{x}) = \delta_{jk}, \qquad j, k = 1, 2, 3, \tag{2.7}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера.

С помощью (2.7) можно в локальных координатах (y_1, y_2, y_3) вычислить метрический тензор $g_{kl}(\mathbf{y})$, порожденный евклидовой метрикой объемлющего пространства $\mathbb{R}^3$. Легко видеть, что

$$g_{kl}(\mathbf{y}) = \delta_{kl}. \tag{2.8}$$

Как хорошо известно (см. [8, Гл. 4, §29.3] и [19, Гл. VI, §4]), из (2.8) следует, что операторы div и **rot** задаются в локальных координатах (y_1, y_2, y_3) с помощью обычных формул:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial y_j} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{rot}\, \mathbf{v} = (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2, \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3, \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1).$$

Доказательство теоремы о продолжении будет вестись по следующему плану. Сначала, решив для векторного поля $\mathbf{u}$ на Γ систему уравнений

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{w}\big|_\Gamma = \mathbf{u} \tag{2.9}$$

для каждой компоненты Γ границы $\partial\Omega$, мы получим граничное значение $\mathbf{w}\big|_\Gamma$, а значит и $\mathbf{w}\big|_{\partial\Omega}$. Затем с помощью теоремы 2.1 мы продолжим $\mathbf{w}\big|_{\partial\Omega}$ до векторного поля $\mathbf{w}$ на Ω. Искомое продолжение $\mathbf{v}$ для граничного значения $\mathbf{u}$ получается с помощью формулы $\mathbf{v} = \mathbf{rot}\, \mathbf{w}$. Приступим к реализации этого плана.

Пусть на Γ задано векторное поле

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial}{\partial y_i} = (\mathbf{u}_\tau, u_n), \tag{2.10}$$

где $\mathbf{u}_\tau = u_1\dfrac{\partial}{\partial y_1} + u_2\dfrac{\partial}{\partial y_2}$ — тангенциальная, а $u_n = u_3\dfrac{\partial}{\partial y_3}$ — нормальная компоненты поля $\mathbf{u}$. Применяя к (2.10) операцию опускания индексов (см. [8, с. 161]), а затем применяя операцию $*$ (см. [8, с. 164]) и используя (2.8), можно записать векторное поле (2.10) в виде внешней дифференциальной формы:

$$\widehat{\mathbf{u}} = u_1 dy_2 \wedge dy_3 + u_2 dy_3 \wedge dy_1 + u_3 dy_1 \wedge dy_2. \tag{2.11}$$

Опуская индексы, можно записать $\mathbf{w}$ в (2.9) в виде дифференциальной формы $\widehat{\mathbf{w}}$ на Θ, которая в локальных координатах (y_1, y_2, y_3) имеет вид

$$\widehat{\mathbf{w}} = w_1(y_1,y_2,y_3)dy_1 + w_2(y_1,y_2,y_3)dy_2 + w_3(y_1,y_2,y_3)dy_3.$$

Введем следующую дифференциальную форму $\check{\mathbf{w}}$ на Γ, зависящую от y_3 как от параметра:

$$\check{\mathbf{w}} = w_1(y_1,y_2,y_3)dy_1 + w_2(y_1,y_2,y_3)dy_2.$$

Перепишем теперь (2.9) как уравнение $d\widehat{\mathbf{w}} = \widehat{\mathbf{u}}$ для дифференциальных форм, которое в локальных координатах (y_1, y_2, y_3) можно записать в виде:

$$(\partial_{y_1} w_2 - \partial_{y_2} w_1) dy_1 \wedge dy_2 = u_3 dy_1 \wedge dy_2 \qquad \text{при } y_3 = 0, \tag{2.12}$$

$$(\partial_{y_2} w_3 - \partial_{y_3} w_2) dy_2 \wedge dy_3 = u_1 dy_2 \wedge dy_3 \qquad \text{при } y_3 = 0, \tag{2.13}$$

$$(\partial_{y_1} w_3 - \partial_{y_3} w_1) dy_1 \wedge dy_3 = -u_2 dy_1 \wedge dy_3 \qquad \text{при } y_3 = 0. \tag{2.14}$$

Чтобы найти сужения $w_i\big|_{y_3=0}$ $(i = 1,2,3)$ из (2.12)–(2.14), положим

$$w_3\big|_{y_3=0} = 0. \tag{2.15}$$

Тогда из (2.13)–(2.15) следует, что

$$-\partial_{y_3} w_2 = u_1 \qquad \text{и} \qquad \partial_{y_3} w_1 = u_2 \qquad \text{при } y_3 = 0. \tag{2.16}$$

Чтобы найти следы форм w_1 и w_2 при $y_3 = 0$, надо решить уравнение (2.12), определенное на многообразии Γ.

Пусть $\Lambda^i(\Gamma)$, $i = 0,1,2$ — пространство дифференциальных форм порядка i, определенных на Γ. Через $d : \Lambda^1(\Gamma) \to \Lambda^2(\Gamma)$ обозначается обычный оператор взятия дифференциала (см. [13]). Ниже используется оператор сопряжения $*$ (см. [13]):

$$* : \Lambda^1(\Gamma) \to \Lambda^1(\Gamma),$$

который в локальных координатах записывается в виде

$$*\boldsymbol{\omega} = -\omega_2 dy_1 + \omega_1 dy_2 \qquad \text{для } \ \boldsymbol{\omega} = \omega_1 dy_1 + \omega_2 dy_2 \in \Lambda^1(\Gamma),$$

Уравнение (2.12) переписывается в инвариантной форме

$$d\boldsymbol{\omega} = \widetilde{\mathbf{u}}, \tag{2.17}$$

где формы $\boldsymbol{\omega}$, $\widetilde{\mathbf{u}}$ в локальных координатах (y_1, y_2) переписываются в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 dy_1 + \omega_2 dy_2 = \check{\mathbf{w}}\big|_{y_3=0}, \quad \widetilde{\mathbf{u}} = u_3 dy_1 \wedge dy_2.$$

Дополним (2.17) следующим уравнением:

$$d(*\boldsymbol{\omega}) = 0. \tag{2.18}$$

Отметим также, что (2.16) можно записать в следующей инвариантной форме:

$$*(\partial_{y_3}\check{\mathbf{w}})\big|_{y_3=0} = \widehat{\mathbf{u}}, \quad \text{где } \ \widehat{\mathbf{u}} = u_1 dy_1 + u_2 dy_2. \tag{2.19}$$

Определим $L^2(\Lambda^1)$ как множество $\boldsymbol{\omega} \in \Lambda^1(\Gamma)$ с конечной нормой

$$\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{L^2(\Lambda^1)} = \int\limits_\Gamma \boldsymbol{\omega} \wedge *\boldsymbol{\omega}.$$

Введем следующее подпространство пространства $L^2(\Lambda^1)$:

$$F^* = F^*(\Gamma) = \text{замыкание } \{*df : \ f \in C^1(\Gamma)\} \text{ в } L^2(\Lambda^1),$$

Справедливо следующее утверждение о разрешимости системы (2.17), (2.18).

Лемма 2.3. 1. *Решение* $\boldsymbol{\omega} \in F^*$ *системы* (2.17), (2.18) *существует в том и только том случае, если правая часть* $\widetilde{\mathbf{u}} \in L^2(\Lambda^2)$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\Gamma} \widetilde{\mathbf{u}} = 0. \tag{2.20}$$

2. *Любое решение* $\boldsymbol{\omega}$ *системы* (2.17), (2.18) *единственно в пространстве* F^*.

Доказательство леммы см. в [22, 23].

Решим теперь систему (2.17), (2.18) на $\partial\Omega = \cup_{j=1}^J \Gamma_j$, предполагая выполненным условие (2.20) на каждой компоненте $\Gamma = \Gamma_j$. Очевидно, решение этой системы, определенной на $\partial\Omega$, сводится к ее решению на каждой компоненте Γ границы $\partial\Omega$.

Напомним, что определение соболевских пространств $H^s(\partial\Omega) = H^s(\Lambda^0) = \Pi_{j=1}^J H^s(\Gamma_j)$ для функций, заданных на $\partial\Omega = \cup_{j=1}^J \Gamma_j$ можно найти в [12]. Пространство Соболева $H^s(\Lambda^2)$ является множеством внешних форм $\mathbf{u} \in \Lambda^2(\partial\Omega) = \Pi_{j=1}^J \Lambda^2(\Gamma_j)$ таких, что $*\mathbf{u} \in H^s(\Lambda^0)$. Пространство Соболева $H^s(\Lambda^1)$ является множеством внешних форм $\mathbf{u} \in \Lambda^1(\partial\Omega) = \Pi_{j=1}^J \Lambda^1(\Gamma_j)$, которые в каждом параметрическом круге U_i многообразия Γ_j, $j = 1, \ldots, J$, имеют вид $\mathbf{u} = q_1(\mathbf{y})dy_1 + q_2(\mathbf{y})dy_2$, где коэффициенты $q_k(\mathbf{y})$, $k = 1, 2$, принадлежат пространству Соболева $H^s(U_i)$.

Лемма 2.4. *Пусть* $s \geqslant 0$ *и предположим, что* $\widetilde{\mathbf{u}} \in H^s(\Lambda^2)$ *удовлетворяет условию* (2.20) *для каждой компоненты* Γ_j *границы* $\partial\Omega$. *Тогда существует единственное решение* $\boldsymbol{\omega} \in H^{s+1}(\Lambda^1) \cap F^* = \Pi_{j=1}^J \big(H^{s+1}(\Lambda^1(\Gamma_j)) \cap F^*(\Gamma_j)\big)$ *системы* (2.17)–(2.18) *удовлетворяющее оценке*

$$\|\boldsymbol{\omega}\|_{H^{s+1}(\Lambda^1)} \leqslant C\|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{H^s(\Lambda^2)}. \tag{2.21}$$

Доказательство леммы см. в [22, 23].

Аналогично пространствам $\mathbf{H}^{1,s}(\Sigma)$ определенным в разделе 2.1, введем пространства

$$H^{1,s}(\Lambda^i(\Sigma)) = \\ = \{\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \in L^2(0, T; H^{s+1}(\Lambda^i(\partial\Omega)) : \partial_t \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \in L^2(0, T; H^s(\Lambda^i(\partial\Omega))\}, \qquad i = 0, 1, 2. \tag{2.22}$$

Теперь мы можем установить главный результат этого подраздела, который является очевидным следствием леммы 2.4.

Теорема 2.2. *Пусть* $s \geqslant 0$ *и* $\widetilde{\mathbf{u}} \in H^{1,s}(\Lambda^2(\Sigma))$ *удовлетворяет* (2.20) *для каждой компоненты* Γ *границы* $\partial\Omega$ *при почти всех* $t \in [0, T]$. *Тогда существует единственная дифференциальная форма* $\boldsymbol{\omega} \in H^{1,s+1}(\Lambda^1(\Sigma))$, *которая принадлежит* F^* *при почти всех* $t \in [0, T]$ *и удовлетворяет* (2.17) *и* (2.18) *при почти всех* $t \in [0, T]$. *При этом справедлива оценка:*

$$\|\boldsymbol{\omega}\|_{H^{1,s+1}(\Lambda^1(\Sigma))} \leqslant C\|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{H^{1,s}(\Lambda^2(\Sigma))}. \tag{2.23}$$

Доказательство. Пусть форма $\widetilde{\mathbf{u}}(t, \cdot)$ является правой частью в (2.17). В силу леммы 2.3, система (2.17)-(2.18) имеет единственное решение $\boldsymbol{\omega}(t) \in F^*$ при почти всех $t \in (0, T)$. Используя результаты леммы 2.4, легко проверить, что все утверждения этой теоремы справедливы для решения $\boldsymbol{\omega}$. □

2.3. Продолжение соленоидальных векторных полей. Обозначим пространство векторных полей на $\partial\Omega$ (соответственно, на Σ) через $\mathcal{T}_\tau(\partial\Omega)$ (соответственно, через $\mathcal{T}_\tau(\Sigma)$). Аналогично, обозначим через $\mathcal{T}_n(\partial\Omega)$ (соответственно, через $\mathcal{T}_n(\Sigma)$) пространство нормальных векторных полей на $\partial\Omega$ (соответственно, на Σ). Пусть $\mathcal{T}(\partial\Omega) = \mathcal{T}_\tau(\partial\Omega) + \mathcal{T}_n(\partial\Omega)$ и $\mathcal{T}(\Sigma) = \mathcal{T}_\tau(\Sigma) + \mathcal{T}_n(\Sigma)$. Напомним, что пространством Соболева $H^s(\mathcal{T}(\partial\Omega))$ является множество функций $\mathbf{u} \in \mathcal{T}(\partial\Omega)$, которые в локальных координатах на U_j имеют вид $q_1(\mathbf{y})\dfrac{\partial}{\partial y_1} + q_2(\mathbf{y})\dfrac{\partial}{\partial y_2} + q_3(\mathbf{y})\dfrac{\partial}{\partial y_3}$, где $q_i(\mathbf{y}) \in H^s(U_j)$, $i = 1, 2, 3$. Пространства Соболева $H^s(\mathcal{T}_\tau(\partial\Omega))$ и $H^s(\mathcal{T}_n(\partial\Omega))$ определяются аналогично.

Замечание 2.1. $\mathbf{u} \in \mathcal{T}_n(\partial\Omega)$ можно разложить следующим образом: $\mathbf{u} = u_n\mathbf{n}$ и $u_n \in \Lambda^0(\partial\Omega)$. Таким образом, пространство $H^s(\mathcal{T}_n(\partial\Omega))$ для $\mathbf{u}$ и пространство $H^s(\Lambda^0(\partial\Omega)) = H^s(\partial\Omega)$ для u_n изоморфны.

Как и в (2.22) положим

$$H^{1,s}(\mathcal{T}(\Sigma)) = \{\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) \in L^2(0,T; H^{s+1}(\mathcal{T}(\partial\Omega)) : \partial_t \mathbf{v} \in L^2(0,T; H^s(\mathcal{T}(\partial\Omega))\}.$$

Пространства $H^{1,s}(\mathcal{T}_n(\Sigma))$ и $H^{1,s}(\mathcal{T}_\tau(\Sigma))$ определяются аналогично.

Кроме того $H^{1,s}(\mathcal{T}(\Sigma)) = H^{1,s}(T_n(\Sigma)) + H^{1,s}(\mathcal{T}_\tau(\Sigma))$. Другими словами, для каждого $\mathbf{u} \in H^{1,s}(\mathcal{T}(\Sigma))$ справедливо разложение

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\tau + u_n \mathbf{n} \quad \text{где } \mathbf{u}_\tau \in H^{1,s}(\mathcal{T}_\tau(\Sigma)) \text{ и } u_n \in H^{1,s}(\Sigma). \tag{2.24}$$

Положим

$$\widetilde{H}^{1,s}(\mathcal{T}(\Sigma)) = \{\mathbf{u} \in H^{1,s}(\mathcal{T}(\Sigma)) : \\ \int\limits_{\Gamma_j} u_n(t,\mathbf{x}) ds = 0 \text{ для } j = 1,\dots,J \text{ и почти всех } t \in (0,T)\}, \tag{2.25}$$

где u_n — нормальная компонента поля $\mathbf{u}$ как и в разложении (2.24).

Определим при $s \geqslant -1$ пространство

$$\mathbf{V}^s(\Omega) \equiv \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^s(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}, \tag{2.26}$$

где $\operatorname{div} \mathbf{v}$ понимается в смысле теории обобщенных функций, а также при $s \geqslant 0$ пространство

$$\widetilde{\mathbf{V}}^s(\Omega) \equiv \Big\{\mathbf{v} \in \mathbf{V}^s(\Omega) : \int\limits_{\Gamma_j} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, ds = 0,\ j = 1,\dots,J\Big\},$$

где Γ_j — связные компоненты границы $\partial\Omega$, а $\mathbf{n}$ — поле внешних единичных нормалей к $\partial\Omega$. Отметим, что интеграл по границе $\int\limits_{\Gamma_j} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, ds$ корректно определен и при $s \in [0,1/2]$ и понимается для таких s с помощью равенства $\langle \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}, 1\rangle$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — соотношение двойственности между $H^{s-1/2}(\Gamma_j)$ и $H^{1/2-s}(\Gamma_j)$; см. [14]. По определению предполагается, что $\|\cdot\|_{\mathbf{V}^s(\Omega)} = \|\cdot\|_{\mathbf{H}^s(\Omega)}$ и $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathbf{V}}^s(\Omega)} = \|\cdot\|_{\mathbf{H}^s(\Omega)}$.

Введем следующее пространство соленоидальных векторных полей, определенных на $Q = (0,T) \times \Omega$:

$$\mathbf{V}^{1,s}(Q) = L^2(0,T; \mathbf{V}^{s+1}(\Omega)) \cap H^1(0,T; \mathbf{V}^s(\Omega)) \tag{2.27}$$

и

$$\widetilde{\mathbf{V}}^{1,s}(Q) = L^2(0,T; \widetilde{\mathbf{V}}^{s+1}(\Omega)) \cap H^1(0,T; \widetilde{\mathbf{V}}^s(\Omega)).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Предположим, что* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *имеет компактную границу* $\partial\Omega$ *класса* C^∞ *и задано* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует непрерывный оператор продолжения*

$$E : \widetilde{H}^{1,0}(\mathcal{T}(\Sigma)) \to \mathbf{V}^{1,1/2}(Q), \tag{2.28}$$

т. е. такой оператор E, *что для каждого* $\mathbf{u} \in \widetilde{H}^{1,0}(\mathcal{T}(\Sigma))$ *имеем* $E\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{V}}^{1,1/2}(Q)$, *и сужения* $E\mathbf{u}|_\Sigma$ *и* $\partial_n(E\mathbf{u})|_\Sigma$ *корректно определены, причем* $E\mathbf{u}\big|_\Sigma = \mathbf{u}$, *а* $\partial_n(E\mathbf{u})\big|_\Sigma \in \mathbf{L}^2(\Sigma)$. *При этом для каждого* $\mathbf{u} \in \widetilde{H}^{1,0}(\mathcal{T}(\Sigma))$ *векторное поле* $E\mathbf{u}$ *сосредоточено в* ε*-окрестности* Σ:

$$\operatorname{supp}(E_c\mathbf{u}) \subset \{(t,\mathbf{x}) \in Q : \operatorname{dist}((t,\mathbf{x});\Sigma) < \varepsilon\},$$

где $\operatorname{dist}((t,\mathbf{x});\Sigma)$ — *евклидово расстояние от точки* $(t,\mathbf{x})$ *до множества* Σ.

Доказательство. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\tau + u_n\mathbf{n} \in \widetilde{H}^{1,0}(\mathcal{T}(\Sigma))$ — граничное условие, которое в локальных координатах (y_1,y_2,y_3), введенных в лемме 2.2, записывается в виде (2.10). Мы сведем векторное поле (2.10) к дифференциальной форме (2.11) и рассмотрим систему уравнений (2.12)–(2.14). Эта система может быть сведена к системе (2.12), (2.15) и (2.16), дополненной уравнениями

$$(\partial_{y_3} w_3)\big|_{y_3=0} = 0, \qquad (\partial^2_{y_3y_3} w_i)\big|_{y_3=0} = 0, \quad i = 1,2. \tag{2.29}$$

Систему (2.12) можно записать в инвариантной форме (2.17) и (2.18) с $\widetilde{\mathbf{u}} \in H^{1,0}(\Lambda^2(\Sigma))$; систему (2.16) можно переписать в виде (2.19), а (2.29) можно переписать в виде

$$(\partial^2_{y_3y_3}\check{\mathbf{w}})\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Теорема 2.2 утверждает, что существует единственное решение $\boldsymbol{\omega} \in H^{1,1}(\Lambda^1(\Sigma))$ задачи (2.17), (2.18), удовлетворяющее (2.23). Существование решения $\partial_{y_3}\check{\mathbf{w}}\big|_{\partial\Omega} \in H^{1,0}(\Lambda^2(\Sigma))$ задачи (2.19) очевидно.

Продолжим теперь полученные данные с Σ в Q. Покажем, как это делается в множестве $(0,T)\times U_j \subset \Sigma$, используя локальные координаты, построенные в лемме 2.2. Итак, мы имеем

$$\check{\mathbf{w}}\big|_{y_3=0} = w_1\big|_{y_3=0}dy_1 + w_2\big|_{y_3=0}dy_2 = \boldsymbol{\omega} = \omega_1 dy_1 + \omega_2 dy_2, \qquad w_3\big|_{y_3=0} = 0;$$
$$\omega_i \in H^{1,1}((0,T)\times U_j) \qquad i=1,2;$$
$$(\partial_{y_3}\check{\mathbf{w}})\big|_{y_3=0} = \widehat{\mathbf{u}} = u_1 dy_1 + u_2 dy_2, \qquad (\partial_{y_3} w_3)\big|_{y_3=0} = 0;$$
$$u_i \in H^{1,0}((0,T)\times U_j) \qquad i=1,2;$$
$$(\partial^2_{y_3y_3}\check{\mathbf{w}})\big|_{y_3=0} = (\partial^2_{y_3y_3} w_1)\big|_{y_3=0}dy_1 + (\partial^2_{y_3y_3} w_2)\big|_{y_3=0}dy_2 \equiv 0$$

и

$$(\partial^2_{y_3y_3} w_3)\big|_{y_3=0} = 0.$$

Используя эти данные для $w_1\big|_{y_3=0}$, $w_2\big|_{y_3=0}$ и для их производных по y_3 и применяя теорему 2.1 о продолжении скалярных функций, можно продолжить w_i, $i=1,2$, с $(0,T)\times U_j$ до функций $w_i \in H^{1,3/2}((0,T)\times U_j \times \{y_3 : 0 \leqslant y_3 \leqslant \varepsilon\})$, $i=1,2$. Положим $w_3 = 0$ при $(t,y_1,y_2,y_3) \in (0,T)\times U_j \times (0,\varepsilon)$. В итоге мы получим продолжение внешней формы $\boldsymbol{\omega}$ и $\widehat{\mathbf{u}}$ с $(0,T)\times U_j$ до внешней формы

$$E(\boldsymbol{\omega},\widehat{\mathbf{u}}) = w_1dy_1 + w_2dy_2 + w_3dy_3 \in \mathbf{H}^{1,3/2}((0,T)\times U_j \times \{y_3 : 0 \leqslant y_3 \leqslant \varepsilon\}.$$

В силу теоремы 2.1 форма $\boldsymbol{\omega}$ равна нулю при $y_3 > \varepsilon$ и вблизи ε. Дифференциальную форму $\boldsymbol{\omega}$ и $\widehat{\mathbf{u}}$ с Σ в Q можно продолжить стандартным образом с помощью разбиения единицы (см. подробности в [22]). Мы обозначим это глобальное продолжение через $E(\boldsymbol{\omega},\widehat{\mathbf{u}}) \in H^{1,3/2}(\Lambda^1(Q))$. Теперь очевидно, что форма $dE(\boldsymbol{\omega},\widehat{\mathbf{u}})$, которую в глобальных координатах (t,x_1,x_2,x_3) можно представить в виде $dE(\boldsymbol{\omega},\widehat{\mathbf{u}}) = \sum_{j=1}^{3} (dE(\boldsymbol{\omega},\widehat{\mathbf{u}}))_j dx_j$ с $(dE(\boldsymbol{\omega},\widehat{\mathbf{u}}))_j \in \mathbf{H}^{1,1/2}(Q)$, дает искомое продолжение дифференциальной формы (2.11). Переход от формы $dE(\boldsymbol{\omega},\widehat{\mathbf{u}})$ к векторному полю $\mathbf{v} = E\mathbf{u}$ завершает доказательство. □

Замечание 2.2. Доказательство теоремы 2.3 дает возможность продолжить векторные поля с $\Sigma = (0,T)\times\partial\Omega$ в $(0,T)\times\mathbb{R}^3$, т. е. не только внутрь Q но также и вне боковой поверхности Q. Точнее, существует непрерывный оператор продолжения $E : \widetilde{H}^{1,0}(\mathcal{T}(\Sigma)) \to \mathbf{V}^{1,1/2}((0,T)\times\mathbb{R}^3)$ такой, что $E\mathbf{u}|_\Sigma = \mathbf{u}$, $\partial_n E\mathbf{u}|_\Sigma \in \mathbf{L}^2(\Sigma)$ и $E\mathbf{u}$ сосредоточено в двусторонней ε-окрестности Σ.

2.4. Общий случай несвязной границы $\partial\Omega$. Рассмотрим кратко общий случай несвязной границы. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — область с компактной границей $\partial\Omega$ класса C^∞ и $\partial\Omega$ состоит из J различных связных компонент, т. е.

$$\partial\Omega = \cup_{j=1}^J \Gamma_j, \qquad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing \quad \forall\, i \neq j, \tag{2.30}$$

где каждая компонента Γ_j является связным компактным многообразием класса C^∞.

Аналогично (2.25) положим

$$\widehat{H}^{1,s}(\mathcal{T}(\Sigma)) = \Big\{\mathbf{u} \in H^{1,s}(\mathcal{T}(\Sigma)) : \int_{\partial\Omega} u_n(t,\mathbf{x})\,ds = 0 \quad \text{при почти всех } t \in (0,T)\Big\}. \tag{2.31}$$

Очевидно, что в этом пространстве условие на нормальную компоненту u_n менее ограничительно, чем в пространстве (2.25), и является не только достаточным, но и необходимым условием, при котором векторное поле $\mathbf{u}$ продолжается с Σ до соленоидального векторного поля, определенного в Q.

Построим теперь продолжение в случае несвязной границы (2.30), когда поле на границе $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\tau + u_n\mathbf{n}$ удовлетворяет условию

$$\int_{\partial\Omega} u_n(t,\mathbf{x})\,ds = 0 \qquad \text{для п.в. } t \in (0,T). \tag{2.32}$$

В этом случае, однако, продолжение не будет больше локализовано около $\partial\Omega$ (хотя оно будет иметь компактный носитель и в случае, если Ω — это внешность ограниченной области).

Теорема 2.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область или внешность ограниченной области с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Тогда существует непрерывный оператор продолжения*

$$E_1 : \widehat{H}^{1,0}(\mathcal{T}(\Sigma)) \to \mathbf{V}^{1,1/2}(Q). \tag{2.33}$$

В случае если Ω является внешностью ограниченной области, продолжение $E_1\mathbf{u}$ для каждого $\mathbf{u} \in \widehat{H}^{1,0}(\mathcal{T}(\Sigma))$ имеет компактный носитель, принадлежащий множеству $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < \rho+1\}$ при ρ, удовлетворяющему условию

$$\partial\Omega \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < \rho\}. \tag{2.34}$$

Доказательство теоремы см. в [22, 23].

3. Окончательные результаты о продолжении

В этом и следующем разделах Ω означает внешность ограниченной области с границей класса C^∞ вида (2.30). Мы ограничимся этим случаем, так как он наиболее интересен для приложений. Случай ограниченной области рассматривается аналогично и со значительными упрощениями. Этот раздел мы начнем с напоминаний о прямой сумме банаховых пространств. Эти сведения нам понадобятся не только в этом разделе, но и во многих других местах.

3.1. Прямая сумма банаховых пространств. Пусть X_1, X_2 — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_{X_i},\ i=1,2$. Нам интересен случай, когда $X_1 \cap X_2 \neq 0$.

Прямой суммой банаховых пространств X_1, X_2 называется пространство

$$X = X_1 + X_2 = \{x = x_1 + x_2, \quad \text{где} \quad x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\},$$

причем норма этого пространства определяется равенством

$$\|x\|_{X_1+X_2} = \inf_{x=x_1+x_2, x_1\in X_1, x_2\in X_2} (\|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2})$$

Легко видеть, что прямая сумма банаховых пространств является банаховым пространством.

Ниже нам понадобится следующее утверждение:

Лемма 3.1. *Сопряженное пространство $(X_1+X_2)^*$ прямой суммы банаховых пространств X_1, X_2 определяется по формуле*

$$(X_1+X_2)^* = X_1^* \cap X_2^*, \qquad \textit{причем} \qquad \|\cdot\|_{(X_1+X_2)^*} = \max\{\|\cdot\|_{X_1^*}, \|\cdot\|_{X_2^*}\}, \tag{3.1}$$

где X_i^* — пространство, сопряженное пространству $X_i, i=1,2$.

Доказательство. Непосредственно из определения прямой суммы следует, что $X_i, i=1,2$ непрерывно вкладывается в X_1+X_2. Поэтому вложение $(X_1+X_2)^* \subset X_i^*, i=1,2$, также непрерывно, а значит непрерывно и вложение $(X_1+X_2)^* \subset X_1^* \cap X_2^*$.

Если $f \in X_1^* \cap X_2^*$, то для любого $x \in X_1+X_2$ величина $f(x)$ однозначно определена по формуле $f(x) = f(x_1)+f(x_2)$ при $x = x_1+x_2$, где $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Действительно, если для того же x, который нам удобнее обозначить через $\widehat{x}$, справедливо другое разложение $\widehat{x} = \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2$, где $\widehat{x}_1 \in X_1, \widehat{x}_2 \in X_2$, то $f(x) - f(\widehat{x}) = f(x_1 - \widehat{x}_1) + f(x_2 - \widehat{x}_2) = 0$, причем последнее равенство справедливо потому, что, очевидно, $x_1 - \widehat{x}_1 = -(x_1 - \widehat{x}_1) \in X_1 \cap X_2$.

При $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$, справедливы неравенства:

$$|f(x)| \leqslant |f(x_1)| + |f(x_2)| \leqslant \|f\|_{X_1^*}\|x_1\|_{X_1} + \|f\|_{X_2^*}\|x_2\|_{X_2} \leqslant \max\{\|f\|_{X_1^*}, \|f\|_{X_2^*}\}(\|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2}),$$

откуда после деления на $(\|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2})$ сразу следует, что $\|f\|_{(X_1+X_2)^*} = \max\{\|f\|_{X_1^*}, \|f\|_{X_2^*}\}$. □

3.2. Линейная стационарная задача. Результат о продолжении, полученный в предыдущем разделе, не достаточен для построения теории неоднородных краевых задач для уравнений Осеена и Навье—Стокса, и требует усиления. Положим

$$\Omega_{\rho+k} = \Omega \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < \rho + k\} \quad \text{и} \quad Q_{\rho+k} = (0,T) \times \Omega_{\rho+k}$$

для каждого $k > 0$ и фиксированного $\rho > 0$, удовлетворяющего (2.34), и рассмотрим следующую стационарную задачу, зависящую от параметра $t \in (0,T)$:

$$-\Delta \mathbf{v}(t,\mathbf{x}) + \nabla p(t,\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v}(t,\mathbf{x}) = 0, \qquad \text{в } \Omega_{\rho+2}, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{v}(t,\cdot)\big|_{\partial\Omega} = \mathbf{b}(t,\cdot); \qquad \text{и} \qquad \mathbf{v}(t,\mathbf{x})|_{\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 :\, |\mathbf{x}|=\rho+2\}} = \mathbf{0}. \tag{3.3}$$

Здесь $|\cdot|$ означает евклидову норму в $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{b}(t,\cdot) \in \mathbf{H}^1(\Sigma) = H^{1,0}(\mathcal{T}(\Sigma))$ — граничное условие с нормальной компонентой $b_n(t,\mathbf{x}')$, удовлетворяющей

$$\int\limits_{\Gamma_j} b_n(t,\mathbf{x}')\, ds = 0 \qquad \text{для п.в. } t \in (0,T) \quad \forall j = 1,\dots,J. \tag{3.4}$$

Мы не будем предполагать, что $\mathbf{b} \in \widehat{\mathbf{H}}^1(\Sigma) = \widehat{H}^{1,0}(\mathcal{T}(\Sigma))$ (см. (2.31)) только потому[1], что не привели здесь подробного доказательства теоремы 2.4, хотя все результаты этого раздела легко переносятся на этот более общий случай (см. [23, §4]).

Напомним некоторые определения из [12]. Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с границей ∂G класса C^∞. Пусть $r(\mathbf{x}) \in C^\infty(\overline{G})$, $r(\mathbf{x}) > 0$ для $\mathbf{x} \in G$ и $r(\mathbf{x}) = \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \partial G)$ в достаточно малой окрестности ∂G. Как в [12, Гл. 1, §11.5], положим

$$H^{1/2}_{00}(G) = \{u :\; u \in H^{1/2}(G),\; r^{-1/2}u \in L^2(G)\}$$

с нормой

$$\|u\|^2_{H^{1/2}_{00}(G)} = \|u\|^2_{H^{1/2}(G)} + \|r^{-1/2}u\|^2_{L^2(G)}.$$

В [12, Гл. 1, теорема 11.7] доказано, что

$$H^{1/2}_{00}(G) = [H^1_0(G), L^2(G)]_{1/2}, \tag{3.5}$$

где правая часть означает интерполяционное пространство между $H^1_0(G)$ и $L^2(G)$ порядка $1/2$; см. определение в [12, Гл. 1, §2.1]. Как обычно, через $(H^{1/2}_{00}(G))'$ обозначается замыкание пространства $L^2(G)$ по норме

$$\|u\|_{(H^{1/2}_{00}(G))'} = \inf_{\phi \in H^{1/2}_{00}(G),\, \phi\neq 0} \frac{\langle u, \phi\rangle}{\|\phi\|_{H^{1/2}_{00}(G)}}, \tag{3.6}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает соотношение двойственности, порожденное скалярным произведением в $L^2(G)$. В силу теоремы двойственности (см. [12, Гл. 1, теорема 6.2]),

$$(H^{1/2}_{00}(G))' = [L^2(G), H^{-1}(G)]_{1/2}. \tag{3.7}$$

Поэтому, учитывая непрерывность операторов $-\Delta : H^2(G) \to H^0(G)$ и $-\Delta : H^1(G) \to H^{-1}(G)$, мы получим с помощью теоремы об интерполяции (см. [12, Гл. 1, §5.1]), что оператор Лапласа $-\Delta : H^{3/2}(G) \to (H^{1/2}_{00}(G))'$ непрерывен.

Докажем теперь следующее утверждение о существовании решения задачи (3.2)–(3.3).

Теорема 3.1. *Пусть для* $\mathbf{b}(t,\mathbf{x}') \in \mathbf{H}^1(\Sigma)$ *выполнено условие* (3.4). *Тогда существует единственное решение* $(\widehat{\mathbf{v}}, \widehat{p})$ *задачи* (3.2)–(3.3), *удовлетворяющее включениям*[2]

$$\widehat{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}^{1,1/2}(Q_{\rho+2}) \qquad \text{и} \qquad \nabla\widehat{p} \in L^2(0,T; (\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))').$$

Кроме того, существует такое $C > 0$, *не зависящее от* $\mathbf{b}$, *что*

$$\|\widehat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{V}^{1,1/2}(Q_{\rho+2})} + \|\nabla\widehat{p}\|_{L^2(0,T;(\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))')} \leqslant C\|\mathbf{b}\|_{\mathbf{H}^1(\Sigma)}. \tag{3.8}$$

[1] Ну и конечно потому, что в задаче о минимизации работы, которая будет рассмотрена в последней части работы, и ради которой здесь и строится теория краевых задач, мы предполагаем, что число компонент J у $\partial\Omega$ равно 1, и значит (3.4) эквивалентно аналогичному равенству из (2.31).

[2] Определение пространства $\mathbf{V}^{1,1/2}(Q)$ см. в (2.27).

Доказательство. Пусть E — оператор продолжения, построенный в теореме 2.3. Будем искать решение $\widehat{\mathbf{v}}$ задачи (3.2)–(3.3) в виде

$$\widehat{\mathbf{v}} = E\mathbf{b} + \mathbf{v}. \tag{3.9}$$

Подставив (3.9) в (3.2)–(3.3), получим, что $\mathbf{v}$ (вместе с p) удовлетворяет соотношениям:

$$-\Delta\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) + \nabla p(t,\mathbf{x}) = \Delta(E\mathbf{b})(t,\mathbf{x}), \qquad \operatorname{div}\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) = 0, \qquad \text{в } \ \Omega_{\rho+2}, \tag{3.10}$$

$$\mathbf{v}(t,\mathbf{x})\big|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{v}|_{\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\colon |\mathbf{x}|=\rho+2\}} = \mathbf{0}. \tag{3.11}$$

В силу теоремы 2.3, $\Delta(E\mathbf{b}) \in L^2(0,T;(\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))')$ и $\Delta(E\mathbf{b}) = \mathbf{0}$ для $|\mathbf{x}| > \rho+1$. Мы утверждаем, что у задачи (3.10)–(3.11) имеется единственное решение $(\mathbf{v}(t),\nabla p(t)) \in \mathbf{V}^{3/2}(\Omega_{\rho+2}) \times (\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))'$ при почти всех $t \in (0,T)$. Действительно, в [10] доказано, что если правая часть $\Delta(E\mathbf{b})(t,\cdot)$ в (3.10)–(3.11) принадлежит $\mathbf{H}^{-1}(\Omega_{\rho+2})$, то существует единственное решение $(\mathbf{v},\nabla p) \in \mathbf{V}^1(\Omega_{\rho+2}) \times \mathbf{H}^{-1}(\Omega_{\rho+2})$, удовлетворяющее неравенству

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_{\rho+2})} + \|\nabla p(t,\cdot)\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_{\rho+2})} \leqslant C\|\Delta(E\mathbf{b})(t,\cdot)\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_{\rho+2})};$$

при этом если $\Delta(E\mathbf{b})(t,\cdot) \in \mathbf{L}^2(\Omega_{\rho+2})$, то единственное решение $(\mathbf{v},\nabla p)$ принадлежит $\mathbf{V}^2(\Omega_{\rho+2}) \times \mathbf{L}^2(\Omega_{\rho+2})$ и удовлетворяет оценке

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|_{\mathbf{H}^2(\Omega_{\rho+2})} + \|\nabla p(t,\cdot)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_{\rho+2})} \leqslant C\|\Delta(E\mathbf{b})(t,\cdot)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_{\rho+2})}.$$

Применяя к этим результатам теорему об интерполяции [12, Гл. 1, §5.1], получим, что если $\Delta(E\mathbf{b})(t,\cdot) \in (\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))' = [\mathbf{L}^2(\Omega_{\rho+2}),\mathbf{H}^{-1}(\Omega_{\rho+2})]_{1/2}$, то

$$\mathbf{v} \in \mathbf{V}^0(\Omega_{\rho+2}) \cap [\mathbf{H}^2(\Omega_{\rho+2}),\mathbf{H}^1(\Omega_{\rho+2})]_{1/2} = \mathbf{V}^{3/2}(\Omega_{\rho+2})$$

и $\nabla p \in [\mathbf{L}^2(\Omega_{\rho+2}),\mathbf{H}^{-1}(\Omega_{\rho+2})]_{1/2} = (\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))'$. При этом существует такая константа $C > 0$, не зависящая от $\mathbf{v}$ и p, что

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|_{\mathbf{V}^{3/2}(\Omega_{\rho+2})} + \|\nabla p(t,\cdot)\|_{(\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))'} \leqslant C\|\Delta(E\mathbf{b})(t,\cdot)\|_{(\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))'}. \tag{3.12}$$

Из включения $\Delta(E\mathbf{b}) \in L^2(0,T;(\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))')$ также следует, что

$$(\mathbf{v},\nabla p) \in L^2(0,T;\mathbf{V}^{3/2}(\Omega_{\rho+2}) \times L^2(0,T;(\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))').$$

Покажем, что $\partial_t\mathbf{v} \in L^2(0,T;\mathbf{V}^{1/2}(\Omega_{\rho+2}))$. Для этого необходимо оценить $|\langle\partial_t\mathbf{v},\mathbf{f}\rangle|$ для произвольного $\mathbf{f}$ из соответствующего множества. Пусть $\mathbf{f} \in C^1(0,T;\mathbf{C}^\infty_0(\Omega_{\rho+2}))$ и $\mathbf{f}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{f}(T,\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$. Предположим, что $\mathbf{w} \in C^1(0,T;\mathbf{C}^\infty(\Omega_{\rho+2}) \cap \mathbf{V}^1(\Omega_{\rho+2}))$, вместе с некоторым $q \in C^1(0,T;\mathbf{C}^\infty(\Omega_{\rho+2}))$, является решением задачи

$$\begin{aligned} &-\Delta\mathbf{w} + \nabla q = \mathbf{f}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{w} = 0 \qquad \text{в} \quad \Omega_{\rho+2} \\ &\mathbf{w}\big|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{w}|_{\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\colon |\mathbf{x}|=\rho+2\}} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Тогда, $(\partial_t\mathbf{w},\partial_t\nabla q)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} &-\Delta\partial_t\mathbf{w} + \nabla\partial_t q = \partial_t\mathbf{f}, \qquad \operatorname{div}\partial_t\mathbf{w} = 0 \qquad \text{в} \quad \Omega_{\rho+2} \\ &\partial_t\mathbf{w}\big|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \qquad \partial_t\mathbf{w}|_{\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\colon |\mathbf{x}|=\rho+2\}} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Оценим теперь $|\langle \partial_t \mathbf{v}, \mathbf{f}\rangle|$. Последовательно интегрируя по частям и учитывая (3.10)–(3.11), (3.14), а также граничные условия функции $\mathbf{f}$, мы получим

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_{\rho+2}} \mathbf{v}\cdot\partial_t\mathbf{f}\,d\mathbf{x}dt = -\int\limits_{Q_{\rho+2}} \mathbf{v}\cdot\Delta\partial_t\mathbf{w}\,d\mathbf{x}dt =\\
&= -\int\limits_{Q_{\rho+2}} \Delta\mathbf{v}\cdot\partial_t\mathbf{w}\,d\mathbf{x}dt = \int\limits_{Q_{\rho+2}} \Delta(E\mathbf{b})\cdot\partial_t\mathbf{w}\,d\mathbf{x}dt =\\
&= \int\limits_{Q_{\rho+2}} (E\mathbf{b})\cdot\Delta\partial_t\mathbf{w}\,d\mathbf{x}dt - \int\limits_{\Sigma} \mathbf{b}\cdot\partial_n(\partial_t\mathbf{w})\,dsdt =\\
&= \int\limits_{Q_{\rho+2}} (E\mathbf{b})\cdot(\nabla\partial_t q - \partial_t\mathbf{f})\,d\mathbf{x}dt - \int\limits_{\Sigma} \mathbf{b}\cdot\partial_n(\partial_t\mathbf{w})\,dsdt =\\
&= -\int\limits_{Q_{\rho+2}} (E\mathbf{b})\cdot\partial_t\mathbf{f}\,d\mathbf{x}dt + \int\limits_{\Sigma} \big((\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})\partial_t q - \mathbf{b}\cdot\partial_n\partial_t\mathbf{w}\big)\,dsdt =\\
&= \int\limits_{Q_{\rho+2}} \partial_t(E\mathbf{b})\cdot\mathbf{f}\,d\mathbf{x}dt + \int\limits_{\Sigma} \partial_t\mathbf{b}\cdot(\partial_n\mathbf{w} - q\mathbf{n})\,dsdt.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Отметим, что на последнем шаге мы использовали равенства $\mathbf{w}(0,\cdot) = \mathbf{w}(T,\cdot) = \mathbf{0}$, вытекающие из (3.13) и из предположений $\mathbf{f}(0,\cdot) = \mathbf{f}(T,\cdot) = \mathbf{0}$. Умножая первое уравнение из (3.13) на $\partial_t(E\mathbf{b})$ и интегрируя по частям, получим

$$
\int\limits_{\Sigma} \partial_t\mathbf{b}\cdot(q\mathbf{n} - \partial_n\mathbf{w})\,dsdt = \int\limits_{Q_{\rho+2}} \big[\mathbf{f}\cdot\partial_t(E\mathbf{b}) - \nabla\mathbf{w} : \nabla\partial_t(E_c\widehat{\mathbf{b}})\big]\,d\mathbf{x}dt. \tag{3.16}
$$

Подставляя (3.16) в (3.15), будем иметь

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{Q_{\rho+2}} \mathbf{v}\cdot\partial_t\mathbf{f}\,d\mathbf{x}dt &= \int\limits_{Q_{\rho+2}} \partial_t(E\mathbf{b})\cdot\mathbf{f}\,d\mathbf{x}dt - \int\limits_{Q_{\rho+2}} \big(\mathbf{f}\cdot\partial_t(E\mathbf{b}) - \nabla\mathbf{w} : \nabla\partial_t(E\mathbf{b})\big)\,d\mathbf{x}dt =\\
&= \int\limits_{(0,T)\times\mathbb{R}^3} \nabla\widetilde{\mathbf{w}} : \nabla\partial_t(E\mathbf{b})\,d\mathbf{x}dt,
\end{aligned}
$$

где $\widetilde{\mathbf{w}}$ является продолжением $\mathbf{w}$ с $Q_{\rho+2}$ на $(0,T)\times\mathbb{R}^3$, равным нулю на $\big((0,T)\times\mathbb{R}^3\big)\setminus Q_{\rho+2}$, а $E\mathbf{b}$ — это естественное продолжение $\mathbf{b}$ на $(0,T)\times\mathbb{R}^3$, описанное в замечании 2.2. Поэтому

$$
\begin{aligned}
\Big|\int\limits_{Q_{\rho+2}} \mathbf{v}\cdot\partial_t\mathbf{f}\,d\mathbf{x}\,dt\Big| &\leqslant \|\nabla\partial_t(E\mathbf{b})\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))}\|\nabla\mathbf{w}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{1/2}(\Omega_{\rho+2}))} \leqslant\\
&\leqslant C\|\partial_t(E\mathbf{b})\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3))}\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;(\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))')},
\end{aligned}
$$

причем на последнем шаге мы использовали известные оценки решения $\mathbf{w}$ задачи (3.13) (см. вывод (3.12)). Из этого неравенства, [12, Гл. 1, формула 11.53] и замечания 2.2 следует оценка

$$
\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{1/2}(\Omega_{\rho+2}))} \leqslant \|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))} \leqslant C_{N+2}\|E\mathbf{b}\|_{\mathbf{H}^1(\Sigma)}. \tag{3.17}
$$

Таким образом, неравенство (3.8) следует из (3.9), (3.12), (3.17) и теоремы 2.4. □

3.3. Продолжение из области. В дальнейшем нам понадобится результат о продолжении бездивергентных векторных полей из ограниченной области в более широкоую область с сохранением условий гладкости и соленоидальности. Этому результату и посвящен настоящий подраздел.

Пусть G, Ψ — области в $\mathbb{R}^3$ с границами класса C^∞, причем область G ограничена и $G \subset \Psi$. Предположим, что множество $\partial G \cap \partial\Psi$ либо пусто, либо является замкнутым многообразием (последний случай для нас наиболее интересен). Пусть множество K удовлетворяет условиям $G \subset K \subset \Psi$ и $K \cup \{\partial G \cap \partial\Psi\}$ является компактом в $\mathbb{R}^3$; последнее условие означает, что K является компактом в Ψ.

Оператор L называется оператором продолжения, если L отображает любую функцию u, определенную на G, в функцию, определенную на Ψ, причем $(Lu)(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in G$. Следующий результат об операторах продолжения хорошо известен (см. [2,12]) и обычно доказывается с помощью конструкции Уитни.

Лемма 3.2. *Пусть $m > 0$ — целое число. Существует такой оператор продолжения L_m, что для каждого $s \in [0, m]$ оператор*

$$L_m : H^s(G) \to H^s(\Psi) \tag{3.18}$$

ограничен, и для каждой функции $u \in H^s(G)$, функция $L_m u$ имеет носитель в K.

Напомним результат о разрешимости следующей краевой задачи:

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{u} \quad \text{и} \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \quad \text{в } G, \qquad \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\big|_{\partial G} = 0. \tag{3.19}$$

Лемма 3.3. *Пусть $s \geqslant 0$. Тогда для каждого $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{V}}^s(G)$ существует решение $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^{s+1}(G)$ для* (3.19).

Этот результат хорошо известен. Его доказательство в случае целого s можно найти, например, в [14]. Случай нецелых s получается с помощью теоремы об интерполяции (см. [12]).

Отметим, что $\ker(\mathbf{rot}\,)$, т. е. ядро оператора

$$\mathbf{rot}\, : \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}^{s+1}(G) : \ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\big|_{\partial\Omega} = 0\} \to \widetilde{\mathbf{V}}^s(G),$$

является конечномерным пространством векторных полей класса C^∞, зависящим от топологической структуры G (см. [14]). Среди всех решений задачи (3.19) выберем решение $\widetilde{\mathbf{v}}$ ортогональное $\ker(\mathbf{rot}\,)$ in $\mathbf{L}^2(G)$. Это решение, очевидно, определяется однозначно и в силу теоремы Банаха удовлетворяет оценке

$$\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{V}^{s+1}(G)} \leqslant C\|\mathbf{u}\|_{\widetilde{\mathbf{V}}^s(G)}, \tag{3.20}$$

где C не зависит от $\mathbf{u}$. Обозначим $\widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{rot}^{\,-1}\mathbf{u}$.

Докажем теперь результат о продолжении.

Теорема 3.2. *Пусть множества G, K и Ψ удовлетворяют условиям, сформулированным в начале этого подраздела, а m — целое неотрицательное число. Тогда существует такой оператор продолжения $\mathcal{L}_m$, что для каждого $s \in [0, m]$ оператор*

$$\mathcal{L}_m : \widetilde{\mathbf{V}}^s(G) \to \mathbf{V}^s(\Psi)$$

ограничен, и для каждого $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{V}}^s(G)$ поле $\mathcal{L}_m\mathbf{u}$ имеет носитель в K.

Доказательство. Для данного $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{V}}^s(G)$ обозначим через $\widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{rot}^{\,-1}\mathbf{u} \in \mathbf{V}^{s+1}(G)$ решение задачи (3.19), удовлетворяющее (3.20). Так как $\widetilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}^{s+1}(\Omega)$, то можно применить лемму 3.2. Пусть $L_{m+1} : \mathbf{H}^{s+1}(\Omega) \to \mathbf{H}^{s+1}(\Psi)$ — оператор, определенный в этой лемме. Тогда $\mathcal{L}_m \equiv \mathbf{rot} \circ L_m \circ \mathbf{rot}^{\,-1}$ является искомым оператором продолжения. □

Рассмотрим теперь оператор продолжения из пространственно-временной области.

Теорема 3.3. *Пусть множества G, K и Ψ удовлетворяют условиям теоремы* 3.2, *и положим $R = (0,T)\times G$, $\Theta = (0,T)\times\Psi$. Пусть $m \geqslant 0$ — целое число. Тогда существует такой оператор продолжения $\mathcal{L}_{m+1}$, что для каждого $s \in [0, m]$ оператор*

$$\mathcal{L}_{m+1} : \widetilde{\mathbf{V}}^{1,s}(R) \to \mathbf{V}^{1,s}(\Theta) \tag{3.21}$$

ограничен, и для каждого $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{V}}^{1,s}(R)$ поле $\mathcal{L}_{m+1}\mathbf{u}$ имеет носитель в $[0,T]\times K$.

Доказательство. Желаемое утверждение следует непосредственно из теоремы 3.2, если применить оператор $\mathcal{L}_{m+1}$ из этой теоремы к $\mathbf{u}(t,\cdot) \in \widetilde{\mathbf{V}}^{s+1}(G)$ и к $\partial_t\mathbf{u}(t,\cdot) \in \widetilde{\mathbf{V}}^s(G)$ при почти всех $t \in (0,T)$. □

3.4. Основная теорема о продолжении. Продолжим теперь решение $\widehat{\mathbf{v}}$ задачи (3.2)–(3.3), полученное в теореме 3.1, до достаточного гладкого векторного поля, определенного на Ω и равного нулю на бесконечности. Для этого сначала выведем некоторые дополнительные оценки для $\widehat{\mathbf{v}}$.

Для $0<\alpha<\beta$ обозначим

$$K_{\rho+\alpha,\rho+\beta}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3:\ \rho+\alpha<|\mathbf{x}|<\rho+\beta\}.$$

Лемма 3.4. *Пусть* $\widehat{\mathbf{v}}(t,\mathbf{x})$ — *решение задачи* (3.2)–(3.3), *построенное в теореме* 3.1. *Тогда существует такая константа* $C>0$, *что*

$$\|\widehat{\mathbf{v}}(t,\cdot)\|_{\mathbf{V}^{5/2}(K_{\rho+5/4,\rho+3/2})}\leqslant C\|\mathbf{b}(t,\cdot)\|_{\mathbf{H}^1(\partial\Omega)}\qquad \textit{при почти всех } t\in(0,T). \tag{3.22}$$

Доказательство этого утверждения дано в [23, лемма 4.2].

Пусть $\rho>0$ фиксировано и удовлетворяет (2.34). Введем пространство

$$\mathbf{V}^{1,1/2}_\rho(Q)=$$
$$=\{\mathbf{v}\in\mathbf{V}^{1,1/2}(Q):\ \operatorname{supp}\mathbf{v}\subset[0,T]\times\Omega_{\rho+2},\ \Delta\mathbf{v}\in\mathbf{L}^2(Q_{\rho+2})+\mathbf{L}^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+2}))\}, \tag{3.23}$$

где пространство $\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+2})$ определяется как пополнение пространства $\{\nabla p(\mathbf{x}) : p\in \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}_{\rho+2})\}$ по норме

$$\|\nabla p\|_{\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+2})}\equiv\|\nabla p\|_{(\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))'}, \tag{3.24}$$

причем пространство $(\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))'$ и его норма определены в (3.7), (3.6). Норма пространства (3.23) определяется соотношением

$$\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{V}^{1,1/2}_\rho(Q)}=\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{V}^{1,1/2}(Q)}+\|\Delta\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(Q_{\rho+2})+\mathbf{L}^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+2}))}, \tag{3.25}$$

где $\mathbf{V}^{1,1/2}(Q)$ — пространство (2.27) с $s=1/2$, а норма прямой суммы банаховых пространств определена в подразделе 3.1.

Докажем теперь главный результат этого раздела.

Теорема 3.4. *Существует непрерывный оператор продолжения*

$$\mathcal{E}:\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Sigma)\to\mathbf{V}^{1,1/2}_\rho(Q), \tag{3.26}$$

где $\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Sigma)=\widetilde{H}^{1,0}(\mathcal{T}(\Sigma))$ — *пространство, определенное в* (2.25) *с* $s=0$, *а* $\mathbf{V}^{1,1/2}_\rho(Q)$ *определено в* (3.23).

Доказательство. Пусть $\widehat{\mathbf{v}}(t,\mathbf{x})$ — решение задачи (3.2)–(3.3). Рассмотрим $\widehat{\mathbf{v}}(t,\mathbf{x})$ на множестве $(0,T)\times K_{\rho+5/4,\rho+3/2}$ и применим к $\widehat{\mathbf{v}}(t,\mathbf{x})$ теорему 3.3 с $\Omega=K_{\rho+5/4,\rho+3/2}$, $\Psi=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}|>\rho+5/4\}$, $K=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 : \rho+5/4<|\mathbf{x}|\leqslant\rho+2\}$ и $m=1$. Определим теперь оператор продолжения $\mathcal{E}$ следующим образом:

$$\mathcal{E}\mathbf{b}=\begin{cases}\widehat{\mathbf{v}}(t,\mathbf{x}) & \text{для } (t,\mathbf{x})\in(0,T)\times\Omega_{\rho+3/2}\\[2mm] (\mathcal{L}_2\widehat{\mathbf{v}})(t,\mathbf{x}) & \text{для } (t,\mathbf{x})\in(0,T)\times\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3:\ |\mathbf{x}|>\rho+3/2\}.\end{cases} \tag{3.27}$$

Взяв $\nabla p=\mathbf{0}$ в разложении $\mathbf{w}=\mathbf{a}+\nabla p$, получим

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^2(Q_{\rho+\alpha})+\mathbf{L}^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+\alpha}))}\leqslant\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^2(Q_{\rho+\alpha})}$$

для любого $\alpha>0$. Таким образом, в силу (3.27), (3.25), (3.23) и (3.21) получим, что

$$\begin{aligned}\|\mathcal{E}\mathbf{b}\|_{\mathbf{V}^{1,1/2}_\rho(Q)}&\leqslant\|\mathcal{L}_2\widehat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{V}^{1,1/2}((0,T)\times\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3:\,|\mathbf{x}|>\rho+3/2\})}+\|\widehat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{V}^{1,1/2}(Q_{\rho+3/2})}+\\&+\|\Delta\mathcal{L}_2\widehat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2((0,T)\times\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3:\,|\mathbf{x}|>\rho+3/2\})}+\\&+\|\Delta\widehat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2(Q_{\rho+3/2})+\mathbf{L}^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+3/2}))}\leqslant\\&\leqslant C\Big(\|\widehat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{V}^{1,1/2}(Q_{\rho+3/2})}+C\|\Delta\widehat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2((0,T)\times K_{\rho+5/4,\rho+3/2})}+\\&+\|\Delta\widehat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2(Q_{\rho+5/4})+\mathbf{L}^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+5/4}))}\Big).\end{aligned} \tag{3.28}$$

Отметим, что согласно теореме 3.1 пара $(\widehat{\mathbf{v}}, \nabla\widehat{p})$ удовлетворяет (3.2), а в силу (3.9) и (3.10) $\nabla\widehat{p}$ равна ∇p из (3.10). Поэтому из (3.12) и (2.28) следует, что

$$\begin{aligned}\|\Delta\widehat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2(Q_{\rho+5/4})+\mathbf{L}^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega)_{\rho+5/4})} \leqslant \|\nabla\widehat{p}\|_{\mathbf{L}^2(0,T;(H^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))')} \leqslant \\ \leqslant C\|\Delta(E\mathbf{b})\|_{\mathbf{L}^2(0,T;(H^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))')} \leqslant C\|E\mathbf{b}\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}^{3/2}(\Omega_{\rho+2}))} \leqslant C\|\mathbf{b}\|_{\mathbf{H}^1(\Sigma)}.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Из (3.28), (3.29), (3.8) и (3.22) вытекает оценка

$$\|\mathcal{E}\mathbf{b}\|_{\mathbf{V}^{1,1/2}_\rho(Q)} \leqslant C\|\mathbf{b}\|_{\mathbf{H}^1(\Sigma)}, \tag{3.30}$$

которая доказывает ограниченность оператора (3.26). □

Справедливо также следующее обобщение теоремы 3.4.

Теорема 3.5. *Существует непрерывный оператор продолжения*

$$\mathcal{E} : \widehat{\mathbf{H}}^1(\Sigma) \to \mathbf{V}^{1,1/2}_\rho(Q), \tag{3.31}$$

где $\widehat{\mathbf{H}}^1(\Sigma) = \widehat{H}^{1,0}(\mathcal{T}(\Sigma))$ — *пространство, определенное в* (2.31) *с* $s = 0$, *а* $\mathbf{V}^{1,1/2}_\rho(Q)$ *определено в* (3.23).

Теорема доказана в [23]. Чтобы его получить, необходимо в доказательство теоремы 3.4 внести некоторые не очень существенные изменения, связанные с использованием теоремы 2.4.

4. Линейные эволюционные задачи с однородными краевыми условиями

Мы приступаем к исследованию эволюционных краевых задач, причем начнем со случая линейных задач с однородными краевыми условиями. Как и в предыдущем разделе, рассматривается случай внешности ограниченной области. Вводятся спектральные функциональные пространства, которые используются для доказательства гладкости решений эволюционных краевых задач.

4.1. Спектральные функциональные пространства. В этом подразделе мы определим функциональное пространство $\mathbf{V}^s_\sigma(\Omega)$ и изучим его свойства. В качестве математических средств мы используем прямые интегралы и промежуточные пространства (см. [7]). Напомним, что при целом неотрицательном k пространство $\mathbf{V}^k(\Omega)$ определяется формулой

$$\mathbf{V}^k(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^k(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\},$$

где $\mathbf{H}^k(\Omega)$ — пространство Соболева векторных полей. Пусть $\mathcal{V}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{C}^\infty_0(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\}$. Положим

$$\mathbf{V}^0_0(\Omega) = \{\text{замыкание } \mathcal{V}(\Omega) \text{ в } \mathbf{L}^2(\Omega)\}, \tag{4.1}$$

$$\mathbf{V}^1_0(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}^1(\Omega) : \ \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\}. \tag{4.2}$$

Рассмотрим оператор

$$A = P(-\Delta + I) : \mathbf{V}^0_0(\Omega) \to \mathbf{V}^0_0(\Omega), \tag{4.3}$$

где $P : \mathbf{L}^2(\Omega) \to \mathbf{V}^0_0(\Omega)$ — оператор ортогонального проектирования на $\mathbf{V}^0_0(\Omega)$, а I– единичный оператор. Область определения $\mathcal{D}(A)$ оператора A определяется формулой $\mathcal{D}(A) = \mathbf{V}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}^1_0(\Omega)$. С помощью стандартных аргументов, применяемых при доказательстве разрешимости стационарных уравнений Стокса (см. [10, 25]), устанавливается, что оператор A является положительным самосопряженным оператором со спектром, лежащем на луче $[1,\infty)$. Мы собираемся использовать теорему о спектральном разложении самосопряженных операторов. Для этого мы сначала напомним понятие прямого интеграла гильбертовых пространств (см. [7] и [12, Гл. 1, пункт 2.3])

$$\Upsilon = \int\limits_1^\infty \oplus H(\lambda)\, d\mu(\lambda). \tag{4.4}$$

Здесь $d\mu(\lambda)$ — это неотрицательная борелевская мера, сосредоточенная на $[1,\infty)$, $H(\lambda)$ — семейство гильбертовых пространств с нормами и скалярными произведениями, обозначаемыми, соответственно, через $\|\cdot\|_{H(\lambda)}$ и $(\cdot,\cdot)_{H(\lambda)}$.

Функция $H(\lambda)$ предполагается μ-измеримой, т. е. существует семейство $\mathcal{M}$ функций f: $[1,\infty) \ni \lambda \mapsto f(\lambda) \in H(\lambda)$, удовлетворяющих условиям:

1. $\forall f \in \mathcal{M}$, функция $\lambda \mapsto \|f(\lambda)\|_{H(\lambda)}$ μ-измерима;
2. если функция $g : [1,\infty) \ni \lambda \mapsto g(\lambda) \in H(\lambda)$ такова, что числовая функция $\lambda \mapsto \big(f(\lambda), g(\lambda)\big)_{H(\lambda)}$ μ-измерима для каждого $f \in \mathcal{M}$, то $g \in \mathcal{M}$;
3. существует такая последовательность $\{f_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{M}$, что для каждого $\lambda \in [1,\infty)$ множество $\{f_i(\lambda)\}_{i=1}^\infty$ плотно в $H(\lambda)$.

Другими словами, $\mathcal{M}$ является множеством μ-измеримых функций, принимающих значения в $H(\lambda)$. Пространство (4.4) является множеством функций $f \in \mathcal{M}$, для которых

$$\|f\|_\Upsilon^2 = \int_1^\infty \|f(\lambda)\|^2_{H(\lambda)}\, d\mu(\lambda).$$

Скалярное произведение в Υ определяется по формуле

$$(f,g)_\Upsilon = \int_1^\infty (f(\lambda), g(\lambda))_{H(\lambda)} d\mu(\lambda).$$

В [7] доказано, что Υ является гильбертовым пространством.

В силу теоремы о спектральном разложении (см. [7]), для оператора (4.3) существуют прямой интеграл гильбертовых пространств (4.4) и унитарный оператор $U : \mathbf{V}_0^0(\Omega) \to \Upsilon_A$, отображающий $\mathcal{D}(A)$ в

$$\Upsilon_A = \{f \in \Upsilon : \lambda f \in \Upsilon\}, \qquad \|f\|^2_{\Upsilon_A} = \int_1^\infty \lambda^2 \|f(\lambda)\|^2_{H(\lambda)} d\mu(\lambda),$$

и удовлетворяющий равенству $U(A\mathbf{v}) = \lambda(U\mathbf{v})$. Для $s \in [0,2]$ введем пространства

$$\mathbf{V}_\sigma^s(\Omega) = \Big\{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0^0(\Omega) : U\mathbf{v} = \int_1^\infty \oplus \widehat{\mathbf{v}}(\lambda)\, d\mu(\lambda) \quad \text{и} \quad \int_1^\infty \lambda^s \|U\mathbf{v}(\lambda)\|^2_{H(\lambda)} d\mu(\lambda) < \infty\Big\} \tag{4.5}$$

с нормами

$$\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{V}_\sigma^s(\Omega)} = \int_1^\infty \lambda^s \|U\mathbf{v}(\lambda)\|^2_{H(\lambda)} d\mu(\lambda). \tag{4.6}$$

Из определения спектрального разложения следует, что $\mathbf{V}_\sigma^0(\Omega) = \mathbf{V}_0^0(\Omega)$, $\mathbf{V}_\sigma^2(\Omega) = \mathcal{D}(A) = \mathbf{V}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}_0^1(\Omega)$ и в пространствах $\mathbf{V}_\sigma^s(\Omega)$ нормы (4.6) с $s = 0, 2$ эквивалентны нормам пространств $\mathbf{L}^2(\Omega)$ и $\mathbf{H}^2(\Omega)$ соответственно. Кроме того, справедливо равенство

$$\mathbf{V}_\sigma^1(\Omega) = \mathbf{V}_0^1(\Omega) \tag{4.7}$$

и в этом пространстве норма $\|\cdot\|_{\mathbf{V}_\sigma^1(\Omega)}$ эквивалентна $\mathbf{H}^1(\Omega)$-норме. Действительно, для каждого $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(A) = \mathbf{V}_\sigma^2(\Omega)$ имеем

$$\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = -\int_\Omega \mathbf{v} \cdot \Delta\mathbf{v}\, d\mathbf{x} + \|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} =$$
$$= \int_1^\infty (\lambda+1) \|\widehat{\mathbf{v}}(\lambda)\|^2_{H(\lambda)}\, d\mu(\lambda) \leqslant 2\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{V}_\sigma^1(\Omega)}.$$

Очевидным также является неравенство $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_\sigma^1(\Omega)} \leqslant \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$. Следовательно, пополнение пространства $\mathcal{V}(\Omega) \equiv \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) \cap \mathbf{V}_0^0(\Omega)$ по $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ и по $\|\cdot\|_{\mathbf{V}_\sigma^1(\Omega)}$ приводит к одному и тому же пространству, т. е. справедливо соотношение (4.7).

Пусть X и Y — гильбертовы пространств, удовлетворяющие условиям

$$X \subset Y, \text{ причем вложение непрерывно, и } X \text{ плотно в } Y. \tag{4.8}$$

Предположим, что $\Lambda : Y \to Y$ — линейный самосопряженный положительный оператор с областью определения $\mathcal{D}(\Lambda) = X$ и норма $\|\cdot\|_X$ эквивалентна норме $X \ni u \mapsto (\|u\|_Y^2 + \|\Lambda u\|_Y^2)^{1/2}$. Напомним, что интерполяционным пространством $[X,Y]_\theta$, $\theta \in [0,1]$, является, по определению, пространство $\mathcal{D}(\Lambda^{1-\theta})$, снабженное нормой

$$\|u\|^2_{[X,Y]_\theta} = \|u\|^2_Y + \|\Lambda^{1-\theta}u\|^2_Y \qquad \forall\, u \in [X,Y]_\theta;$$

подробности см. в [12].

Лемма 4.1. *Пусть X — замкнутое подпространство пространства $\mathbf{H}^k(\Omega)$ с целым положительным k, Y — замкнутое подпространство в $\mathbf{L}^2(\Omega)$, норма $\|\cdot\|_X$ эквивалентна $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^k(\Omega)}$, а норма $\|\cdot\|_Y$ эквивалентна $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$, и при этом X и Y удовлетворяют* (4.8). *Тогда для каждого $\theta \in [0,1]$, такого, что $k(1-\theta) \neq \mu + 1/2$, где $\mu \geqslant 0$ — целое, пространство $[X,Y]_\theta$ является замкнутым подпространством $\mathbf{H}^{k(1-\theta)}(\Omega)$ и норма $[X,Y]_\theta$ эквивалентна норме пространства $\mathbf{H}^{k(1-\theta)}(\Omega)$.*

Относительно доказательства этой леммы см. [12, 24].

Следующая лемма является очевидным следствием леммы 4.1, если взять $k = 2$, $X = \mathbf{V}^2_\sigma(\Omega) = \mathbf{V}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}^1_0(\Omega)$ и $Y = \mathbf{V}^0_\sigma(\Omega) = \mathbf{V}^0_0(\Omega)$.

Лемма 4.2. *Для каждого $s \in [0,2]$ нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{V}^s_\sigma(\Omega)}$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^s(\Omega)}$ эквивалентны на пространстве $\mathbf{V}^s_\sigma(\Omega)$.*

Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей ∂G класса C^∞. Рассмотрим задачу

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{w} = \mathbf{v} \quad \text{in } G \qquad \text{и} \qquad \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}\big|_{\partial G} = 0. \tag{4.9}$$

Лемма 4.3. *Предположим, что $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^s(G) \cap \mathbf{V}^0(G)$, $s \geqslant 0$ и $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\big|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда существует решение $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^{s+1}(G)$ задачи* (4.9)*, удовлетворяющее условию $\mathbf{w}\big|_\Gamma = \mathbf{0}$.*

Доказательство этой леммы полностью аналогично доказательству из [22, Lemma 4.3] и здесь не приводится.

Лемма 4.4. *Для каждого $s \in (0,1/2)$ справедливо равенство $\mathbf{V}^s_\sigma(\Omega) = \mathbf{H}^s(\Omega) \cap \mathbf{V}^0_0(\Omega)$.*

Доказательство. В силу леммы 4.2 и определения интерполяционных пространств

$$\mathbf{V}^s_\sigma(\Omega) = \text{замыкание } \mathbf{V}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}^1_0 \text{ в } \mathbf{H}^s(\Omega). \tag{4.10}$$

Так как топология пространства $\mathbf{H}^s(\Omega)$ сильнее топологии в $\mathbf{L}^2(\Omega)$, то правая часть из (4.10) является подмножеством пространства $\mathbf{V}^0_0(\Omega)$, и поэтому $\mathbf{V}^s_\sigma(\Omega) \subset \mathbf{V}^0_0(\Omega) \cap \mathbf{H}^s(\Omega)$. Докажем теперь обратное вложение. Пусть дано произвольное $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^s(\Omega) \cap \mathbf{V}^0_0(\Omega)$, и выберем такую последовательность $\{\mathbf{v}_n\} \subset \mathbf{V}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}^1_0$, что $\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^s(\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть $\rho > 0$ — фиксированное достаточно большое число, удовлетворяющее (2.34). Положим

$$\Omega_\rho \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < \rho\} \cap \Omega \qquad \text{и} \qquad \Omega^c_\rho \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\rho.$$

Разложим v следующим образом:

$$\begin{gathered} v(x) = v_1(\mathbf{x}) + v_2(\mathbf{x}), \quad \text{где} \quad \operatorname{supp} v_1 \subset \Omega_{\rho+3}, \\ \operatorname{supp} v_2 \subset \Omega^c_{\rho+2}, \quad v_i \in \mathbf{V}^0_0 \cap \mathbf{H}^s(\Omega),\ i = 1,2. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Рассмотрим $w(x) \in \mathbf{H}^{s+1}(\Omega_{\rho+3})$, удовлетворяющее (4.9) с $G = \Omega_{\rho+3}$. Существование такого векторного поля установлено, например, в [14, 22]. Пусть $\varphi_1(\mathbf{x}) \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi_1(\mathbf{x}) = 1$ для $|\mathbf{x}| < \rho+1$, $\varphi_1(x) = 0$ для $|\mathbf{x}| > \rho+2$ и $\varphi_2(\mathbf{x}) = 1 - \varphi_1(\mathbf{x})$. Тогда функции

$$\begin{aligned} &v_1(\mathbf{x}) = \mathbf{rot}\,(w(\mathbf{x})\varphi_1(\mathbf{x})), \\ &v_2(\mathbf{x}) = \mathbf{rot}\,(w(x)\varphi_2(\mathbf{x})) \ \text{для } |\mathbf{x}| < \rho+3, \qquad v_2(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) \ \text{для } |\mathbf{x}| > \rho+2 \end{aligned}$$

удовлетворяют условиям (4.11).

Достаточно найти последовательности

$$\{v_{in}\} \subset \mathbf{V}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}^1_0(\Omega) \quad \text{такие, что} \quad \|v_{in} - v_i\|_{H^s(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{4.12}$$

для $i = 1,2$.

В случае $i = 2$ мы можем взять в качестве v_{2n} осреднение по Фридрихсу

$$v_{2n}(\mathbf{x}) = n^3 \int\limits_{\Omega} j(n(\mathbf{x}-\mathbf{y}))v_2(\mathbf{y})\,d\mathbf{y},$$

где $j(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $j(\mathbf{x}) \geqslant 0$, $\operatorname{supp} j \subset \{|\mathbf{x}| \leqslant 1\}$ и $\int\limits_{\Omega} j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 1$. Очевидно, $v_{2n} \in \mathbf{V}^2 \cap \mathbf{V}_0^1(\Omega)$. Так как $v_{2n}(\mathbf{x})$ определены при $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, соотношение (4.12) можно доказать в этом случае с помощью преобразования Фурье.

Чтобы доказать (4.12) для $i = 1$, рассмотрим (4.9) с $G = \Omega_{\rho+3}$ и $v(\mathbf{x})$, замененными на $v_1(\mathbf{x})$. В силу леммы 4.3 существует решение $w_1(\mathbf{x}) \in H^{s+1}(\Omega_{\rho+3})$ этой задачи, которое удовлетворяет соотношению $w_1(\mathbf{x})|_{\partial\Omega_{\rho+3}} = 0$. Из этого равенства и условия $0 < s < 1/2$ следует, что $w_1(\mathbf{x}) \in H_0^{s+1}(\Omega_{\rho+3})$. По определению пространства $H_0^{s+1}(\Omega_{\rho+3})$, существует такая последовательность $w_{1n}(x) \in C_0^\infty(\Omega_{\rho+3})$, что $\|w_{1n} - w_1\|_{H^{1+s}(\Omega_{\rho+3})} \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что последовательность $v_{1n} = \mathbf{rot}\, w_{1n}$ удовлетворяет соотношению (4.12). $\square$

Для $s \in [0,1]$, мы можем определить $\mathbf{V}_\sigma^{-s}(\Omega)$ как замыкание пространства $\mathbf{V}_0^0(\Omega)$ относительно нормы

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_\sigma^{-s}(\Omega)} = \Big(\int\limits_1^\infty \lambda^{-s}\|\widehat{\mathbf{v}}(\lambda)\|^2_{H(\lambda)}\,d\mu(\lambda)\Big)^{1/2}, \quad \text{если} \quad U\mathbf{v} = \int\limits_1^\infty \oplus\widehat{\mathbf{v}}(\lambda)\,d\mu(\lambda). \tag{4.13}$$

Лемма 4.5. *Для $s \in (0,1/2)$, справедливо соотношение $\mathbf{V}_\sigma^{-s}(\Omega) \subset \mathbf{H}^{-s}(\Omega)$. При этом норма $\|\cdot\|_{\mathbf{V}_\sigma^{-s}(\Omega)}$ эквивалентна $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^{-s}(\Omega)}$ на $\mathbf{V}_\sigma^{-s}(\Omega)$.*

Эта лемма может быть доказана с помощью лемм 4.2 и 4.4 так же, как аналогичное утверждение было доказано в [17, Гл. 3, лемма 4.5].

4.2. Результат о гладкости для задачи Стокса. Эволюционная задача Стокса определяется с помощью соотношений:

$$\partial_t\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w} + \nabla p = \mathbf{f}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{w} = 0 \qquad \text{в } (0,T)\times\Omega \tag{4.14}$$

$$\mathbf{w}\big|_{\Sigma} = 0 \qquad \text{на} \quad \Sigma = (0,T)\times\partial\Omega \qquad \text{и} \qquad \mathbf{w}|_{|\mathbf{x}|\to\infty} = \mathbf{0}, \tag{4.15}$$

$$\mathbf{w}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) \qquad \text{в } \Omega. \tag{4.16}$$

Хорошо известно, что нахождение решения $(\mathbf{w}, \nabla p)$ задачи (4.14)–(4.16) можно свести к нахождению только $\mathbf{w}$ с помощью следующей леммы де Рама (см., например, [14]), которая позволяет получить ∇p, если найдено $\mathbf{w}$.

Лемма 4.6. *Векторное поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}))$, в котором каждая компонента $f_i(\mathbf{x})$ является обобщенной функцией на Ω, имеет вид*

$$\mathbf{f} = \nabla p \quad \textit{для некоторого } p$$

в том и только том случае, если

$$\langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle = 0 \qquad \forall\,\mathbf{v}\in\mathcal{V}(\Omega),$$

где, напомним, $\mathcal{V}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\}$ и $\langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle$ обозначает значение обобщенной функции $\mathbf{f}$ на тестовой функции $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$, которое порождено скалярным произведением в $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Если $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{V}_\sigma^{-1}(\Omega))$ и $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{V}_\sigma^0(\Omega)$, то существование и единственность обобщенного решения $\mathbf{w} \in L^2(0,T;\mathbf{V}_\sigma^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;\mathbf{V}_\sigma^{-1}(\Omega))$ задачи (4.14)–(4.16) доказаны, например, в [10,14].

Для $s \in [0,1]$ определим оператор $P = P_s : \mathbf{H}^{-s}(\Omega) \to \mathbf{V}_\sigma^{-s}(\Omega)$ с помощью формулы

$$\langle P\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{V}_0^0(\Omega)} = \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \qquad \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{V}_\sigma^s(\Omega), \tag{4.17}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{V}_0^0(\Omega)}$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ обозначает двойственность, порожденную скалярным произведением, соответственно, в $\mathbf{V}_0^0(\Omega)$ и $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Отметим, что при $s = 0$ P совпадает с оператором ортогонального проектирования пространства $\mathbf{L}^2(\Omega)$ на $\mathbf{V}_0^0(\Omega)$; см. утверждение, следующее сразу за (4.3).

Рассмотрим сначала задачу Стокса с нулевой правой частью и неоднородным начальным условием $\mathbf{q}_0$. Отметим, что $P\nabla p = \mathbf{0}$ для $\nabla p \in \mathbf{H}^{-s}(\Omega)$ и $P\partial_t \mathbf{w} = \partial_t \mathbf{w}$ для $\partial_t \mathbf{w}$ в $L^2(0,T;\mathbf{V}_\sigma^{-s}(\Omega))$; поэтому можно написать задачу Стокса в следующем виде:

$$\partial_t \mathbf{q}(t,\mathbf{x}) + A\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \text{в } Q \qquad \text{и} \qquad \mathbf{q}|_{t=0} = \mathbf{q}_0 \quad \text{в } \Omega, \quad \text{где} \quad A = P(-\Delta + I). \tag{4.18}$$

Так как мы ищем $\mathbf{q}$ в пространстве $L^2(0,T;\mathbf{V}_\sigma^{-s+2}(\Omega))$ и $-s+2 \geqslant 1$, то решение $\mathbf{q}$ задачи (4.18) автоматически удовлетворяет соотношениям

$$\operatorname{div}\mathbf{q} = 0 \qquad \text{и} \qquad \mathbf{q}|_\Sigma = \mathbf{0}. \tag{4.19}$$

Отметим, что оператор A содержит член PI, который отсутствует в первом из уравнений из (4.14). Однако это обстоятельство для нас не существенно, так как очевидно, что решение $\mathbf{q}$ задачи (4.18), (4.19) и решение $\mathbf{w}$ задачи (4.14)–(4.16) с $\mathbf{f} = 0$ и $\mathbf{w}_0 = \mathbf{q}_0$ связаны соотношением $e^t\mathbf{q}(t,\cdot) = \mathbf{w}(t,\cdot)$. Отсюда и из однозначной разрешимости задачи (4.14)–(4.16) следует существование и единственность решения $\mathbf{q} \in L^2(0,T;\mathbf{V}_\sigma^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;\mathbf{V}_\sigma^{-1}(\Omega))$ задачи (4.18). Справедлив следующий результат о гладкости:

Лемма 4.7. *Предположим, что* $\mathbf{q}_0 \in \mathbf{V}_\sigma^s(\Omega)$, $s \geqslant 0$. *Тогда решение* $\mathbf{q}$ *задачи* (4.18) *определено при всех* $t > 0$ *и удовлетворяет оценке*

$$\begin{gathered}\int\limits_t^\infty \Big(\|\mathbf{q}(\tau,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}_\sigma^{\nu+s+1}(\Omega)} + \|\partial_t \mathbf{q}(\tau,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}_\sigma^{\nu+s-1}(\Omega)} \Big)\, d\tau = \\ = \|\mathbf{q}(t,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}_\sigma^{\nu+s}(\Omega)} \leqslant \max\left(e^{-2t}, e^{-\nu}\left(\frac{\nu}{2}\right)^\nu t^{-\nu}\right) \|\mathbf{q}_0\|^2_{\mathbf{V}_\sigma^s(\Omega)}\end{gathered} \tag{4.20}$$

при каждом $\nu \geqslant 0$.

Доказательство. Применим к (4.18) унитарный оператор U, введенный при определении спектрального разложения оператора A посредством прямых интегралов. Тогда задача (4.18) сводится к

$$\int\limits_1^\infty \oplus \Big(\partial_t \widehat{\mathbf{q}}(t,\lambda) + \lambda \widehat{\mathbf{q}}(t,\lambda) \Big)\, d\mu(\lambda) = 0$$

и

$$\int\limits_1^\infty \oplus \Big(\widehat{\mathbf{q}}(t,\lambda)|_{t=0} - \widehat{\mathbf{q}}_0(\lambda) \Big)\, d\mu(\lambda) = 0.$$

По определению прямых интегралов, интегранды принадлежат разным гильбертовым пространствам $H(\lambda)$ при разных λ. Это приводит нас к выводу, что при почти всех λ (относительно меры μ)

$$\partial_t \widehat{\mathbf{q}}(t,\lambda) + \lambda \widehat{\mathbf{q}}(t,\lambda) = \mathbf{0} \quad \text{в } Q \qquad \text{и} \qquad \widehat{\mathbf{q}}(t,\lambda)|_{t=0} = \widehat{\mathbf{q}}_0(\lambda) \quad \text{в } \Omega. \tag{4.21}$$

Равенства (4.21) понимаются как равенства в гильбертовых пространствах $H(\lambda)$. Точнее, первое равенство рассматривается в $L^2(0,T;H(\lambda))$. Из (4.21) следует, что

$$\widehat{\mathbf{q}}(t,\lambda) = e^{-\lambda t}\widehat{\mathbf{q}}_0(\lambda). \tag{4.22}$$

Используя определения (4.5) и (4.13) норм для $\mathbf{V}_\sigma^s(\Omega)$, мы получим

$$\|\mathbf{q}(t,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}_\sigma^{\nu+s}(\Omega)} = \int\limits_1^\infty e^{-2\lambda t}\lambda^{\nu+s}\|\widehat{\mathbf{q}}_0(\lambda)\|^2_{H(\lambda)}\, d\mu(\lambda). \tag{4.23}$$

Решая простую экстремальную задачу, получим, что для каждого $t > 0$

$$\max_{\lambda\in[1,\infty)} (e^{-2\lambda t}\lambda^\nu) = e^{-\max\{2t,\nu\}}\big[\max\{1,\nu/(2t)\}\big]^\nu \leqslant \max\left(e^{-2t}, e^{-\nu}\left(\frac{\nu}{2}\right)^\nu t^{-\nu}\right). \tag{4.24}$$

Из (4.23) и (4.24) следует, что

$$\|\mathbf{q}(t,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}_\sigma^{\nu+s}(\Omega)} \leqslant \max\left(e^{-2t}, e^{-\nu}\left(\frac{\nu}{2}\right)^\nu t^{-\nu}\right) \|\mathbf{q}_0\|^2_{\mathbf{V}_\sigma^s(\Omega)}. \tag{4.25}$$

Интегрируя (4.23) по t и применяя (4.23) к полученному результату, будем иметь

$$\int\limits_t^\infty \|\mathbf{q}(\tau,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^{\nu+s+1}_\sigma(\Omega)}\,d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty e^{-2\lambda t}\lambda^{\nu+s}\|\widehat{\mathbf{q}}_0(\lambda)\|^2_{H(\lambda)}\,d\mu(\lambda) = \frac{1}{2}\|\mathbf{q}(t,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^{\nu+s}_\sigma(\Omega)}. \tag{4.26}$$

Дифференцируя (4.22) по t и применяя аргументы, использованные при выводе (4.26), мы приходим к

$$\int\limits_t^\infty \|\partial_t\mathbf{q}(\tau,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^{\nu+s-1}_\sigma(\Omega)}\,d\tau = \int\limits_t^\infty\int\limits_1^\infty e^{-2\lambda\tau}\lambda^{\nu+s+1}\|\mathbf{q}_0\|^2_{\mathbf{V}^{s}_\sigma(\Omega)}\,d\mu(\lambda)\,d\tau = \frac{1}{2}\|\mathbf{q}(t,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^{\nu+s}_\sigma(\Omega)}. \tag{4.27}$$

Теперь из неравенств (4.25)–(4.27) следует (4.20). □

Рассмотрим теперь задачу Стокса с ненулевой правой частью и нулевым начальным условием:

$$\partial_t\mathbf{q}(t,\mathbf{x}) + A\mathbf{q} = \mathbf{h}(t,\mathbf{x}) \quad \text{в } Q \qquad \text{и} \qquad \mathbf{q}|_{t=0} = \mathbf{0} \quad \text{в } \Omega. \tag{4.28}$$

Лемма 4.8. *Пусть* $\mathbf{h}\in L^2(0,T;\mathbf{V}^{-s}_\sigma(\Omega))$, $s\in[0,1]$. *Тогда решение* $\mathbf{q}$ *задачи* (4.28) *удовлетворяет равенству*

$$\int\limits_0^T \Big(\|\partial_t\mathbf{q}(t,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^{-s}_\sigma(\Omega)} + \|\mathbf{q}(t,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^{2-s}_\sigma(\Omega)}\Big)\,dt = \int\limits_0^T \|\mathbf{h}(t,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^{-s}_\sigma(\Omega)}\,dt. \tag{4.29}$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 4.7, сведем задачу (4.28) к задаче с обыкновенным дифференциальным уравнением для спектрального разложения $\widehat{\mathbf{q}}(t,\lambda)$ решения $\mathbf{q}(t,\mathbf{x})$:

$$\partial_t\widehat{\mathbf{q}}(t,\lambda) + \lambda\widehat{\mathbf{q}}(t,\lambda) = \widehat{\mathbf{h}}(t,\lambda) \quad \text{в } Q \tag{4.30}$$

и

$$\widehat{\mathbf{q}}(t,\lambda)|_{t=0} = \mathbf{0} \tag{4.31}$$

для μ-почти всех $\lambda\in[1,\infty)$, где $\widehat{\mathbf{h}}$ – это спектральное разложение функции $\mathbf{h}$. Продолжим $\widehat{\mathbf{h}}$ по t нулем вне интервала $[0,T]$ и продолжим $\widehat{\mathbf{q}}$ нулем при $t<0$ и функцией $e^{-\lambda t}\int\limits_0^T e^{\lambda\tau}\mathbf{h}(\tau,\lambda)\,d\tau$ при $t>\tau$. Этот интеграл определяет решение уравнения (4.30) при $t>T$, если $\mathbf{h}=0$ при $t>T$. Продолженные функции мы также обозначим соответственно $\widehat{\mathbf{q}}$ и $\widehat{\mathbf{h}}$. В силу (4.31) продолженные функции удовлетворяют (4.30)–(4.31) при $t\in\mathbb{R}$. Применяя преобразование Фурье по t, т.е.

$$\widetilde{\mathbf{q}}(\tau,\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\tau t}\widehat{\mathbf{q}}(t,\lambda)\,dt \qquad \text{и} \qquad \widetilde{\mathbf{h}}(\tau,\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\tau t}\widehat{\mathbf{h}}(t,\lambda)\,dt,$$

к (4.30), мы получим

$$\widetilde{\mathbf{q}}(\tau,\lambda) = \frac{\widetilde{\mathbf{h}}(\tau,\lambda)}{i\tau+\lambda} \quad \text{и} \quad i\tau\widetilde{\mathbf{q}}(\tau,\lambda) = \frac{i\tau\widetilde{\mathbf{h}}(\tau,\lambda)}{i\tau+\lambda}.$$

Взяв норму $\|\cdot\|_{\mathbf{V}^{-s}_\sigma(\Omega)}$, придем к равенству

$$\begin{gathered}\|\widetilde{\mathbf{q}}(\tau,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^{2-s}_\sigma(\Omega)} + \|i\tau\widetilde{\mathbf{q}}(\tau,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^{-s}_\sigma(\Omega)} = \int\limits_1^\infty \Big(\frac{\lambda^{2-s}}{|i\tau+\lambda|^2} + \frac{\lambda^{-s}|i\tau|^2}{|i\tau+\lambda|^2}\Big)\|\widetilde{\mathbf{h}}(\tau,\lambda)\|^2_{H(\lambda)}\,d\lambda = \\ = \int\limits_1^\infty \lambda^{-s}\|\widetilde{\mathbf{h}}(\tau,\lambda)\|^2_{H(\lambda)}\,d\lambda = \|\widetilde{\mathbf{h}}(\tau,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^{-s}_\sigma(\Omega)}\,d\lambda.\end{gathered} \tag{4.32}$$

Применяя равенство Парсеваля к обеим частям равенства (4.32), получим (4.29). Отметим, что применение к (4.28) стандартных аргументов, связанных с единственностью, приводит к выводу, что мы получили оценку для решения задачи (4.28). □

5. Эволюционные задачи с неоднородными краевыми условиями

В этом разделе мы изучим неоднородные краевые задачи для системы уравнений Осеена, для сопряженной к ней системы и для системы Навье—Стокса. Как и в разделах 3, 4, мы предполагаем, что Ω — внешность ограниченной области с границей $\partial\Omega$ класса C^∞.

5.1. Уравнения Осеена. Пусть $\mathbf{z}(t,\mathbf{x})$ — заданное соленоидальное векторное поле. Система уравнений Осеена определяется следующим образом:

$$\partial_t\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w} + (\mathbf{z}\cdot\nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{z} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{w} = 0 \qquad \text{в } (0,T)\times\Omega. \tag{5.1}$$

Очевидно, (5.1) можно трактовать как линеаризацию уравнений Навье—Стокса на векторном поле $\mathbf{z}$. Мы дополним (5.1) начальным условием

$$\mathbf{w}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\Omega, \tag{5.2}$$

и граничными условиями

$$\mathbf{w}\big|_\Sigma = \mathbf{b} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{w}|_{|\mathbf{x}|\to\infty} = \mathbf{0}. \tag{5.3}$$

Предположим, что

$$\mathbf{f}\in\mathbf{L}^2(Q), \qquad \mathbf{w}_0\in\mathbf{V}^1(\Omega) \qquad \text{и} \qquad \mathbf{b}\in\widehat{\mathbf{H}}^{1,0}(\Sigma), \tag{5.4}$$

где пространства $\mathbf{V}^1(\Omega)$ и $\widehat{\mathbf{H}}^{1,0}(\Sigma)\equiv\widehat{H}^{1,0}(\mathcal{T}(\Sigma))$ определены, соответственно, в (2.26) и (2.31).

Пусть ρ фиксировано и удовлетворяет (2.34). Мы будем искать решение $\mathbf{w}$ задачи (5.1)–(5.3) в пространстве

$$\mathbf{W}(Q) = \mathbf{V}^{1,1/2}_\rho(Q) + \mathbf{V}^{(1,2)}_0(Q), \tag{5.5}$$

которое является прямой суммой пространства (3.23) и пространства

$$\mathbf{V}^{(1,2)}_0(Q) = \{\mathbf{v}\in L^2(0,T;\mathbf{V}^2(\Omega))\cap H^1(0,T;\mathbf{V}^0(\Omega)) : \mathbf{v}\big|_\Sigma = \mathbf{0}\}. \tag{5.6}$$

Если $\mathbf{w}\in\mathbf{W}(Q)$ является решением задачи (5.1)–(5.3), то данные $\mathbf{w}_0$ и $\mathbf{b}$ должны удовлетворять условию согласования

$$\mathbf{w}_0\big|_{\partial\Omega} = \mathbf{b}\big|_{t=0}. \tag{5.7}$$

В дальнейшем нам будет необходим случай, когда векторное поле $\mathbf{z}$ из (5.1) бездивергентно и имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\mathbf{z}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) + \widehat{\mathbf{w}}(t,\mathbf{x}),\\ \text{где } \widehat{\mathbf{w}}\in\mathbf{W}(Q),\ \mathbf{v}_0\in\mathbf{L}^3(\Omega),\ \partial_{x_j}\mathbf{v}_0\in\mathbf{L}^2(\Omega),\ \partial_{x_jx_k}\mathbf{v}_0\in\mathbf{L}^2(\Omega),\ j,k=1,2,3.\end{gathered} \tag{5.8}$$

В следующей теореме доказано существование решения $\mathbf{w}$.

Теорема 5.1. *Предположим, что* $\mathbf{f}$, $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{z}$ *удовлетворяют* (5.4), (5.7), (5.8). *Тогда существует единственное решение* $(\mathbf{w},\nabla p)\in\mathbf{W}(\Omega)\times L^2(0,T;(\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))') + \mathbf{L}^2(Q)$ *задачи* (5.1)–(5.3) *такое, что*

$$\|\mathbf{w}\|^2_{\mathbf{W}(\Omega)} + \|\nabla p\|^2_{L^2(0,T;(\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))')+\mathbf{L}^2(Q)} \leqslant C\left(\|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\mathbf{w}_0\|^2_{\mathbf{V}^1(\Omega)} + \|\mathbf{b}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Sigma)}\right).$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}\mathbf{b}\in\mathbf{V}^{1,1/2}_\rho(Q)$ — продолжение поля $\mathbf{b}\in\widehat{\mathbf{H}}^{1,0}(\Sigma)$, построенного в теореме 3.5. В силу (3.31) имеем

$$\|\mathcal{E}\mathbf{b}\|_{V^{1,1/2}_\rho(Q)} \leqslant C\|\mathbf{b}\|_{\mathbf{H}^1(\Sigma)}. \tag{5.9}$$

Будем искать теперь решение $\mathbf{w}$ задачи (5.1)–(5.3) в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathcal{E}\mathbf{b}, \tag{5.10}$$

где $\mathbf{v}$ — новое неизвестное векторное поле. Подставляя (5.10) в (5.1)–(5.3), получим

$$\partial_t\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) - \Delta\mathbf{v} + (\mathbf{z}\cdot\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{z} + \nabla p_1 = \mathbf{f}_1, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \qquad \text{в } Q, \tag{5.11}$$

$$\mathbf{v}\big|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \qquad \mathbf{v}\big|_\Sigma = 0, \qquad \mathbf{v}\big|_{|\mathbf{x}|\to\infty} = \mathbf{0}, \tag{5.12}$$

где

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) - \mathcal{E}\mathbf{b}(0,\mathbf{x})$$

и

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f} - \partial_t(\mathcal{E}\mathbf{b}) - (\mathbf{z}\cdot\nabla)(\mathcal{E}\mathbf{b}) - ((\mathcal{E}\mathbf{b})\cdot\nabla)\mathbf{z} + \mathbf{g}, \qquad \nabla p_1 = \nabla p + \nabla q \tag{5.13}$$

с $\mathbf{g}+\nabla q=\Delta(\mathcal{E}\mathbf{b})$. Ввиду (5.9), определения $\mathcal{E}\mathbf{b}$ и (5.7), легко видеть, что $\mathbf{v}_0\in\mathbf{V}_0^1(\Omega)$. Используя (3.23), (5.8), (5.9) и теоремы вложения Соболева (см. [2], [15, с. 250]) легко получить, что $\mathbf{f}_1\in\mathbf{L}^2(Q)$. Итак, (5.11)–(5.12) является краевой задачей с однородным граничным условием, в которой (5.11) отличается от уравнений Стокса только членами $(\mathbf{z}\cdot\nabla)\mathbf{v}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{z}$. С помощью стандартного метода Галеркина и теоремы вложения Соболева можно доказать как в [10, 14], что (5.11)–(5.12) имеет единственное обобщенное решение $(\mathbf{v},\nabla p_1)$, где $\nabla p_1\in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ и $\mathbf{v}$ удовлетворяет энергетическому неравенству

$$\|\mathbf{v}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\int\limits_0^t\|\mathbf{v}(s)\|^2_{\mathbf{V}^1(\Omega)}\,ds\leqslant C\Big(\|\mathbf{v}_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\int\limits_0^t\|\mathbf{f}_1(s)\|^2_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}\,ds\Big)$$

с C, зависящей от $\|\nabla\widehat{\mathbf{w}}\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}^{1/2}(\Omega))}+\|\mathbf{v}_0\|_{L^3(Q)}+\|\nabla\mathbf{v}_0\|_{L^2(Q)}$ (напомним, что $\mathbf{z}=\widehat{\mathbf{w}}+\mathbf{v}_0$). Отметим также, что что из энергетического неравенства выводится включение $(\mathbf{z}\cdot\nabla)\mathbf{v}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{z}\in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$.

Рассуждая, как при выводе (4.18), можно переписать задачу (5.11), (5.12) в следующем виде:

$$\partial_t\mathbf{v}(t,\mathbf{x})+A\mathbf{v}=\mathbf{h},\qquad \mathbf{v}|_{t=0}=\mathbf{v}_0. \tag{5.14}$$

Здесь A — оператор, определенный в (4.18),

$$\mathbf{h}=P(\mathbf{f}_1+\mathbf{v}-(\mathbf{z},\nabla)\mathbf{v}-(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{z}), \tag{5.15}$$

где $\mathbf{f}_1$ — функция (5.13), а P — оператор, заданный в (4.17).

В силу лемм 4.7, 4.8 разрешающий оператор $R: R(\mathbf{h},\mathbf{v}_0)=\mathbf{v}$ этой задачи корректно определен и ограничен в следующих пространствах:

$$R:\ L^2(0,T;\mathbf{V}_0^{s-2}(\Omega))\times\mathbf{V}_0^{s-1}(\Omega)\to L^2(0,T;\mathbf{V}^s(\Omega)\cap\mathbf{V}_0^1(\Omega))\cap H^1(0,T;\mathbf{V}^{s-2}(\Omega)), s\in[1,2]. \tag{5.16}$$

Применяя оператор R к (5.14) и учитывая (5.15), получим

$$\mathbf{v}+RP\big((\mathbf{z}\cdot\nabla)\mathbf{v}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{z}-\mathbf{v}\big)=RP\mathbf{f}_1. \tag{5.17}$$

Так как $\mathbf{f}_1\in\mathbf{L}^2(Q)$, то $RP\mathbf{f}_1\in L^2(0,T;\mathbf{V}^2(\Omega))\cap H^1(0,T;\mathbf{V}^0(\Omega))$.

В силу теоремы вложения Соболева и неравенства Гельдера, имеем

$$\|P\big((\mathbf{z}\cdot\nabla)\mathbf{v}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{z}-\mathbf{v}\big)\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}_0^{-1/2}(\Omega))}\leqslant C\|\nabla\mathbf{z}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{V}^0(\Omega))}\|\mathbf{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}^1(\Omega))}. \tag{5.18}$$

Из (5.16) с $s=3/2$ и (5.17)–(5.18) следует, что

$$\mathbf{v}\in L^2(0,T;\mathbf{V}^{3/2}(\Omega))\cap H^1(0,T;\mathbf{V}_0^{-1/2}(\Omega))$$

и поэтому, аналогично (5.18),

$$\begin{aligned}&\|(\mathbf{z}\cdot\nabla)\mathbf{v}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{z}-\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\leqslant\\ &\leqslant C\Big(\|\nabla\mathbf{z}\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}^{1/2}(\Omega_N))}+\|\nabla\mathbf{z}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{V}^0(\Omega))}\Big)\|\mathbf{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}^{3/2}(\Omega))\cap H^1(0,T;\mathbf{V}_0^{-1/2}(\Omega))}.\end{aligned} \tag{5.19}$$

В силу (5.17), (5.19), (5.16) с $s=2$ и краевого условия $\mathbf{v}|_\Sigma=\mathbf{0}$ легко видеть, что

$$\mathbf{v}\in L^2(0,T;\mathbf{V}^2(\Omega)\cap\mathbf{V}_0^1(\Omega))\cap H^1(0,T;\mathbf{V}^0(\Omega))\equiv\mathbf{V}_0^{(1,2)}(Q).$$

Повторяя использованные ранее аргументы, получим оценку

$$\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{V}_0^{(1,2)}(Q)}\leqslant C\Big(\|\mathbf{v}_0\|^2_{\mathbf{V}^1(\Omega)}+\|\mathbf{f}_1\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}\Big).$$

Соотношения (5.9), (5.10) и (5.16) дают существование решения $(\mathbf{w},\nabla p)$ задачи (5.1)–(5.3), которое принадлежит пространству $\mathbf{W}(Q)\times L^2(0,T;(\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Omega))')$. Доказательство единственности решения легко сводится к доказательству единственности его компоненты $\mathbf{v}$ в пространстве $\mathbf{W}(Q)$. Это доказательство хорошо известно и имеется, например, в [16]. □

В дальнейшем нам понадобится следующее простое следствие теоремы 5.1. Рассмотрим уравнение Осеена (5.1) с нулевыми начальным и граничными условиями:

$$\mathbf{w}(0,\mathbf{x})=\mathbf{w}_0(\mathbf{x}),\qquad \mathbf{x}\in\Omega,\qquad \mathbf{w}\big|_\Sigma=\mathbf{0}\qquad\text{и}\qquad \mathbf{w}|_{|\mathbf{x}|\to\infty}=\mathbf{0}. \tag{5.20}$$

Предложение 5.1. *Пусть* $\mathbf{z}$ *из уравнения* (5.1) *удовлетворяет условиям* (5.8) *и* $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(Q)$. *Тогда существует единственное решение* $(\mathbf{w}, \nabla p) \in \mathbf{V}_0^{(1,2)}(Q) \times \mathbf{L}^2(Q)$ *задачи* (5.1), (5.20), *и это решение удовлетворяет оценке*

$$\|\mathbf{w}\|^2_{\mathbf{V}_0^{(1,2)}(Q)} + \|\nabla p\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} \leqslant C\|\mathbf{f}_1\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}.$$

Доказательство предложения дословно повторяет доказательство теоремы 5.1, из которого убраны аргументы, связанные с неоднородностью начального и граничных условий.

5.2. Оценки гладкости для решений сопряженной краевой задачи. В дальнейшем нам понадобятся результаты, связанные с разрешимостью и гладкостью решений смешанной краевой задачи, сопряженной задаче Осеена (5.1), (5.2), (5.3). Эта задача имеет вид:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q} + (\mathbf{z}\cdot\nabla)\mathbf{q} - (\nabla \mathbf{z})^* \mathbf{q} + \nabla r = \mathbf{k} \quad \text{в } Q, \\ \operatorname{div} \mathbf{q} = 0 \quad \text{в } Q, \\ \mathbf{q}|_{t=T} = \mathbf{q}_0(\mathbf{x}) \qquad \text{в } \Omega, \\ \mathbf{q}|_\Sigma = \mathbf{0}, \\ \mathbf{q} \to \mathbf{0} \quad \text{при } |\mathbf{x}| \to \infty, \end{cases} \tag{5.21}$$

где $[\nabla \mathbf{z}]^* \mathbf{q} = (\sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial z_i}{\partial x_j} q_i,\ j = 1,2,3)$ для $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3), \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Следующее утверждение об однозначной разрешимости задачи (5.21) в случае $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ аналогично предложению 5.1.

Предложение 5.2. *Пусть для* $\mathbf{z}$ *из уравнения* (5.1) *выполнено условие* (5.8) $\mathbf{k} \in \mathbf{L}^2(Q)$, *и* $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$. *Тогда существует единственное решение* $(\mathbf{q}, \nabla r) \in \mathbf{V}^{(1,2)}(Q) \times \mathbf{L}^2(Q)$ *задачи* (5.21) (*с* $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$), *удовлетворяющее оценке*

$$\|\mathbf{q}\|^2_{\mathcal{V}_T^{(2)}(Q)} + \|\nabla r\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} \leqslant C\|\mathbf{k}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}. \tag{5.22}$$

Доказательство этого утверждения совпадает с доказательством предложения (5.1), если в (5.21) сделать замену времени $\tau = T - t$.

Нам также понадобятся результаты, связанные с задачей (5.21), в которой $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{q}_0 \neq \mathbf{0}$. В этом случае сведем (5.21) к следующей системе с помощью замены переменной $\tau = T - t$ и переобозначения τ на t:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{q} - \Delta \mathbf{q} - (\mathbf{z}\cdot\nabla)\mathbf{q} + (\nabla \widehat{\mathbf{z}})^* \mathbf{q} - \nabla r = \mathbf{0} \quad \text{в } Q, \\ \operatorname{div} \mathbf{q} = 0 \quad \text{в } Q, \\ \mathbf{q}|_{t=0} = \mathbf{q}_0(\mathbf{x}) \qquad \text{в } \Omega, \\ \mathbf{q}|_\Sigma = \mathbf{0}, \\ \mathbf{q} \to \mathbf{0} \quad \text{при } |\mathbf{x}| \to \infty. \end{cases} \tag{5.23}$$

Повторяя соответствующее место доказательства теоремы 5.1, получим следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Пусть* $\mathbf{z}$ *удовлетворяет* (5.8) *и* $\mathbf{q}_0 \in \mathbf{V}_0^0(\Omega)$. *Тогда существует решение* $(\mathbf{q}, \nabla r)$ *задачи* (5.23), *удовлетворяющее энергетической оценке*

$$\|\mathbf{q}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \|\nabla \mathbf{q}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} \leqslant C\big(\|\nabla \widehat{\mathbf{z}}\|^2_{L^\infty(0,T;\mathbf{V}^0(\Omega))}\big)\|\mathbf{q}_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \tag{5.24}$$

Получим теперь более сильные оценки для $\mathbf{q}$ в случае более гладкого начального условия $\mathbf{q}_0$. Рассуждая как при выводе (4.18), можно переписать задачу (5.23) в виде

$$\partial_t \mathbf{q}(t,\mathbf{x}) + A\mathbf{q} = L\mathbf{q} \quad \text{в } Q \qquad \text{и} \qquad \mathbf{q}|_{t=0} = \mathbf{q}_0 \quad \text{в } \Omega, \tag{5.25}$$

где оператор A определен в (4.18), а

$$L\mathbf{q} = P\big(\mathbf{q} + (\mathbf{z}\cdot\nabla)\mathbf{q} - (\nabla \mathbf{z})^* \mathbf{q}\big). \tag{5.26}$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 5.2. *Предположим, что* $\mathbf{z}$ *удовлетворяет* (5.8) *и* $\mathbf{q}_0 \in \mathbf{V}^s_\sigma(\Omega)$ *при* $s \in [0, 1/2)$. *Пусть* $\mathbf{q}$ *– единственное решение задачи* (5.25)–(5.26), *удовлетворяющее неравенству* (5.24). *Тогда справедлива оценка*

$$\int_t^\infty \left(\|\mathbf{q}(\tau,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^2_\sigma(\Omega)} + \|\partial_t \mathbf{q}(\tau,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^0_\sigma(\Omega)}\right) d\tau \leqslant C_0 t^{s-1} \|\mathbf{q}_0\|^2_{\mathbf{V}^s_\sigma(\Omega)}, \tag{5.27}$$

где константа C_0 *зависит только от* $\|\mathbf{z}\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}^{3/2}(\Omega))} + \|\nabla \mathbf{z}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{V}^0(\Omega))}$.

Доказательство. Справедливо неравенство, которое доказывается аналогично оценке (5.18):

$$\|L\mathbf{q}\|_{L^2(t,T;\mathbf{V}^{-1/2}_\sigma(\Omega))} \leqslant C \|\mathbf{q}\|_{L^2(t,T;\mathbf{V}^1_\sigma(\Omega))}, \qquad t \in (0, T). \tag{5.28}$$

Мы разложим решение $\mathbf{q}$ задачи (5.25):

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \tag{5.29}$$

где $\mathbf{q}_1$ — решение задачи (4.18) и $\mathbf{q}_2$ — решение задачи (4.28) с $\mathbf{h} = L\mathbf{q}$. Тогда по лемме 4.8 получим

$$\|\mathbf{q}_2\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{V}^{3/2}_\sigma(\Omega))} + \|\partial_t \mathbf{q}_2\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{V}^{-1/2}_\sigma(\Omega))} \leqslant C \|L\mathbf{q}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{V}^{-1/2}_\sigma(\Omega))}. \tag{5.30}$$

Из соотношений (5.29)–(5.30), леммы 4.7 с $s + \nu = 1/2$ и (5.28) следует, что для каждого $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \int_t^T \Big(\|\mathbf{q}(\tau,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^{3/2}_\sigma(\Omega)} + \|\partial_t \mathbf{q}(\tau,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^{-1/2}_\sigma(\Omega)}\Big) d\tau \leqslant \\ \leqslant C\Big(\|\mathbf{q}_1(t,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^{1/2}_\sigma(\Omega)} + \|\mathbf{q}\|^2_{L^2(t,T;\mathbf{V}^1_\sigma(\Omega))}\Big). \end{aligned} \tag{5.31}$$

Рассуждая, как при выводе оценок (5.19), (5.28), получим

$$\|L\mathbf{q}\|^2_{L^2(t,T;\mathbf{V}^0_\sigma(\Omega))} \leqslant C \|\mathbf{q}\|^2_{L^2(t,T;\mathbf{V}^{3/2}_\sigma(\Omega))}. \tag{5.32}$$

Также, аналогично (5.30) выводится неравенство

$$\|\mathbf{q}\|^2_{L^2(t,T;\mathbf{V}^2_\sigma(\Omega))} + \|\partial_t \mathbf{q}\|^2_{L^2(t,T;\mathbf{V}^0_\sigma(\Omega))} \leqslant C\Big(\|\mathbf{q}_1(t,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^1_\sigma(\Omega)} + \|L\mathbf{q}\|^2_{L^2(t,T;\mathbf{V}^0_\sigma(\Omega))}\Big). \tag{5.33}$$

Подставив (5.32) в (5.33) и используя (5.31), мы придем к

$$\int_t^T \Big(\|\mathbf{q}(\tau,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^2_\sigma(\Omega)} + \|\partial_t \mathbf{q}(\tau,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^0_\sigma(\Omega)}\Big) d\tau \leqslant C\Big(\|\mathbf{q}_1(t,\cdot)\|^2_{\mathbf{V}^1_\sigma(\Omega)} + \|\mathbf{q}\|^2_{L^2(t,T;\mathbf{V}^1_\sigma(\Omega))}\Big). \tag{5.34}$$

Применяя к правой части неравенства (5.34) лемму 4.7 с $\nu = 1 - s$ и оценку (5.24), мы получим (5.27). □

5.3. Нелинейная эволюционная задача. Рассмотрим теперь нелинейную эволюционную задачу

$$\partial_t \mathbf{w} - \Delta \mathbf{w} + ([\mathbf{z} + \mathbf{w}] \cdot \nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{z} + \nabla p = \mathbf{f} \qquad \text{в } Q, \tag{5.35}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \qquad \text{в } Q, \tag{5.36}$$

$$\mathbf{w}\big|_{t=0} = \mathbf{w}_0, \qquad \mathbf{w}\big|_\Sigma = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{w}\Big|_{|\mathbf{x}|\to\infty} = \mathbf{0}. \tag{5.37}$$

Эта задача отличается от (5.1)–(5.3) только членом $(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{w}$. Как и в предыдущем разделе, предположим, что коэффициент $\mathbf{z}$ в (5.35) удовлетворяет условиям (5.8) и будем искать решение $\mathbf{w}$ задачи (5.35)–(5.37) в пространстве $\mathbf{W}(Q)$ (см. (5.5)).

Нам понадобится следующая лемма об аналитическом обратном операторе (см. [6]):

Лемма 5.2. *Пусть* X_1 *и* X_2 *— банаховы пространства,* $A : X_1 \to X_2$ *— линейный изоморфизм пространств* X_1 *и* X_2 *и* $B(\cdot,\cdot) : X_1 \times X_1 \to X_2$ *— непрерывный билинейный оператор. Тогда уравнение*

$$Ax + B(x, x) = f \tag{5.38}$$

имеет единственное решение $x \in X_1$, *если* $\|f\|_{X_2} < \varepsilon$ *с достаточно малым* ε. *Отображение* $x = Rf$, *переводящее правую часть* f *в решение* x *уравнения* (5.38), *однозначно определено и аналитично* (*т.е.,* $R(f)$ *можно записать в виде сходящегося ряда по* f).

Теорема 5.3. *Пусть* $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(Q)$, $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}^1(\Omega)$ *и* $\mathbf{b} \in \mathbf{H}^1(\Sigma)$ *удовлетворяют* (2.32) *и* (5.7). *Предположим, что*

$$\|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\mathbf{w}_0\|^2_{\mathbf{V}^1(\Omega)} + \|\mathbf{b}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Sigma)} < \varepsilon, \tag{5.39}$$

где $\varepsilon > 0$ — *достаточно малое число. Тогда существует единственное решение* $(\mathbf{w}, \nabla p)$ *задачи* (5.35)–(5.37), *принадлежащее пространству* $\mathbf{W}(\Omega) \times (L^2(0,T;(\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))') + \mathbf{L}^2(Q))$. *При этом решение* $(\mathbf{w}, \nabla p)$ *удовлетворяет оценке*

$$\|\mathbf{w}\|^2_{\mathbf{W}(Q)} + \|\nabla p\|^2_{L^2(0,T;(\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Omega_{\rho+2}))')+\mathbf{L}^2(Q)} \leqslant C(\varepsilon),$$

где $C(\varepsilon)$ — *положительная непрерывная функция, определенная при достаточно малых* ε.

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 5.1, мы будем искать решение задачи (5.35)–(5.37) в виде (5.10) с $\mathcal{E}\mathbf{b} \in \mathbf{V}^{1,1/2}_\rho(Q)$, которое является расширением векторного поля $\mathbf{b} \in \widehat{\mathbf{H}}^{1,0}(\Sigma)$, взятым из теоремы 3.5. Подставляя (5.10) в(5.35)–(5.37), получим

$$\partial_t \mathbf{v} - \Delta\mathbf{v} + ((\mathbf{z} + \mathcal{E}\mathbf{b} + \mathbf{v}) \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{z} + \mathcal{E}\mathbf{b}) + \nabla p_1 = \mathbf{f}_1, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } Q \tag{5.40}$$

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}|_\Sigma = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}|_{|\mathbf{x}|\to\infty} = \mathbf{0}, \tag{5.41}$$

где

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) - \mathcal{E}\mathbf{b}(0, \mathbf{x})$$

и

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f} - \partial_t(\mathcal{E}\mathbf{b}) - (\mathcal{E}\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{z} - ((\mathbf{z} + \mathcal{E}\mathbf{b}) \cdot \nabla)\mathcal{E}\mathbf{b} + \mathbf{g}, \qquad \nabla p_1 = \nabla p + \nabla q$$

с $\mathbf{g} + \nabla q = \Delta\mathcal{E}\mathbf{b}$. В силу (5.9), (5.7) и определения $\mathcal{E}\mathbf{b}$, как и при доказательстве теоремы 5.1, получим, что $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}^1_0(\Omega)$, $\mathbf{f}_1 \in \mathbf{L}^2(Q)$ и

$$\|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{V}^1_0(\Omega)} \leqslant \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{V}^1_0(\Omega)} + C\|\mathbf{b}\|_{\mathbf{H}^1(\Sigma)}, \qquad \|\mathbf{f}_1\|_{\mathbf{L}^2(Q)} \leqslant \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + C\|\mathbf{b}\|_{\mathbf{H}^1(\Sigma)},$$

где $C > 0$ не зависит от $\mathbf{b}$. Следовательно, ввиду предположений теоремы имеем

$$\|\mathbf{v}_0\|^2_{\mathbf{V}^1_0(\Omega)} + \|\mathbf{f}_1\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} \leqslant C_1\varepsilon \tag{5.42}$$

с константой $C_1 > 0$, не зависящей от $\mathbf{b}$ и ϵ.

Применяя оператор P (определенный в (4.17)) к (5.40)–(5.41), мы получим

$$P\big(\partial_t \mathbf{v} - \Delta\mathbf{v} + ((\mathbf{z} + \mathcal{E}\mathbf{b} + \mathbf{v}) \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{z} + \mathcal{E}\mathbf{b})\big) = P\mathbf{f}_1, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{5.43}$$

Очевидно, достаточно доказать существование и единственность решения задачи (5.41), (5.43). Мы докажем это с помощью леммы 5.2.

Чтобы применить к (5.43) и (5.41) лемму 5.2, положим $X_1 = \mathbf{V}^{(1,2)}_0(Q)$ и $X_2 = L^2(0,T;\mathbf{V}^0_0(\Omega)) \times \mathbf{V}^1_0(Q)$. Определим операторы A и B соотношениями

$$A\mathbf{v} = \Big(P\big(\partial_t \mathbf{v} - \Delta\mathbf{v} + ((\mathbf{z} + \mathcal{E}\mathbf{b}) \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{z} + \mathcal{E}\mathbf{b})\big),\ \mathbf{v}\big|_{t=0}\Big)$$

и

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \Big(P\big((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\big), \mathbf{0}\Big).$$

Тогда разрешимость задачи (5.41)–(5.43) эквивалентна существованию $\mathbf{v} \in X_1$, удовлетворяющему уравнению

$$A\mathbf{v} + B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_0),$$

где $(\mathbf{f}, \mathbf{v}_0)$ задано в пространстве X_2.

Непрерывность операторов $A : X_1 \to X_2$ и $B : X_1 \to X_2$ устанавливается с помощью теорем вложения Соболева как при доказательстве теоремы 5.1. Существование обратного оператора $A^{-1} : X_2 \to X_1$ следует из теоремы 5.1. Поэтому в силу леммы 5.2 существует единственное решение задачи (5.41)–(5.43), если ε в (5.42) достаточно мало. Отсюда следует утверждение теоремы, если повторить соответствующее место доказательства теоремы 5.1. $\square$

6. Формулировка задачи оптимального управления

В этом разделе приводится точная постановка задачи оптимального управления, которая изучается в этой статье.

6.1. Уравнения состояний и функционал стоимости. Как упоминалось во введении, мы рассматриваем задачу минимизации сопротивления вязкой жидкости трехмерному телу B, которое движется в ней с постоянной скоростью $\mathbf{v}_\infty$. При этом минимизация проводится с помощью управления, заданного на границе ∂B. В координатах, привязанных к телу B, эта задача преобразуется в задачу минимизации сопротивления, которое оказывает зафиксированное тело B обтекающему его потоку жидкости, скорость которого на бесконечности равна $\mathbf{v}_\infty$. Математически поток жидкости описывается следующим образом. Пусть $B \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область и пусть $\Omega \equiv \mathbb{R}^3 \setminus B$ — область, заполненная жидкостью. Так как $\partial\Omega = \partial B$ и мы предполагаем, что B — это одно, а не несколько тел, то граница $\partial\Omega$ области Ω является связной поверхностью класса C^∞. Предположение о связности накладывается исключительно из-за его естественности с физической точки зрения; обобщение результатов работы на случай несвязной границы $\partial\Omega$ совсем не сложно. Пусть $Q = (0,T) \times \Omega$ — пространственно-временной цилиндр, $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$ — его боковая поверхность. Рассматривается система уравнений Навье—Стокса

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} - \Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla p_1 = \mathbf{f} \quad \text{в } Q, \\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \quad \text{в } Q, \\ \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \quad \text{для } \mathbf{x}\in\Omega, \\ \mathbf{v}|_\Sigma = \mathbf{b} \quad \text{с} \quad \displaystyle\int_{\partial\Omega} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\,ds = 0 \quad \text{при } t\in(0,T), \\ \mathbf{v} \to \mathbf{v}_\infty \quad \text{при } |\mathbf{x}|\to\infty, \end{cases} \tag{6.1}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t,\mathbf{x}) = \big(v_1(t,\mathbf{x}), v_2(t,\mathbf{x}), v_3(t,\mathbf{x})\big)$ при $t \in [0,T]$ и $\mathbf{x} \in \Omega$ — поле скоростей жидкости, $\nabla p_1(t,\mathbf{x})$ — градиент давления, а $\mathbf{v}_\infty \in \mathbb{R}^3$ — заданная скорость жидкости на бесконечности. Отметим, что в классической задаче обтекания, рассмотренной в [24], предполагается, что правая часть $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Здесь мы рассматриваем случай отличной от нуля правой части, не зависящей от времени $(\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0})$, так как он включает ряд дополнительных примеров из приложений, отличных от классической задачи обтекания.

Векторное поле $\mathbf{b}$ определено на Σ и является оптимизирующим управлением. Мы хотим минимизировать работу по преодолению сопротивления с помощью соответствующего выбора $\mathbf{b}$. Работа по преодолению сопротивления, т.е. функционал сопротивления, определяется формулой

$$\mathcal{W} = \int_0^T\int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}-\mathbf{v}_\infty)\cdot\mathcal{T}\mathbf{n}\,ds\,dt,$$

где $\mathcal{T} = -p_1 I + 2\mathcal{D}$ — тензор напряжений, $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)/2$ — тензор скоростей деформаций, а $\mathbf{n}$ — векторное поле внешних единичных нормалей к границе $\partial\Omega$. Как и в двумерном случае (см. [17, 21]), можно вывести следующее эквивалентное выражение для $\mathcal{W}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{v}) = \int_0^T\int_\Omega \mathcal{D}(\mathbf{v}):\mathcal{D}(\mathbf{v})\,d\mathbf{x}\,dt + \frac12\int_0^T\int_{\partial\Omega} |\mathbf{v}-\mathbf{v}_\infty|^2\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds\,dt + \\ + \frac12\int_\Omega |\mathbf{v}(T,\mathbf{x})-\mathbf{v}_\infty|^2\,d\mathbf{x} - \frac12\int_\Omega |\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_\infty|^2\,d\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где $\mathcal{D}(\mathbf{v}):\mathcal{D}(\mathbf{v}) = \sum\limits_{i,j=1}^3 (\mathcal{D}(\mathbf{v}))_{i,j}(\mathcal{D}(\mathbf{v}))_{i,j}$. Именно функционал (6.2), точнее, его модификация[1] (см. ниже, формулу (6.7)) будет минимизироваться с помощью соответствующего выбора граничного управления $\mathbf{b}$ на Σ.

[1]Эта модификация необходима из-за предположений, наложенных в следующем подразделе на начальное условие $\mathbf{v}_0$

6.2. Начальное условие. Правильный выбор начального условия $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ важен потому, что он тесно связан с физическим контекстом рассматриваемой задачи оптимального управления и влияет на возможность математического доказательства существования оптимальных решений. Как упоминалось во введении, мы предполагаем, что $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ является решением стационарной задачи для системы Навье—Стокса:

$$\begin{cases} -\Delta\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0\cdot\nabla)\mathbf{v}_0 + \nabla p_0 = \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{v}_0 = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ \mathbf{v}_0\big|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}_{0b}, \\ \mathbf{v}_0 \to \mathbf{v}_\infty \quad \text{при } |\mathbf{x}|\to\infty. \end{cases} \tag{6.3}$$

В отличие от [24], где на $\mathbf{v}_0$ наложено граничное условие прилипания, а правая часть в (6.3) равна 0, здесь предполагается, что $\mathbf{v}_0$ удовлетворяет неоднородному краевому условию и ненулевой правой части. Сделано это, чтобы расширить число примеров из приложений, которые описываются задачей (6.3). Например, в случае, когда правая часть в (6.3) равна нулю, при некоторых отличных от нуля краевых условиях $\mathbf{v}_{0b}$ поле $\mathbf{v}_0$ описывает стационарное самодвижущееся перемещение тела B (после перехода к координатам, связанным с жидкостью, см. [26]). Для разрешимости задачи (6.3) необходимо предполагать, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{v}_{0b}\cdot\mathbf{n}\,ds = \mathbf{0}. \tag{6.4}$$

Через $W_q^s(\partial\Omega)$ обозначается пространство Соболева функций, определенных на многообразии $\partial\Omega$, суммируемых в степени q и гладкости s, где $q\in[1,\infty], s\in\mathbb{R}^1$. Определение этих пространств можно найти в [5, 15].

Справедливо следующее утверждение о существовании решения задачи (6.3).

Теорема 6.1. *Пусть* $\mathbf{v}_{0b}\in\mathbf{W}_{q_0}^{2-1/q_0}(\partial\Omega)$ *и удовлетворяет* (6.4)*,* $\mathbf{v}_\infty\in\mathbb{R}^3$*, а кроме того* $\mathbf{f}\in\mathbf{L}^q(\Omega)$*,* $\mathbf{v}_{0b}\in\mathbf{W}_{q_0}^{2-1/q_0}(\partial\Omega)$ *при некотором* $q_0>3$ *и любом* $q\in(1,q_0]$*. Тогда существует обобщенное решение* $\mathbf{v}_0$ *задачи* (6.3)*, удовлетворяющее условиям*

$$\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_\infty\in\mathbf{L}^r(\Omega), \qquad \nabla\mathbf{v}_0\in\mathbf{L}^s(\Omega) \tag{6.5}$$

для любых $r\in(2,\infty], s\in(4/3,\infty]$*. При этом по* $\mathbf{v}_0$ *строится соответствующее ему давление* p_0*, причем* $p_0\in L^\sigma(\Omega)$ *для любого* $\sigma\in(3/2,\infty]$*.*

Доказательство этого результата можно найти в [25]. Таким образом, везде ниже мы предполагаем, что начальное векторное поле $\mathbf{v}_0$ в (6.1) является решением задачи (6.3), удовлетворяющим всем утверждениям теоремы 6.1.

6.3. Замена переменных. Будем предполагать, что правая часть $\mathbf{f}$ и граничное условие $\mathbf{v}_{0b}$ удовлетворяют условиям теоремы 6.1, а $\mathbf{v}_0$ – некоторое фиксированное решение задачи (6.3), построенное в теореме 6.1. Предположим, что именно эта правая часть $\mathbf{f}$ и начальное условие $\mathbf{v}_0$ взяты в задаче (6.1). Введем замену переменных

$$\mathbf{w}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{v}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \qquad \text{и} \qquad p(t,\mathbf{x}) = p_1(t,\mathbf{x}) - p_0(\mathbf{x}). \tag{6.6}$$

Неизвестное векторное поле $\mathbf{w}$ удобнее поля $\mathbf{v}$, так как имеет нулевое начальное условие и обращается в нуль на бесконечности. После подстановки (6.6) в (6.2) видно, что два последних интеграла в (6.2) содержат члены $\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_\infty$, не принадлежащие $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Но эти члены взаимно уничтожаются. Поэтому задачу минимизации функционала (6.2) при условиях (6.1) и (1.3) можно переписать как следующую задачу оптимизации $\mathbf{w}$: минимизировать функционал

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{w}) = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \mathcal{D}(\mathbf{w}+\mathbf{v}_0):\mathcal{D}(\mathbf{w}+\mathbf{v}_0)\,d\mathbf{x}\,dt + \frac12\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} |\mathbf{w}-\mathbf{v}_\infty|^2\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}\,ds\,dt + \\ + \frac12\int\limits_\Omega (|\mathbf{w}(T,\mathbf{x})|^2 + 2[(\mathbf{w}(T,x)\cdot(\mathbf{v}_0(\mathbf{x})-\mathbf{v}_\infty)])\,d\mathbf{x} \end{aligned} \tag{6.7}$$

при следующих ограничениях:

$$\partial_t \mathbf{w} - \Delta \mathbf{w} + [(\mathbf{w}+\mathbf{v}_0)\cdot\nabla]\mathbf{w} + (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{v}_0 + \nabla p = \mathbf{0} \quad \text{в } Q, \tag{6.8}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{w} = 0 \quad \text{в } Q, \tag{6.9}$$

$$\mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{0} \quad \text{в } \Omega, \tag{6.10}$$

$$\mathbf{w} \to \mathbf{0} \quad \text{при } |\mathbf{x}| \to \infty, \tag{6.11}$$

$$R(\mathbf{w}) = \int\limits_{\Sigma} \Big(|\partial_t \mathbf{w}|^2 + |\nabla_\tau \mathbf{w}|^2 + |\mathbf{w}|^2\Big)\, ds\, dt \leqslant M. \tag{6.12}$$

Напомним, что градиент на поверхности определяется формулой $\nabla_\tau \mathbf{w}\big|_\Sigma = (\nabla\mathbf{w})\big|_\Sigma - (\partial_n \mathbf{w})\big|_\Sigma$, где $\nabla\mathbf{w}$ — это обычный градиент поля $\mathbf{w}$ в $\mathbb{R}^3$, а $(\partial_n\mathbf{w})$ — производная $\mathbf{w}$ относительно внешней единичной нормали $\mathbf{n}$ к $\partial\Omega$.

Кроме того будем предполагать, что $\mathbf{w}$ удовлетворяет условию согласования

$$\big(\mathbf{w}(t,\mathbf{x})|_\Sigma\big)|_{t=0} = \mathbf{0} \quad \text{в } \partial\Omega. \tag{6.13}$$

В системе (6.8)–(6.12) мы опустили краевое условие для $\mathbf{w}$ на Σ, а также убрали неизвестное граничное управление Дирихле $\mathbf{b}$ из (6.1), выразив его посредством $\mathbf{w}|_\Sigma$.

В силу (6.6), при $\mathbf{v}_0|_{\partial\Omega} = 0$ функционал $R(\mathbf{w})$ и параметр M в (6.12) совпадают с R и M в (1.3) и (1.4), где и подразумевался случай классической задачи обтекания, т.е. $\mathbf{v}_{0b} = 0$. В общем случае, когда в (6.3) $\mathbf{v}_{0b} \neq 0$, необходимо $\mathbf{b}$ в (1.3) и (1.4) заменить на $\mathbf{b} - \mathbf{v}_{0b}$.

6.4. Точная постановка задач управления. Дадим точную постановку изучаемой задачи оптимального управления. Напомним, что пространство $\mathbf{W}(Q)$ определено в (5.5), пространство $\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+2})$ определено в (3.24) и в предшествующих двух строках, а через $L^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+2})) + \mathbf{L}^2(Q)$ обозначается прямая сумма соответствующих пространств.

Задача I. *Пусть* $\mathbf{v}_\infty \in \mathbb{R}^3$, *задано* $M > 0$, *и начальное условие* $\mathbf{v}_0$ *построено в теореме* 6.1. *Найти пару* $(\mathbf{w}, \nabla p) \in \mathbf{W}(Q) \times [L^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+2})) + \mathbf{L}^2(Q)]$, *минимизирующую функционал* (6.7) *при ограничениях* (6.8)–(6.13).

Как и в [21] можно убрать ограничение (6.12), добавив соответствующий штрафной член в функционал, и рассмотреть следующий вариант рассматриваемой задачи оптимального управления со штрафом.

Задача II. *Пусть* $\mathbf{v}_\infty \in \mathbb{R}^3$, *задано* $N > 0$, *и* $\mathbf{v}_0$ *построено в теореме* 6.1. *Найти пару* $(\mathbf{w}, \nabla p) \in \mathbf{W}(Q) \times [L^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega_{N+2})) + \mathbf{L}^2(Q)]$, *минимизирующую функционал*

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_N(\mathbf{w}) = \int\limits_0^T\!\!\int\limits_\Omega \mathcal{D}(\mathbf{w}+\mathbf{v}_0) : \mathcal{D}(\mathbf{w}+\mathbf{v}_0)\, d\mathbf{x}\, dt + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (|\mathbf{w}(T,\mathbf{x})|^2 + 2[(\mathbf{w}(T,x)\cdot(\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_\infty)])\, d\mathbf{x} + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^T\!\!\int\limits_{\partial\Omega} |\mathbf{w} - \mathbf{v}_\infty|^2 \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}\, ds\, dt + \frac{N}{2}\int\limits_\Sigma \Big(|\partial_t\mathbf{w}|^2 + |\nabla_\tau\mathbf{w}|^2 + |\mathbf{w}|^2\Big)\, ds\, dt\end{aligned} \tag{6.14}$$

при ограничениях (6.8)–(6.11) *и* (6.13).

Определение 6.1. Векторное поле $\mathbf{w} \in \mathbf{W}(Q)$ называется *допустимым*, если оно удовлетворяет (6.8)–(6.13) в случае задачи I и удовлетворяет (6.8)–(6.11) и (6.13) в случае задачи II. Множество допустимых элементов (векторных полей) обозначается символом $\mathcal{U}_{ad}$.

Определение 6.2. Элемент $\widehat{\mathbf{w}} \in \mathcal{U}_{ad}$ называется *решением* задачи I, если

$$\mathcal{J}(\widehat{\mathbf{w}}) = \inf_{\mathbf{w}\in\mathcal{U}_{ad}} \mathcal{J}(\mathbf{w}),$$

где $\mathcal{J}$ определено в (6.7). Элемент $\widehat{\mathbf{w}} \in \mathcal{U}_{ad}$ называется решением задачи II, если

$$\mathcal{J}_N(\widehat{\mathbf{w}}) = \inf_{\mathbf{w}\in\mathcal{U}_{ad}} \mathcal{J}_N(\mathbf{w}),$$

где $\mathcal{J}_N$ определено в (6.14).

6.5. Корректность функционалов стоимости (6.7) **и** (6.14)**.** Для исчерпывающей ясности в приведенных выше постановках необходимо отметить, что функционалы (6.7), (6.14) корректно определены на допустимых функциях $\mathbf{w} \in \mathbf{W}(Q)$. Это утверждение очевидно для всех членов, кроме последнего в функционале (6.7) и аналогичного члена в функционале (6.14). Для доказательства сходимости интегралов, образующих эти члены, в силу (6.5) достаточно показать, что $\mathbf{w}(T,\cdot) \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ при некотором $q \in [1,2)$.

Лемма 6.1. *Пусть* $\mathbf{w} \in \mathbf{W}(Q)$ *удовлетворяет* (6.8)–(6.11). *Тогда* $\mathbf{w}(T,x) \in \mathbf{L}^{3/2}(\Omega)$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать включение $\mathbf{w}(T,x) \in \mathbf{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{\rho+2})$. Используя технику работы [23], продолжим решение $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ задачи (6.8)-(6.11) из $[0,T] \times (\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{\rho+2})$ до векторного поля $\widetilde{\mathbf{w}}$ на $[0,T] \times \mathbb{R}^3$, удовлетворяющего условиям $\widetilde{\mathbf{w}} \in L^2(0,T;\mathbf{V}^2(\mathbb{R}^3)) \cap H^1(0,T;\mathbf{V}^0(\mathbb{R}^3))$ и $\widetilde{\mathbf{w}}|_{t=0} = 0$. Продолжим также градиент ∇p из (6.8)–(6.11) с $[0,T] \times (\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{\rho+2})$ до $\nabla\widetilde{p} \in L^2((0,T) \times \mathbb{R}^3)$ и продолжим $\mathbf{v}_0(x)$ до бездивергентного векторного поля, для которого $\nabla v_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Подставляя $(\widetilde{\mathbf{w}}, \nabla\widetilde{p})$ в левую часть (6.8), получим

$$\partial_t \widetilde{\mathbf{w}} - \Delta\widetilde{\mathbf{w}} = -[(\widetilde{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0)\cdot\nabla]\widetilde{\mathbf{w}} - (\widetilde{\mathbf{w}}\cdot\nabla)\mathbf{v}_0 + \nabla\widetilde{p} + \mathbf{g}(t,\mathbf{x}) \quad \text{в } (0,T)\times\mathbb{R}^3 \tag{6.15}$$

$$\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{w}} = 0 \quad \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^3, \qquad \widetilde{\mathbf{w}}|_{t=0} = \mathbf{0} \quad \text{в } \mathbb{R}^3, \tag{6.16}$$

где $\mathbf{g}(t,\mathbf{x}) \in L^2((0,T)\times\mathbb{R}^3)$ и $\operatorname{supp}\mathbf{g} \subset Q_{\rho+2}$.

С помощью неравенства Гельдера и теоремы вложения Соболева устанавливается оценка

$$\|[(\widetilde{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0)\cdot\nabla]\widetilde{\mathbf{w}} - (\widetilde{\mathbf{w}}\cdot\nabla)\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{L}^{3/2}((0,T)\times\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\widetilde{\mathbf{w}}\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}^2(\mathbb{R}^3))\cap H^1 0,T;\mathbf{V}^0(\mathbb{R}^3))}. \tag{6.17}$$

Следовательно, правая часть равенства (6.15) принадлежит $\mathbf{L}^{3/2}((0,T)\times\mathbb{R}^3)$, откуда следует (см. [10, Гл. 4, пункт 6]), что $\widetilde{\mathbf{w}}$, $\partial_t\widetilde{\mathbf{w}}$, $\partial_{x_j}\widetilde{\mathbf{w}}$, $\partial_{x_j x_k}\widetilde{\mathbf{w}}$ $(j,k = 1,2,3)$ принадлежат $\mathbf{L}^{3/2}((0,T)\times\mathbb{R}^3)$ и значит $\widetilde{\mathbf{w}}(T,\cdot) \in \mathbf{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3)$. □

7. Существование решений задач оптимального управления

7.1. Разрешимость задачи I. Рассмотрим вопрос о разрешимости задачи I, сформулированной в разделе 6.4. Начнем с доказательства следующего простого утверждения. Напомним, что

$$\Omega_{\rho+k} = (\Omega \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^: |\mathbf{x}| \leqslant \rho + k\}), \qquad Q_{\rho+k} = (0,T)\times\Omega_{\rho+k},$$

а число ρ определено в (2.34).

Лемма 7.1. *Для каждого* $k \in (0,\infty)$ *вложение* $\mathbf{W}(Q_{\rho+k}) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(Q_{\rho+k})$ *компактно.*

Доказательство. Из определений (5.5) пространства $\mathbf{W}(Q_{\rho+k})$ и (2.27) пространства $\mathbf{V}^{1,s}(Q_{\rho+k})$ (с Q, замененным на $Q_{\rho+k}$ и Ω, замененным на $\Omega_{\rho+k}$ во всех этих соотношениях), легко следует непрерывность вложения $\mathbf{W}(Q_{\rho+k}) \hookrightarrow \mathbf{V}^{1,1/2}(Q_{\rho+k})$. Как хорошо известно (см., например, [6, Гл. 4, раздел 3]), вложение $\mathbf{V}^{1,1/2}(Q_{\rho+k}) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(Q_{\rho+k})$ компактно. Из этих фактов вытекает утверждение леммы. □

Теорема 7.1. *Предположим, что константа* M *в* (6.12) *достаточно мала. Тогда существует решение* $(\widehat{\mathbf{w}}, \nabla\widehat{p}) \in \mathbf{W}(Q) \times (\mathbf{L}^2(Q) + L^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega))$ *задачи* I.

Доказательство. Напомним, что множество $\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$ допустимых пар $(\mathbf{w},p) \in \mathbf{W}(Q)\times\mathbf{L}^2(Q)$ задачи I описано в определении 6.1. Очевидно, $\mathcal{U}_{\mathrm{ad}} \neq \emptyset$, так как $(\mathbf{w},p) = (\mathbf{0},0) \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$.

Пусть $\{(\mathbf{w}_n, \nabla p_n)\} \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$ — минимизирующая последовательность для функционала $\mathcal{J}(\mathbf{w})$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\mathbf{w}_n) = J_{\min} \equiv \inf_{(\mathbf{w},\nabla p)\in\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}} \mathcal{J}(\mathbf{w}).$$

В силу (6.12) будем иметь $\|\mathbf{w}_n|_\Sigma\|^2_{\mathbf{H}^1(\Sigma)} \leqslant M$. Пусть $\mathbf{b}_n \equiv \mathbf{w}_n|_\Sigma$; отметим, что $\mathbf{b}_n \in \widehat{\mathbf{H}}^1(\Sigma)$. Рассмотрим краевую задачу (5.35)–(5.37) с $\mathbf{f} = 0$, $\mathbf{w}_0 = 0$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_n$ и $\mathbf{z}$, удовлетворяющим условию (5.8). Пусть $\epsilon > 0$ — достаточно малое число, определенное в теореме 5.3, и предположим, что $M < \epsilon$. Тогда из теоремы 5.3 следует, что

$$\|\mathbf{w}_n\|^2_{\mathbf{W}(Q)} + \|\nabla p_n\|_{L^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+2}))+\mathbf{L}^2(Q)} \leqslant C(M), \tag{7.1}$$

где $C(M)$ — положительная константа, зависящая от M. В силу оценки (7.1) можно выбрать подпоследовательность последовательности $\{\mathbf{w}_n\}$ (обозначаемую как и вся последовательность), такую, что

$$\mathbf{w}_n \rightharpoonup \widehat{\mathbf{w}} \quad \text{слабо в } \mathbf{W}(Q).$$

Тогда из определения пространства $\mathbf{W}(Q)$ (см. (5.5)) следует, что

$$\mathbf{w}_n|_\Sigma = \mathbf{b}_n \rightharpoonup \widehat{\mathbf{b}} \equiv \widehat{\mathbf{w}}|_\Sigma \quad \text{слабо в } \widehat{\mathbf{H}}^1(\Sigma). \tag{7.2}$$

Так как $\mathbf{b}_n$ удовлетворяет (6.12), а множество $\{\mathbf{w} \in \widehat{\mathbf{H}}^1(\Sigma) : \mathbf{w}$ удовлетворяет (6.12)$\}$ выпукло и замкнуто (а значит, и секвенциально слабо замкнуто), то $\widehat{\mathbf{b}} \in \widehat{\mathbf{H}}^1(\Sigma)$ и для $\mathbf{b}$ справедливо (6.12). Очевидно, поле $\widehat{\mathbf{w}}$ удовлетворяет соотношениям (6.9)–(6.11). Чтобы доказать, что $\widehat{\mathbf{w}}$ удовлетворяет (6.8) с некоторым $\nabla\widehat{p} \in L^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+2})) + \mathbf{L}^2(Q)$, отметим, что

$$\int\limits_Q (\partial_t \mathbf{w}_n - \Delta \mathbf{w}_n)\cdot \boldsymbol{\phi}\, d\mathbf{x}\, dt \to \int\limits_Q (\partial_t \widehat{\mathbf{w}} - \Delta \widehat{\mathbf{w}})\cdot \boldsymbol{\phi}\, d\mathbf{x}\, dt \qquad \forall\, \boldsymbol{\phi} \in L^2(0,T;\mathbf{V}_0^1(\Omega)), \tag{7.3}$$

где $\mathbf{V}_0^1(\Omega)$ определено в (4.2). Используя лемму 7.1 с $k = 1,2,3,\dots$, выберем подпоследовательность $\{\mathbf{w}_{n,k}\}$, сходящуюся к $\widehat{\mathbf{w}}$ в $\mathbf{L}^2(Q_{\rho+k})$. Тогда, переходя к диагональной подпоследовательности $\{\mathbf{w}_j\}$, получим, что

$$\mathbf{w}_j \to \widehat{\mathbf{w}} \qquad \text{сильно в } \mathbf{L}^2(Q_{\rho+k}) \text{ для каждого } k = 1,2,3,\dots \tag{7.4}$$

Умножим скалярно в $\mathbf{L}^2(Q)$ уравнение (6.8) для $(\mathbf{w}_j, \nabla p_j)$ на произвольное поле $\boldsymbol{\phi} \in L^2(0,T;\mathbf{V}_0^1(\Omega))$. Очевидно, член, включающий ∇p_j, обратится в нуль. Интегрируя по частям и переходя к пределу с помощью (7.3) и (7.4), получим следующее уравнение для $\widehat{\mathbf{w}}$:

$$\begin{gathered}\int\limits_Q \Big(\boldsymbol{\phi}\cdot\partial_t\widehat{\mathbf{w}} + (\nabla\widehat{\mathbf{w}}) : (\nabla\boldsymbol{\phi}) + (\widehat{\mathbf{w}}\cdot\nabla)\mathbf{v}_0\cdot\boldsymbol{\phi} - [(\widehat{\mathbf{w}}+\mathbf{v}_0)\cdot\nabla]\boldsymbol{\phi}\cdot\widehat{\mathbf{w}}\Big)\, d\mathbf{x}\, dt = 0 \\ \forall\, \boldsymbol{\phi} \in L^2(0,T;\mathbf{V}_0^1(\Omega)).\end{gathered} \tag{7.5}$$

Так как $\widehat{\mathbf{w}} \in \mathbf{W}(Q)$, то в силу определения (5.5)

$$\widehat{\mathbf{w}} = \mathcal{E}\widehat{\mathbf{b}} + \mathbf{w}, \tag{7.6}$$

где $\mathcal{E}$ — оператор продолжения из теоремы 3.5, $\mathcal{E}\widehat{\mathbf{b}} \in \mathbf{V}_\rho^{1,1/2}(Q)$, а $\mathbf{w} \in \mathcal{V}_0^{(2)}(Q)$, где

$$\mathcal{V}_0^{(2)}(Q) = \{\mathbf{v} \in L^2(0,T;\mathbf{V}^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;\mathbf{V}^0(\Omega)) : \mathbf{v}\big|_\Sigma = \mathbf{0}, \mathbf{v}\big|_{t=0} = \mathbf{0}\}. \tag{7.7}$$

Подставляя (7.6) в (7.5), получим, что

$$\begin{gathered}\int\limits_Q \Big(\partial_t\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w} + (\mathbf{w}\cdot\nabla)(\mathbf{v}_0 + \mathcal{E}\widehat{\mathbf{b}}) + [(\mathcal{E}\widehat{\mathbf{b}} + \mathbf{v}_0 + \mathbf{w})\cdot\nabla]\mathbf{w} - \mathbf{f}_1 + \nabla p_1\Big)\cdot\boldsymbol{\phi}\, d\mathbf{x}\, dt = \\ = \int\limits_Q \Big(\partial_t\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w} + (\mathbf{w}\cdot\nabla)(\mathbf{v}_0 + \mathcal{E}\widehat{\mathbf{b}}) + [(\mathcal{E}\widehat{\mathbf{b}} + \mathbf{v}_0 + \mathbf{w})\cdot\nabla]\mathbf{w} - \mathbf{f}_1\Big)\cdot\boldsymbol{\phi}\, d\mathbf{x}\, dt = 0 \\ \forall\, \boldsymbol{\phi} \in L^2(0,T;\mathbf{V}_0^1(\Omega)),\end{gathered} \tag{7.8}$$

где $-\mathbf{f}_1 = \partial_t\mathcal{E}\widehat{\mathbf{b}} + \mathbf{g} + (\mathcal{E}\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla)\mathbf{v}_0 + [(\mathcal{E}\widehat{\mathbf{b}} + \mathbf{v}_0)\cdot\nabla]\mathcal{E}\widehat{\mathbf{b}} - \Delta\mathcal{E}\widehat{\mathbf{b}} = \mathbf{g} + \nabla p_1$ с $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(Q)$ и $\nabla p_1 \in L^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+2}))$. Из включений $\mathbf{w} \in \mathcal{V}_0^{(2)}(Q)$ и $\mathcal{E}\widehat{\mathbf{b}} \in \mathbf{V}_\rho^{1,1/2}(Q) \subset \mathbf{V}^{1,1/2}(Q)$ и в силу теорем вложения Соболева получим, что $\mathbf{f}_1 \in \mathbf{L}^2(Q)$ и

$$\partial_t\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w} + (\mathbf{w}\cdot\nabla)(\mathbf{v}_0 + \mathcal{E}\widehat{\mathbf{b}}) + [(\mathcal{E}\widehat{\mathbf{b}} + \mathbf{v}_0 + \mathbf{w})\cdot\nabla]\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(Q).$$

Учитывая разложение Вейля

$$\mathbf{L}^2(Q) = \mathbf{V}_0^0(\Omega) \oplus \nabla H^1(\Omega),$$

где

$$\mathbf{V}_0^0(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}^0(\Omega) : \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\big|_{\partial\Omega} = 0\} \quad \text{и} \quad \nabla H^1(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \ \mathbf{v} = \nabla p,\ p \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\},$$

(для $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega)$ выражение $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\big|_{\partial\Omega}$ корректно определено, см. [14]), мы получим из (7.8), что существует такое $\nabla p \in L^2(0,T;\nabla H^1(\Omega))$, что

$$\partial_t \mathbf{w} - \Delta\mathbf{w} + (\mathbf{w}\cdot\nabla)(\mathbf{v}_0 + \mathcal{E}\widehat{\mathbf{b}}) + [(\mathcal{E}\widehat{\mathbf{b}} + \mathbf{v}_0 + \mathbf{w})\cdot\nabla]\mathbf{w} + \nabla p - \mathbf{f}_1 = \mathbf{0} \quad \text{в } Q, \tag{7.9}$$

где (7.9) понимается как равенство в $\mathbf{L}^2(Q)$. Подставляя (7.6) в (7.9), получим равенство

$$\partial_t \widehat{\mathbf{w}} - \Delta\widehat{\mathbf{w}} + (\widehat{\mathbf{w}}\cdot\nabla)\mathbf{v}_0 + [(\widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0)\cdot\nabla]\widehat{\mathbf{w}} + \nabla\widehat{p} = 0 \text{ в } Q,$$

где $\nabla\widehat{p} = \nabla p_1 + \nabla p \in L^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+2})) + L^2(0,T;\nabla H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))$. Таким образом, доказано,что $(\widehat{\mathbf{w}}, \nabla\widehat{p})$ удовлетворяет (6.8).

Так как $\mathbf{w}_n \rightharpoonup \widehat{\mathbf{w}}$ в $\mathbf{W}(Q)$ и функционал

$$\mathcal{J}_1(\mathbf{w}) = \int_0^T\!\!\int_\Omega \mathcal{D}(\mathbf{w} + \mathbf{v}_0) : \mathcal{D}(\mathbf{w} + \mathbf{v}_0)\, d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega (|\mathbf{w}(T,\mathbf{x})|^2 + 2[(\mathbf{w}(T,x)\cdot(\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_\infty)])\, d\mathbf{x}$$

является выпуклым (и поэтому он полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости), мы получаем, что

$$\mathcal{J}_1(\widehat{\mathbf{w}}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathcal{J}_1(\mathbf{w}_n). \tag{7.10}$$

Компактность Σ и соотношение $\dim\Sigma = 3$ позволяют с помощью теорем вложения установить компактность вложения $\widehat{\mathbf{H}}^1(\Sigma) \hookrightarrow \mathbf{L}^3(\Sigma)$. Поэтому из (7.2) следует сильная сходимость $\mathbf{w}|_\Sigma = \mathbf{b}_n \to \widehat{\mathbf{b}} = \widehat{\mathbf{w}}|_\Sigma$ в $\mathbf{L}^3(\Sigma)$. Следовательно, для функционала

$$\mathcal{J}_2(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\int_0^T\!\!\int_{\partial\Omega} |\mathbf{w} - \mathbf{v}_\infty|^2 \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}\, ds\, dt$$

справедливо неравенство

$$\mathcal{J}_2(\widehat{\mathbf{w}}) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_2(\mathbf{w}_n). \tag{7.11}$$

Из соотношений (7.10) и (7.11) и равенства $\mathcal{J}(\mathbf{w}) = \mathcal{J}_1(\mathbf{w}) + \mathcal{J}_2(\mathbf{w})$ вытекает, что

$$\mathcal{J}(\widehat{\mathbf{w}}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathcal{J}(\mathbf{w}_n) = J_{\mathrm{inf}}.$$

Таким образом, пара $(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{p})$ является решением задачи I. □

7.2. Разрешимость задачи II. Докажем теперь, что при достаточно больших N существует решение задачи II, где N — параметр, появившийся при определении $\mathcal{J}_N(\mathbf{w})$; см. (6.14).

Теорема 7.2. *Предположим, что параметр N функционала $\mathcal{J}_N(\mathbf{w})$ удовлетворяет неравенству $N \geqslant N_0$, где $N_0 > 0$ — достаточно большая фиксированная константа. Тогда существует решение $(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{p}) \in \mathbf{W}(Q) \times [\mathbf{L}^2(Q) + L^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+2}))]$ задачи II.*

Доказательство. Через $\mathcal{U}^N_{\mathrm{ad}}$ обозначим множество допустимых пар для задачи II (см. определение 6.1).

Пусть число $\epsilon > 0$ настолько мало, что для любого граничного условия $\mathbf{b} \in \widehat{\mathbf{H}}^1(\Sigma)$, удовлетворяющего (5.39), справедливо утверждение теоремы 5.3. Возьмем константу M в (6.12), удовлетворяющую включению

$$M \in (0, \epsilon). \tag{7.12}$$

Пусть $(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{p})$ — решение задачи I (существование такой пары гарантируется теоремой 7.1). Определим $N_0 > 0$ с помощью соотношения

$$\frac{2}{N_0}\mathcal{J}_{N_0}(\widehat{\mathbf{w}}) \equiv \frac{2}{N_0}\mathcal{J}(\widehat{\mathbf{w}}) + R(\widehat{\mathbf{w}}) = \epsilon, \tag{7.13}$$

где функционалы $\mathcal{J}_N$, $\mathcal{J}$ и R определены, соответственно, в (6.14), (6.7) и(6.12). Число N_0, удовлетворяющее (7.13), корректно определено благодаря (7.12) и оценке $R(\widehat{\mathbf{w}}) \leqslant M$ для каждого решения $\widehat{\mathbf{w}}$ задачи I. Таким образом, для каждого $N > N_0$ справедливо неравенство

$$\frac{2}{N}\mathcal{J}_N(\widehat{\mathbf{w}}) \leqslant \frac{2}{N_0}\mathcal{J}_{N_0}(\widehat{\mathbf{w}}) = \epsilon. \tag{7.14}$$

Положим
$$\mathcal{U}_{\rm ad}^{N,\epsilon}=\Big\{(\mathbf{w},\nabla p)\in\mathcal{U}_{\rm ad}^{N}:\ \frac{1}{N}\mathcal{J}_N(\widehat{\mathbf{w}})\leqslant\epsilon\Big\}.$$
В силу (7.14) множество $\mathcal{U}_{\rm ad}^{N,\epsilon}$ не пусто. Выберем теперь минимизирующую последовательность $\{(\mathbf{w}_n,\nabla p_n)\}\subset\mathcal{U}_{\rm ad}^{N,\epsilon}$ для задачи II:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{N}\mathcal{J}_N(\mathbf{w}_n)=J_{N,\inf}\equiv\inf_{(\mathbf{w},\nabla p)\in\mathcal{U}_{\rm ad}^{N,\epsilon}}\frac{2}{N}\mathcal{J}_N(\mathbf{w}).$$
Так как $\mathbf{w}_n\in\mathcal{U}_{\rm ad}^{N,\epsilon}$, то из (7.14) и (6.14) следует, что для каждого $N>N_0$
$$R(\mathbf{w}_n|_\Sigma)\leqslant\epsilon. \tag{7.15}$$
Обозначив $\mathbf{b}_n\equiv\mathbf{w}_n|_\Sigma$ и используя (7.15) и (6.12) (определение функционала R), мы видим, что $\|\mathbf{b}_n\|_{\mathbf{H}^1(\Sigma)}<\epsilon$, т.е. граничное условие $\mathbf{b}_n$ удовлетворяет предположениям теоремы 5.3. Таким образом, пара $(\mathbf{w}_n,\nabla p_n)$, будучи решением задачи (5.35)–(5.37) с $\mathbf{f}=0$, $\mathbf{w}_0=0$, $\mathbf{b}=\mathbf{b}_n$ и $\mathbf{z}$, определенным в (5.8), удовлетворяет оценке (7.1). Тогда, повторяя соответствующую часть доказательства теоремы 7.1, мы докажем существование решения $(\widehat{\widehat{\mathbf{w}}},\widehat{\widehat{p}})$ задачи II. □

8. Слабая форма системы оптимальности

8.1. Абстрактный принцип Лагранжа. Рассмотрим абстрактную экстремальную задачу. Пусть X_1 и X_2 – банаховы пространства, $f:X_1\to\mathbb{R}$ и $g:X_1\to\mathbb{R}$ — функционалы, а $F:X_1\to X_2$ — отображение. Ищется такое $z\in X_1$, что
$$f(z)=\inf_{u\in\mathcal{U}_{ad}}f(u), \tag{8.1}$$
где
$$\mathcal{U}_{ad}=\big\{u\in X_1: F(u)=0 \text{ и } g(u)\leqslant 0\big\}.$$
Функционал Лагранжа экстремальной задачи (8.1) определяется формулой
$$\mathcal{L}(z,\lambda_0,\lambda,q)=\lambda_0 f(z)+\langle F(z),q\rangle+\lambda g(z) \tag{8.2}$$
при всех $z\in X_1,\lambda_0\in\mathbb{R},\lambda\in\mathbb{R}$ и $q\in X_2^*$, где X_2^* — пространство, сопряженное к X_2, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает соотношение двойственности между X_2 и X_2^*. Сформулируем стандартный абстрактный принцип Лагранжа в следующей форме (см. [4]).

Теорема 8.1. *Пусть z — решение задачи* (8.1). *Предположим, что отображения f, g и F непрерывно дифференцируемы и что образ оператора $F'(z):X_1\to X_2$ замкнут. Тогда существуют такие $q\in X_2^*$, $\lambda_0\in\mathbb{R}$ и $\lambda\in\mathbb{R}$, что тройка $(q,\lambda_0,\lambda)\neq(0,0,0)$ (т.е. элементы тройки не обращаются одновременно в нуль), и*
$$\langle\mathcal{L}_z(z,\lambda_0,\lambda,q),h\rangle=0\qquad\forall\,h\in X_1, \tag{8.3}$$
$$\lambda_0\geqslant 0,\quad \lambda\geqslant 0,\quad \text{и}\quad \lambda g(z)=0 \tag{8.4}$$
где $\mathcal{L}_z(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ обозначает производную по Фреше функционала $\mathcal{L}$ по первому аргументу. Более того, если $F'(z):X_1\to X_2$ является эпиморфизмом и в задаче (8.1) *отсутствует ограничение $g(z)\leqslant 0$, то $\lambda_0\neq 0$ и число λ_0 может быть взято равным* 1.

8.2. Пространства Орлича. В дальнейшем нам потребуются функциональные пространства, в которых естественно искать сопряженное векторное поле для системы оптимальности. С этой целью вычислим пространство, сопряженное к пространству $L^2(Q)\cap L^{3/2}(Q)$. Естественно рассматривать $L^2(Q)\cap L^{3/2}(Q)$ как пространство Орлича с N-функцией
$$A(t)=\max(t^2,t^{3/2}),\qquad t\geqslant 0.$$
(По поводу N-функций как и других понятий и утверждений, связанных с пространствами Орлича, см. [9], [2, Гл. 8].) Другими словами, пространство Орлича $L^2(Q)\cap L^{3/2}(Q)$ определяется соотношением:
$$L^2(Q)\cap L^{3/2}(Q)=L_A(Q)\equiv\Big\{f(t,\mathbf{x}),\ (t,\mathbf{x})\in Q:\int_Q A(|f(t,\mathbf{x})|)\,d\mathbf{x}\,dt<\infty\Big\}. \tag{8.5}$$

Вообще норма пространства Орлича $L_A(Q)$ определяется по его N-функции $A(t)$ с помощью формулы

$$\|f\|_{L_A(Q)} = \inf\Big\{k > 0 : \int\limits_Q A\Big(\frac{|f(t,\mathbf{x})|}{k}\Big)\,d\mathbf{x}\,dt \leqslant 1\Big\}. \tag{8.6}$$

Определим преобразование Лежандра

$$A^*(s) = \max_{t\geqslant 0}(st - A(t))$$

функции $A(t) = \max(t^2, t^{3/2})$. Тогда $A^*(s)$ является N-функцией пространства Орлича

$$L_{A^*}(Q) = \{f(t,\mathbf{x}),\ (t,\mathbf{x}) \in Q : \int\limits_Q A^*(|f(t,\mathbf{x})|)\,d\mathbf{x}\,dt < \infty\} \tag{8.7}$$

сопряженного пространству (8.5) (см. [2, Гл. 8]). С помощью простых вычислений получим, что

$$A^*(s) = \begin{cases} 4s^3/3^3, & s \in [0, 3/2], \\ s - 1, & s \in [3/2, 2], \\ s^2/4, & s \geqslant 2. \end{cases} \tag{8.8}$$

Норма $\|\cdot\|_{L_{A^*}(Q)}$ пространства $L_{A^*}(Q)$ определяется аналогично (8.6) посредством N-функции $A^*(t)$.

Рассмотрим теперь пространства $\mathbf{L}_A(Q)$ и $\mathbf{L}_{A^*}(Q)$ векторнозначных функций, которые определяются с помощью (8.5) и (8.7) соответственно, где f — это вектор-функция $f = (f_1(t,x), f_2(t,x), f_3(t,x))$.

Лемма 8.1. *Пространства $\mathbf{L}_A(Q)$ и $\mathbf{L}_{A^*}(Q)$ является взаимно сопряженными.*

Доказательство этого факта имеется, например, в [24, Приложение B].

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 8.2. *Пусть Y — замкнутое подпространство рефлексивного банахова пространства X, причем нормы $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ эквивалентны. Тогда пространство Y рефлексивно.*

Доказательство можно найти, например, в [24, Приложение B].

Рассмотрим теперь соленоидальные векторные поля. Используя пространство

$$\mathcal{V}(Q) = \{\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) \in \mathbf{C}_0^\infty(Q) :\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{supp}\mathbf{v} \subset\subset Q\},$$

определим

$$L^2(0,T; \mathbf{V}_0^0(\Omega)) = \text{замыканию } \mathcal{V}(Q) \text{ в } \mathbf{L}^2(Q). \tag{8.9}$$

Введем также пространство

$$\mathbf{V}_A(Q) = \text{замыканию } \mathcal{V}(Q) \text{ в } \mathbf{L}_A(Q). \tag{8.10}$$

Очевидно, $\mathbf{V}_A(Q) = L^2(0,T;\mathbf{V}_0^0(\Omega)) \cap \mathbf{L}^{3/2}(Q)$. Положим

$$\mathbf{V}_{A^*}(Q) = \text{замыканию } \mathcal{V}(Q) \text{ в } \mathbf{L}_{A^*}(Q). \tag{8.11}$$

Все элементы пространств (8.9), (8.10) и(8.11) удовлетворяют соотношениям $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ и $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0$, которые понимаются в смысле теории обобщенных функций.

Обозначим

$$\mathbf{G}_A(Q) = \{\nabla p \in \mathbf{L}_A(Q) :\ p \in L^2(0,T; H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))\}. \tag{8.12}$$

Лемма 8.3. *Справедливы соотношения $(\mathbf{V}_{A^*}(Q))^* = \mathbf{V}_A(Q)$ и $(\mathbf{V}_A(Q))^* = \mathbf{V}_{A^*}(Q)$.*

Доказательство этого утверждения можно найти в [24, Приложение B].

Отметим, что справедлив следующий аналог разложения Вейля:

$$\mathbf{L}_A(Q) = \mathbf{V}_A(Q) + \mathbf{G}_A(Q). \tag{8.13}$$

Действительно, так как $\mathbf{L}_A(Q) \subset \mathbf{L}^2(Q)$, то в силу разложения Вейля, для каждого $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_A(Q)$ существуют такие $\nabla p \in \mathbf{G}(Q) = \{\nabla p \in \mathbf{L}^2(Q) :\ p \in L^2(0,T; H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))\}$ и $\mathbf{w} \in L^2(0,T;\mathbf{V}_0^0(\Omega))$, что

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla p. \tag{8.14}$$

При доказательстве разложения Вейля $\nabla p(t,\mathbf{x})$ определяется как решение задачи
$$\int_Q \nabla p(t,\mathbf{x})\cdot\nabla q(t,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\,dt=\int_Q \mathbf{u}(t,\mathbf{x})\cdot\nabla q(t,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\,dt \qquad \forall\,\nabla q. \tag{8.15}$$
Если $\nabla q\in\mathbf{L}^2(Q)$, то (8.15) определяет $\nabla p\in\mathbf{L}^2(Q)$. Но так как $\mathbf{u}\in\mathbf{V}_A(Q)=\mathbf{L}^2(Q)\cap\mathbf{L}^{3/2}(Q)$, то правая часть в (8.15) является ограниченным функционалом относительно $\nabla q\in\mathbf{L}^3(Q)$, так что $\nabla p\in\mathbf{L}^{3/2}(Q)$. Следовательно $\nabla p\in\mathbf{V}_A(Q)$, и в силу (8.14) $\mathbf{w}\in\mathbf{V}_A(Q)$, что доказывает (8.13). Отметим, что сотношение $\mathbf{V}_A(Q)\cap\mathbf{G}_A(Q)=0$ вытекает из ортогональности полей $\mathbf{w}$ и ∇p в $\mathbf{L}^2(Q)$.

8.3. Некоторые функциональные пространства. Напомним, что пространство Соболева $\mathbf{W}^{1,2}_q(Q)$, $1\leqslant q<\infty$, определяется как множество вектор-функций, заданных на пространственно-временном цилиндре $Q=(0,T)\times\Omega$, для которых конечна норма
$$\|\mathbf{u}\|^q_{\mathbf{W}^{1,2}_q(Q)}\equiv\int_Q |\mathbf{u}|^q+|\partial_t\mathbf{u}|^q+|\nabla\mathbf{u}|^q+\sum_{i,j=1}^3\left|\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial x_i\partial x_j}\right|^q\,dx. \tag{8.16}$$
В дальнейшем мы будем использовать пространства
$$\mathcal{W}^{(2)}_0(Q)=\{\mathbf{v}\in L^2(0,T;\mathbf{V}^2(\Omega)):\partial_t\mathbf{v}\in L^2(0,T;\mathbf{V}^0(\Omega)),\ \mathbf{v}\big|_{t=0}=\mathbf{0}\} \tag{8.17}$$
и
$$\mathbf{V}^{1,2}_A(Q)=\mathcal{W}^{(2)}_0(Q))\cap\mathbf{W}^{1,2}_{3/2}(Q), \tag{8.18}$$
где $\mathcal{V}^{(2)}_0(Q))$ — пространство (7.7). Положим
$$\mathcal{V}^{(3/2)}_0(Q)=\{\mathbf{v}\in L^2(0,T;\mathbf{V}^{3/2}_\sigma(\Omega)):\partial_t\mathbf{v}\in L^2(0,T;\mathbf{V}^{-1/2}_\sigma(\Omega)),\ \mathbf{v}\big|_{t=0}=\mathbf{0}\}, \tag{8.19}$$
где пространства $\mathbf{V}^s_\sigma(\Omega)$ при $s\in[0,2]$ определены в (4.5), (4.6), а при $s\in[0,2]$ они определены в (4.13).

8.4. Слабая форма системы оптимальности для задачи II. В этом подразделе мы используем теорему 8.1 для вывода слабой формы системы оптимальности для задачи II, применяя прием, предложенный в [17, Гл. 1, теорема 1.8], который состоит в использовании пространства вариаций, не содержащего решения рассматриваемой экстремальной задачи.

При применении теоремы 8.1 оказалось удобным использовать пространства Орлича $\mathbf{V}_{A^*}(Q)$ и Орлича—Соболева $\mathbf{V}^{1,2}_A(Q)$. Эти пространства $\mathbf{V}^{1,2}_A(Q)$ были введены в разделе 8.2.

Теорема 8.2. *Пусть* $(\widehat{\mathbf{w}},\nabla\widehat{p})\in\mathbf{W}(Q)\times[\mathbf{L}^2(Q)+L^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+2}))]$ *является решением* задачи II. *Тогда существует такое* $\widehat{\mathbf{q}}\in\mathbf{V}_{A^*}(Q)$, *что*
$$\begin{gathered}\int_Q\big\{\partial_t\mathbf{h}-\Delta\mathbf{h}+[(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla]\mathbf{h}+(\mathbf{h}\cdot\nabla)(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})\big\}\cdot\widehat{\mathbf{q}}\,d\mathbf{x}\,dt+\\ +2\int_Q\mathcal{D}(\widehat{\mathbf{w}}+\mathbf{v}_0):\mathcal{D}(\mathbf{h})\,d\mathbf{x}\,dt+\int_\Omega(\widehat{\mathbf{w}}(T,\mathbf{x})+\mathbf{v}_0(\mathbf{x})-\mathbf{v}_\infty)\cdot\mathbf{h}\,d\mathbf{x}+\\ +\int_\Sigma\Big(\mathbf{h}\cdot(\widehat{\mathbf{w}}-\mathbf{v}_\infty)\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{n}+\frac12|\widehat{\mathbf{w}}-\mathbf{v}_\infty|^2\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}+\\ +N[\partial_t\widehat{\mathbf{w}}\cdot\partial_t\mathbf{h}+\nabla_\tau\widehat{\mathbf{w}}:\nabla_\tau\mathbf{h}+\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{h}]\Big)\,ds\,dt=0 \qquad \forall\,\mathbf{h}\in\mathbf{V}^{1,2}_A(Q)\end{gathered} \tag{8.20}$$

Доказательство. Сначала сведем задачу II к эквивалентной задаче оптимального управления с помощью замены переменных
$$\mathbf{w}=\widehat{\mathbf{w}}+\mathbf{z} \quad\text{и}\quad \nabla p=\nabla\widehat{p}+\nabla p_1. \tag{8.21}$$
Задача оптимального управления для $(\mathbf{z},\nabla p_1)$ имеет вид:
$$\mathcal{J}_N(\widehat{\mathbf{w}}+\mathbf{z})\to\inf \tag{8.22}$$
при ограничениях
$$\partial_t\mathbf{z}-\Delta\mathbf{z}+[(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}}+\mathbf{z})\cdot\nabla]\mathbf{z}+(\mathbf{z}\cdot\nabla)(\widehat{\mathbf{w}}+\mathbf{v}_0)=-\nabla p_1, \qquad \operatorname{div}\mathbf{z}=0 \qquad \text{в } Q, \tag{8.23}$$

$$\mathbf{z}|_{t=0} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{z} \to \mathbf{0} \ \text{ при } |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{8.24}$$

Мы рассмотрим задачу (8.22)–(8.24) для $\mathbf{z}$ из пространства $\mathbf{V}_A^{1,2}(Q)$, определенного в (8.18). Очевидно, для каждого $\mathbf{z} \in \mathcal{W}_0^{(2)}(Q)$ (см. 8.17) левая часть первого из уравнений в (8.23) принадлежит $\mathbf{L}^2(Q)$. Пусть

$$P : \mathbf{L}^2(Q) \to L^2(0,T;\mathbf{V}_0^0(\Omega))$$

— оператор проектирования. Используя разложение Вейля, преобразуем (8.23) в

$$P\Big(\partial_t \mathbf{z} - \Delta\mathbf{z} + [(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{z})\cdot\nabla]\mathbf{z} + (\mathbf{z}\cdot\nabla)(\widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0)\Big) = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div}\mathbf{z} = 0. \tag{8.25}$$

Из непрерывности вложения $\mathcal{W}_0^{(2)}(Q) \hookrightarrow \mathbf{W}(Q)$ и предположения, что

$$(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{p}) \in \mathbf{W}(Q) \times [\mathbf{L}^2(Q) + L^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+2}))]$$

является решением задачи II, следует, что $\widehat{\mathbf{z}} \equiv \mathbf{0}$ будет решением задачи оптимального управления (8.22) и(8.24)–(8.25). К этой задаче применим теорему 8.1. Положим $X_1 = \mathbf{V}_A^{1,2}(Q)$ и $X_2 = \mathbf{V}_A(Q)$ (см. (8.18) и (8.10).) Определим отображения $f : X_1 \to \mathbb{R}$ и $F : X_1 \to X_2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{z}) = \mathcal{J}_N(\mathbf{z} + \widehat{\mathbf{w}}),\\ &F(\mathbf{z}) = P\Big(\partial_t \mathbf{z} - \Delta\mathbf{z} + [(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{z})\cdot\nabla]\mathbf{z} + (\mathbf{z}\cdot\nabla)(\widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0)\Big). \end{aligned} \tag{8.26}$$

Отметим, что условия (8.24) включены в пространство X_1, а ограничение типа неравенства $g \leqslant 0$ отсутствует в задаче II. Требуется проверить, что отображения f и F, определенные в(8.26), непрерывно дифференцируемы. Мы докажем лишь непрерывную дифференцируемость F, так как это сложнее доказательства аналогичного свойства функционала f. Доказательство, что оператор, определенный в левой части равенства (8.23), непрерывно действует из X_1 в $\mathbf{L}^2(Q)$ очевидно. Доказательство его непрерывности из X_1 в $\mathbf{L}^{3/2}(Q)$ проводится аналогично доказательству леммы 6.1 и вытекает из оценки (6.17). Поэтому доказательство непрерывности $F(z)$ из (8.26) сводится к доказательству непрерывности проектора $P:\ \mathbf{L}_A(Q) \to \mathbf{V}_A(Q)$, которое фактически содержится в доказательстве разложения (8.13). Итак, проектор $P : \mathbf{L}_A(Q) \to \mathbf{V}_A(Q)$, а значит и отображение $F : \mathbf{V}_A^{1,2}(Q) \to \mathbf{V}_A(Q)$ непрерывны.

Производная отображения F на решении $\mathbf{0}$ задачи (8.22) и(8.24)–(8.25) задается формулой

$$F'(\mathbf{0})\mathbf{h} = P\Big(\partial_t \mathbf{h} - \Delta\mathbf{h} + [(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla]\mathbf{h} + (\mathbf{h}\cdot\nabla)(\widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0)\Big)$$

и непрерывность оператора $F'(0) : X_1 \to X_2$ доказывается аналогично доказательству непрерывности оператора F. Для доказательства сюръективности оператора $F'(0)$ достаточно доказать что для каждого $\mathbf{f} \in \mathbf{V}_A(Q)$ существует решение $\mathbf{h} \in \mathbf{V}_A^{1,2}(Q)$ задачи

$$\partial_t \mathbf{h} - \Delta\mathbf{h} + [(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla]\mathbf{h} + (\mathbf{h}\cdot\nabla)(\widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0) + \nabla p = \mathbf{f} \tag{8.27}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{h} = 0, \quad \mathbf{h}|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}|_\Sigma = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{h} \to \mathbf{0} \text{ при } |\mathbf{x}| \to \infty \tag{8.28}$$

с некоторым $\nabla p \in \mathbf{L}^2(Q) \cap \mathbf{L}^{3/2}(Q)$.

Так как $\mathbf{V}_A(Q) \subset \mathbf{L}^2(Q)$, то в силу предложения 5.1 существует единственное решение $\mathbf{h} \in \mathcal{W}_0^{(2)}(Q)$ задачи (8.27), (8.28). Перенося последние три члена левой части равенства (8.27) в правую часть и используя доказательство леммы 6.1, легко видеть, что новая правая часть принадлежит $\mathbf{L}^{3/2}(Q)$. Продолжая $\mathbf{h}$ в (8.27) с $(0,T)\times\Omega$ на $\mathbf{h} \in \mathcal{W}_0^{(2)}((0,T)\times\mathbb{R}^3)$ и используя оценку решения задачи Коши для уравнений Стокса, получим как и при доказательстве леммы 6.1, что $\mathbf{h} \in \mathcal{W}_0^{(2)}((0,T)\times\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{W}_{3/2}^{1,2}$. Следовательно, $\mathbf{h} = \widetilde{\mathbf{h}}|_Q \in \mathbf{V}_A^{1,2}(Q)$.

Итак, мы проверили все предположения теоремы 8.1, и в силу этой теоремы существует такое $\hat{\mathbf{q}} \in \mathbf{V}_{A^*}(Q)$, что (8.3) справедливо с $\lambda_0 = 1$, λ отсутствует и

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, \lambda_0, \mathbf{q}) = \mathcal{J}_N(\mathbf{z} + \widehat{\mathbf{w}}) + \int\limits_Q \Big(\partial_t \mathbf{z} - \Delta\mathbf{z} + [(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{z})\cdot\nabla]\mathbf{z} + (\mathbf{z}\cdot\nabla)(\widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0)\Big)\cdot\hat{\mathbf{q}}\, d\mathbf{x}\, dt. \tag{8.29}$$

Уравнение (8.3) с $\mathcal{L}$, определенным в (8.29), записывается в виде (8.20). □

С помощью конструкции, описанной после (4.11) по функции $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})-\mathbf{v}_\infty$, где $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ — это стационарное решение из теоремы 6.1, а $\mathbf{v}_\infty \in \mathbb{R}^3$ — вектор из (6.5), построим функцию $\Psi(\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_\infty;\mathbf{x})$, обладающую следующими свойствами:

$$\Psi(\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_\infty;\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{v}_0(\mathbf{x})-\mathbf{v}_\infty, & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\Omega_{\rho+2}, \\ 0, & \mathbf{x}\in\Omega_{\rho+1}, \end{cases} \quad \text{причем} \quad \Psi(\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_\infty;\cdot)\in\mathbf{V}^2(\Omega_{\rho+3}), \tag{8.30}$$

где, напомним, число ρ определяется из равенства $B_\rho \equiv \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}|<\rho\}\supset\partial\Omega$, а $\Omega_{\rho+k}=\Omega\cap B_{\rho+k}$.

Запишем $\widehat{\mathbf{q}}(t,\mathbf{x})$ в виде

$$\widehat{\mathbf{q}}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{q}(t,\mathbf{x}) - \Psi(\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_\infty;\mathbf{x}). \tag{8.31}$$

В силу определений (8.7), (8.8) и (8.12), из включений $\mathbf{v}_0(x)-\mathbf{v}_\infty\in\mathbf{L}^3(\Omega)$, $\nabla\mathbf{v}_0\in\mathbf{L}^2(\Omega)$ следует, что $\Psi(\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_\infty;\mathbf{x})\in\mathbf{V}_{A^*}(Q)$. Так как $\hat{\mathbf{q}}\in\mathbf{V}_{A^*}$, то $\mathbf{q}\in\mathbf{V}_{A^*}$.

9. Сильная форма системы оптимальности для задачи II

Прежде всего устанавливается необходимая гладкость для двойственного поля скорости. С помощью этого результата выводится система оптимальности для задачи II, состоящая из уравнений с частными производными, а также граничных и начальных условий, и условий в конечный момент времени.

9.1. Гладкость двойственной скорости в системе оптимальности. В этом подразделе мы выведем некоторую оценку гладкости для двойственной переменной $\mathbf{q}$, определенной в теореме 8.2 и (8.31).

Подставим (8.31) в (8.20) и сузим в (8.20) $\mathbf{h}$ на пространство $\mathbf{V}_A^{1,2}(Q)\cap\mathcal{V}_0^{(2)}(Q)$ (см. (8.18), (7.7)). В результате получим:

$$\begin{aligned} &\int_Q \Big[\partial_t\mathbf{h}-\Delta\mathbf{h}+[(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla]\mathbf{h}+(\mathbf{h}\cdot\nabla)(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})\Big]\Big[\mathbf{q}-\Psi(\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_\infty)\Big]\,d\mathbf{x}\,dt+ \\ &\quad+\int_Q 2\mathcal{D}(\mathbf{h}):\mathcal{D}(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})\,d\mathbf{x}\,dt+ \\ &\quad+\int_\Omega \mathbf{h}(T,x)\cdot\big[\widehat{\mathbf{w}}(T,x)+\mathbf{v}_0(x)-\mathbf{v}_\infty)\big]\,d\mathbf{x}=0 \quad \forall\,\mathbf{h}\in\mathbf{V}_A^{1,2}\cap\mathcal{V}_0^{(2)}(Q). \end{aligned} \tag{9.1}$$

В этом параграфе, в частности, будет показано, что из соотношения (9.1) следует, что $\mathbf{q}\in L^2(0,T;\mathbf{V}_0^0(\Omega))$ является обобщенным решением краевой задачи

$$P\Big(\partial_t\mathbf{q}+\Delta\mathbf{q}+[(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla]\mathbf{q}-[\nabla(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})]^*\mathbf{q}\Big)=P\Phi, \qquad \operatorname{div}\mathbf{q}=0, \tag{9.2}$$

$$\mathbf{q}\big|_\Sigma=\mathbf{0}, \qquad \mathbf{q}\to\mathbf{0} \text{ при } |\mathbf{x}|\to\infty \tag{9.3}$$

$$\mathbf{q}\big|_{t=T}=-P(\widehat{\mathbf{w}}(T,\cdot)+\Psi_1). \tag{9.4}$$

Здесь

$$\Psi_1(\mathbf{x})=\mathbf{v}_0(\mathbf{x})-\mathbf{v}_\infty-\Psi(\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_\infty;\mathbf{x}), \tag{9.5}$$

$$\Phi(t,x)=\Delta\Psi(\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_\infty)+[(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla]\Psi(\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_\infty)-[\nabla(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})]^*\Psi(\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_\infty)-\Delta(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}}). \tag{9.6}$$

Подчеркнем, что «начальное условие» для $\mathbf{q}$, т.е. правая часть равенства (9.4), убывает при больших $\mathbf{x}$ с той же скоростью,что и $\widehat{\mathbf{w}}(T,\mathbf{x})$. Справедлив следующий результат о гладкости для $\mathbf{q}(T,\cdot)$.

Лемма 9.1. *Пусть $\widehat{\mathbf{w}}\in\mathbf{W}(Q)$ является решением задачи I или II. Тогда $P\widehat{\mathbf{w}}(T,\cdot)\in\mathbf{H}^{3/4}(\Omega)\cap\mathbf{V}_0^0(\Omega)$, где P — оператор проектирования, определенный в* (4.17).

Доказательство. Рассмотрим оператор $P=P_0:\mathbf{L}^2(\Omega)\to\mathbf{V}_0^0(\Omega)$, который был определен как оператор ортогонального проектирования в разложении Вейля. Напомним, что для s из $[0,2] P\mathbf{H}^s(\Omega)\subset\mathbf{H}^s(\Omega)$ и оператор $P:\mathbf{H}^s(\Omega)\to\mathbf{H}^s(\Omega)$ ограничен. Действительно, для каждого

$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ имеем $P\mathbf{u} = \mathbf{u} - \nabla p$, где $\nabla p \in G_0 \equiv \{\nabla\phi \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \phi \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\}$ является решением вариационной задачи

$$\int_\Omega \nabla p(\mathbf{x}) \cdot \nabla\phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla\phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \quad \forall\, \nabla\phi \in G_0. \tag{9.7}$$

Существование и единственность решения этой задачи хорошо известны (см. [10]).

Пусть $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$. Интегрируя по частям в (9.7), получим, что ∇p является решением краевой задачи: $\nabla p \in \mathbf{L}^2(\Omega)$,

$$-\Delta p = \operatorname{div}\mathbf{u} \quad \text{в } \Omega \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\big|_{\partial\Omega}.$$

В силу регулярности решений эллиптических задач и задач типа div-rot (см. [14]) получим, что $p \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и

$$\|\nabla p\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \leqslant C\Big(\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} + \|(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\big|_{\partial\Omega}\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}\Big) \leqslant C\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}.$$

Поэтому операторы $I - P : \mathbf{L}^2(\Omega) \to \mathbf{L}^2(\Omega)$ и $I - P : \mathbf{H}^2(\Omega) \to \mathbf{H}^2(\Omega)$ ограничены. В силу теоремы об интерполяции операторы $P : \mathbf{H}^s(\Omega) \to \mathbf{H}^s(\Omega)$ и $I - P : \mathbf{H}^s(\Omega) \to \mathbf{H}^s(\Omega)$ ограничены для каждого $s \in [0, 2]$.

Так как $\widehat{\mathbf{w}} \in \mathbf{W}(Q) \subset L^2(0, T; \mathbf{H}^{3/2}(\Omega))$, то

$$P\widehat{\mathbf{w}} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^{3/2}(\Omega)). \tag{9.8}$$

Будучи решением Задачи I или II, векторное поле $\widehat{\mathbf{w}}$ удовлетворяет соотношениям (6.8)–(6.11). Интегрируя (6.8) по $t \in [0, \tau]$ и затем применяя оператор P, получим, что

$$P\widehat{\mathbf{w}}(\tau, \cdot) = \int_0^\tau \Big(P\Delta\widehat{\mathbf{w}}(t, \cdot) - P[(\widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0)\cdot\nabla]\widehat{\mathbf{w}} - P(\widehat{\mathbf{w}}\cdot\nabla)\mathbf{v}_0\Big)\, dt. \tag{9.9}$$

Так как $\widehat{\mathbf{w}} \in \mathbf{W}(Q)$ и поэтому $\Delta\widehat{\mathbf{w}} = g + \nabla p$ с $g \in \mathbf{L}^2(Q)$, $\nabla p \in L^2(0, T; \nabla H^{1/2}(\Omega))$, то

$$P\widehat{\mathbf{w}}(t, \cdot) \in L^2(0, T; \mathbf{V}^0_0(\Omega)) \text{ и } \widehat{\mathbf{w}} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^{3/2}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)).$$

Учитывая последнее включение и используя аргументы, примененные при выводе оценки (5.19), получим, что интегранд из правой части равенства (9.9) принадлежит $L^2(0, T; \mathbf{V}^0_0(\Omega))$. Следовательно, дифференцируя (9.9) по τ, получим

$$\partial_t P\widehat{\mathbf{w}}(t, \cdot) \in L^2(0, T; \mathbf{V}^0_0(\Omega)) \subset L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)). \tag{9.10}$$

Тогда из (9.8), (9.10) и теоремы о следах из [12] вытекает, что $P\widehat{\mathbf{w}}(t, \cdot) \in \mathbf{C}(0, T; \mathbf{H}^{3/4}(\Omega))$. □

Ниже используются пространства $\mathbf{V}^s_\sigma$, которые определены и изучены в подразделе 4.1.

Теорема 9.1. *Предположим, что* $\mathbf{q} \in \mathbf{V}_{A^*}(Q)$ *удовлетворяет* (9.1). *Тогда* $\mathbf{q} \in L^2(0, T - \delta; \mathbf{V}^2_\sigma(\Omega)) \cap H^1(0, T - \delta; \mathbf{V}^0_\sigma(\Omega))$ *для каждого* $\delta > 0$. *Более того, существует такая константа* $C > 0$, *что для каждого* $\delta \in [0, T]$ *и каждого* $\epsilon \in (0, 1/2)$ *справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\int_0^{T-\delta} \Big(\|\mathbf{q}(t, \cdot)\|^2_{\mathbf{V}^2_\sigma(\Omega)} + \|\partial_t\mathbf{q}(t, \cdot)\|^2_{\mathbf{V}^0_\sigma(\Omega)}\Big)\, dt \leqslant \\ \leqslant C\Big(\delta^{-\epsilon-1/2}\|P(\widehat{\mathbf{w}}(T, \cdot) + \Psi_1)\|^2_{\mathbf{V}^{-\epsilon+1/2}_\sigma(\Omega)} + \|P\Phi\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{V}^0_\sigma(\Omega))}\Big).\end{gathered} \tag{9.11}$$

В частности, $\mathbf{q}$ *удовлетворяет уравнениям* (9.2) *в* $L^2(0, T - \delta; \mathbf{V}^0_\sigma(\Omega))$ *и первому из условий* (9.3) *в* $L^2(0, T - \delta; \mathbf{H}^{3/2}(\partial\Omega))$ *для каждого* $\delta \in (0, T)$. *Равенство* (9.4) *выполнено в пространстве* $\mathbf{V}^{-\epsilon+1/2}_\sigma(\Omega)$ *для каждого* $\epsilon \in (0, 1/2)$.

Доказательство. Так как $\widehat{\mathbf{w}} \in \mathbf{W}$ а $\mathbf{v}_0$ удовлетворяет оценкам (6.5), то векторное поле Φ, определенное в (9.11), принадлежит $L^2(0,T;\mathbf{V}^0_0(\Omega))$. Поэтому задача (9.2)–(9.4) имеет решение $\widetilde{\mathbf{q}} \in L^2(0,T;\mathbf{V}^1_\sigma(\Omega))$. Это сразу следует из предложения 5.2 и леммы 5.1. Кроме того, так как $\Phi \in \mathbf{L}^2(Q)$, из предложения 5.2 и теоремы 5.2 следует, что $\widetilde{\mathbf{q}} \in L^2(0,T-\delta;\mathbf{V}^2_\sigma(\Omega)) \cap H^1(0,T-\delta;\mathbf{V}^0_\sigma(\Omega))$ для всех $\delta \in (0,T)$ и $\widetilde{\mathbf{q}}$ удовлетворяет (9.11).

Умножая (9.2) на $\mathbf{h} \in \mathcal{V}^{(2)}_0(Q)$, интегрируя по Q с последующим интегрированием по частям, мы видим, что $\widetilde{\mathbf{q}}$ является обобщенным решением задачи (9.2)–(9.4), т.е. $\widetilde{\mathbf{q}}$ удовлетворяет (9.1).

Докажем теперь единственность обобщенного решения задачи (9.2)–(9.4) в пространстве $\mathbf{V}_{A^*}(Q)$ (напомним, что пространство $\mathbf{V}_{A^*}(\Omega)$ содержит $L^2(0,T;\mathbf{V}^0_0(\Omega))$.) Пусть $\mathbf{q}$ и $\widetilde{\mathbf{q}}$ принадлежат $\mathbf{V}_{A^*}(Q)$ и удовлетворяют (9.1). Положим $\mathbf{g} = \mathbf{q} - \widetilde{\mathbf{q}}$. Вычитая (9.1) с $\widetilde{\mathbf{q}}$ из (9.1) с $\mathbf{q}$, получим

$$\int_Q \Big([\partial_t \mathbf{h} - \Delta \mathbf{h} + [(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}}) \cdot \nabla]\mathbf{h} + (\mathbf{h} \cdot \nabla)(\widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0) \Big) \cdot \mathbf{g}\, d\mathbf{x}\, dt = 0 \qquad \forall\, \mathbf{h} \in \mathbf{V}^{1,2}_A(Q) \cap \mathcal{V}^{(2)}_0(Q). \tag{9.12}$$

Рассмотрим краевую задачу

$$P\big(\partial_t \mathbf{h} - \Delta \mathbf{h} + [(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}}) \cdot \nabla]\mathbf{h} + (\mathbf{h} \cdot \nabla)(\widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0\big) = \mathbf{g}_1, \tag{9.13}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \qquad \mathbf{h}\big|_\Sigma = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{h} \to 0 \ \text{ при } \ |\mathbf{x}| \to \infty \qquad \text{и} \qquad \mathbf{h}\big|_{t=0} = \mathbf{0}, \tag{9.14}$$

где $\mathbf{g}_1 \in \mathbf{V}_A(Q)$. Задача (9.13)–(9.14) эквивалентна задаче (8.27)–(8.28), разрешимость которой установлена в доказательстве теоремы 8.2. Таким образом для каждого $\mathbf{g}_1 \in \mathbf{V}_A(Q)$ существует единственное решение $\mathbf{h} \in \mathbf{V}^{1,2}_A(Q)$ задачи (9.13)–(9.14). Пространства $\mathbf{V}_A(Q)$ и $\mathbf{V}_{A^*}(Q)$ являются взаимно сопряженными, и поэтому в силу хорошо известного следствия теоремы Хана—Банаха, для данного $\mathbf{g} \in \mathbf{V}_{A^*}$ существует такое $\mathbf{g}_1 \in \mathbf{V}_A(Q)$ (которое понимается здесь как функционал на $\mathbf{V}_{A^*}(Q)$), что $\|\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{V}_A(Q)} = 1$ и

$$\int_Q \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}\, d\mathbf{x}\, dt = \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}_{A^*}(Q)}. \tag{9.15}$$

Если подставить в (9.12) решение $\mathbf{h}$ задачи (9.13)–(9.14), то левая часть соотношения (9.12) окажется равной (9.15). Следовательно, $\mathbf{g} \equiv \mathbf{0}$ и единственность доказана. Равенство (9.4) верно в пространстве $\mathbf{V}^{-\epsilon+1/2}_\sigma(\Omega)$ в силу лемм 9.1, 4.4, 4.7 и 4.8. Таким образом, утверждение теоремы 9.1 доказано. □

9.2. Сопряженное давление. Установим сначала существование сопряженного давления.

Лемма 9.2. *Пусть* $\mathbf{q} \in L^2(0.T;\mathbf{V}^0_0(\Omega))$ — *двойственная переменная, определенная в* (8.31) *с помощью* $\widehat{\mathbf{q}}$, *найденного в теореме* 8.2. *Тогда существует такая обобщенная функция* $\widetilde{r}(t,\mathbf{x})$ *на* Q, *что пара* $(\mathbf{q}, \nabla\widetilde{r})$ *удовлетворяет уравнению*

$$\partial_t \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q} + [(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}}) \cdot \nabla]\mathbf{q} - [\nabla(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}})]^* \mathbf{q} + \nabla \widetilde{r} = \Phi, \tag{9.16}$$

где Φ *определено в* (9.6). *При этом* $\nabla\widetilde{r}$ *допускает разложение*

$$\nabla \widetilde{r} = \nabla r_1 + \nabla r_2 + \nabla r_3, \tag{9.17}$$

с ∇r_i, $i = 1,2,3$, *для которых справедливы оценки*

$$\int_0^{T-\delta} \|\nabla r_1(t,\cdot)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\, dt \leqslant C\Big(\delta^{-\epsilon-1/2} \|P\big(\widehat{\mathbf{w}}(T,\cdot) + \Psi_1\big)\|^2_{\mathbf{V}^{-\epsilon+1/2}(\Omega)} + \|P\Phi\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{V}^0_\sigma(\Omega))}\Big), \tag{9.18}$$

$$\|\nabla r_2\|_{L^2(0,T;\nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+2}))} \leqslant C \|\widehat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{V}^{1,1/2}_\rho(Q)}, \tag{9.19}$$

$$\|\nabla r_3\|_{\mathbf{L}^2(Q)} \leqslant C\|(\Phi + \Delta\widehat{\mathbf{w}}) - \mathbf{w}_2\|_{\mathbf{L}^2(Q)} \leqslant C_1\Big(\|\widehat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{V}^{1,1/2}_\rho(Q)} + \|\Delta \mathbf{v}_0\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\Big), \tag{9.20}$$

где C *в* (9.18) *зависит от* $\|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{C}^2(\overline{\Omega})} + \|\widehat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{V}^{1,1/2}(Q)}$, *а* C_1 *в* (9.20) *зависит от* $\|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{C}^2(\Omega)} + \|\nabla \mathbf{v}_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + |\mathbf{v}_\infty|$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что первое из равенств (9.2) можно переписать в виде (9.16). Действительно, так как $\partial_t \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q} + [(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}}) \cdot \nabla]\mathbf{q} - [\nabla(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}})]^* \mathbf{q} \in \mathbf{L}^2((0, T-\delta) \times \Omega)$ при каждом $\delta \in (0,T)$, то в силу разложения Вейля при каждом $\delta \in (0,T)$ существует такое $\nabla r_1 \in \mathbf{L}^2((0,T-\delta)\times\Omega)$, что

$$\partial_t \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q} + [(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}}) \cdot \nabla]\mathbf{q} - [\nabla(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}})]^* \mathbf{q} + \nabla r_1 = P\Phi. \tag{9.21}$$

Выражая ∇r_1 из (9.21) и используя (9.11), а также теоремы вложения Соболева, легко получить оценку (9.18). С другой стороны из определения пространства $\mathbf{V}_\rho^{1,1/2}(Q)$ (см. (3.23)) следует, что

$$\Delta \widehat{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_2 + \nabla r_2, \quad \text{где} \quad \mathbf{w}_2 \in \mathbf{L}^2(Q) \quad \text{и} \quad \nabla r_2 \in L^2(0,T; \nabla H^{1/2}(\Omega_{\rho+2})). \tag{9.22}$$

Очевидно, справедливо неравенство (9.19). Кроме того, из равенства $P(\Phi + \Delta\widehat{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_2) = \Phi + \Delta\widehat{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_2 - \nabla r_3$ следуют соотношение (9.16) и оценка (9.20). □

Покажем теперь, что следы функций $\partial\widehat{\mathbf{w}}/\partial n$ и r_2 корректно определены на Σ.

Лемма 9.3. *Пусть r_2 — функция, определенная в* (9.22). *Сужения r_2 и $\partial\widehat{\mathbf{w}}/\partial n$ на Σ корректно определены, причем*

$$\left.\frac{\partial \widehat{\mathbf{w}}}{\partial n}\right|_\Sigma \in \mathbf{L}^2(\Sigma) \qquad \textit{и} \qquad r_2|_\Sigma \in L^2(\Sigma). \tag{9.23}$$

Доказательство. Чтобы однозначно определить r_2 из (9.22), допустим, что $\int\limits_{\Omega_{\rho+2}} r_2(t,\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$ для п.в. $t \in [0,T]$.

С помощью леммы 2.2 введем координаты (y_1,y_2,y_3) на $\Omega(\varepsilon)$ (т.е. на ε-окрестности границы $\partial\Omega$), где $y_3(\mathbf{x}) = \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega)$ для $\mathbf{x} \in \Omega(\varepsilon)$, а $(y_1,y_2) = (y_1^k(\mathbf{x}), y_2^k(\mathbf{x}))$ — локальные координаты в $\mathcal{U}^k$ и $\cup_k \mathcal{U}^k$ — конечное покрытие $\partial\Omega$. Для каждого k, координаты $(y_1,y_2,y_3) = (y_1^k, y_2^k, y_3)$ являются ортогональными, т.е.

$$\nabla y_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla y_j(\mathbf{x}) = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,3.$$

В силу этого свойства, если $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ — это запись векторного поля $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ в координатах (y_1,y_2,y_3) и $\operatorname{div}\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \Sigma_{i=1}^3 \partial_{x_i} w_i = 0$, то $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{y}) = \Sigma_{i=1}^3 \partial_{y_i} v_i = 0$ (см. [8]).

Пусть $\widehat{\mathbf{v}}(t,\mathbf{y})$, $\mathbf{v}_2(t,\mathbf{y})$ и $\nabla_\mathbf{y} s(t,\mathbf{y})$ — записи в координатах (y_1,y_2,y_3) соответствующих векторных полей $\widehat{\mathbf{w}}(t,\mathbf{x})$, $\mathbf{w}_2(t,\mathbf{x})$ и $\nabla_\mathbf{x} r_2(t,\mathbf{x})$. Тогда разложение $\Delta\widehat{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_2 + \nabla r_2$ переписывается следующим образом:

$$\Delta_y \widehat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_2 + \Sigma_{i=1}^3 C_i(\mathbf{y}) \frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}}{\partial y_i} + \nabla_\mathbf{y} s, \tag{9.24}$$

где $C_i(\mathbf{y})$ — некоторые бесконечно гладкие векторные поля. Обозначим $Q(\varepsilon) = (0,T)\times\Omega(\varepsilon)$. Учитывая, что из $\widehat{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}^{1,1/2}(Q(\varepsilon))$ следует включение

$$\partial\widehat{\mathbf{v}}/\partial y_3 \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{1/2}(\Omega(\varepsilon))) \cap H^1(0,T;\mathbf{H}^{-1/2}(\Omega(\varepsilon))),$$

получим, что для $j = 1,2$,

$$\frac{\partial^2 \widehat{\mathbf{v}}}{\partial y_3 \partial y_j} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(0,\varepsilon;\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega_{(\cdot)})), \tag{9.25}$$

где $(0,\varepsilon)$– интервал, в котором определены локальные координаты y_3, а $\partial\Omega_{(z)} = \{\mathbf{x} \in \Omega(\varepsilon) : y_3(\mathbf{x}) = z\}$, $z \in (0,\varepsilon)$. Соотношение (9.25) означает, что $\partial^2_{y_3 y_j}\widehat{\mathbf{v}}(\cdot, y_3) \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega_{(y_3)}))$ для почти всех y_3 и функция $y_3 \mapsto \|\partial^2\widehat{\mathbf{v}}/\partial y_3 \partial y_j(\cdot, y_3)\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega_{(y_3)}))} \in L^2(0,\varepsilon)$. Дифференцируя равенство $\operatorname{div}\widehat{\mathbf{v}} = 0$ по y_3 и учитывая (9.25), получим

$$\frac{\partial^2 \widehat{v}_3}{\partial y_3^2} = -\frac{\partial^2 \widehat{v}_1}{\partial y_3 \partial y_1} - \frac{\partial^2 \widehat{v}_2}{\partial y_3 \partial y_2} \in L^2(0,\varepsilon;L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega_{(\cdot)}))). \tag{9.26}$$

Так как $\widehat{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}^{1,1/2}(Q(\varepsilon)) \subset L^2(0,T;\mathbf{H}^{3/2}(\Omega(\varepsilon)))$, то

$$\widehat{v}_j \in L^2(0,\varepsilon;L^2(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega_{(\cdot)}))), \quad j = 1,2,3. \tag{9.27}$$

Определим диффеоморфизм $\kappa : \Omega(\varepsilon) \to (0,\varepsilon)\times\partial\Omega$, переводящий каждую точку $\mathbf{x} \in \partial\Omega(\varepsilon)$ с координатами $(y_1^k(\mathbf{x}), y_2^k(\mathbf{x}), y_3(\mathbf{x}))$ в пару $(y_3(\mathbf{x}), \mathbf{z})$, где $y_3 \in (0,\epsilon)$, а $\mathbf{z} \in \partial\Omega$ — точка с координатами

$(y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}))$. Очевидно, при этом диффеоморфизме включения (9.26) и (9.27) преобразуются во включения

$$\frac{\partial^2 \widehat{v}_3}{\partial y_3^2} \in L^2(0,\varepsilon; L^2(0,T; H^{-1/2}(\partial\Omega))), \quad \widehat{v}_3 \in L^2(0,\varepsilon; L^2(0,T; H^{3/2}(\partial\Omega))). \tag{9.28}$$

Из включений (9.28) и теоремы о следах (см. [12]) вытекает, что

$$\frac{\partial \widehat{v}_3}{\partial y_3} \in C(0,\varepsilon; L^2(0,T; L^2(\partial\Omega))) \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial \widehat{v}_3}{\partial y_3}\Big|_\Sigma \in L^2(\Sigma). \tag{9.29}$$

Так как $\widehat{v}_3 \in H^{1,1/2}(Q(\varepsilon))$ и $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{L}^2(Q(\varepsilon))$, то в силу (9.24) имеем

$$\begin{gathered}\partial_{y_3}\big(\partial_{y_3}\widehat{v}_3 - s\big) = -\big(\partial^2_{y_1y_1} + \partial^2_{y_2y_2}\big)\widehat{v}_3 - v_2 + \Sigma_{j=1}^3 C_j^3(\mathbf{y})\frac{\partial \widehat{v}^3}{\partial y_j} \in \\ \in L^2(0,\varepsilon; L^2(0,T; H^{-1/2}(\partial\Omega))).\end{gathered} \tag{9.30}$$

При этом, так как $\partial_{y_3}\widehat{v}_3 \in L^2(0,T; H^{1/2}(\Omega(\varepsilon)))$ и $s \in L^2(0,T; H^{1/2}(\Omega(\varepsilon)))$, то

$$\partial_{y_3}\widehat{v}_3 - s \in L^2(0,\varepsilon; L^2(0,T; H^{1/2}(\partial\Omega_{(\cdot)}))). \tag{9.31}$$

Применяя диффеоморфизм κ и используя теорему о следах, получим из (9.30) и (9.31), что

$$\partial_{y_3}\widehat{v}_3 - s \in C(0,\varepsilon; L^2(0,T; L^2(\partial\Omega_{(\cdot)}))) \quad \text{и} \quad (\partial_{y_3}\widehat{v}_3 - s)\big|_\Sigma \in L^2(\Sigma). \tag{9.32}$$

Теперь из (9.29) и (9.32) следует, что

$$s|_\Sigma \in L^2(\Sigma). \tag{9.33}$$

Наконец, из (9.24) для $k = 1, 2$ следует, что

$$\frac{\partial^2 \widehat{v}_k}{\partial y_3^2} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\widehat{v}_k - v_2 + \sum_{j=1}^3 C_j^k \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y_j} - \frac{\partial s}{\partial y_k} \in L^2(0,\varepsilon; L^2(0,T; H^{-1/2}(\partial\Omega_{(\cdot)}))).$$

Из этого соотношения и (9.27) с помощью теоремы о следах вытекает, что

$$\frac{\partial \widehat{v}_k}{\partial y_3} \in C(0,\varepsilon; L^2(0,T; L^2(\partial\Omega_{(\cdot)}))) \quad \text{и} \quad \frac{\partial v_k}{\partial y_3}\Big|_\Sigma \in L^2(\Sigma), \quad k = 1, 2. \tag{9.34}$$

Из (9.29), (9.33) и (9.34) следует (9.23). $\square$

Отметим, что в силу (9.18) и (9.20) след функции $\widetilde{r}(t, \mathbf{x})$, определенной в (9.17), корректно определен на Σ и

$$\widetilde{r}|_\Sigma \in L^2(\Sigma). \tag{9.35}$$

9.3. Дополнительное условие на границе. Выведем дополнительное соотношение, которому решение системы оптимальности удовлетворяет на боковой поверхности пространственно-временного цилиндра Q. Оно получается, грубо говоря, с помощью интегрирования по частям в (8.20).

Пусть $\widehat{p}$ — давление в (6.8), где $\mathbf{w} = \widehat{\mathbf{w}}$. Используя (9.22) и лемму 9.3 и повторяя подходящие рассуждения из предыдущего подраздела (от (9.16) до (9.35)), можно вывести из (6.8), что $\nabla\widehat{p}$ имеет корректно определенный след на Σ и

$$\widehat{p}|_\Sigma \in L^2(\Sigma). \tag{9.36}$$

Отметим, что с помощью замены переменных

$$\nabla\widetilde{r} = -\nabla r - \nabla\widehat{p}, \tag{9.37}$$

где $\widehat{p}$ — давление в уравнении (6.8), можно преобразовать (9.16) в

$$\partial_t \mathbf{q} + \Delta\mathbf{q} + [(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla]\mathbf{q} - [\nabla(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}})]^*\mathbf{q} - \nabla r = \Phi + \nabla\widehat{p}. \tag{9.38}$$

В силу (9.35), (9.36) и (9.37), функция $r|_\Sigma$ корректно определена и

$$r|_\Sigma \in L^2(\Sigma). \tag{9.39}$$

Чтобы однозначно определить r и $\widehat{p}$, предположим, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} \widehat{p}(t,\mathbf{x})\,ds = 0 \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{\partial\Omega} r(t,\mathbf{x})\,ds = 0 \qquad \text{при п.в. } t \in [0,T]. \tag{9.40}$$

Лемма 9.4. *Пусть* $\mathbf{q} \in L^2(0.T;\mathbf{V}_0^0(\Omega))$ — *двойственная переменная, определенная в* (8.31) *с помощью* $\widehat{\mathbf{q}}$, *полученного в теореме* 8.2. *Тогда*

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Sigma} \mathbf{h}\cdot\Big(\mathcal{T}(\widehat{\mathbf{w}}+\mathbf{v}_0,\widehat{p})\mathbf{n} + \mathcal{T}(\mathbf{q},r)\mathbf{n} + 2\mathcal{D}(\mathbf{v}_0)\mathbf{n} + (\widehat{\mathbf{w}}-\mathbf{v}_\infty)\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{n} +\\ +\frac{1}{2}|\widehat{\mathbf{w}}-\mathbf{v}_\infty|^2\mathbf{n} + N(-\partial_{tt}\widehat{\mathbf{w}}+\widehat{\mathbf{w}})\Big)\,ds\,dt +\\ +N\int\limits_{\Sigma}\nabla_\tau\widehat{\mathbf{w}} : \nabla_\tau\mathbf{h}\,ds\,dt = 0 \quad \forall\,\mathbf{h}\in\mathcal{W}_0^{(2)}(Q) \quad c\ \mathbf{h}(T,\cdot)=0,\end{aligned} \tag{9.41}$$

где

$$\mathcal{T}(\widehat{\mathbf{w}}+\mathbf{v}_0,\widehat{p}) = -\widehat{p}I + 2\mathcal{D}(\widehat{\mathbf{w}}+\mathbf{v}_0) \qquad \textit{и} \qquad \mathcal{T}(\mathbf{q},r) = -rI + 2\mathcal{D}(\mathbf{q}). \tag{9.42}$$

Доказательство. Подставим (8.31) в (8.20) и преобразуем полученное выражение с $\mathbf{q}$ следующим образом. Разобьем Q на два непересекающихся цилиндра $Q_{T-\delta} = (0,T-\delta)\times\Omega$ и $Q_\delta = (T-\delta,T)\times\Omega$. Положим $\Sigma_{T-\delta} = (0,T-\delta)\times\partial\Omega$. Запишем интеграл по Q в (8.20) в виде суммы интегралов по $Q_{T-\delta}$ и Q_δ и проинтегрируем по частям в интеграле по $Q_{T-\delta}$. В результате получим

$$\begin{aligned}&\int\limits_{Q_{T-\delta}}\Big(-\big[\partial_t\mathbf{q}+\Delta\mathbf{q}-[(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla]\mathbf{q}+[\nabla(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})]^*\mathbf{q}\big]\cdot\mathbf{h}\Big)\,d\mathbf{x}\,dt + \int\limits_{Q_{T-\delta}}\mathbf{h}\cdot\Phi\,dx\,dt +\\ &\quad+\int\limits_{Q_\delta}\Big(2\mathcal{D}(\widehat{\mathbf{w}}+\mathbf{v}_0):\mathcal{D}(\mathbf{h}) + \big[\partial_t\mathbf{h}-\Delta\mathbf{h}+[(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla]\mathbf{h} +\\ &\quad+(\mathbf{h}\cdot\nabla)(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})\big]\cdot(\mathbf{q}-\Psi(\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_\infty))\Big)\,d\mathbf{x}\,dt + \int\limits_{\Sigma_{T-\delta}}\Big(\mathbf{h}\cdot 2\mathcal{D}(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})\mathbf{n}+\mathbf{h}\cdot\partial_n\mathbf{q}\Big)\,ds\,dt +\\ &\quad+\int\limits_{\Omega}(\mathbf{q}(T-\delta,\mathbf{x})-\Psi(\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_\infty))\cdot\mathbf{h}(T-\delta,\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega}(\widehat{\mathbf{w}}(T,\mathbf{x})+\mathbf{v}_0(\mathbf{x})-\mathbf{v}_\infty)\cdot\mathbf{h}(T,\mathbf{x})\,d\mathbf{x} +\\ &\quad+\int\limits_{\Sigma}\Big(\mathbf{h}\cdot(\widehat{\mathbf{w}}-\mathbf{v}_\infty)\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{n}+\frac{1}{2}|\widehat{\mathbf{w}}-\mathbf{v}_\infty|^2\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}+N[\partial_t\widehat{\mathbf{w}}\cdot\partial_t\mathbf{h}+\nabla_\tau\widehat{\mathbf{w}}:\nabla_\tau\mathbf{h}+\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{h}]\Big)\,ds\,dt = 0\\ &\forall\,\mathbf{h}\in\mathbf{V}_A^{1,2}(Q).\end{aligned} \tag{9.43}$$

Отметим, что из (9.37) и (9.40) следует равенство

$$\int\limits_{\partial\Omega}\widetilde{r}(t,\cdot)\,ds = 0 \quad \text{для п.в. } t\in(0,T). \tag{9.44}$$

Выражая $\nabla\widetilde{r}$ из (9.16), получим, что первый интеграл по $Q_{T-\delta}$ в (9.43) равен

$$\int\limits_{Q_{T-\delta}}\mathbf{h}\cdot\nabla\widetilde{r}\,d\mathbf{x}\,dt = \int\limits_{\Sigma_{T-\delta}}\mathbf{h}\cdot\widetilde{r}\,\mathbf{n}\,ds,$$

причем интегрирование по частям здесь возможно в силу (9.23). Таким образом, (9.43) сводится к

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_\delta}\Big\{2D(\mathbf{h}):D(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})+[\partial_t\mathbf{h}-\Delta\mathbf{h}+((\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla)\mathbf{h}+\\
&\qquad\qquad +(\mathbf{h}\cdot\nabla)(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})]\cdot(\mathbf{q}-\Psi(\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_\infty))\Big\}\,d\mathbf{x}\,dt+\\
&+\int\limits_{\Sigma_{T-\delta}}\mathbf{h}\cdot 2D(\widehat{\mathbf{w}}+\mathbf{v}_0)\mathbf{n}\,ds\,dt+\int\limits_{\Sigma_{T-\delta}}\mathbf{h}\cdot(\partial_n\mathbf{q}+\widetilde{r}\mathbf{n})\,ds\,dt+\\
&+\int\limits_{\Omega}\Big(\mathbf{h}(T,\mathbf{x})\cdot(\widehat{\mathbf{w}}(T,\mathbf{x})+\mathbf{v}_0(\mathbf{x})-\mathbf{v}_\infty)+\\
&\qquad +\mathbf{h}(T-\delta,\mathbf{x})\cdot(\mathbf{q}(T-\delta,\mathbf{x})-\Psi(\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_\infty))\Big)\,d\mathbf{x}+\\
&+\int\limits_{\Sigma}\Big(\mathbf{h}\cdot(\widehat{\mathbf{w}}-\mathbf{v}_\infty)\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{n}+\frac{1}{2}|\widehat{\mathbf{w}}-\mathbf{v}_\infty|^2\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}\Big)\,ds\,dt+\\
&+\int\limits_{\Sigma}\Big(N(\partial_t\mathbf{w}\cdot\partial_t\mathbf{h}-\nabla_\tau\mathbf{w}:\nabla_\tau\mathbf{h}+\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{h})\Big)\,ds\,dt=0\quad\forall\,\mathbf{h}\in\mathbf{V}^{1,2}_A(Q).
\end{aligned}
\tag{9.45}
$$

Перейдем теперь к пределу в (9.45) при $\delta\to 0$. Интеграл по Q_δ стремится к нулю при $\delta\to0$, так как $\mathbf{h}\in\mathbf{V}^{1,2}_A(Q)$, $(q-\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_\infty)\in L_{A^*}(Q)$ и $\operatorname{meas}(Q_\delta)\to 0$. В силу леммы 9.3, имеем

$$
\int\limits_{\Sigma_{T-\delta}}\mathbf{h}\cdot 2\mathcal{D}(\widehat{\mathbf{w}}+\mathbf{v}_0)\mathbf{n}\,ds\,dt\to\int\limits_{\Sigma_T}\mathbf{h}\cdot 2\mathcal{D}(\widehat{\mathbf{w}}+\mathbf{v}_0)\mathbf{n}\,ds\,dt\quad\text{при }\delta\to0.
$$

Так как поле $\mathbf{q}$ является решением задачи (5.21), то в силу предложения 5.2 и леммы 5.1 оно удовлетворяет энергетическому неравенству и поэтому $\mathbf{q}\in C([0,T];\mathbf{L}^2_w(\Omega))$, где $\mathbf{L}^2_w(\Omega)$ — это пространство $\mathbf{L}^2(\Omega)$, снабженное слабой топологией. Следовательно, интеграл по Ω в (9.45) стремится к нулю при $\delta\to0$ в силу теоремы 9.1 и того, что $\mathbf{h}\in\mathbf{V}^{1,2}_A(Q)\subset C([0,T];\mathbf{L}_A(\Omega))$. Кроме того

$$
\int\limits_{\Sigma_{T-\delta}}\mathbf{h}\cdot(\partial_n\mathbf{q}+\widetilde{r}\mathbf{n})\,ds\,dt\to\int\limits_{\Sigma_T}\mathbf{h}\cdot(\partial_n\mathbf{q}+\widetilde{r}\mathbf{n})\,ds\,dt\quad\text{при }\delta\to0.
\tag{9.46}
$$

Действительно, равенство (9.45) справедливо при всех $\delta>0$, и каждый член в (9.45), за исключением $\int\limits_{\Sigma_{T-\delta}}\mathbf{h}\cdot(\partial_n\mathbf{q}+\widetilde{r}\mathbf{n})\,ds\,dt$, имеет предел при $\delta\to0$. В силу этого интеграл $\int\limits_{\Sigma_{T-\delta}}\mathbf{h}\cdot(\partial_n\mathbf{q}+\widetilde{r}\mathbf{n})\,ds\,dt$ имеет предел, который, согласно определению несобственных интегралов, равен правой части соотношения (9.46). Следовательно, переходя к пределу в (9.45) при $\delta\to0$, получим, что

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Sigma}\Big(\mathbf{h}\cdot 2\mathcal{D}(\widehat{\mathbf{w}}+\mathbf{v}_0)\mathbf{n}+\mathbf{h}\cdot(\partial_n\mathbf{q}+\widetilde{r}\mathbf{n})+\mathbf{h}\cdot(\widehat{\mathbf{w}}-\mathbf{v}_\infty)\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{n}+\frac12|\widehat{\mathbf{w}}-\mathbf{v}_\infty|^2\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}+\\
&\qquad +N(\partial_t\widehat{\mathbf{w}}\cdot\partial_t\mathbf{h}+\nabla_\tau\widehat{\mathbf{w}}:\nabla_\tau\mathbf{h}+\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{n})\Big)\,ds\,dt=0\quad\forall\,\mathbf{h}\in\mathbf{V}^{1,2}_A(Q).
\end{aligned}
\tag{9.47}
$$

Покажем теперь, что

$$
\int\limits_{\partial\Omega}\partial_n\mathbf{q}\cdot\mathbf{h}\,ds=2\int\limits_{\partial\Omega}\mathbf{h}\cdot\mathcal{D}(\mathbf{q})\mathbf{n}\,ds.
\tag{9.48}
$$

При почти всех $t\in[0,T]$ справедливо тождество Грина

$$
\int\limits_{\Omega}\nabla\mathbf{q}:\nabla\mathbf{h}\,d\mathbf{x}=\int\limits_{\partial\Omega}\partial_n\mathbf{q}\cdot\mathbf{h}\,ds-\int\limits_{\Omega}\mathbf{h}\cdot\Delta\mathbf{q}\,d\mathbf{x}.
\tag{9.49}
$$

Так как $\mathbf{q}\big|_{\partial\Omega}=\mathbf{0}$ и $\operatorname{div}\mathbf{h}=0$, то

$$
\int\limits_{\Omega}\nabla\mathbf{q}:\nabla\mathbf{h}\,d\mathbf{x}=\int\limits_{\Omega}[\nabla\mathbf{q}+(\nabla\mathbf{q})^T]:\nabla\mathbf{h}\,d\mathbf{x}=2\int\limits_{\Omega}\nabla\mathbf{h}\cdot\mathcal{D}(\mathbf{q})\,d\mathbf{x},
$$

поэтому, применяя тождество Грина к последнему члену, получим, что

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{q} : \nabla \mathbf{h} \, d\mathbf{x} = 2 \int_{\partial\Omega} \mathbf{h} \cdot \mathcal{D}(\mathbf{q})\mathbf{n} \, ds - \int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot \Delta \mathbf{q} \, d\mathbf{x}. \tag{9.50}$$

Из равенств (9.49) и (9.50) следует (9.48).

Учитывая (9.36), (9.39) и используя (9.37) и (9.48), можно преобразовать (9.47) в (9.41). □

9.4. Система оптимальности. Теперь мы готовы записать систему оптимальности для задачи II в виде краевой задачи. Лапласиан $\Delta_\tau \mathbf{u}$, заданный на поверхности $\partial\Omega$ (и на Σ), определяется формулой

$$\int_{\partial\Omega} \nabla_\tau \mathbf{u} : \nabla_\tau \mathbf{v} \, ds = -\int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \Delta_\tau \mathbf{u} \, ds, \tag{9.51}$$

где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ являются сужениями полей $\mathbf{w}_i \in \mathbf{V}^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, на $\partial\Omega$, т.е. $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1\big|_{\partial\Omega}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{w}_2\big|_{\partial\Omega}$.

Теорема 9.2. *Пусть* $(\widehat{\mathbf{w}}, \nabla\widehat{p}) \in \mathbf{W}(Q) \times \mathbf{L}^2(Q)$ *является решением* задачи II, *а* $\mathbf{q}$ — *множитель Лагранжа, заданный в* (8.31) *посредством поля* $\widehat{\mathbf{q}}$, *введенного в теореме* 8.2. *Тогда существует такая функция* r, *определенная в* (9.37), *что четверка* $(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{p}, \mathbf{q}, r)$ *удовлетворяет следующим уравнениям в частных производных*:

$$\partial_t \widehat{\mathbf{w}} - \Delta\widehat{\mathbf{w}} + [(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}}) \cdot \nabla]\widehat{\mathbf{w}} + (\widehat{\mathbf{w}} \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 + \nabla\widehat{p} = \mathbf{0} \qquad \text{в } Q, \tag{9.52}$$

$$-\partial_t \mathbf{q} - \Delta\mathbf{q} - [(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}}) \cdot \nabla]\mathbf{q} + [\nabla(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{w}})]^T \mathbf{q} + \nabla r = \Phi - \nabla\widehat{p} \qquad \text{в } Q, \tag{9.53}$$

$$\operatorname{div} \widehat{\mathbf{w}} = 0 \qquad \text{и} \qquad \operatorname{div} \mathbf{q} = 0 \qquad \text{в } Q, \tag{9.54}$$

где Φ *определено в* (9.6), *а* $\widehat{p}$ *и* r *удовлетворяют равенствам* (9.40). *Кроме того,* $(\widehat{\mathbf{w}}, \mathbf{q})$ *удовлетворяют начальному условию и условию при* $t = T$:

$$\widehat{\mathbf{w}}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{q}(T, \mathbf{x}) + \widehat{\mathbf{w}}_\sigma(T, \mathbf{x}) = P\Psi_1 \quad \text{в } \Omega, \tag{9.55}$$

где по определению $\mathbf{v}_\sigma = P\mathbf{v}$ *является* $\mathbf{V}^0_0(\Omega)$-*проекцией вектора* $\mathbf{v}$, *функция* Ψ_1 *определена в* (9.5), (8.30). *Пара* $(\widehat{\mathbf{w}}, \mathbf{q})$ *удовлетворяет также краевым условиям на боковой поверхности цилиндра*:

$$\mathbf{q}\big|_\Sigma = \mathbf{0} \tag{9.56}$$

и

$$\big[N(-\partial_{tt}\widehat{\mathbf{w}} - \Delta_\tau \widehat{\mathbf{w}}) + \mathcal{A}(\widehat{\mathbf{w}}) + \mathcal{T}(\mathbf{q}, \tau)\mathbf{n} + \mathcal{T}(\widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0, \widehat{p})\mathbf{n} + 2\mathcal{D}(\mathbf{v}_0)\mathbf{n}\big]\big|_\Sigma = -\boldsymbol{\eta}(t)\mathbf{n}\big|_\Sigma, \tag{9.57}$$

где $\mathcal{T}(\widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0, \widehat{p})$ *и* $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \tau)$ *заданы в* (9.42),

$$\mathcal{A}(\widehat{\mathbf{w}}) = N\widehat{\mathbf{w}} + \frac{1}{2}|\widehat{\mathbf{w}} - \mathbf{v}_\infty|^2 \mathbf{n} + (\widehat{\mathbf{w}} - \mathbf{v}_\infty)\widehat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{n} \tag{9.58}$$

и

$$\boldsymbol{\eta}(t) = |\partial\Omega|^{-1} \int_{\partial\Omega} \big[N\Delta_\tau \widehat{\mathbf{w}} - \mathcal{A}(\widehat{\mathbf{w}})\big] \cdot \mathbf{n} \, ds \qquad \text{с} \qquad |\partial\Omega| = \int_{\partial\Omega} ds. \tag{9.59}$$

Кроме того $\widehat{\mathbf{w}}$ *удовлетворяет следующим условиям согласования*:

$$\Big(\widehat{\mathbf{w}}\big|_\Sigma\Big)\Big|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad \partial_t\big(\widehat{\mathbf{w}}\big|_\Sigma\big)_\tau\Big|_{t=T} = \mathbf{0}, \qquad \Big(\big|(\widehat{\mathbf{w}} - \mathbf{v}_\infty)_\pi\big|_\Sigma + 2N\partial_t\big(\widehat{\mathbf{w}}\big|_\Sigma\big) \cdot \mathbf{n}\Big)\Big|_{t=T} = 0, \tag{9.60}$$

причем $(\widehat{\mathbf{w}}|_\Sigma)_\tau$ — *тангенциальная проекция векторного поля* $\widehat{\mathbf{w}}\big|_\Sigma$ *на* Σ, *а* $\mathbf{w}_\pi$ — *проекция* $\mathbf{w}$, *связанная с разложением Вейля пространства* $\mathbf{V}^0(\Omega)$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_\sigma + \nabla w_\pi, \tag{9.61}$$

где $\mathbf{w}_\sigma \in \mathbf{V}^0_0(\Omega)$ *и* $\nabla w_\pi \in \nabla H_\pi(\Omega) \equiv \nabla H_\pi(\Omega) \equiv \{\nabla\tau \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \tau \in H^1_{\text{loc}}(\Omega), \Delta\tau = 0\}$. *Первообразная* w_π *поля* ∇w_π *определяется с помощью равенства*

$$\int_{\partial\Omega} w_\pi \, ds = 0. \tag{9.62}$$

Доказательство. Равенства в (9.40) являются условиями для однозначного определения $\widehat{p}$ и r и всегда могут быть удовлетворены добавлением к $\widehat{p}$ и r соответствующих констант.

Соотношение (9.52) и первые равенства из (9.54) и (9.55) взяты из формулировки задачи II и удовлетворяются автоматически. Соотношения (9.53), (9.56) и второе из равенств (9.54) установлены в теореме 9.1.

Из равенств (9.41) и (9.51) следует, что

$$\int\limits_{\Sigma} \mathbf{h} \cdot \Big(\mathcal{T}(\widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0, \widehat{p})\mathbf{n} + \mathcal{T}(\mathbf{q}, r)\mathbf{n} + 2\mathcal{D}(\mathbf{v}_0)\mathbf{n} + \mathcal{A}(\widehat{\mathbf{w}}) + \big[N(-\partial_{tt}\widehat{\mathbf{w}} - \Delta_\tau \widehat{\mathbf{w}})\big] \Big)\, ds\, dt = 0 \tag{9.63}$$

для всех $\mathbf{h} \in \mathbf{V}_A^{1,2}(Q)$, $\mathbf{h}(T, \cdot) = 0$, где $\mathcal{T}(\widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0, \widehat{p})$, $\mathcal{T}(\mathbf{q}, r)$ и $\mathcal{A}(\widehat{\mathbf{w}})$ определены в (9.42) и (9.58). В [21], [17, Гл. 5] доказано, что

$$\int\limits_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \Big(\mathcal{T}(\widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0, \widehat{p})\mathbf{n} + \mathcal{T}(\mathbf{q}, r)\mathbf{n} + 2\mathcal{D}(\mathbf{v}_0)\mathbf{n} - N\partial_{tt}\widehat{\mathbf{w}} \Big)\, ds\, dt = 0. \tag{9.64}$$

Напомним, что по предположению $\partial\Omega$ — связное множество. В случае несвязных множеств доказательство аналогично, но в формулах (9.57) и (9.59) нужно изменить $\eta(t)$ на $\eta_j(t)$ и $\partial\Omega$, Σ на $\partial\Omega_j$, $\Sigma_j = (0, T) \times \partial\Omega_j$, где $\partial\Omega_j$ — связные компоненты множества $\partial\Omega$. Как хорошо известно (см. [22]), векторное поле $\mathbf{g}(x'), x' \in \partial\Omega$, является сужением на $\partial\Omega$ соленоидального векторного поля, определенного на Ω в том и только том случае, если $\int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}\, ds = 0$. Следовательно, из (9.63) и (9.64) вытекает (9.57) с $\eta(t)$, определенным в (9.59).

Соотношения (9.60) доказываются так же как в [21], [17, Гл. 5]. □

10. Система оптимальности для задачи I

Выведем теперь систему оптимальности для задачи I.

Теорема 10.1. *Предположим, что* $(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{p}) \in \mathbf{W}(Q) \times \mathbf{L}^2(Q)$ *является решением* задачи I. *Тогда существует такая тройка* $(\mathbf{q}, \nabla\tau, \lambda) \in L^2(0, T; \mathbf{V}_\sigma^1(\Omega)) \times \mathbf{L}^2(Q) \times \mathbb{R}_+$, *что* $(\mathbf{q}, \nabla\tau, \lambda) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0}, 0)$ *и* $(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{p}, \mathbf{q}, \tau, \lambda)$ *удовлетворяют* (9.52)–(9.56), (9.40) *и граничным условиям*

$$\lambda(-\partial_{tt}\widehat{\mathbf{w}} - \Delta_\tau \widehat{\mathbf{w}}) + \widetilde{\mathcal{A}}(\widehat{\mathbf{w}}) + \mathcal{T}(\mathbf{q}, \tau)\mathbf{n} + \mathcal{T}(\widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0, \widehat{p})\mathbf{n} + \mathcal{D}(\mathbf{v}_0)\mathbf{n} = -\widetilde{\boldsymbol{\eta}}(t)\mathbf{n}, \tag{10.1}$$

где $\mathcal{T}(\widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{v}_0, \widehat{p})$ *and* $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \tau)$ *определены в* (9.45),

$$\widetilde{\mathcal{A}}(\widehat{\mathbf{w}}) = \lambda\widehat{\mathbf{w}} + \frac{1}{2}|\widehat{\mathbf{w}} - \mathbf{v}_\infty|^2\mathbf{n} + (\widehat{\mathbf{w}} - \mathbf{v}_\infty)\widehat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{n} \tag{10.2}$$

и

$$\widetilde{\boldsymbol{\eta}}(t) = |\partial\Omega|^{-1} \int\limits_{\partial\Omega} \Big(\lambda\Delta_\tau \widehat{\mathbf{w}} - \widetilde{\mathcal{A}}(\widehat{\mathbf{w}})\mathbf{n} \Big)\, ds \qquad c \qquad |\partial\Omega|^{-1} = \int\limits_{\partial\Omega} ds. \tag{10.3}$$

При этом выполнены следующие условия согласования:

$$\lambda\partial_t\big(\widehat{\mathbf{w}}\big|_\Sigma\big)_\tau\Big|_{t=T} = \mathbf{0} \quad и \quad \Big(\widehat{w}_\pi\big|_\Sigma + 2\lambda\partial_t\big(\widehat{\mathbf{w}}\big|_\Sigma\big) \cdot \mathbf{n}\Big)\Big|_{t=T} = 0, \tag{10.4}$$

где $\widehat{\mathbf{w}}_\tau$ — *тангенциальная проекция* $\widehat{\mathbf{w}}$ *на* Σ *и* $\widehat{w}_\pi$ *определено в* (9.61) *и* (9.62). *Кроме того справедливы условия неотрицательности и дополняющей нежесткости, т.е.*

$$\lambda \geqslant 0 \tag{10.5}$$

и

$$\lambda\Big[\int\limits_{\Sigma} \Big(|\partial_t \widehat{\mathbf{w}}|^2 + |\nabla_\tau \widehat{\mathbf{w}}|^2 + |\widehat{\mathbf{w}}|^2 \Big)\, ds\, dt - M \Big] = 0. \tag{10.6}$$

Доказательство. Сначала выводится слабая форма системы оптимальности для задачи I точно так же, как это сделано в соответствующей части теоремы 5.3 из [17, Гл. 2] для двумерного случая:

$$\begin{aligned}
&\lambda_0 \int\limits_Q \mathcal{D}(\widehat{\mathbf{w}}+\mathbf{v}_0) : \mathcal{D}(\mathbf{h})\, d\mathbf{x}\, dt + \\
&+ \int\limits_Q \big\{\partial_t \mathbf{h} - \Delta \mathbf{h} + [(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla]\mathbf{h} + (\mathbf{h}\cdot\nabla)(\mathbf{v}_0+\widehat{\mathbf{w}})\big\}\cdot \widehat{\mathbf{q}}\, d\mathbf{x}\, dt + \\
&+ \int\limits_\Omega (\widehat{\mathbf{w}}(T,\mathbf{x}) + \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_\infty)\cdot \mathbf{h}\, d\mathbf{x} + \int\limits_\Sigma \Big(\mathbf{h}\cdot(\widehat{\mathbf{w}}-\mathbf{v}_\infty)\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{n} + \frac{1}{2}|\widehat{\mathbf{w}}-\mathbf{v}_\infty|^2 \mathbf{h}\cdot\mathbf{n} + \\
&\qquad + \lambda[\partial_t\widehat{\mathbf{w}}\cdot\partial_t\mathbf{h} + \nabla_\tau\widehat{\mathbf{w}} : \nabla_\tau \mathbf{h} + \widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{h}]\Big)\, ds\, dt = 0 \quad \forall\, \mathbf{h}\in \mathbf{V}^{1,2}_A(Q).
\end{aligned} \tag{10.7}$$

Разница между этим интегральным равенством и (8.20) в том, что в (10.7) параметр N заменен на λ, перед первым членом стоит множитель λ_0. Поэтому если повторить все соображения, с помощью которых получены утверждения теоремы 9.2, то мы получим систему оптимальности (9.52)–(9.62), в которой N заменено на λ, а все члены, порожденные первым членом из (8.20) умножены на λ_0. Следовательно, чтобы доказать теорему 10.1, нужно показать, что $\lambda_0 \neq 0$. Это делается аналогично соответствующей части доказательства теоремы 5.3 в [17, Гл. 5]. Как и в той теореме, из предположения $\lambda_0 = 0$ выводится неравенство $\lambda > 0$. В итоге доказательство сводится проверке следующего утверждения:

$$\begin{aligned}
&\text{существует } \mathbf{y}\in\gamma_\Sigma \mathbf{V}^{1,2}_A(Q) \text{ такое, что} \\
&\int\limits_\Sigma \Big(\partial_t\widehat{\mathbf{w}}\cdot\partial_t\mathbf{y} + \nabla_\tau\widehat{\mathbf{w}} : \nabla_\tau\mathbf{y} + \widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{y}\Big)\, ds\, dt \neq 0.
\end{aligned} \tag{10.8}$$

Здесь $\gamma_\Sigma \mathbf{V}^{1,2}_A(Q)$ — множество сужений векторных полей, принадлежащих $\mathbf{V}^{1,2}_A(Q)$.

Утверждение (10.8) доказывается от противного. В силу (6.12) решение $\widehat{\mathbf{w}}$ задачи I удовлетворяет включению $\widehat{\mathbf{w}}\in\mathbf{H}^1(\Sigma)$ и $\int\limits_{\partial\Omega} \widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{n}\, ds = 0$ для почти всех $t\in(0,T)$. Как хорошо известно, существует последовательность $\mathbf{y}_n(t,x)\in\mathbf{C}^\infty(Q)$, $\int\limits_{\partial\Omega}\mathbf{y}_n\cdot\mathbf{n}\, ds = 0$ при почти всех $t\in(0,T)$, такая, что $\|\widehat{\mathbf{w}}-\mathbf{y}_n\|_{\mathbf{H}^1(\Sigma)}\to 0$ при $n\to 0$. Хорошо известно (и доказательство легко восстанавливается, например, из [22]), что существуют такие $\mathbf{z}_n\in\mathbf{V}^{1,2}_A(Q)$, что $\mathbf{z}_n\big|_\Sigma = \mathbf{y}_n$. Следовательно, из (10.6) и (10.8) следует, что

$$0 = \int\limits_\Sigma \Big(\partial_t\widehat{\mathbf{w}}\cdot\partial_t\mathbf{y}_n + \nabla_\tau\widehat{\mathbf{w}} : \nabla_\tau\mathbf{y}_n + \widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{y}_n \to\Big)\, dsdt \to \int\limits_\Sigma \Big(|\partial_t\widehat{\mathbf{w}}|^2 + |\nabla_\tau\widehat{\mathbf{w}}|^2 + |\widehat{\mathbf{w}}|^2\Big)\, ds\, dt = M.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида// УМН —1964. —*19*, № 4. — С. 43–161.
2. *Адамс Р. А., Фурнье Дж. Дж. Ф.* Пространства Соболева. — Новосибирск: Тамара Рожковская, 2009.
3. *Алексеев Г. В., Терешко Д. А.* Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. — Владивосток: Дальнаука, 2008.
4. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные апредставления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
6. *Вишик М. И., Фурсиков А. В.* Математические задачи статистической гидромеханики. — М.: Наука, 1980.
7. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Обобщенные функции. Т.4. Некоторые приложения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. — М.: Физматлит, 1961.
8. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
9. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции ипространства Орлича. — М.: Физматлит, 1958.

10. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1979.
11. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. — М.: Наука, 1987.
12. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
13. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. — М.: Изд-во. иностр. лит., 1960.
14. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса. — М.: Мир, 1981.
15. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
16. *Фурсиков А. В.* Задачи управления и теоремы, касающиеся однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для трехмерных уравнений Навье—Стокса и Эйлера// Мат. сб —1981. —*115*, № 2. — С. 281–307.
17. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
18. *Фурсиков А. В., Эмануилов О. Ю.* Точная управляемость уравнений Навье—Стокса и Буссинеска// УМН —1999. —*54*, № 3. — С. 93–146.
19. *Шварц Л.* Анализ. Т.2 — М.: Мир, 1972.
20. *Шорыгин П. О.* Аппроксимативная управляемость системы Навье—Стокса в неограниченных областях// Мат. сб. —2003. —*194*, № 11. — С. 141–160.
21. *Fursikov A. V., Gunzburger M., Hou L.* Boundary value problems and boundary optimal control for the Navier-Stokes systems: the two dimensional case// SIAM J. Control Optim. —1998. — *36*. — С. 852–894.
22. *Fursikov A. V., Gunzburger M., Hou L.* Trace theorems for three-dimensional time-dependent solenoidal vector fields and their applications// Trans. Amer. Math. Soc. —2002. — *354*. — С. 1079–1116.
23. *Fursikov A. V., Gunzburger M., Hou L.* Boundary value problems for three-dimensional evolutionary Navier-Stokes equations// J. Math. Fluid Mech. —2002. — *4*. — С. 45–75.
24. *Fursikov A. V., Gunzburger M., Hou L.* Optimal boundary control for evolutionary Navier-Stokes system:: the three-dimensional case// SIAM J. Control Optim. —2005. — *43*. —С. 2191–2232.
25. *Galdi G. P.* An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. *Vol. II* — New York.: Springer, 1994.
26. *Galdi G. P.* On the steady self-propelled motion of a body in a viscous incompressible fluid// Arch. Ration. Mech. Anal. —1999. — *148*. —С. 53–88.

А. В. Фурсиков

Москва 119991, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет

E-mail: `fursikov@gmail.com`