Стабилизация параболических уравнений (материалы по курсу лекций).

А.В.Фурсиков
Механико-Математический факультет
Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова

Иркутск 25-30 июня 2008г.

1. **Предисловие.**

Предлагаемый текст содержит изложение метода стабилизации эволюционных уранений параболического типа с помощью управления с обратной связью, заданного на границе области. На эту тему автор планирует прочитать лекции на школе-семинаре "Нелинейный анализ и экстремальные задачи"(Иркутск, 25-30 июня 2008г.) Лекции базируются на результатах автора [5]-[11] по стабилизации уравнений Навье-Стокса. Теория стабилизации в лекциях будет излагаться на примере уравнения Гинзбрга-Ландау. Так как это уравнение значительно проще системы Навье-Стокса, в лекциях удалось существенно упростить изложение по сравнению с [5]-[11]: основной шаг конструкции стабилизации (параграфы 3-5) занимает в лекциях с полными доказательствами всего около 10 страниц. Теория реальных процессов (т.е. численный метод стабилизации) изложен частично: с полными доказательствами рассмотрен случай линейного уравнения, а для нелинейного уравнения мы ограничились лишь формулировками результатов. Полные доказательства этого раздела можно найти в [8], [9]. Целиком за рамками этих лекций оказалась теория удержания стабилизируемого процесса около неустойчивого положения равновесия: она базируется на недавних результатах по эргодической теории эволюционных уравнений параболического типа, изложение которых в столь кратком курсе лекций нереально. Желающие могут ознакомиться с этой теорией удержания стабилизируемого процесса в [4]. В заключение отметим, что к сожалению не все работы [4]-[11] по теории стабилизации опубликованы в журналах, легко доступных в России. Однако все эти работы помещены на сайте http://mech.math.msu.su/ fursikov/index.php , откуда любой желающий их может легко получить.

2. **Простейший пример.**

2.1. **Постановка задачи стабилизации в простейшем случае.** В этом параграфе мы изложим идею метода решения задачи стабилизации с заданной скоростью с помощью граничного управления. Для этого мы рассмотрим простейшее параболическое уравнение

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} - \alpha y(t,x) = 0, \tag{2.1}$$

заданное при $x \in (-\pi/2, \pi/2),\ t > 0$, с начальным условием

$$y(t,x)|_{t=0} = y_0(x), \tag{2.2}$$

где $\alpha > 1, y_0(x) \in L_2(-\pi/2, \pi/2)$.

Мы включили в уравнение (2.1) член с α, чтобы это уравнение имело экспоненциально растущие решения. Действительно, при $y_0(x) = \cos x$ у (2.1) имеется решение $y(t,x) = \cos x e^{(\alpha-1)t}$.

Пусть задано положительное число σ_0. Задача стабилизируемости эволюционной системы (2.1), (2.2) с заданной скоростью σ_0 с помощью граничного управления состоит в следующем. Требуется построить такое граничное управление $u_-(t), u_+(t)$, чтобы решение $y(t,\cdot)$ задачи (2.1), (2.2), снабженной граничными условиями:

$$y(t,x)|_{x=-\pi/2} = u_-(t), \quad y(t,x)|_{x=\pi/2} = u_+(t), \tag{2.3}$$

стремилось к нулю при $t \to \infty$ следующим образом:

$$\| y(t,\cdot) \|_{L_2(-\pi/2,\pi/2)} \le c e^{-\sigma_0 t}. \tag{2.4}$$

Здесь константа $c > 0$ зависит от начального условия y_0 и числа σ_0 .

2.2. **Основная идея метода стабилизации.** Идея метода стабилизации состоит в следующем: мы расширим задачу (2.1),(2.2),(2.3) с прямоугольника $Q = \{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times (-\pi/2, \pi/2)\}$ на цилиндр $\Pi = \mathbb{R}_+ \times S$, где S- это окружность, т.е. отрезок $(-\pi, \pi)$ с отождествленными концами $-\pi$ и π. При этом мы временно отбросим условие (2.3). Другими словами мы будем рассматривать уравнение (2.1) при $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi)$ с периодическими краевыми условиями:

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} - \alpha z(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

$$z(t, x + 2\pi) = z(t,x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Снабдим систему (2.5),(2.6) начальным условием

$$z(t,x)|_{t=0} = z_0(x), \tag{2.7}$$

и решим задачу (2.5)-(2.7) методом Фурье. В результате получим, что

$$z(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{z}_0(k) e^{-(k^2-\alpha)t} e^{ikx}, \tag{2.8}$$

где

$$\hat{z}_0(k) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} z_0(x) dx \tag{2.9}$$

-коэффициенты Фурье функции $z_0(x)$. Очевидно, что если

$$\hat{z}_0(k) = 0 \qquad \text{при} \quad |k| < \sqrt{\sigma_0 + \alpha}, \tag{2.10}$$

то решение (2.8) задачи (2.5)-(2.7) удовлетворяет неравенству

$$\| z(t,\cdot) \|_{L_2(-\pi,\pi)} \le c e^{-\sigma_0 t}. \tag{2.11}$$

Пусть $\gamma_{(-\pi/2,\pi/2)}$ - это оператор сужения функции $z(x),\ x \in \mathbb{R}$ на интервал $(-\pi/2,\pi/2)$, а $\gamma_{-\pi/2},\ \gamma_{\pi/2}$ - операторы сужения функции $z(x)$ соответственно при $x=-\pi/2$ и $x=\pi/2$ Определим оператор R обратной связи соотношением

$$(y(t,\cdot),u_{\pm}(t)) = Rz(t,\cdot), \qquad \text{где} \quad R = (\gamma_{(-\pi/2,\pi/2)}, \gamma_{-\pi/2}, \gamma_{\pi/2}). \tag{2.12}$$

Очевидно, из (2.11),(2.12) следует (2.4).

Таким образом центральный шаг предлагаемого метода стабилизации состоит в построении такого оператора продолжения

$$E : L_2(-\pi/2,\pi/2) \longrightarrow L_2(-\pi,\pi), \quad ((\gamma_{(-\pi/2,\pi/2)} Ly)(x) \equiv y(x), \tag{2.13}$$

преобразующего начальное условие $y_0(x)$ из (2.2) в начальное условие $z_0(x)$ из (2.7): $z_0 = Ey_0$, что коэффициенты Фурье $\hat{z}_0(k)$ функции $z_0 = Ey_0$ удовлетворяют (2.10).

Лемма 2.1. *Для любого $\sigma > 0$ существует оператор продолжения (2.13) такой, что при любом $y_0(x) \in L_2(-\pi/2,\pi/2)$*

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}(Ey_0)(x)dx = 0 \quad \forall k :\ |k| < \sqrt{\sigma_0+\alpha}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Определим оператор (2.13) формулой

$$Ey_0(x) = \begin{cases} y_0(x), & x \in (-\pi/2,\pi/2) \\ z(x), & x \in (-\pi,-\pi/2)\bigcup(\pi/2,\pi) \end{cases} \tag{2.15}$$

где функция $z(x)$ подлежит определению. В силу (2.14) $z(x)$ должна удовлетворять системе уравнений.

$$\int\limits_{(-\pi,-\pi/2)\cup(\pi/2,\pi)} e^{-ikx}z(x)dx = -\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ikx}y_0(x)dx \equiv -2\pi\hat{y}_0(k) \tag{2.16}$$

Будем искать $z(x)$ в виде

$$z(x) = \sum_{|j|<\sqrt{\sigma_0+\alpha}} \hat{z}(j)e^{ijx} \tag{2.17}$$

Подставляя (2.17) в (2.16) получим систему уравнений для определения $\hat{z}(j)$:

$$\sum_{-\sqrt{\sigma_0+\alpha}<j<\sqrt{\sigma_0+\alpha}} a_{kj}\hat{z}(j) = -2\pi\hat{y}_0(k), \quad -\sqrt{\sigma_0+\alpha} < k < \sqrt{\sigma_0+\alpha}, \tag{2.18}$$

где $\hat{y}_0(k)$ определено в (2.16), а коэффициенты a_{jk} определяются соотношениями:

$$a_{kj} = \int\limits_{(-\pi,-\pi/2)\cup(\pi/2,\pi)} e^{i(j-k)x}dx \tag{2.19}$$

Матрица $A = \| a_{kj} \|$ положительно определена. Действительно, если

$$\Phi = \{\hat{\varphi}_k, -\sqrt{\sigma_0+\alpha} < k < \sqrt{\sigma_0+\alpha}\} \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \sum_k \hat{\varphi}_k e^{ikx},$$

то в силу (2.19)

$$(A\Phi,\Phi) = \sum_{k,j} a_{kj}\hat{\varphi}_j\bar{\hat{\varphi}}_k = \int\limits_{(-\pi,-\pi/2)\cup(\pi/2,\pi)} |\varphi(x)|^2 dx \geq 0. \tag{2.20}$$

Если при некотором Φ в (2.20) достигается равенство, то

$$\varphi(x) = \sum \hat{\varphi}_k e^{ikx} \equiv 0 \quad \text{и значит } e^{ik_0x}\varphi(x) = \sum \hat{\varphi}_k e^{i(k+k_0)x} \equiv 0 \qquad (2.21)$$

где $k_0 = [\sqrt{\sigma_0 + \alpha}] - 1$, а $[a]$ – целая часть числа a. Но левая часть последнего равенства (2.21)– это некоторый многочлен, суженный на единичную окружность комплексной плоскости. Так как он равен нулю в континууме точек этой окружности, то

$$\hat{\varphi}_k = 0 \quad \forall k.$$

Следовательно $\det \| a_{kj} \| \neq 0$ и поэтому система (2.18) и формула (2.17) однозначно определяют оператор (2.15), удовлетворяющий всем условиям леммы. □

3. Постановка задачи стабилизации для уравнения Гинзбурга-Ландау.

3.1. **Случай произвольного неустойчивого стационарного решения.** Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Рассмотрим следующую задачу для уравнения Гинзбурга-Ландау:

$$\partial_t w(t,x) - \nu\Delta w(t,x) - w(t,x) + w^3(t,x) = g(x), \quad x \in \Omega, t > 0 \qquad (3.1)$$

$$w(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = u(t,\cdot) \qquad (3.2)$$

$$w(t,x)|_{t=0} = w_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad (3.3)$$

где $\nu > 0$ – параметр, $g(x) \in L_2(\Omega), w_0(x) \in H^1(\Omega)$ – заданные функции, а w, u – неизвестные функции, причем u является управлением.

Напомним, что через $H^k(\Omega)$ обозначается пространство Соболева функций, принадлежащих $L_2(\Omega)$ вмете со всеми производными до порядка k. Норма этого пространства определяется формулой

$$\|v\|^2_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha v(x)|^2 dx, \qquad (3.4)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс с целыми неотрицательными $\alpha_j, j = 1, \dots, n$, причем $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, и $D^\alpha v(x) = \partial^{|\alpha|} v(x)/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$.

Предположим также, что задано стационарное решение $\widehat{w}(x) \in H^2(\Omega)$ задачи (3.1)–(3.3):

$$-\nu\Delta\widehat{w}(x) - \widehat{w}(x) + \widehat{w}^3(x) = g(x), \quad x \in \Omega, \qquad (3.5)$$

причем

$$\|\widehat{w}(x) - w_0(x)\|_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon \qquad (3.6)$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Предположим также, что стационарное решение $\widehat{w}$ не устойчиво.

Задача стабилизации системы (3.1)–(3.3) формулируется следующим образозь: найти такое управление $u(t,x'), x' \in \partial\Omega, t > 0$ что решение $w(t,x)$ граничной задачи (3.1)-(3.3) с выбранным $u(t,x')$ удовлетворяет неравенству:

$$\|w(t,\cdot) - \hat{w}\|_{H^1(\Omega)} \leq ce^{-\sigma t} \ \ \forall\, t > 0, \qquad (3.7)$$

для некоторого $\sigma > 0$.

3.2. **Сведение к случаю нулевого стационарного решения.** Для исследования структуры динамической системы (3.1)– (3.3) в окрестности $\widehat{w}(x)$ сделаем следующую замену неизвестных функций в уравнениях (3.1)– (3.3):

$$w(t,x) = \widehat{w}(x) + z(t,x) \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (3.1)– (3.3), получим, учитывая (3.5), что

$$\partial_t z(t,x) + Az(t,x) + B(x, z(t,x)) = 0, \quad x \in \Omega, t > 0 \tag{3.9}$$

$$z(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = u(t,\cdot) - \widehat{w}|_{\partial\Omega} \equiv u_1(t,\cdot), \tag{3.10}$$

$$z(t,x)|_{t=0} = w_0(x) - \widehat{w}(x) \equiv z_0, \quad x \in \Omega, \tag{3.11}$$

где

$$Av(x) \equiv -\nu\Delta v(x) + q(x)v(x), \quad x \in \Omega; \qquad q(x) = 3\widehat{w}^2(x) - 1, \tag{3.12}$$

$$B(x,z) = z^3 + 3\widehat{w}(x)z^2 \tag{3.13}$$

а последние из равенств (3.10),(3.11) являются определеелением соответственно u_1 и z_0.

Очевидно, задача стабилизации для краевой задачи (3.1)–(3.3) эквивалентна следующей задачи стабилизации системы (3.9)–(3.11): найти такое управление $u_1(t,x'), x' \in \partial\Omega, t > 0$ что для решения $z(t,x)$ граничной задачи (3.9)–(3.11) с выбранным $u_1(t,x')$ справедлива оценка:

$$\|z(t,\cdot)\|_{H^1(\Omega)} \le ce^{-\sigma t} \quad \forall\ t > 0, \tag{3.14}$$

для некоторого $\sigma > 0$.

В дальнейшем мы сконцентрируемся на решении задачи стабилизации системы (3.9)–(3.11).

3.3. **Первый шаг конструкции.** Продолжим область Ω через ее границу $\partial\Omega$ до ограниченной области $G: \ \Omega \Subset G$ с границей ∂G класса C^∞:

$$G = \Omega \cup \partial\Omega \cup \omega, \quad \overline{\Omega} \cap \overline{\omega} = \partial\Omega, \quad \omega \text{ – ограниченная область} \tag{3.15}$$

Затем мы продолжим функцию $\widehat{w}(x)$ из (3.5) до функции $\widehat{v}(x) \in H^2(G) \cap H^1_0(G)$, где

$$H^1_0(G) = \{u(x) \in H^1(G) : u|_{\partial G} = 0\},$$

и продолжим формально задачу (3.9)–(3.11) с Ω до G следующим образом:

$$\partial_t y(t,x) + Ay(t,x) + B(x, y(t,x)) = 0, \quad x \in G, t > 0 \tag{3.16}$$

$$y(t,\cdot)|_{\partial G} = 0, \tag{3.17}$$

$$y(t,x)|_{t=0} = Ez_0(x) \equiv y_0(x), \qquad x \in G, \tag{3.18}$$

где

$$Ay(x) \equiv -\nu\Delta y(x) + q_1(x)y(x) \quad x \in G, \quad y|\partial G = 0; \qquad q_1(x) = 3\widehat{v}^2(x) - 1 \tag{3.19}$$

$$B(x,y) = y^3 + 3\widehat{v}(x)y^2 \tag{3.20}$$

причем функция $\widehat{v}(x)$ определена ниже равенства (3.15), а последнее равенство в (3.18) является определением функции $y_0(x)$.

Центральным в конструкции стабилизации является определение оператора продолжения E из (3.18). В следующем параграфе мы построем оператор E в случае линейного стабилизируемого уравнения.

4. **Задача стабилизации для линейного уравнения**

4.1. **Постановка задачи в линейном случае.** Рассмотрим задачу стабилизации для линейного аналога системы (3.9)–(3.11):

$$\partial_t z(t,x) + Az(t,x) = 0, \quad x \in \Omega, t > 0 \tag{4.1}$$

$$z(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = u_1(t,\cdot), \tag{4.2}$$

$$z(t,x)|_{t=0} = z_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.3}$$

где A– оператор (3.12). Задача стабилизации для этой системы ставится в точности так же, как в разделе 3.2:

найти такое управление $u_1(t,x'), x' \in \partial\Omega, t > 0$ что решение $y(t,x)$ граничной задачи (4.1)-(4.3) с выбранным $u_1(t,x')$ удовлетворяет неравенству:

$$\|y(t,\cdot)\|_{V(\Omega)} \le ce^{-\sigma t} \quad \forall\ t > 0, \tag{4.4}$$

для некоторого $\sigma > 0$.

Здесь $V(\Omega)$ – фазовое пространство динамической системы, порожденной задачей (4.1)-(4.3) (мы его не конкретизируем, так как в дальнейшем будем рассматривать разные $V(\Omega)$).

В точности как в разделе 3.3 продолжим задачу (4.1)–(4.3) с области Ω в область G. В результате получится следующий линейный аналог системы (3.16)–(3.18):

$$\partial_t y(t,x) + Ay(t,x) = 0, \quad x \in G, t > 0 \tag{4.5}$$

$$y(t,\cdot)|_{\partial G} = 0, \tag{4.6}$$

$$y(t,x)|_{t=0} = Ez_0(x) \equiv y_0, \quad x \in G, \tag{4.7}$$

Исследуем эту краевую задачу, чтобы выяснить, как мы должны строить оператор E.

4.2. **Инвариантные подпространства линейной задачи.** В качестве фазового пространства динамической системы, порожденной смешанной краевой задачей (4.5)–(4.7) возьмем для простоты пространство $L_2(G)$:

$$V \equiv V(G) = L_2(G) \tag{4.8}$$

Рассмотрим спектральную задачу

$$Ae = \lambda e \tag{4.9}$$

в пространстве $L_2(G)$, где A –оператор (3.19). Так как этот оператор самосопряженный, то у него имеется счетное множество собственных функций и собственных значений

$$\{e_k(x), \lambda_k\}, \qquad \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_k \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty \tag{4.10}$$

Предположим, что параметр ν таков, что собственные значения λ_k спектральной задачи (4.9) удовлетворяют условию:

$$\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_N < 0 < \lambda_{N+1} \le \cdots \le \lambda_k \tag{4.11}$$

Введем следующие подпространства фазового пространства V:

$$V_+ \equiv V_+(G) = [e_1, \dots, e_N], \quad V_- \equiv V_-(G) = [e_{N+1}, e_{N+2} \dots], \tag{4.12}$$

Другими словами, подпространство V_+ порождено собственными функциями e_k с отрицательными собственными значениями, а V_- порождено собственными функциями с положительными собственными значениями. Поэтому решения $e^{-\lambda_k t}e_k(x)$ уравнения (4.5) неограниченно растут при $t \to \infty$ для $k = 1, \dots, N$, и стремятся к нулю при $t \to \infty$ для $k > N$. Кроме того, решая задачу (4.5)-4.7) методом Фурье, легко видеть, что если начальное условие y_0 принадлежит V_- (или V_+) то решение $y(t, x)$ задачи (4.5)-(4.7) при каждом $t > 0$ принадлежит V_- (или, соответственно V_+). Поэтому V_- называется устойчивым инвариантным подпространством задачи (4.5)-(4.7) и V_+ называется неустойчивым инвариантным подпространством той же задачи.

Очевидно, справедливо следующее ортогональное разложение фазового пространства (4.12):

$$V = V_+ \oplus V_- \tag{4.13}$$

4.3. **Стабилизация линейного параболического уравнения.** Рассмотрим сейчас уравнения (4.5)–(4.7) как продолжение системы (4.1)–(4.3) в G. Чтобы закончить этот процессс продолжения, нам нужно продолжить начальное условие $z_0(x), x \in \Omega$ из (4.3) в начальное условие y_0 определенное на области G так, чтобы решение $y(t, x)$ краевой задачи (4.5)–(4.7) экспоненциально стремилось к нулю при $t \to \infty$.

Решая для этого задачу (4.5)–(4.7) методом Фурье, получим:

$$y(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_{0k} e^{-kt} e_k(x) \tag{4.14}$$

где $\{e_k(x)\}$ – базис (4.10) из собственных функций, а $y_{0,k}$ – коэффициенты Фурье начального условия y_0 в этом базисе. Так как правая часть равенства (4.14) экспоненциально стремится к нулю, она принадлежит V_- при каждом $t > 0$, и поэтому

$$y_{0,k} = 0 \quad \text{for} \quad r = 1, \dots, N \tag{4.15}$$

Это означает, что продолжение z_0 на G должно принадлежать $V_-(G)$.

Теорема 4.1. *Существует оператор продолжения*

$$E : L_2(\Omega) \longrightarrow V_-(G), \quad ((Ew)|_\Omega(x) \equiv w(x), \tag{4.16}$$

такой, что $y_0(x) = (Ew)(x)$ удовлетворяет (4.15).

Доказательство. Определим оператор (4.16) формулой

$$Ew(x) = \begin{cases} w(x), & x \in \Omega \\ z(x), & x \in G \setminus \Omega \end{cases} \tag{4.17}$$

в которой функцию $z(x)$ еще требуется определить. В силу (4.15) $z(x)$ должна удовлетворять системе уравнений:

$$\int_{G \setminus \Omega} e_k(x) z(x) dx = -\int_\Omega e_k(x) w(x) dx, \quad k = 1, \dots, N$$

Будем искать $z(x)$ в виде

$$z(x) = \sum_{j=1}^{N} \hat{z}(j) e_j(x)$$

Подстановка этого уравнения в предыдущее приводит к системе, определяющей $\hat{z}(j)$:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{kj} \hat{z}(j) = -\int_\Omega e_k(x) w(x) dx, \quad k = 1, \dots, N,$$

При этом коэффициенты a_{jk} определяются соотношениями:

$$a_{kj} = \int_{G\setminus\Omega} e_j(x)e_k(x)dx. \tag{4.18}$$

Справедлива

Лемма 4.1. *Матрица* $A =\| a_{kj} \|$ *положительно определенна.*

Эта лемма будет доказана в следующем разделе.

В силу Леммы 4.1 $\det \| a_{kj} \| \neq 0$ и поэтому соответствующая ей система уравнений однозначно определяет оператор (4.16),(4.17). Ограниченность оператора (4.16), (4.17) очевидна. $\square$

Теперь мы в состоянии доказать основную теорему этого параграфа.

Теорема 4.2. *Существует управление* u_1*, заданное на границе* $\partial\Omega$ *, которое стабилизирует задачу (4.1)–(4.3) в фазовом пространстве* $V(\Omega) = L_2(\Omega)$*.*

Доказательство. Искомое решение задачи стабилизации определим формулой:

$$(z(t,\cdot), u_1(t,\cdot)) = (\gamma_\Omega y(t,\cdot), \gamma_{\partial\Omega} y(t,\cdot), \tag{4.19}$$

где $\gamma_\Omega, \gamma_{\partial\Omega}$– операторы сужения функции с области G соответственно на область Ω и ее границу $\partial\Omega$, а $y(t,x)$– решение краевой задачи (4.1)–(4.3) с начальным условием $y_0 = Ez_0$. При этом E–оператор продолжения, построенной в Теореме 4.1.

Для начального условия задачи (4.5)-(4.7) справедливо вкючение $y_0 = Ez_0 \in V_-(G)$. Поэтому в силу (4.19)

$$\|z(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \le \|y(t,\cdot)\|_{L_2(G)} \le ce^{-\sigma t}, \quad \forall t > 0$$

с некоторыми $c > 0, \sigma > 0$. $\square$

4.4. **Доказательство леммы 4.1.** Положим

$$\Phi = \{\hat\varphi_k, k = 1,\dots,N\} \quad \text{and} \quad \varphi(x) = \sum_k \hat\varphi_k e_k(x).$$

Тогда для матрицы A с компонентами (4.18) справедливо соотношение:

$$(A\Phi,\Phi) = \sum_{k,j} a_{j,k}\hat\varphi_j\hat\varphi_k = \int\limits_{G\setminus\Omega} |\varphi(x)|^2 dx \ge 0. \tag{4.20}$$

Если для некоторого Φ мы имеем здсь равенство, то

$$\varphi(x) = \sum \hat\varphi_k e_k(x) \equiv 0, \text{ при всех } x \in G\setminus\Omega \tag{4.21}$$

Справедлива

Лемма 4.2. *Если выполнено соотношение (4.21), то* $\varphi_k = 0 \quad \forall k = 1,\dots,N$*.*

Из равенства (4.21) и леммы 4.2 следует положительная определенность матрицы A, что доказыват лемму 4.1.

Доказательство леммы 4.2 Так как λ_1 – максимальное по модулю собственное значение из множества $\{\lambda_1,\dots,\lambda_N\}$, то, очевидно,

$$0 = \lim_{m\to\infty} A^m \left(\sum \varphi_k e_k\right)/\lambda_1^m = \sum_{k\in\Lambda(\lambda_1)} \varphi_k e_k,$$

где $\Lambda(\lambda_1)$ – подмножество всех индексов k из $\{1,\dots,N\}$, таких, что $e_k(x)$ имеют собственное значение λ_1. Последовательное применение этого рассуждения показывает, что для каждого $m=1,\dots,N$

$$\sum_{k\in\Lambda(\lambda_m)} \varphi_k e_k(x) = 0 \qquad x\in G\setminus\Omega \tag{4.22}$$

где $\Lambda(\lambda_m)=\{k\in\{1,\dots,N\}: e_k$ имеет собственное значение$\lambda_m\}$.

Из теоремы о единственности продолжения (См. ниже Теорему 4.3)следует, что равенство (4.22) справедливо при всех $x\in G$, и поэтому все $\varphi_k=0$ из-за линейной независимости $\{e_j(x), x\in G; j=1,\dots N\}$. □

Для полноты изложения напомним формулировку теоремы о единственности продолжения.

Теорема 4.3. *Пусть G,ω – области в $\mathbf{R}^n$, причем $\omega\subset G$. Предположим, что $p(x)\in C(\overline{G})$, а $v(x), x\in G$ удовлетворяет уравнению $-\Delta v(x)+p(x)v(x)=0$ при всех $x\in G$ и $v(x)=0$ при $x\in\omega$. Тогда $v(x)=0$ при всех $x\in G$.*

Эта теорема обычно доказывается с помощью Карлемановских оценок (см., например, [12], [7]).

4.5. **Стабилизация в норме H^1.** Рассмотрим теперь задачу стабилизации линейной системы (4.1)-(4.3) в пространстве $H^1(\Omega)$: она понадобится нам при изучении стабилизации полулинейного уравнения Гинзбурга-Ландау. Проводя продолжение задачи (4.1)-(4.3) с области Ω на G в точности как в разделе 3.3, мы получим задачу (4.5)–(4.7). Разница состоит лишь в том, что теперь фазовым пространством у нас будет не $V=L_2(G)$, а

$$V\equiv V(G)=H_0^1(G), \qquad \|y\|_{V(G)}=\|\nabla y(\cdot)\|_{L_2(G)} \tag{4.23}$$

Мы опять вводим инвариантные подпространства V_-, V_+ с помощью соотношений (4.12); правда теперь они снабжаются нормой из (4.23). Из-за э того вместо ортогонального разложения (4.13) мы будем иметь

$$V=V_-+V_+ \tag{4.24}$$

Отметим, что для любой функции $y(x)\in V=H_0^1(G)$ справедливо разложение $y(x)=\sum_{j=1}^\infty y_je_j(x)$, (с $e_j=\int_G y(x)e_j(x)\,dx$), по собственным функциям $e_j(x)$ оператора A , определенного в (3.12).

Вместо нормы (4.23)нам в дальнейшем будет удобнее использовать следующую норму:

$$\|y\|^2_{V_+}=\sum_{j=1}^N|\lambda_j||y_j|^2, \quad \|y\|^2_{V_-}=\sum_{j=N+1}^\infty \lambda_j|y_j|^2, \quad \|y\|^2_V=\|y\|^2_{V_-}+\|y\|^2_{V_-+}, \tag{4.25}$$

где λ_j– собственное значение оператора A, соответствующее собственной функции $e_j(x)$.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 4.3. *Нормы (4.23) и (4.25) пространства $V=H_0^1(G)$ эквивалентны.*

Доказательство. Так как на конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, то на V_+ эквивалентны нормы из (4.23) и (4.25). Докажем эквивалентность норм из (4.23) и (4.25) на V_-. Для любого $y\in V_-$ в силу определения

(3.12) оператора A

$$\|y\|_{V_-}^2 = \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_j |y_j|^2 = \int_G y(x) Ay(x)\ dx = \int_G |\nabla y(x)|^2\ dx + \int_G q(x)|y(x)|^2\ dx \tag{4.26}$$

Поэтому вследствие неравенства Пуанкаре-Стеклова

$$\|y\|_{V_-}^2 \le \int_G |\nabla y(x)|^2\ dx + \max_{x\in G}|q(x)| \int |y(x)|^2\ dx \le C\int_G |\nabla y(x)|^2\ dx$$

С другой стороны из (4.26) и ортонормированности базиса $\{e_j(x)\}$ в $L_2(G)$ вытекает:

$$\int_G |\nabla y(x)|^2\ dx = \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_j |y_j|^2 - \int_G q(x)|y(x)|^2\ dx \le$$

$$\le \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_j |y_j|^2 + \max_{x\in G}|q(x)| \sum_{j=N+1}^{\infty} |y_j|^2 \le C \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_j |y_j|^2$$

Из этих неравенств следует утверждение леммы. □

Отметим, что норма (4.25) допускает введение соответствующего скалярного произведения, относительно которого пространства V_-, V_+ ортргональны.

Как и в разделе 4.3 для завершения конструкции стабилизации задачи (4.1)-(4.3) в пространстве $H^1(\Omega)$ достаточно доказать следующи аналог теоремы 4.1:

Теорема 4.4. *Существует оператор продолжения*

$$E : H^1(\Omega) \longrightarrow V_-(G) \subset H_0^1(G), \quad ((Ew)|_\Omega(x) \equiv w(x), \tag{4.27}$$

такой, что $v_0(x) = (Ew)(x)$ *удовлетворяет (4.15).*

Доказательство. Введем подмножество

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in G : \rho(x,\Omega) \equiv \inf_{x_1\in\Omega} |x - x_1|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon\}$$

причем будем считать ε столь малым, что $\Omega_\varepsilon \subset G$. Обозначим через $L : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega_\varepsilon)$ некоторый ограниченный оператор продолжения из Ω в Ω_ε.Определим функцию $\varphi(x) \in C^2(G)$ так, чтобы $\varphi(x) \equiv 0$ при $x \in \Omega$, $\varphi(x) \equiv 1$ при $x \in G \setminus \Omega_\varepsilon$, и $\varphi(x) > 0$ $x \in \Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}$, где $\overline{\Omega}$– замыкание области Ω.

Определим теперь искомый оператор продолжения по формуле:

$$Ez_0(x) = (1 - \varphi(x))Lz_0(x) + \varphi(x)\sum_{j=1}^{N} c_j e_j(x) \tag{4.28}$$

где коэффициенты $c_j, j = 1,\dots,N$ пока неизвестны. Как и в теореме 4.1 они определяются из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} a_{kj} c_j = f_k \tag{4.29}$$

где

$$a_{kj} = \int_G \varphi(x) e_k(x) e_j(x)\ dx, \qquad f_k = \int_G (1 - \varphi(x))Lz_0(x) e_k(x)\ dx$$

Невырожденность системы доказывается в точности как в теореме 4.1. Ограниченность оператора (4.27),(4.28) также очевидна. □

Теорема о стабилизации в пространстве $H^1(\Omega)$ формулируется следующим образом:

Теорема 4.5. *Существует управление u_1, заданное на границе $\partial\Omega$, которое стабилизирует задачу (4.1)–(4.3) в фазовом пространстве $V(\Omega)=H^1(\Omega)$.*

Доказательство этой теоремы совпадает с доказательством теоремы 4.2.

5. **Стабилизация уравнения Гинзбурга-Ландау**

5.1. **Устойчивое инвариантное многообразие.** Очевидно, что достаточно решить задачу стабилизации для системы (3.9)-(3.13): тогда будет решена и задача стабилизации для исходного уравнения Гинзбурга-Ландау (3.1).

Продолжение системы (3.9)-(3.13) с области Ω на G, т.е. система (3.16)-(3.20) имеет вид:

$$\partial_t y(t,x)+Ay(t,x)+B(x,y(t,x))=0, \quad x\in G, t>0 \tag{5.1}$$

$$y(t,\cdot)|_{\partial G}=0, \tag{5.2}$$

$$y(t,x)|_{t=0}=Ez_0(x)\equiv y_0(x), \quad x\in G, \tag{5.3}$$

где

$$Ay(x)\equiv -\nu\Delta y(x)+q_1(x)y(x), \quad x\in G, \quad y|\partial G=0; \qquad q_1(x)=3\widehat{v}^2(x)-1 \tag{5.4}$$

$$B(x,y)=y^3-3\widehat{v}(x)y^2 \tag{5.5}$$

В качестве фазового пространства динамической системы, порожденной задачей (5.1)–(5.3), возьмем пространство $V=V(G)=H^1_0(G)$ с нормой (4.25) .

Известно, что для каждого $y_0\in V$ существует единственное решение $y(t,x)\in C(0,T;V(G))$ задачи (5.1)-(5.3) с произвольным $T>0$. Обозначим через $S(t,y_0)$ разрешающий оператор краевой задачи (5.1)-(5.3):

$$S(t,y_0)=y(t,\cdot) \tag{5.6}$$

где $y(t,x)$ – решение задачи (5.1)-(5.3).

Напомним

Определение 5.1. *Множество $M_-\subset V$, определенное в окрестности нуля, называется устойчивым инвариантным многообразием задачи (5.1)-(5.3), если для любого $y_0\in M_-$ решение $S(t,y_0)$ определено и принадлежит M_- для каждого $t>0$, и*

$$\|S(t,y_0)\|_V\le ce^{-rt} \quad \textit{при} \quad t\to\infty \tag{5.7}$$

где $0<r<\lambda_{N+1}$.

Устойчивое инвариантное многообразие можно пределять как график в фазовом пространстве $V=V_+\oplus V_-$ с помощью формулы

$$M_-=\{y_-+g(y_-),\ y_-\in\mathcal{O}(V_-)\} \tag{5.8}$$

где $\mathcal{O}(V_-)$ – окрестность нуля в подпространстве V_-, а

$$g:\mathcal{O}(V_-)\to V_+ \tag{5.9}$$

– некоторое отображение, удовлетворяющее соотношениям

$$\|g(y_-)\|_{V_+}/\|y_-\|_{V_-}\to 0 \quad \text{as} \quad \|y_-\|_{V_-}\to 0. \tag{5.10}$$

Таким образом, для построения инвариантного многообразия M_- нужно вычислить отображение(5.9), (5.10).

Замечание 5.1. *Сравнивая определение 5.1 с определением устойчивого инвариантного подпространства V_- из разделов* 4.2 *и* 4.5 *мы видим, что при добавлении нелинейного члена в уравнение устойчивое инвариантное подпространство трансформируется в окрестности нуля в устойчивое инвариантное многообразие.*

Аналогично можно определить неустойчивое инваривнтное многообразие, которое в окрестности нуля является нелинейным аналогом неустойчивого нивариантного подпространства V_+ из разделов 4.2 и 4.5. Мы не будем этого делать.

Справедлива

Теорема 5.1. *Сущесвует бесконечно дифференцируемое отображение (5.9), удовлетворяющее условиям (5.10), которое с помощью соотношения (5.8) определяет устойчивое инвариантное многообразие краевой задачи (5.1)-(5.3) в окрестности нуля.*

Более сильный вариант этой теоремы с аналитическими отображением (5.9) доказан в [6]. В случае отображений (5.9), имеющих лишь гелдерову производную, эта теорема легко следует из более общих результатов (см. [13], [1]).

5.2. **Теорема о продолжении в нелинейном случае.** Как и в линейном случае, основным шагом при стабилизации является правильное продолжение начального условия в расширенную область.

Теорема 5.2. *Пусть M_- – инвариантное многообразие, построенное в окрестности нуля пространства $V(G) = H_0^1(G)$ в теореме 5.1. Тогда в шаре $B_\varepsilon^1(\Omega) = \{z(x) \in H^1(\Omega) : \|z\|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon\}$ достаточно малого радиуса ε из пространства $H^1(\Omega)$ определен непрерывный оператор*

$$Ext : B_\varepsilon^1(\Omega) \longrightarrow M_-, \tag{5.11}$$

который является оператором продолжения функции с Ω на G:

$$(Ext\, z)\,(x) \equiv z(x), \qquad x \in \Omega. \tag{5.12}$$

Доказательство. Пусть V_-, V_+– подпространства пространства $V = H_0^1(G)$, определенные соотношениями (4.12). Напомним, что в V введена норма (4.25). Введем ортопроекторы

$$\Pi_- : V \longrightarrow V_-, \qquad \Pi_+ : V \longrightarrow V_+ \tag{5.13}$$

на подпространства V_-, V_+.

Пусть E– оператор продолжения, определенный соотношением (4.28) , в котором коэффициенты c_j пока считаются неизвестными. Искомый оператор Ext определим формулой

$$\mathrm{Ext}\, z = \Pi_- E z + g(\Pi_- E z), \tag{5.14}$$

где $g : \mathcal{O}(V_-) \to V_+$ – отображение (5.9), задающее инвариантное многообразие M_- формулой (5.8). Поэтому непосредственно из определений (5.9), (5.14) справедливо включение $Extz \in M_-$. Таким образом, нам достаточно добиться выполнения равенства:

$$(Extz)\,(x) \equiv z(x), \qquad x \in \Omega, \tag{5.15}$$

указывающего, что (5.14) – это оператор продолжения. В силу (4.12) $\{e_j(x), j = 1, \dots, N\}$ – это базис, порождающий V_+ и поэтому отображение $g(u)$ представимо в виде

$$g(u) = \sum_{j=1}^{N} e_j g_j(u), \qquad g_j(u) = \int_G g(x; u) e(x)\ dx$$

(Так как $g(u) \in V_+$, а V_+– это пространство функций $\{f(x)\}$, то $g(u) = g(x; u)$) Так как, очевидно,

$$\Pi_+ z(x) = \sum_{j=1}^{N} e_j(x) \int_G z(x_1) e_j(x_1)\ dx_1, \qquad \Pi_- = I - \Pi_+$$

где I – единичный оператор, то равенство (5.14) можно переписать в виде

$$\mathrm{Ext} z = Ez(x) - \sum_{j=1}^{N} e_j(x) \int\limits_G Ez(y) e_j(y) dy + \sum_{j=1}^{N} e_j(x) g_j(\Pi_- Ez). \tag{5.16}$$

Из (5.15), (5.16) следует равенство:

$$\sum_{j=1}^{N} e_j(x) \int\limits_G Ez(x_1) e_j(x_1) dx_1 = \sum_{j=1}^{N} e_j(x) g_j(\Pi_- Ez) \qquad x \in \Omega. \tag{5.17}$$

Всилу леммы 4.2 из (5.17) следует, что

$$\int\limits_G Ez(x) e_j(x) dx = g_j(\Pi_- Ez), \quad j = 1, \dots, N. \tag{5.18}$$

Подставив (4.28) в (5.18), получим равенство

$$\vec{z} + A\vec{c} = \vec{g}((1-\varphi)Lz - (\vec{e}, \vec{z}) + \varphi(\vec{c}, \vec{\varepsilon}) - (\vec{e}, A\vec{c})), \tag{5.19}$$

в котором использованы обозначения: $\vec{z} = (z_1, \dots, z_N)$, $A = \| a_{jk} \|$, где

$$z_j = \int_G (1-\varphi(x)) Lz(x) e_j(x) dx, \qquad a_{jk} = \int_G \varphi(x) e_j(x) e_k(x) dx,$$

$$\vec{g}(u) = (g_1(u), \dots, g_N(u)), \quad \vec{e} = (e_1(x), \dots, e_N(x)), \quad (\vec{c}, \vec{e}) = \sum_{j=1}^{N} c_j e_j(x).$$

Так же, как в лемме 4.1 устанавливается, что матрица A положительно определена, а значит, обратима. Применяя к обеим частям равенства (5.19) матрицу A^{-1}, получим равенство:

$$\vec{c} = G_z(\vec{c}), \tag{5.20}$$

где отображение $G_z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ определяется соотношением

$$G_z(\vec{c}) = A^{-1}\vec{g}((1-\varphi)Lz - (\vec{e}, \vec{z}) + \varphi(\vec{c}, \vec{\varepsilon}) - (\vec{e}, A\vec{c})) - A^{-1}\vec{z}. \tag{5.21}$$

В силу теоремы 5.1 отображение $A^{-1}\vec{g} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ принадлежит классу C^∞ и $A^{-1}\vec{g}(0) = 0, A^{-1}\vec{g}'(0) = 0$. Поэтому при достаточно малых $\|\vec{c}_1\|_{\mathbb{R}^N}, \|\vec{c}_2\|_{\mathbb{R}^N}$, и малой $\|z\|_{V(G)}$ в силу теоремы о среднем получим из (5.21)

$$\|G_z(\vec{c}_1) - G_z(\vec{c}_2)\| \leq$$

$$\leq \gamma_0 \sup_{\beta\in[0,1]} \|A^{-1}\vec{g}'((1-\varphi)Lz - (\vec{e}, \vec{z}) + \varphi(\beta\vec{c}_1 + (1-\beta)\vec{c}_2, \vec{\varepsilon}) - (\vec{e}, A(\beta\vec{c}_1 + (1-\beta)\vec{c}_2)))\| \|\vec{c}_1 - \vec{c}_2\| \leq$$

$$\leq \gamma(z, \vec{c}_1, \vec{c}_2) \|\vec{c}_1 - \vec{c}_2\|, \quad \text{где} \quad \gamma(z, \vec{c}_1, \vec{c}_2) \leq \gamma_1 \left(\|z\|_{V(G)} + \|\vec{c}_1\|_{\mathbb{R}^N} + \|\vec{c}_2\|_{\mathbb{R}^N} \right),$$

а $\gamma_1 > 0$ – константа. Поэтому отображение G_z является сжатым при достаточно малых $\|z\|_{V(G)}$ и $\|\vec{c}_j\|$, $j = 1, 2$. Значит, в силу принципа сжатых отображений ([KF]) уравнение (5.20) при малых $\|z\|_{V(G)}$ имеет единственное решение $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_K)$, малое по норме. При таких $\vec{z}$, $\vec{c}_j$ оператор Ext, определенный соотношениями (5.14),(5.15),(5.16) является искомым оператором продолжения.

$\square$

5.3. **Теорема о стабилизации.** Основная теорема этого параграфа – теорема о стабилизации краевой задачи (3.9)–(3.11) – формулируется следующим образом.

Теорема 5.3. *Существует управление u_1, заданное на границе $\partial\Omega$, которое стабилизирует задачу (3.9)–(3.11) в фазовом пространстве $V(\Omega) = H^1(\Omega)$.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 4.2, искомое решение задачи стабилизации определим формулой:

$$(z(t,\cdot), u_1(t,\cdot)) = (\gamma_\Omega y(t,\cdot), \gamma_{\partial\Omega} y(t,\cdot)), \tag{5.22}$$

где $\gamma_\Omega, \gamma_{\partial\Omega}$– операторы сужения функции с области G соответственно на область Ω и ее границу $\partial\Omega$, а $y(t,x)$– решение краевой задачи (5.1)–(5.3) с начальным условием $y_0 = Ext\, z_0$. Здесь Ext–оператор продолжения, построенной в Теореме 5.2, и поэтому $y_0 = Ext\, z_0 \in M_-$.

Следовательно в силу (5.7)

$$\|z(t,\cdot)\|_{H^1(\Omega)} \le \|y(t,\cdot)\|_{H^1(G)} \le \|y(t,\cdot)\|_{H^1_0(G)} \le ce^{-\sigma t}, \quad \forall t > 0$$

с некоторыми $c > 0, \sigma > 0$. $\square$

6. Реальные процессы и стабилизация посредством управления с обратной связью

6.1. **Реальный процесс линейной задачи.** Изложенная в предыдущих параграфах теория сводит решение задачи стабилизации к решению некоторой краевой задачи. Однако если иметь в виду не только чисто математические, но и прикладные аспекты теории, то предложенное решение окажется не полным. Объясним это на примере более простой линейной задачи стабилизации (4.1)-(4.4).

Эта задача с помощью теорем 4.1, 4.2 сводится к построению по исходному начальному условию $z_0(x)$ начального условия $y_0(x) = Ez_0(x)$ продолженной на область G краевой задачи (4.5)–(4.7) и последующему решению указанной краевой задачи. Необходимо отметить, что предложенный метод стабилизации не является робастным, т.е. если указанные шаги конструкции проводятся с помощью приближенных вычислений, то в итоге мы получим не приближенную стабилизацию, а экспоненциально растущее решение, т.е. фактически задача стабилизации просто не будет решена.

Этот факт мы поясним чуть позже, а сейчас отметим, что при численном решении осуществить конструкцию стабилизации можно лишь приближенно. Действительно, для численного решения краевой задачи (4.5)–(4.7) нам потребуется использовать некоторую разностную схему. В результате мы получим решение в дискретные моменты времени t_k. Для простоты будем считать, что

$t_k = k\tau$, где $k \in \mathbb{N}$, а шаг по времени $\tau > 0$ – фиксированное число. При этом полученное приближенное решение будет иметь вид

$$\tilde{y}(k\tau, \cdot) = y(k\tau, \cdot) + \tau\varphi_k(\cdot) \tag{6.1}$$

где $y(k\tau, \cdot)$ – точное решение задачи (4.5)–(4.7), флюктуация $\varphi_k(\cdot)$ возникает в результате ошибок вычислений, а $\tilde{y}(k\tau, \cdot)$ – приближенное решение, которое мы фактически получаем. Для удобства дальнейших оценок мы ввели перед $\varphi_k(\cdot)$ нормирующий множитель τ. В дальнейшем мы будем называть $\tilde{y}(k\tau, \cdot)$ реальным процессом. Отметим, что в (6.1) $\varphi_k(\cdot) \neq 0$ не только в ситуации, когда для решения краевой задачи (4.5)–(4.7) для уравнений в частных производных используется разностная схема. Действительно, всю конструкцию стабилизации, приведенную в предыдущих параграфах, можно провести не только для дифференциальных уравнений, но и для разностных схем (см. [9]). В этом случае задача (4.5)–(4.7), которую нужно было бы решить для стабилизации исходной разностной схемы, была бы тоже разностной схемой. Так как сейчас мы рассматриваем линейную задачу, то разрешающий оператор этой разностной схемы (4.5)–(4.7) можно было бы задать с помощью явных аналитических формул. Но и в этом случае в (6.1) $\varphi_k(\cdot) \neq 0$, потому, что все арифметические операции в компьютере проводятся с некоторой погрешностью.

Для упрощения дальнейших рассуждений будем предполагать, что в определении (6.1) реального процесса пространственной независимой переменной является $x \in G$. При таком предположении возникают некоторые осложнения при трактовке (6.1) с помощью разностных схем. Однако имеется следующая, возможно, даже более естесвенная трактовка равенства (6.1): через $\tilde{y}(k\tau, x)$ обозначается изучаемый процесс, который реально существует в природе, а через $y(k\tau, x)$ обозначается решение краевой задачи (4.5)–(4.7), которая, естественно, описывает изучаемый процесс лишь приближенно. Именно поэтому в равенстве (6.1) необходимо вводить флюктуацию $\tau\varphi_k(x)$. Измерения реального процесса мы проводим в дискретные моменты времени $k\tau$.

Покажем теперь, что даже если $y(k\tau, x)$ является точным решением задачи стабилизации, реальный процесс $\tilde{y}(k\tau, x)$, определенный в (6.1), вообще говоря экспоненциально растет при $t \to \infty$, и поэтому к решению задачи стабилизации никакого отношения не имеет.

Обозначим через $S(t)$ оператор, сопоставляющий начальному условию $y_0(x)$ решение $y(t, x)$ задачи (4.5)–(4.7) в момент времени t:

$$S(t)y_0 = y(t, \cdot)$$

Оператор $S(t)$ называется разрешающим оператором задачи (4.5)–(4.7). Так как реальный просесс $\tilde{y}(k\tau, x)$ на k-ом временном слое вычисляется по реальному процессу $\tilde{y}((k-1)\tau, x)$ на (k-1)-ом временном слое с помощью разрешающего оператора $S(\tau)$, а задача (4.5)–(4.7) лишь приближенно описывает реальный процесс $\tilde{y}(k\tau, x)$, то естественно предположить, что справедлива формула:

$$\tilde{y}(k\tau, \cdot) = S(\tau)\tilde{y}((k-1)\tau, \cdot) + \tau\varphi_k(\cdot) \tag{6.2}$$

Из этой формулы индукцией по k с помощью линейности и полугруппового свойства оператора $S(t)$ легко выводится следующая формула для реального процесса $\tilde{y}(k\tau, x)$:

$$\tilde{y}(k\tau, \cdot) = S(k\tau)y_0(\cdot) + \tau \sum_{j=0}^{k-1} S((k-j)\tau)\varphi_j(\cdot) \tag{6.3}$$

Так как $y_0 \in V_-$, то $\|S(k\tau)y_0\|_V \leq ce^{(-\sigma k\tau)}$ с некоторым $\sigma > 0$. С другой стороны на флюктуации φ_k мы можем лишь наложить условие малости

$$\|\varphi_k\|_V \leq \varepsilon, \tag{6.4}$$

предполагая, что задача (4.5)–(4.7) хорошо аппроксимирует реальный процесс. Однако у нас нет никаких оснований предполагать что флюктуации φ_k принадлежат подпространству V_-. Поэтому из-за того, что компоненты φ_k^+ флюктуаций φ_k из подпространства V_+, вообще говоря, отличны от нуля, справедливы оценки $\|S((k-j)\tau)\varphi_k\|_V \sim c\varepsilon e^{|\lambda_1|(k-j)\tau}$. Поэтому из (6.3) следует оценка:

$$\|\tilde{y}(k\tau, \cdot)\|_V \sim ce^{-\sigma k\tau} + c\varepsilon\tau \sum_{j=0}^{k-1} e^{(|\lambda_1|(k-j)\tau)} \sim c_1\varepsilon e^{|\lambda_1|k\tau} \tag{6.5}$$

Таким образом, чтобы теорию стабилизации можно было использовать в приложениях, необходимо распространить ее на реальные процессы, обеспечив нейтрализацию вредных воздействий флюктуаций.

6.2. **Стабилизация реального процесса посредством управления с обратной связью.** Чтобы стабилизировать реальный процесс, применим к обеим частям равенства (6.2) оператор

$$E_1 = E \circ \gamma_\Omega, \tag{6.6}$$

где γ_Ω– оператор сужения на область Ω,а E – оператор продолжения на область G, построенный в теореме 4.4, причем делать это будем на каждом временном слое $t_k = k\tau$. В результате применения этого оператора, реальный процесс окажется в подпространстве V_- фазового пространства V, и тем самым разрушающее воздействие флюктуации φ_k будет ликвидированно. Отметим, что применить вместо E_1, скажем, оператор Π_- проектирования на V_- мы не можем, так как он изменит фазовую функцию на "физической"области Ω. Для стабилизации же нашего процесса с помощью граничного управления мы можем менять фазовую функцию лишь на "искусственно введенной"части области $G \setminus \Omega$. Легко видеть,что в результате применения к (6.2) оператора E_1 мы получим следующую рекуррентную формулу для управляемого реального процесса:

$$\tilde{y}(k\tau, \cdot) = S(\tau)\tilde{y}((k-1)\tau, \cdot) + \tau E_1\varphi_k(\cdot) \tag{6.7}$$

Для реального процесса (6.7) справедлива следующая оценка:

Теорема 6.1. *Пусть управляемый реальный процесс задается рекуррентной формулой (6.8), где флюктуации φ_k не известны заранее, но удовлетворяют оценке (6.4), а оператор E_1 определен формулой (6.6). Тогда реальный процесс (6.7) удовлетворяет следующей оценке:*

$$\|\tilde{y}(k\tau, \cdot)\|_V \leq c\|E\|(e^{-\sigma k\tau}\|y_0\|_V + \varepsilon/\sigma) \tag{6.8}$$

где $\|E\|$-норма оператора, построенного в теореме 4.4, а константа c не зависит от τ, k, y_0.

Доказательство. Очевидно, что управляемый реальный процесс (6.7) вместо (6.3) определяется формулой

$$\tilde{y}(k\tau,\cdot) = S(k\tau)E_1 y_0(\cdot) + \tau\sum_{j=0}^{k-1} S((k-j)\tau)E_1\varphi_j(\cdot) \tag{6.9}$$

Так как $E_1 y_0 \in V_-$, $E_1\varphi_k \in V_-$, то справедлива оценка:

$$\|\tilde{y}(k\tau,\cdot)\|_V \le \|E\|(e^{-\sigma k\tau}\|y_0\|_V + \tau\varepsilon\sum_{j=0}^{k-1} e^{-\sigma(k-j)\tau}) \le \|E\|(e^{-\sigma k\tau}\|y_0\|_V + \varepsilon/\sigma)$$

При выводе этого неравенства мы предполагали, что норма пространства V задается соотношением (4.25). Из этого неравенства следует оценка (6.8), причем константа c там появилась потому, что в формулировке теоремы мы не предполагали, что норма пространства V задается соотношением (4.25). □

Замечание 6.1. *Из оценки (6.8) не следует, что стабилизируемый реальный процесс $\tilde{y}(k\tau,\cdot)$ стремится к нулю при $t_k = k\tau \to \infty$. Этот факт адекватен реальному положению дел. Действительно, флюктуации возникают на каждом временном шаге, и хотя они предполагаются малыми по норме, их величина не стремится к нулю с ростом времени. Поэтому и реальный процесс не может стремиться к нулю.*

Замечание 6.2. *Рассмотрения этого раздела носят теоретический характкер. При реальных вычислениях приведенные здесь конструкции могу и дожны быть модифицированы. Например, стабилизацию реального процесса посредством применения к (6.2)оператора E_1 целесообразно проводить не в каждый момент $k\tau$ а через бо́льшие интервалы времени. Действительно, это приводит к экономии вычислений, так как вычисление оператора E_1 – трудоемкая операция, и не вызывает серьезных отрицательных последствий, потому что экспоненциальный рост флюктуаций происходит не мгновенно.*

Кроме того можно не сводить построение оператора E_1 к использованию оператора продолжегния E, построенного ранее, а строить оператор проектирования на подпространство V_-, который не меняет значения проектируемой функции на области Ω.

Теория стабилизации реального процесса в "физической"области Ω сводится к уже построенной в этом разделе теории реальных процессов в области G посредством уже знакомой формулы

$$(\tilde{z}(k\tau,\cdot),\tilde{u}(k\tau,\cdot)) = (\gamma_\Omega\tilde{y}(k\tau,\cdot),\gamma_{\partial\Omega}\tilde{y}(k\tau,\cdot), \tag{6.10}$$

Здесь $\tilde{z}(k\tau,\cdot)$ – управляемый реальный процесс в "физической"области Ω, а $\tilde{u}(k\tau,\cdot)$ – граничное управление, стабилизирующее реальный процесс. Напомним, что в силу (6.8) в каждый момент времени $k\tau$ реальный процесс $\tilde{y}(k\tau,\cdot)$ стабилизируется посредством проектирования флюктуации $\tilde{\varphi}_k$ на подпространство V_- с помощью оператора E_1. В силу (6.10) это означает, что управление $\tilde{u}(k\tau,\cdot)$ в каждый момент времени реагирует на возникшую флюктуацию $\tilde{\varphi}_k$, уничтожая ее дестабилизирующую составляющую. Но это в точности означает, что построенное в (6.10) управление $\tilde{u}(k\tau,\cdot)$ является управлением с обратной связью.

Отметим, что из (6.8), где $\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}$, и (6.10) сразу следует оценка реального процесса $\tilde{z}(k\tau, \cdot)$ в области Ω:

$$\|\nabla \tilde{z}(k\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)} \le c\|E\|(e^{-\sigma k\tau}\|z_0\|_V + \varepsilon/\sigma) \qquad (6.11)$$

6.3. **Реальные процессы нелинейной задачи, и их стабилизация.** Теория реальных процессов и их стабилизации посредством управления с обратной связью может быть перенесена и на случай полулинейных параболических уравнений. Мы в этом разделе ограничемся определением неуправляемых и управляемых реальных процессов и формулировкой теоремы об оценке управляемых реальных процессов, не входя в подробности доказательства.

Как показано в разделе 5.3 стабилизация нелинейной краевой задачи (3.9)–(3.11) сводится к решению краевой задачи (5.1)–(5.3) с начальным условием $y_0 = Ext\, z_0$. Здесь Ext–оператор продолжения, построенный в Теореме 5.2, и поэтому $y_0 = Ext\, z_0 \in M_-$. Так как краевая задача (5.1)–(5.3) описывает реальный процесс $\tilde{y}$ лишь приближенно, то реальный процесс можно задать с помощью рекурентной формулы [1]

$$\tilde{y}(k\tau, \cdot) = S(\tau, \cdot; \tilde{y}((k-1)\tau, \cdot) + \tau\varphi_k(\cdot). \qquad (6.12)$$

здесь $\tilde{y}(k\tau, \cdot)$ –реальный процесс на временном слое $t_k = k\tau$, $S(t, \cdot; y_0)$ – разрешающий оператор краевой задачи (5.1)–(5.3), т.е. оператор, сопоставляющий начальному условию y_0 решение $y(t, \cdot)$ смешанной краевой задачи для уравнений в частных производных (5.1)–(5.3), взятое в момент времени t. Невязка $\tau\varphi_k$, возникающая из-за неточности описания краевой задачей (5.1)–(5.3) реального процесса $\tilde{y}$, будет называться в дальнейшем флюктуацией. Аналогично (6.2), реальный процесс $\tilde{y}(k\tau, \cdot)$, определенный в (6.12) является неуправляемым. Устойчивое инвариантное многообразие M_- задачи (5.1)–(5.3), построенное в теореме 5.1, является отталкивающим множеством (в точности так же, как и подпространство V_-). Поэтому даже если при всех k кроме, например, k_0 флюктуации $\varphi_k(\cdot) = 0$, то и в этом случае реальный процесс $\tilde{y}(k\tau, \cdot)$ не стремится к нулю при $k \to \infty$. В общем же случае, когда $\tilde{\varphi}_k(\cdot) \ne 0$, реальный процесс $\tilde{y}(k\tau, \cdot)$, конечно, тоже не стремится к нулю с ростом k.

Поэтому для стабилизации реального процесса как и в линейном случае, разобранном в разделе 6.2, требуются дополнительные построения. Чтобы их провести, нам потребуется некоторый оператор проектирования на устойчивое инвариантное многообразие M_-, определенное в (5.8)–(5.10). Будем обозначать это многообразие через $M_-(\varepsilon_0)$, если в (5.9)

$$\mathcal{O}(V_-) = B_{\varepsilon_0}(V_-) \equiv \{v \in V_- : \|v\|_{V_-} < \varepsilon_0\}$$

Для $\varepsilon \ll \varepsilon_0$ положим

$$B_\varepsilon(M_-(\varepsilon_0)) = \{v \in V : \rho(v, M_-(\varepsilon_0)) \equiv \inf\{\|v - w\|_V : \; w \in M_-(\varepsilon_0)\} < \varepsilon\}$$

Теорема 6.2. *Пусть $M_- \equiv M_-(\varepsilon_0)$ –устойчивое инвариантное многообразие, построенное в теореме 5.1 с некоторым $\varepsilon_0 > 0$, и $\varepsilon \ll \varepsilon_0$. Тогда существует непрерывное отображение*

$$\Pi : B_\varepsilon(M_-(\varepsilon_0/2)) \longrightarrow M_-(\varepsilon_0)$$

[1] Возможен следующий альтернативный способ трактовки формулы (6.12): При численном решении краевой задачи (5.1)–(5.3)с использованием разностной схемы с шагом по времени τ дело сводится к нахождении решения разностной схемы на временном слое $t_k = k\tau$ если решение уже извстно на временном слое $t_{k-1} = (k-1)\tau$.

удовлетворяющее условию $\Pi v|_{x\in\Omega} \equiv v|_{x\in\Omega}$.

Мы не будем проводить детальное доказательство этой теоремы. Заметим лишь, что в качестве Π можно взять оператор $Ext \circ \gamma_\Omega$, где Ext – оператор продолжения, построенный в теореме 5.2, а γ_Ω –оператор сужения на область Ω. Отметим также, что возможен другой способ построения оператора Π (см. [9]).

Используя оператор проектирования Π, определим управляемый реальный процесс, соответствующий нелинейной краевой задаче (5.1)–(5.3), с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$\tilde{y}(k\tau,\cdot) = \Pi\left(S(\tau,\cdot;\tilde{y}((k-1)\tau,\cdot) + \tau\varphi_k(\cdot)\right), \ k=1,2,\ldots; \quad \tilde{y}(0\tau,\cdot) = y_0(\cdot) \quad (6.13)$$

Для управляемого реального процесса (6.13) справедлива следующая оценка.

Теорема 6.3. *Пусть начальное условие* $y_0 = Ez_0$ *краевой задачи (5.1)–(5.3) (оно же – начальное условие в (6.13)) удовлетворяет неравенству* $\|y_0\|_V \le \varepsilon_0/2$, *где число* ε_0 *столь мало, что устойчивое инвариантное многообразие* $M_-(\varepsilon_0)$ *оказывается подмножеством многообразия* M_-, *построенного в теореме 5.1. Предположим, что флюктуации из (6.13) при любом* k *удовлетворяют оценке* $\|\varphi_k(\cdot)\| \le \varepsilon \ll \varepsilon_0$. *Тогда для управляемого реального процесса (6.13) справедлива оценка*

$$\|\tilde{y}(k\tau,\cdot)\|_V \le c\left(e^{-\sigma k\tau} + (1+\sigma^{-1})\varepsilon\right), \quad (6.14)$$

где $c > 0$ *–константа, не зависящая от* k, τ.

Доказательство теоремы 6.3 можно найти в [8].

Отметим, что замечания, приведенные после теоремы 6.1, а также последующее описание управляемых реальных процессов в "физической"области Ω и их оценка вполне приложимы и к нелинейным реальным процессам, изученным в этом разделе. Чтобы не повторяться, мы их здесь не приводим.

7. Численное решение задачи стабилизации

Наконец, мы очень кратко опишем результаты по численному решению задачи стабилизации полулинейных параболических уравнений и двумерной системы Навье-Стокса, полученных в Московском государственном университете и институте вычислительной математики РАН.

Первое численное решение задачи стабилизации, основанное на теоретических исследованиях из [5] –[11], было выполнено Е.В.Чижонковым [2] в случае (линейного) одномерного уравнения теплопроводности и (полулинейного) одномерного уравнения Чафе-Инфанте.

Численная стабилизация двумерных систем Стокса и Навье-Стокса с периодическим краевым условием по одной независимой переменной и граничным управлением Дирихле по другой переменной была выполнена Е.В.Чижонковым и А.А.Иванчиковым в [3]. Наконец, численная стабилизация двумерного течения Куэтта с границы в случае, когда течение Куэтта теряет устойчивость, а устойчивыми становятся вихри Тейлора, была проведена А.А.Иванчиковым в [14].

Серия результатов по численному построению инвариантных многообразий и численной стабилизации полулинейных параболических уравнений получена А.А.Корневым [16]-[18] и А.А.Корневым и Озеритским [19]

А.В.Калинина в [15] использовала для численного построения инвариантного многообразия M_- метод функционально-аналитических разложений.

Все эти статьи весьма содержательны и интересны. Однако в них были сделаны лишь первые шаги в создании численных методов стабилизации. Многие вопросы еще остаются открытыми.

Список литературы

[1] А.В.Бабин и М.И.Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений.* Наука, Москва 1989.

[2] E.V.Chizhonkov. *Numerical aspects of one stabilization method*, Russ.J.Numer. Anal. Math. Modelling, **18**:5, (2003), 363-376.

[3] E.V.Chizhonkov and A.A.Ivanchikov. *On numerical stabilization of solutions of Stokes and Navier-Stokes equations by boundary conditions*, Russ.J.Numer. Anal. Math. Modelling, **19**:6, (2004), 477-494.

[4] J.Duan and A.V.Fursikov. *Feedback stabilization for Oseen fluid equations: a stochastic approach.* J.Math.Fluid Mech. **7**, (2005), p.574-610.

[5] А.В.Фурсиков, *Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью.* Матем. сборник **192**:4 (2001), 115-160.

[6] A.V.Fursikov, *Analyticity of stable invariant manifolds for Ginzburg-Landau equation.* Applied Analysis and Differential Equations, Iasi, September 4-9, 2006, World Scientific, (2007), 93-112.

[7] A.V.Fursikov, *Stabilization for the 3D Navier-Stokes system by feedback boundary control.* Discrete and Cont. Dyn. Syst., **10**:1&2, (2004), 289-314.

[8] A.V.Fursikov, *Real Process Corresponding to 3D Navier-Stokes System and Its Feedback Stabilization from Boundary.* Amer. Math. SSoc. Translations Series 2, **206**. Advances in Math. Sciences-51. PDE M.Vishik seminar. AMS Providence Rhode Island (2002), 95-123.

[9] А.В.Фурсиков,, *Реальные процессы и реализуемость метода стабилизации системы Навье-Стокса посредством управления с обратной связью с границы области.* Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы. **II**, В честь академика Ольги Александровны Ладыженской, Международная математическая серия **2**, Изд-во Т.Рожковской, Новосибирск, (2002), 127-164.

[10] A.V.Fursikov. *Stabilizability of two-dimensional Navier-Stokes equations with help of boundary feedback control,* J. of Math. Fluid Mech., **3** (2001), p.259-301.

[11] A.V.Fursikov. *Analyticity of stable invariant manifolds of 1D-semilinear parabolic equations.* Proceedings of Summer Research Conference "Control methods of PDE-dynamical systems", AMS Contemporary Mathematics (CONM)series **426**. Providence, (2007), 219-242.

[12] Л.Хёрмандер, *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*, Мир, Москва 1965.

[13] Ф.Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, Москва 1970.

[14] А.А.Иванчиков, *О численной стабилизации неустойчивого течения Куэтта по граничным условиям.* Russ.J.Numer.Anal.Math.Modelling (2006) *On numerical stabilization of unstable Couette flow by the boundary conditions.* Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, **21**:6, (2006), p.519-537.

[15] А.Б.Калинина, *Численная реализация метода функционально-аналитических рядов для проекции на устойчивое многообразие.* Вычислительные методы и программирование, **7**:1,(2006), с. 65-72

[16] А.А.Корнев, *Об итерационном методе построения "усов Адамара".* ЖВМиМФ, 2004. **44**:8, (2004), с. 1346-1355.

[17] А.А.Корнев, *Метод асимптотической стабилизации по начальным данным к заданной траектории.* ЖВМиМФ, **46**:1, (2006), с. 37-51.

[18] А.А.Корнев *О методе типа "преобразование графика"для численного построения инвариантных многообразий.* Труды Математического Института имени В.А. Стеклова, **256**, (2007) с. 237-251.

[19] А.А.Корнев, А.В.Озерицкий *О вычислительной устойчивости одного метода асимптотической стабилизации.* Вестник МГУ, сер. Математика, Механика, **1**, (2007), с.33-36.