УДК
MSC 2000

© А.В. Фурсиков*

Стабилизация с границы решений системы Навье-Стокса: разрешимость и обоснование численного моделирования

Изложен метод стабилизации решений системы Навье-Стокса около стационарного, вообще говоря, неустойчивого решения. Стабилизация производится посредством управления с границы области, в которой заданы уравнения. Важным аспектом проблемы стабилизации, исследуемым в работе, является обоснование возможности численного моделирования. Этот вопрос решается с помощью выбора управления с обратной связью.

1. Введение

Работа посвящена изложению метода стабилизации решений системы уравнений Навье-Стокса посредством управления с границы области определения указанной системы. Этот метод был предложен и развит в работах автора [1–7]. Большинство указанных работ малодоступны российскому читателю, так как только статьи [1], [7] написаны на русском языке, причём [7] опубликована в малотиражном издании. Это обстоятельство делает целесообразным написание настоящей работы.

В работе изложена конструкция, позволяющая стабилизировать решение системы Навье-Стокса. Основной шаг состоит в сведении к решению смешанной краевой задачи для системы Навье-Стокса со специальным начальным условием, принадлежащим инвариантному устойчивому многообразию M_-. Эта краевая задача является неустойчивой в том смысле, что если начальное условие не принадлежит M_-, то вся конструкция рушится даже если начальное условие сколь угодно близко к M_-. Поэтому обоснование применимости предложенного метода для численного решения задачи стабилизации требует дополнительных усилий. С этой целью в работе описывается класс флюктуаций решений, возникающих при моделировании на ЭВМ задач стабилизации. Этот класс флюктуаций изучается с помощью понятия реального процесса, описанного в работе. Чтобы подавить вредное влияние флюктуаций и стабилизировать реальный процесс используется управление с обратной связью. Решающим обстоятельством является тот факт, что конструкция стабилизации, описанная в настоящей работе, допускает применение обратной связи.

По мнению автора понятие стабилизированного реального процесса, описанного в работе, даёт более адекватное описание реального потока жидкости, чем точное решение системы Навье-Стокса, получающееся в результате использования конструкции стабилизации. Поэтому в работе рассмотрен не только случай реального процесса с флюктуациями, возникающими в дискретные моменты времени (моделирующего ситуацию, возникающую при численном решении задачи стабилизации), но также и реальные процессы с флюктуациями,

* Механико-математический факультет МГУ, Москва, 119992 ГСП–2. Электронная почта: fursikov@mtu-net.ru

возникающими в каждый момент времени (естественные при моделировании физического потока жидкости).

2. Постановка задачи стабилизации

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Через Q обозначим пространственно-временной цилиндр $Q = \mathbb{R}_+ \times \Omega$, где $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$. Предположим, что граница $\partial\Omega$ разбита на два открытых подмножества Γ_0 и Γ с общей границей $\partial\Gamma$ класса C^∞ (если эта общая граница не пуста). Обозначим $\Sigma_0 = \mathbb{R}_+ \times \Gamma_0$, $\Sigma = \mathbb{R}_+ \times \Gamma$. В Q рассмотрим систему Навье-Стокса

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} - \Delta v(t,x) + (v,\nabla)v + \nabla p(t,x) = f(x) \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} v = 0 \tag{2.2}$$

где $(t,x) \in Q$, $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $v(t,x) = \big(v_1(t,x), \ldots, v_d(t,x)\big)$ — поле скоростей жидкости, $\nabla p(t,x)$ — градиент давления, $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_d(x)\big)$ — плотность внешних сил, которая, отметим, не зависит от времени t. В (2.1) Δ — оператор Лапласа, а $(v,\nabla)v = \sum_{j=1}^d v_j \frac{\partial v}{\partial x_j}$. Предполагаются выполненными граничные и начальные условия

$$v\big|_{\Sigma_0} = 0, \quad v\big|_{\Sigma} = u(t,x'), \quad (t,x') \in \Sigma \tag{2.3}$$

$$v(t,x)\big|_{t=0} = v_0(x) \tag{2.4}$$

где $v_0(x) = (v_{01}, \ldots, v_{0d})$ — заданное начальное векторное поле, а $u(t,x') = (u_1, \ldots, u_d)$ — управление. Предполагается также, что задано стационарное решение $\widehat{v}(x)$ системы Навье-Стокса:

$$-\Delta\widehat{v}(x) + (\widehat{v},\nabla)\widehat{v} + \nabla\widehat{p}(x) = f(x), \quad \operatorname{div} v(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad v\big|_{\Gamma_0} = 0 \tag{2.5}$$

с той же плотностью внешних сил f, что и в (2.1). При этом

$$\|v_0 - \widehat{v}\|^2_{H^1(\Omega)} \equiv \|v_0 - \widehat{v}\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla v_0 - \nabla\widehat{v}\|^2_{L_2(\Omega)} < \varepsilon^2, \tag{2.6}$$

где ε достаточно малое число.

Задача стабилизации решения задачи (2.1)–(2.4) около стационарного потока $\widehat{v}(x)$ состоит в следующем:

> Задано число $\sigma > 0$. Требуется найти управление $u(t,x')$ на Σ такое, что компонента $v(t,x)$ решения $(v,\nabla p)$ начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) сходится к $\widehat{v}$ с заданной скоростью σ:

$$\|v(t,\cdot) - \widehat{v}\|_{H^1(\Omega)} \le ce^{-\sigma t} \quad \text{при } t \to \infty. \tag{2.7}$$

Необходимо уточнить, что мы понимаем под решением задачи стабилизации, т.е. что значат слова “найти управление u”. Прежде всего, конечно, необходимо установить теорему о существовании такого управления $u(t,x')$, $(t,x') \in \Sigma$, что решение $v(t,x)$ задачи (2.1)–(2.4) удовлетворяет (2.7). Заметим, что по самой природе задачи стабилизации её решение не является единственным.

Однако только теоремы существования даже вместе с алгоритмом, реализующим эту теорему, недостаточно для полного решения задачи стабилизации. Дело в том, что в случае, когда стабилизируемое стационарное решение $\widehat{v}$ не является устойчивым относительно малых возмущений (а именно такой случай и интересен в задаче стабилизации), такой алгоритм как правило не удаётся применить при численном решении. Это происходит из-за того, что из-за неустойчивости задачи, флюктуации решения обязательно возникающие при численном моделировании, разрушают решение* Чтобы не допустить такого разрушения обычно строят управление с обратной связью, т.е. такое управление, которое может мгновенно реагировать на возникновение флюктуаций решения, подавляя эти флюктуации. Таким образом мы должны найти такое решение задачи стабилизации, которое использует управление, обладающее свойством обратной связи. Такое решение должно допускать возможность численной реализации.

3. Стабилизация уравнений Озеена

Мы начнём с описания конструкции стабилизации системы уравнений Озеена, т.е. линеаризации уравнений Навье-Стокса около стационарного решения $\widehat{v}(x)$. Эта конструкция основана на расширении задачи для системы Озеена с Q на объемлющий пространственно-временной цилиндр $\Theta = \mathbb{R}_+ \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^d$ — это расширение области Ω через часть границы Γ. Перед описанием самой конструкции мы напомним некоторые хорошо известные факты об уравнениях Озеена, заданных в Θ. Эти уравнения являются линеаризацией системы Навье-Стокса на бездивергентном поле $a(x)$, обращающимся в нуль на границе ∂G, где $a(x)$ — это продолжение $\widehat{v}(x)$ с Ω на G.

3.1. Предварительные сведения

Пусть граница ∂G области $G \subset \mathbb{R}^d$ бесконечно дифференцируема и $S = \mathbb{R}_+ \times \partial G$. В цилиндре Θ рассматриваются уравнения Озеена

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} - \Delta w + (a,\nabla)w + \nabla p(t,x) = 0 \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div} w(t,x) = 0 \tag{3.2}$$

$$w\big|_S = 0 \tag{3.3}$$

$$w\big|_{t=0} = w_0 \tag{3.4}$$

Наша цель исследовать поведение решения $w(t,x)$ этой задачи при $t \to \infty$. Введём необходимые функциональные пространства. Положим

$$V^k(G) = \{v(x) \in \left(H^k(G)\right)^d : \operatorname{div} v(x) = 0\} \tag{3.5}$$

где $H^k(G)$ -пространство Соболева функций, принадлежащих вместе с производными до порядка k включительно пространству $L_2(G)$.

$$V_0^1(G) = \{v \in V^1(G) : v\big|_{\partial G} = 0\}, \quad V_0^0(G) = \{v \in V^0(G) : (v(x), \nu(x))\big|_{\partial G} = 0\}, \tag{3.6}$$

где $\nu(x)$ — векторное поле внешних нормалей к ∂G. Везде ниже предполагается, что

$$a(x) \in V^2(G) \cap V_0^1(G), \quad a(x)\text{— вещественнозначно} \tag{3.7}$$

Обозначим через

$$\pi : \left(L_2(G)\right)^d \to V_0^0(G)$$

оператор ортогонального проектирования. Тогда стационарный оператор Озеена

$$Aw \equiv -\pi\Delta w + \pi\big[(a(x),\nabla)w(x) + (w(x),\nabla)a(x)\big] : V_0^0(G) \to V_0^0(G) \tag{3.8}$$

*В отличие, скажем, от корректной краевой задачи, в которой подобные флюктуации гасятся самой устойчивой природой такой задачи (если, конечно, разностная схема выбрана надлежащим образом).

является замкнутым с областью определения $D(A) = V^2(G) \cap V_0^1(G)$ плотной в V_0^0. Предполагая пространства (3.6) комплексными, обозначим через $\rho(A)$ резольвентное множество оператора A, т.е. такое подмножество $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых резольвента оператора A

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} : V_0^0(G) \to V_0^0(G) \tag{3.9}$$

определена и непрерывна (здесь I — единичный оператор). Спектр оператора A, т.е. множество $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$ обозначим $\Sigma(A)$. Так как оператор (3.9) является компактным, то $\Sigma(A)$ состоит из дискретного множества точек, причём в силу положительной определённости оператора Стокса $-\pi\Delta : V_0^0(G) \to V_0^0(G)$ левее любой прямой на комплексной плоскости, параллельной мнимой оси, находится не более конечного числа точек спектра оператора A.

Пусть $\lambda_j \in \Sigma(A)$. Тогда λ_j является собственным значением, т.е. $\ker(\lambda_j I - A) \neq 0$. Вектор $0 \neq e_0 \in \ker(\lambda_j I - A)$ называется собственным вектором, соответствующим собственному значению λ_j, а ненулевые векторы $e_1, \dots, e_k$ определяемые уравнениями

$$e_0 + (\lambda_0 I - A)e_1 = 0, \dots, e_{k-1} + (\lambda_0 I - A)e_k = 0$$

называются присоединёнными векторами. Пространство $\mathbb{C}E(A, \lambda_j)$, состоящее из всех собственных и присоединённых векторов оператора A соответствующих собственному значению λ_j, конечномерно.

Для $\sigma \in \mathbb{R}$ положим

$$\mathbb{C}E_\sigma(A) = \mathrm{Lin}\{\mathbb{C}E(A, \lambda_j), \mathrm{Re}\,\lambda_j < \sigma\} \tag{3.10}$$

где $\mathrm{Lin}\{E_1, \dots, E_k\}$ обозначает линейную оболочку пространств $E_1, \dots, E_k$. Очевидно, $\dim \mathbb{C}E_\sigma(A) < \infty$ при любом σ.

Все определения этого пункта о спектральных характеристиках оператора A справедливы и для оператора A^* сопряжённого оператору A из (3.8). В частности аналогичным образом определяются и конечномерные подпространства $\mathbb{C}E(A^*, \overline{\lambda}_j)$, $\mathbb{C}E_\sigma(A^*)$ соответствующие оператору A^*.

Предположим, что число $\sigma > 0$ удовлетворяет условию

$$\Sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda = \sigma\} = \varnothing. \tag{3.11}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть начальное условие $w_0 \in V_0^1(G)$ из* (3.4) *удовлетворяет условиям*

$$\int_G \big(w_0(x), \overline{d}(x)\big)\, dx = 0 \quad \forall d(x) \in \mathbb{C}E_\sigma(A^*), \tag{3.12}$$

причём для $\sigma > 0$ выполнено (3.11). *Тогда компонента $w(t,x)$ решения задачи* (3.1)–(3.4) *удовлетворяет оценке*

$$\|w(t, \cdot)\|_{V_0^1(G)} \le c\|w_0\|_{V_0^1(G)} e^{-\sigma t} \quad t > 0 \tag{3.13}$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [1], [2].

3.2. Постановка задачи стабилизации и основная идея конструкции

Рассмотрим задачу стабилизации уравнения Озеена около нулевого стационарного решения. В цилиндре $Q = \mathbb{R}_+ \times \Omega$ рассмотрим уравнение Озеена

$$\partial_t v(t,x) - \Delta v + (\widehat{v}(x), \nabla)v + (v, \nabla)\widehat{v} + \nabla p = 0 \tag{3.14}$$

$$\mathrm{div}\, v(t,x) = 0 \tag{3.15}$$

с граничными условиями

$$v\big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad v\big|_{\Sigma} = u(t,\cdot) \tag{3.16}$$

где u — управление, и начальным условием

$$v(t,x)\big|_{t=0} = v_0(x) \tag{3.17}$$

Пусть задано $\sigma > 0$. Требуется построить управление $u(t,x)$ на Σ такое, чтобы компонента $v(t,x)$ решения краевой задачи (3.14)–(3.17) удовлетворяла неравенству

$$\|v(t,\cdot)\|^2_{V_0^1(\Omega)} \le c\|v_0\|_{V_0^1(\Omega)} e^{-\sigma t} \qquad t \ge 0 \tag{3.18}$$

Основная идея решения сформулированной задачи стабилизации состоит в следующем. Забудем на время о втором из краевых условий (3.16) и продолжим задачу (3.14)–(3.17) (без этого условия) до задачи (3.1)–(3.4), заданной в цилиндре $\Theta = \mathbb{R}_+ \times G$, причём

$$G = \mathrm{Int}\,(\overline{\Omega} \cup \overline{\omega}) \tag{3.19}$$

где $\mathrm{Int}\,A$ обозначает внутренность множества A. Здесь $\omega \subset \mathbb{R}^d$ — область, удовлетворяющая условиям:

$$\omega \cap \Omega = \varnothing, \quad \partial\omega \cap \partial\Omega = \overline{\Gamma}. \tag{3.20}$$

Предполагается также, что

$$\partial G \in C^\alpha, \quad \alpha > 2, \qquad \partial G \backslash \partial\Gamma \in C^\infty \tag{3.21}$$

Векторное поле $a(x)$ в уравнении (3.1) является продолжением с Ω на G векторного поля $\widehat{v}(x)$ из (3.14), а начальное условие $w_0(x)$ из (3.4) является продолжением начального условия $v_0(x)$ из (3.17):

$$w_0 = E_\sigma v_0. \tag{3.22}$$

Построение оператора продолжения E_σ является основным элементом конструкции при стабилизации решения v задачи (3.14)–(3.17).

3.3. Построение оператора продолжения E_σ

Так как оператор A из (3.8) не самосопряжён, собственные и присоединённые функции операторов A и A^*, вообще говоря, комплекснозначны. Поэтому пространство (3.10) и аналогичное пространство $\mathbb{C}E_\sigma(A^*)$ комплексны. Обозначим через L_- подпространство вещественного пространства $V_0^1(G)$, состоящее из векторных полей $w_0(x)$, удовлетворяющих (3.12). Мы должны построить оператор продолжения E_σ из (3.22) таким образом, чтобы E_σ отображал v_0 в пространство L_-. Дело в том, что в этом случае в силу теоремы 1 компонента $w(t,x)$ решения задачи (3.1)–(3.4) с начальным условием $w_0 = E_\sigma v_0$ удовлетворяет оценке (3.13). Поэтому пара

$$\big(v(t,\cdot), u(t,\cdot)\big) = \big(\gamma_\Omega w(t,\cdot), \gamma_\Gamma w(t,\cdot)\big), \tag{3.23}$$

где γ_Ω, γ_Γ — операторы сужения соответственно на область Ω и множество Γ, является решением исходной задачи стабилизации (3.14)–(3.18). Действительно, так как w удовлетворяет (3.1)–(3.4) с $w_0 = E_\sigma v_0$, то в силу (3.23) (v,u) удовлетворяют (3.14)–(3.17), а из (3.23), (3.13) следует (3.18).

Для построения оператора E_σ нам необходимо прежде всего ввести вещественный аналог $E_\sigma(A^*)$ и, что самое главное, правильным образом ввести в этом пространстве базис. Пусть

$$d_0^{(k)}(\overline{\lambda}_j, x), \dots, d_{m_k}^{(k)}(\overline{\lambda}_j, x), \quad k = 1, \dots, N(\overline{\lambda}_j) \tag{3.24}$$

базис пространства $\mathbb{C}E(A^*,\overline{\lambda}_j)$. В силу вещественности векторного поля $a(x)$ из (3.8) (см. (3.7)), если $\overline{\lambda}_j \in \Sigma(A^*)$, то и $\lambda_j \in \Sigma(A^*)$. Поэтому базис в пространстве $\mathbb{C}E(A^*,\lambda_j)$ можно определить по базису (3.24) с помощью формулы

$$d_l^{(k)}(\lambda_j,x) = \overline{d_l^{(k)}(\overline{\lambda}_j,x)} \tag{3.25}$$

Для всех собственных значений λ_j оператора A^* с $\operatorname{Re}\lambda_j < \sigma$ выберем канонические базисы (3.24), удовлетворяющие (3.25). Из этого множества векторных полей составим следующее множество вещественнозначных векторных полей

$$\operatorname{Re} d_l^{(k)}(-\lambda_j,x),\ \operatorname{Im} d_l^{(k)}(-\lambda_j,x):\ \operatorname{Im}\lambda_j > 0; \quad d_l^{(k)}(-\lambda_j,x): \operatorname{Im}\lambda_j = 0;\ \operatorname{Re}\lambda_j < \sigma \tag{3.25$'$}$$

Перенумеровав эти векторные поля некоторым образом, получим множество вещественнозначных векторных полей

$$d_1(x),\dots,d_k(x), \quad x \in G \tag{3.26}$$

Обозначим $E_\sigma(A^*) = \operatorname{Lin}[d_1,\dots,d_k]$. Очевидно, пространство L_-, введённое выше, можно определить также и по формуле

$$L_-(G) = \Big\{ w(x) \in V_0^1(G) : \int_G \big(w(x), d_j(x)\big)\, dx = 0, \quad j = 1,\dots,k \Big\}, \tag{3.27}$$

где $d_j(x)$ — поля (3.26).

При построении оператора E_σ важную роль играет

Теорема 2. *Пусть ω_0 произвольная подобласть области G. Тогда сужения векторных полей (3.26) на ω образуют линейно независимую систему векторных полей.*

Доказательство см. в [1], [4], [5].

Введём пространство

$$V^1(\Omega,\Gamma_0) = \{u(x) \in V^1(\Omega) : u\big|_{\Gamma_0} = 0, \exists v \in V_0^1(G) : u = \gamma_\Omega v\}, \tag{3.28}$$

где, напомним, γ_Ω — это оператор сужения на область Ω, норма пространства $V^1(\Omega,\Gamma_0)$ определяется формулой

$$\|u\|_{V^1(\Omega,\Gamma_0)} = \inf_{w \in V_0^1(G):\gamma_\Omega w = v} \|w\|_{V_0^1(G)}$$

Справедлива

Теорема 3. *Пусть $\sigma > 0$ удовлетворяет условию (3.11). Существует линейный ограниченный оператор продолжения*

$$E_\sigma : V^1(\Omega,\Gamma_0) \to L_-(G) \tag{3.29}$$

(т.е. $(E_\sigma v)(x) \equiv v(x)$ для $x \in \Omega$).

Доказательство этой теоремы см. в [1], [4], [5], [6].

Наметим кратко схему доказательства этой теоремы. Пусть $\omega_1 \subset G\backslash\Omega$ — открытое множество с границей $\partial\omega_1$ класса C^∞, удовлетворяющее условию

$$\operatorname{Int}(\partial\omega_1 \cap \partial G) \neq \varnothing.$$

Пусть $(\pi A)_{\omega_1}^{-1} : V^0(\omega_1) \to V_0^1(\omega_1)$ — разрешающий оператор задачи Стокса

$$-\Delta w(x) + \nabla\rho(x) = v(x), \quad \operatorname{div} w(x) = 0, \quad x \in \omega_1, \quad w\big|_{\partial\omega_1} = 0$$

$(w = (-\pi\Delta)^{-1}_{\omega_1} v)$. Искомый оператор продолжения E_σ будем искать в виде

$$E_\sigma v(x) = (Lv)(x) + \left[\sum_{j=1}^{k} c_j (-\pi\Delta)^{-1}_{\omega_1} d_j\right](x) \qquad (3.30)$$

где $L : V^1(\Omega, \Gamma_0) \to V^1_0(G)$ — некоторый оператор продолжения (его существование непосредственно следует из определения пространства $V^1(\Omega, \Gamma_0)$) c_j — неизвестные пока коэффициенты, а векторные поля $(-\pi\Delta)^{-1}_{\omega_1} d_j(x)$ предполагаются продолженными нулём с ω_1 на G. Из (3.30), определения (3.27) пространства $L_-(G)$ следует, что включение $E_\sigma \in L_-(G)$ будет иметь место, если

$$\int_G d_k(x) \left[\sum_{j=1}^{K} c_j (-\pi\Delta)^{-1}_{\omega_1} d_j(x)\right] dx = -\int_G d_k(x)(Lv)(x)\, dx \qquad (3.31)$$

где $k = 1, \ldots, K$. Система (3.31) используется для определения неизвестных коэффициентов c_j из (3.30). Невырожденность системы (3.31) устанавливается с помощью теоремы 2.

Замечание 3.1. Предположение теоремы 3, что $\sigma > 0$ удовлетворяет условию (3.11) не очень существенно, так как если (3.11) не выполняется, то для его справедливости достаточно увеличить σ на достаточно малую величину.

Замечание 3.2. В теореме 3 важную роль играет пространство $V^1(\Omega, \Gamma_0)$, определение которого неконструктивно. В [2] в случае $d = 2$ приведены условия на векторное поле $v_0 \in V^1(\Omega)$ достаточное для его принадлежности пространству $V^1(\Omega, \Gamma_0)$. Помимо очевидного условия $v_0\big|_{\Gamma_0} = 0$ они состоят в том, что $v_0(x)$ обращается на $\partial\Gamma_0 \equiv \partial\Gamma$ в нуль достаточно высокого порядка (указанного в [2]). В случае $d = 3$ имеют место аналогичные достаточные условия.

Теорема 4. *Решение* (v, u) *задачи стабилизации* (3.14)–(3.18) *задаётся формулой* (3.23), *в которой* $w(t, x)$ *— компонента решения задачи* (3.1)–(3.4) *с начальным условием* $w_0 = E_\sigma v_0$, *а* E_σ *— оператор продолжения* (3.29).

Действительно, можно считать, что $\sigma > 0$ удовлетворяет условию (3.11), т.к. в противном случае можно добиться этого чуть увеличив σ. При выполнении этого условия справедливость (3.23) была объяснена ниже этой формулы.

4. Стабилизация системы Навье-Стокса

Этот параграф посвящён описанию конструкции стабилизации решения системы Навье-Стокса. Она аналогична методу стабилизации решения уравнений Озеена: исходная задача продолжается с цилиндра $Q = \mathbb{R}_+ \times \Omega$ на $\Theta = \mathbb{R}_+ \times G$, и при этом начальное условие исходной задачи продолжается специальным образом, чтобы продолженное начальное условие оказалось принадлежащим нелинейному аналогу H_- пространства $L_-(G)$, определённого в (3.27). Прежде всего введём некоторые объекты, необходимые для определения H_-.

4.1. Инвариантное подпространство $L_+(G)$

Можно показать, что пространство $L_-(G)$ инвариантно относительно полугруппы e^{-At}, отображающей начальное условие w_0 в компоненту $w(t, \cdot)$ решения задачи (3.1)–(3.4), взятую в момент времени t. В силу (3.27) $L_-(G)$ имеет конечную коразмерность в $V^1_0(G)$. Построим конечномерное подпространство $L_+(G) \subset V^1_0(G)$ инвариантное относительно полугруппы e^{-At}, дополняющее $L_-(G)$, т.е. такое, что $L_-(G) + L_+(G) = V^1_0(G)$. Для этого будем предполагать, что базис (3.24) пространства $\mathbb{C}E(A^*, \overline{\lambda}_j)$ является *каноническим* (определение канонического базиса см. в [1], [2]*). Тогда, используя теорему Келдыша о структуре полюса $\overline{\lambda}_j$ резольвенты $R(\lambda, A^*)$ (см. [8], [2] теорема 3.1) по базису (3.24) однозначно определяется канонический базис пространства $\mathbb{C}E(-\lambda_j, -A)$

$$e_0^{(k)}(-\lambda_j, x), e_1^{(k)}(-\lambda_j, x), \ldots, e_{m_k}^{(k)}(-\lambda_j, x), \quad k = 1, \ldots, N(-\lambda_j). \tag{4.1}$$

При этом, предполагая выполненными соотношения (3.25), получим, что аналогичные соотношения справедливы и для элементов базиса (4.1). Выписав аналогично (3.25′) вещественные и мнимые части элементов базисов (4.1) с $\operatorname{Re}\lambda_j < \sigma$ и проведя в полученной системе функций в точности такую же перенумерацию как в (3.25), получим следующую систему векторных полей

$$e_1(x), \ldots, e_k(x), \quad x \in G \tag{4.2}$$

При этом системы (3.26) и (4.2) оказываются ортогональными:

$$\int_G \big(e_j(x), d_k(x)\big)\, dx = \delta_{jk}, \quad j = 1, \ldots, K, \quad k = 1, \ldots, K,$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Подробности построения базисов (3.26) и (4.2) см. в [1]. Положим

$$L_+(G) = \operatorname{Lin}[e_1, \ldots, e_k] \subset V_0^1(G) \tag{4.2′}$$

Проектор $P_+ : V_0^1(G) \to L_+(G)$ определим по формуле

$$P_+ v(x) = \sum_{j=1}^{K} e_j(x) \int_G \big(v(x), d_j(x)\big)\, dx \tag{4.3}$$

Положим $P_- = I - P_+$, где I — единичный оператор. Из (4.3), (3.27) следует, что P_- — это проектор на подпространство $L_-(G)$. Очевидно, $L_+ + L_- = V_0^1(G)$.

4.2. Инвариантное многообразие $M_-(G)$

В цилиндре $\Theta = \mathbb{R}_+ \times G$ рассмотрим краевую задачу для системы Навье-Стокса:

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} - \Delta w(t,x) + (w, \nabla)w + \nabla p(t,x) = g(x), \quad \operatorname{div} w = 0 \tag{4.4}$$

$$w\big|_S = 0, \quad S = \mathbb{R}_+ \times \partial G \tag{4.5}$$

$$w(t,x)\big|_{t=0} = w_0(x) \tag{4.6}$$

где $g(x) \in \big(L_2(G)\big)^d$, $w_0(x) \in V_0^1$ — заданные векторные поля. Компоненту w решения $(w, \nabla p)$ этой задачи мы будем искать в пространстве

$$V^{1,2}(\Theta_T) \equiv L_2\big(0, T; V_0^1(G) \cap V^2(G)\big) \cap H^1\big(0, T; V_0^0(G)\big), \quad T > 0 \tag{4.7}$$

Пусть $a(x) \in V_0^1(G) \cap V^2(G)$ — стационарное решение системы Навье-Стокса с той же правой частью $g(x)$, что и в (4,4):

$$-\Delta a(x) + (a, \nabla)a + \nabla \widehat{p}(x) = g(x), \quad \operatorname{div} a = 0, \quad x \in G; \quad a\big|_{\partial G} = 0 \tag{4.8}$$

Хорошо известно (см. [9], [10]), что для любого $T > 0$ существует окрестность $\mathcal{O}_\varepsilon(a) = \{v \in V_0^1(G) : \|v - a\|_{V_0^1(G)} < \varepsilon\}$ с $\varepsilon = \varepsilon(T)$, такая что для любого начального условия $w_0 \in$

*Так как мы не приводим доказательств, определение канонического базиса ниже использоваться не будет

$\mathcal{O}_\varepsilon(a)$ существует решение (w, p) задачи (4.4)–(4.6), причём $w \in V^{1,2}(\Theta)$ и решение $(w, \nabla p)$ единственно в указанном пространстве. Обозначим через $S(t, \cdot)$ оператор, сопоставляющий начальному условию w_0 компоненту $w(t, \cdot)$ решения, взятую в момент времени t: $S(t, w_0) = w(t, \cdot)$.

Используя подпространства $L_-(G)$, $L_+(G)$, введённые в (3.27) и (4.2′), можно построить инвариантное устойчивое многообразие $M_-(G)$ в окрестности стационарного решения $a(x)$ задачи (4.8). Это многообразие ищется в виде

$$M_-(G) = \{u \in V_0^1(G) : u = a + u_- + g(u_-), \quad u_- \in L_-(G) \cap \mathcal{O}\} \tag{4.11}$$

где $\mathcal{O}$ — некоторая окрестность нуля в $V_0^1(G)$, $g : L_-(G) \cap \mathcal{O} \to L_+(G)$ — оператор-функция класса $C^{1+\alpha}$ с $\alpha = 1$ и

$$g(0) = 0, \qquad g'(0) = 0. \tag{4.12}$$

Теорема 5. *Пусть $a \in V_0^1(G) \cap V^2(G)$ является решением задачи* (4.8)*, $\sigma > 0$ удовлетворяет* (3.11)*, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\varepsilon = \{v \in V_0^1(G) : \|v\|_{V_0^1(G)} < \varepsilon\}$ и $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда существует единственная оператор-функция $g : L_-(G) \cap \mathcal{O} \to L_+(G)$ класса $C^{1+\alpha}$ с $\alpha = 1$, удовлетворяющая* (4.12)*, такая, что многообразие $M_-(G)$, определённое в* (4.11)*, инвариантно относительно разрешающей полугруппы $S(t, w_0)$ задачи* (4.4)–(4.6)*. При этом существует такая константа $c > 0$, что*

$$\|S(t, w_0) - a\|_{V_0^1(G)} \le c\|w_0 - a\|_{V_0^1(G)} e^{-\sigma t} \quad \text{при } t > 0. \tag{4.13}$$

Эта теорема доказана, например, в [11, гл. 5, § 2 и гл. 7, § 5].

4.3. Конструкция стабилизации системы Навье-Стокса

Напомним, что постановка задачи стабилизации для системы Навье-Стокса приведена в (2.1)–(2.7). Мы проведём стабилизацию аналогично случаю задачи Озеена, разобранному в § 3. Забыв на время о втором краевом условии (на Σ) из (2.3) мы расширим область Ω через часть границы Γ до области G так, чтобы G удовлетворяла условиям (3.19)–(3.21). Далее мы продолжим задачу (2.1)–(2.6) с Ω на G. Начнём с задачи (2.5). Аналогично (3.28) введём пространство

$$V^2(\Omega, \Gamma_0) = \{v(x) \in V^2(\Omega) : v\big|_{\Gamma_0} = 0, \ \exists u \in V^2(G) \cap V_0^1(G) : \ v = u\big|_\Omega\}. \tag{4.14}$$

Отметим, что достаточные условия, гарантирующие принадлежность векторного поля пространству $V^2(\Omega, \Gamma_0)$ можно получить с помощью методов, предложенных в [2].

Будем предполагать, что векторное поле $\widehat{v}(x)$, фигурирующее в постановке задачи стабилизации (2.1)–(2.7), принадлежит пространству $V^2(\Omega, \Gamma_0)$. Тогда в силу определения (4.14) существует векторное поле $a(x) \in V^2(G) \cap V_0^1(G)$ такое, что $a(x)\big|_\Omega = \widehat{v}(x)$.' Будем также предполагать, что $f(x)$ из (2.1) и (2.5) принадлежит $L_2(\Omega)$. Так как $\widehat{v} \in V^2(\Omega)$, то $\widehat{p}(x)$ из (2.5) принадлежит $H^1(\Omega)$. Продолжим $\widehat{p}(x)$ до функции из $H^1(G)$ и обозначим эту функцию также $\widehat{p}(x)$. Подставляя $\big(a(x), \widehat{p}(x)\big)$ в левую часть стационарного уравнения Навье-Стокса, получим в правой части некоторое векторное поле $g(x) \in L_2(\Omega)$. Так как $a\big|_G = \widehat{v}$, то в силу (2.5) $g(x)\big|_\Omega = f(x)$. Таким образом, мы нашли правую часть $g(x)$ для продолжения нестационарной системы Навье-Стокса (2.1), (2.2) с Ω на G. Краевая задача для системы Навье-Стокса, продолженная с Ω на G будет иметь вид (4.4)–(4.6), где начальное условие $w_0(x)$ является продолжением начального условия $v_0(x)$ исходной задачи стабилизации (2.1)–(2.7) с Ω на G:

$$w_0(x) = \mathrm{Ext}_\sigma v_0(x) \tag{4.15}$$

Центральный шаг всей конструкции — это построение оператора продолжения Ext_σ. Этот оператор строится в следующей теореме.

Теорема 6. *Пусть $\sigma > 0$ удовлетворяет (3.11), $a(x) \in V^2(G) \cap V_0^1(G)$ — стационарное решение задачи (4.8), $\widehat{v}(\cdot) = a\big|_{\Omega}$ и $M_-(G)$ — инвариантное многообразие, построенное в теореме 5 в ε-окрестности $a + \mathcal{O}^{\varepsilon}$ пространства $V_0^1(G)$. Пусть $B_{\varepsilon_0} = \{v \in V^1(\Omega, \Gamma_0) : \|v - \widehat{v}\|_{V^1(\Omega,\Gamma_0)} < \varepsilon_0\}$. Тогда при достаточно малом ε_0 существует непрерывный оператор*

$$\mathrm{Ext}_{\sigma} : \widehat{v} + B_{\varepsilon_0} \to M_-, \tag{4.16}$$

который является оператором продолжения векторных полей с Ω на G: $(\mathrm{Ext}_{\sigma} v)(x) \equiv v(x)$ $\forall x \in \Omega$.

Доказательство этой теоремы см в [2], [5], [6].

Из теоремы 6 легко выводится

Теорема 7. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^{∞}, разделённой на части Γ_0, Γ, $\partial\Gamma$ как в § 2. Предположим, что расширение $G \subset \mathbb{R}^d$ области Ω удовлетворяет условиям (3.21). Пусть $f(x) \in \big(L_2(\Omega)\big)^d$, $\big(\widehat{v}(x), \nabla\widehat{p}(x)\big) \in V^2(\Omega, \Gamma_0) \times \big(L_2(\Omega)\big)^d$ удовлетворяют соотношениям (2.5). Тогда для любого $v_0 \in V^1(\Omega, \Gamma_0)$, для которого*

$$\|v_0 - \widehat{v}\|_{V^1(\Omega,\Gamma_0)} < \varepsilon_0, \tag{4.17}$$

существует управление $u(t, x')$, $(t, x') \in \Sigma = \mathbb{R}_+ \times \Gamma$ стабилизирующее систему Навье-Стокса со скоростью σ, т.е. решение $(v, \nabla p)$ краевой задачи (2.1)–(2.4) с указанным и в качестве условия Дирихле на Σ существует в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+, V^2(\Omega, \Gamma)) \times \big(L_2(D)\big)^d$ $\Big($и, значит, $\partial_t v \in L_2\big(\mathbb{R}_+; V^0(\Omega)\big)\Big)$, причём $v(t, x)$ удовлетворяет (2.7).

Доказательство. Мы продолжим задачу (2.1)–(2.4) с области Ω на объемлющую область G до задачи (4.4)–(4.6) так, как описано в начале этого пункта до теоремы 6. При этом начальное условие w_0 из (4.6) определим с помощью оператора (4.15) построенного в теореме 6. Отметим, что все условия теоремы 6 выполнены. Действительно, мы можем считать, что $\sigma > 0$ удовлетворяет условию (3.11), так как в противном случае, заменив σ на чуть большее число, добъёмся его выполнения. Все остальные условия выполнены в силу конструкции, приведённой в начале этого пункта. Взяв ε_0 в условии (4.17) таким же как в (4.16), мы применим теорему 6 и получим, что $w_0 = \mathrm{Ext}\, v_0 \in M_-(G)$. Тогда согласно теореме 5 справедлива оценка (4.13), Если мы определим решение $(v(t_0), u(t, 0)$ задачи стабилизации по формуле (3.23), где w — решение задачи (4.4)–(4.6) с начальным условием w_0 определённым в (4.15), и значит принадлежащее $M_-(G)$, то в силу (4.13) выполнено (2.7). Из (3.23) и (4.4)–(4.6) следует, что (v, u) удовлетворяют также всем остальным соотношениям (2.1)–(2.4).

Замечание 4.1 Как будет видно из дальнейшего, в теореме 7 важен не только сам факт существования решения задачи стабилизации, но и конструкция этого решения. Дело в том, что эта конструкция позволяет строить управление с обратной связью.

5. Реальные процессы и обоснование возможности численного решения задачи стабилизации

5.1. Наводящие соображения

Метод стабилизации, предложенный в предыдущем параграфе по своей природе не является устойчивым. Действительно, устойчивое многообразие $M_-(G)$, построенное выше, является отталкивающим множеством. Это значит, что если начальное условие w_0 оказалось не в точности на многообразии $M_-(G)$, а в некоторой его малой окрестности, то решение

$w(t,\cdot)$ задачи (4.4)–(4.6) будет некоторое время двигаться "вдоль" многообразия $M_-(G)$ постепенно от него удаляясь, причём скорость его удаления от $M_-(G)$ будет возрастать со временем. Так как при численных расчётах оператора продолжения Ext_σ мы неизбежно окажемся лишь в малой окрестности $M_-(G)$ а не на $M_-(G)$, то эти малые флюктуации с ростом времени будут расти и в результате разрушат всю конструкцию стабилизации.

Чтобы преодолеть эти трудности мы должны отказаться от традиционной для математиков точки зрения, что решение поставленной задачи абсолютно точно описывают соответствующий процесс* и встать на точку зрения характерную для физиков, что решение математической задачи описывает реальный процесс лишь приближённо.

После этого мы должны выяснить какие флюктуации фактически возникают в реальном процессе и как можно эти флюктуации погасить. Так как разобраться до конца в структуре реального физического процесса невозможно, мы будем моделировать эту структуру приняв гипотезу, что флюктуации, которые отличают реальный физический процесс от точного решения, имеют похожую структуру с флюктуациями, которые отличают результаты расчётов на ЭВМ задачи стабилизации от точного решения соответствующей разностной схемы.

Структура флюктуаций, возникающих при численном моделировании задачи стабилизации может быть полностью проанализирована теоретически. Используя этот анализ, мы введём математическое понятие реального процесса, который отличается от точного решения задачи стабилизации на некоторое векторное поле являющееся суммой некоторых флюктуаций. Структура этих флюктуаций будет определена с помощью системы аксиом, моделирующих структуру флюктуаций, возникающих при численном моделировании.

5.2. Реальный процесс и его стабилизация в случае флюктуаций дискретных по времени

Вместе с компонентой $w(t,x)$ решения задачи (4.4)–(4.6) мы будем рассматривать векторное поле $\widehat{w}(t,x)$ моделирующее поле скоростей реального потока жидкости, которое мы будем называть реальным процессом. Векторное поле $\varphi(t,x)$ определяемое равенством

$$\widehat{w}(t,x) = w(t,x) + \varphi(t,x)$$

мы будем называть флюктуацией. Предполагается, что реальный процесс определяется следующим образом. Пусть задан дискретный набор моментов времени

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots \tag{5.1}$$

удовлетворяющий условию

$$\Delta(t) = \max_{j:t_j<t} |t_j - t_{j-1}| \le \tilde{\Delta} \qquad \forall t > 0 \tag{5.2}$$

где $t_0 = 0$ и $\tilde{\Delta}$ — константа. Предположим, что в моменты времени t_k возникают флюктуации

$$(t_1 - 0)\varphi(t_1,x), \ldots, (t_k - t_{k-1})\varphi(t_k,x), \ldots \tag{5.3}$$

где

$$\varphi(t_k,x) \in V_0^1(G), \quad \|\varphi(t_k,\cdot)\|_{V_0^1(G)} \le \widehat{\varepsilon} \quad \forall j,\ \varepsilon \ll 1 \tag{5.4}$$

где $\hat{\varepsilon} > 0$ — фиксированное достаточно малое число. Напомним, что через $S(t,w_0)$ обозначается разрешающий оператор (4.4)–(4.6).

*Эта точка зрения сформировалась при моделировании корректных краевых задач. В таких задачах из-за их корректности любые малые флюктуации исходных данных или решения не растут со временем. Поэтому эти флюктуации можно вообще не принимать в расчёт

Определим реальный процесс по индукции с помощью формулы

$$\tilde{w}(t,\cdot) = S(t,w_0), \quad t \in (0,t_1); \quad \tilde{w}(t_1,\cdot) = S(t_1,w_0) + t_1\varphi(t_1,\cdot), \tag{5.5}$$

$$\tilde{w}(t,\cdot) = S\big(t-t_k, \tilde{w}(t_k,\cdot)\big), \quad t \in (t_k,t_{k+1});$$
$$\tilde{w}(t_{k+1},\cdot) = S\big(t_{k+1}-t_k, \tilde{w}(t_k,\cdot)\big) + (t_{k+1}-t_k)\varphi(t_{k+1,}\cdot) \tag{5.6}$$

Очевидно, реальный процесс моделирует векторное поле, получающееся в результате вычисления на компьютере решения краевой задачи (4.4)–(4.6). Так как реальный процесс, определяемый формулами (5.5), (5.6) не управляем, флюктуации $(t_{k+1}-t_k)\varphi(t_k,\cdot)$ разрушают всю конструкцию стабилизации и $\tilde{w}(t,\cdot)$ не стремится к a при $t \to \infty$.

Чтобы стабилизировать реальный процесс, мы должны включить обратную связь, т.е. построить управление, реагирующее на возникновение флюктуаций $(t_{k+1}-t_k)\varphi(t_k,\cdot)$ и подавляющее их. Для построения управляемого реального процесса нам понадобится некоторый оператор проектирования на инвариантное многообразие $M_-(G)$ близкий по структуре оператору продолжения Ext_σ, построенному в теореме 6.

Теорема 8. *Пусть $z \in M_-(G)$. Существует величина $\widehat{\delta} = \widehat{\delta}(z,\varepsilon) \ll \min(\varepsilon,\varepsilon_0)$, где ε, ε_0 — числа из теоремы 6, такая, что при $0 < \delta < \widehat{\delta}$ определён непрерывный оператор проектирования*

$$\Pi_z : z + \mathcal{O}^\delta \to M_-(G), \tag{5.7}$$

удовлетворяющий условию $(\Pi_z\varphi)(x) \equiv \varphi(x)$ $\forall x \in \Omega$ и оценке

$$\|\Pi_z(\varphi) - z\|_{V_0^1(G)} \le \widehat{\gamma}\|\varphi - z\|_{V_0^1(G)} \tag{5.8}$$

Доказательство этой теоремы см. в [6], [7].

Для дальнейшего полезно отметить, что оператор Π_z строится по формуле

$$\Pi_z v = v + (-\pi\Delta)^{-1}_{\omega_1}\sum_{j=1}^{k} p_j d_j \tag{5.9}$$

где d_j — векторные поля (3.26), а $(-\pi\Delta)^{-1}_{\omega}$ как и в (3.30) — это разрешающий оператор задачи Стокса на области ω_1 с нулевыми граничными условиями. Отметим, что в (5.9) коэффициенты $p_j = p_j(z,v)$ однозначно определяются из условия, что правая часть (5.9) принадлежит многообразию $M_-(G)$.

Предполагая, что в дискретные моменты времени заданы флюктуации (5.1)–(5.4) построим управляемый реальный процесс стабилизирующийся около стационарного решения $a(x)$. Это удастся сделать с помощью включения некоторого механизма, реагирующего на возникающие флюктуации решения и подавляющие их. Вместо (5.5), (5.6) используем следующие формулы для определения управляемого реального процесса

$$\tilde{w}(t,\cdot) = S(t,w_0),\ t \in (0,t_1), \quad \tilde{w}(t_1,\cdot) = S(t_1,w_0) + t_1\varphi(t_1,\cdot) \tag{5.10}$$

$$\tilde{w}(t,\cdot) = S\big(t-t_k, \Pi_{S(t_k-t_{k-1},\tilde{w}(t_{k-1},\cdot))}\tilde{w}(t_k,\cdot)\big),\ t \in (t_k,t_{k+1}), \tag{5.11}$$

$$\tilde{w}(t_{k+1},\cdot) = S\big(t_{k+1}-t_k, \Pi_{S(t_k-t_{k-1},\cdot)}\tilde{w}(t_k,\cdot)\big) + (t_{k+1}-t_k)\varphi(t_{k+1},\cdot) \tag{5.12}$$

Сформулируем теорему о стабилизации реального процесса (5.10)–(5.12).

Теорема 9. *Пусть моменты времени* (5.1) *и флюктуации* (5.3) *удовлетворяют* (5.2), (5.4) *а реальный процесс, соответствующий задаче* (4.4)–(4.6) *определяется формулами* (5.10)–(5.12). *Пусть начальное условие $w_0 \in M_-(G) \cap \mathcal{O}^\varepsilon$ с достаточно малым ε а число $\widehat{\varepsilon}$ из* (5.4) *меньше $\widehat{\varepsilon}_0 = \widehat{\varepsilon}_0(\varepsilon,a,\sigma)$. Тогда реальный процесс* (5.10)–(5.12) *удовлетворяет оценке*

$$\|\tilde{w}(t,\cdot) - a\|_{V_0^1(G)} \le c\Big(e^{-\sigma t}\|w_0 - a\|_{V_0^1(G)} + (1+\sigma^{-1})\widehat{\varepsilon}\Big) \tag{5.13}$$

Доказательство этой теоремы приведено в [6].

Отметим, что из (5.13) не следует, что $\tilde{w}(t,\cdot)$ стремится к a при $t \to \infty$. Но это вполне адекватно реальной ситуации, так как реальный процесс в силу определения при каждом t_j (которое может быть сколь угодно велико) возмущается некоторой флюктуацией $\varphi(t_j,\cdot)$.

С помощью управляемого реального процесса (5.10)–(5.12) можно определить реальный процесс $\tilde{v}$ и соответствующее управление $\tilde{u}$ отвечающий исходной задаче стабилизации (2.1)–(2.7), с помощью формулы

$$\big(\tilde{v}(t,\cdot),\tilde{u}(t,\cdot)\big) = \big(\gamma\tilde{w}(t,\cdot),\gamma_\Gamma\tilde{w}(t,\cdot)\big) \tag{5.14}$$

Из оценки (5.13) сразу следует, что реальный процесс $\tilde{v}$ удовлетворяет оценке

$$\|\tilde{v}(t,\cdot)-\widehat{v}\|_{V^1(\Omega,\Gamma_0)} \le c_1\Big(e^{-\sigma t}\|v_0-\widehat{v}\|_{V^1(\Omega,\Gamma_0)} + (1+\sigma^{-1})\widehat{\varepsilon}\Big) \tag{1}$$

Из приведенной выше конструкции сразу вытекает, что управление $\tilde{u}$, определённое в (5.14) является управлением с обратной связью, так как оно реагирует на возникновение флюктуаций $\varphi(t_j,\cdot)\big|_\Omega$ и подавляет их.

5.3. Случай флюктуаций, возникающих в каждый момент времени

Реальные процессы с непредсказуемыми флюктуациями, возникающими в дискретные моменты времени вполне естественны при моделировании численных расчётов на ЭВМ задачи стабилизации. Однако если мы хотим моделировать реальные физические процессы, гораздо более естественным представляется предположение, что непредсказуемые флюктуации возникают в каждый момент времени. Мы построим реальные процессы такого типа с помощью предельного перехода когда параметр $\widehat{A}$ из (5.2) стремится к нулю. Для простоты вместо условия (5.2) будем предполагать, что

$$t_{j+1}-t_j = \Delta \qquad \forall j \in \mathbb{N} \tag{5.15}$$

а предположения (5.3), (5.4) заменим на более сильное предположение, что флюктуации задаются с помощью вектор-функции

$$\varphi(t,x) \in C\big(\mathbb{R}_+, V_0^1(G)\big); \quad \|\varphi(t,\cdot)\|_{V_0^1(G)} \le \widehat{\varepsilon} \quad \forall t>0 \tag{5.16}$$

Переобозначим реальный процесс, определённый в (5.10), (5.12) через $w^\Delta(t,x)$, чтобы подчеркнуть, что он порождается флюктуациями возникающими в моменты времени, удовлетворяющими (5.15). Чтобы определить реальный процесс, порождённый флюктуациями $\varphi(t,x)dt$, где φ удовлетворяет (5.16), возникающими в каждый момент времени, мы совершим предельный переход в $w^\Delta(t,x)$ при $\Delta \to 0$.

Теорема 10. *Существует последовательность $\Delta_k \to 0$ такая, что*

$$w^{\Delta_k}(t,\cdot) \to w^0(t,\cdot) \ \text{ в } L_2(G) \ \textit{ при } \Delta_k \to 0 \ \textit{ равномерно по } t \in \mathbb{R}_+ \tag{5.17}$$

При этом $w^0(t,\cdot) \in L_\infty\big(\mathbb{R}_+;V_0^1(G)\big) \cap C_b^{1/2}\big(\mathbb{R}_+;L_2(G)\big)$ и[⋆] удовлетворяет неравенству

$$\|w^0(t,\cdot)\|_{V_0^1(G)} \le c\Big(e^{-\sigma t}\|w_0\|_{V_0^1(G)} + (1+\sigma^{-1})\widehat{\varepsilon}\Big) \tag{5.18}$$

где c — константа из 5.13, а $\widehat{\varepsilon}$ — из (5.16).

[⋆]Напомним, что $C_b^{1/2}\big(\mathbb{R}_+;L_2(G)\big)$ — это множество ограниченных и непрерывных функций $w(t,\cdot)$ из $\mathbb{R}_+$ в $L_2(G)$ удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем 1/2: $\sup_{t\in\mathbb{R}}\sup_{0<\Delta<1}\frac{\|w(t+\Delta,\cdot)-w(t,\cdot)\|_{L_2(G)}}{\Delta^{1/2}} < \infty$

Доказательство теоремы см. в [7].

Определение реального процесса $w^0(t,\cdot)$, данное в теореме 10, страдает тем недостатком, что зависит от последовательности $\{\Delta_k\}$, т.е. от способа построения. Чтобы показать, что на самом деле такой зависимости нет, выведем интегро-дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет реальный процесс $w^0(t,\cdot)$.

Теорема 11. *Пусть $w^0(t,\cdot)$ — реальный процесс, построенный в теореме* 10, *и соответствующий флюктуациям $\varphi(t,\cdot)dt$, возникающим в каждый момент времени, и удовлетворяющим условию* (5.16). *Тогда $w^0(t,\cdot)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w^0(t,x)}{\partial t} + Aw^0 + \pi\big[(w^0,\nabla)w^0\big] = \varphi(t,x)+ \\ &+\sum_{j=1}^{k}\int_G \frac{\delta p_j\big(w^0(t,\cdot)\big)}{\delta z(y)}\varphi(t,y)\,dy((-\pi\Delta)^{-1}_{\omega_i}d_j(x) \end{aligned} \tag{5.19}$$

где A, π — соответственно, операторы (3.8), (3.7), *$p_j(z,v)$ — функционалы из определения* (5.9) *оператора проектирования $\Pi_z v$, $\delta p_j/\delta z(y)$ — вариационная производная этого функционала, $d_j(x)$ — функции* (3.26), *а $(-\pi\Delta)^{-1}_{\omega_j}$ — оператор, определённый выше соотношения* (3.30).

Доказательство см. в [7].

Отметим также, что из теоремы 10 сразу выводится начальное условие для $w^0(t,x)$:

$$w^0(t,x)\big|_{t=0} = w_0(x) \tag{5.20}$$

Теорема 12. *Пусть флюктуация $\varphi(t,x)\,dt$ удовлетворяет* (5.16) *и $w_0 \in M_-(G)$. Тогда реальный процесс $w^0(t,x)$ построенный в теореме* 5.3, *принадлежит при $T>0$ пространству $V^{1,2}(\Theta_T)$ (определённому в* (4.7)). *Любое решение $w^0(t,x)$ задачи* (5.19), (5.20) *единственно в пространстве $V^{1,2}(\Theta_T)$.*

Доказательство см. в [7].

Таким образом реальный процесс $w^0(t,x)$ построенный в теореме 5.3, однозначно определяется флюктуацией $\varphi(t,x)\,dt$, начальным условием $w_0(x)$ и, конечно, выбором метода стабилизации.

Посредством формулы

$$\big(v^0(t,\cdot),u^0(t,\cdot)\big) = \big(\gamma_\Omega w^0(t,\cdot),\gamma_\Gamma w^0(t,\cdot)\big) \tag{5.21}$$

определяется также и реальный процесс с флюктуациями $\varphi(t,x)dt$, возникающими в каждый момент времени, который соответствует исходной задаче стабилизации (2.1)–(2.7).

Список литературы

[1] *А.В. Фурсиков.* Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью.// Мат. сб. 192(2001) № 4 с. 115–160.

[2] *A.V. Fursikov.* Stabilizability of two-dimensional Navier-Stokes equation with help of boundary feedback control. J.Math. Fluid Mech. 3(2001), p. 259–301.

[3] *A.V. Fursikov.* Feedback stabilization for 2D Navier-Stokes equation. The Navier-Stokes equation: Theory and Numerical Methods. Lecture Note Pure Appl. Math. 223(2001) p. 179-196

[4] *A.V. Fursikov.* Feedback stabilization for 2D Ozeen equation: additienal remarks. Control and Estimation of Distributed Parameter Systems. International series of Numerical Mathematics. Burkhäser Verlag (2002) p. 169-188

[5] *A.V. Fursikov.* Stabilization for the 3D Navier-Stikes system by feedback boundary control. Diserte Cont. Dyn. Syst. (2003) (to appear)

[6] *A.V. Fursikov.* Real process corresponding to 3D Navier-Stokes system and its feedback stabilization from boundary. Amer. Math. Soc. Transl. Series 2, v.206, Advances in the Math Sciences-51, PDE M Vishik 's Seminar, AMS Providence, Rhode Island (2002), p. 95-123

[7] *А.В. Фурсиков.* Реальные процессы и реализуемость метода стабилизации системы Навье-Стокса посредством управления с обратной связью с границы области. Междунар. матем. серия. Т 2(2002), с. 127-164. Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы. II. В честь академика О.А. Ладыженской.

[8] *М.В. Келдыш.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов. УМН т. 26 № 4, 1971, с. 15-41.

[9] *О.А. Ладыженская.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

[10] *М.И. Вишик, А.В. Фурсиков.* Математические задачи статистической гидромеханики. М.: Наука, 1980.

[11] *А.В. Бабин, М.И. Вишик.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.

Представлено в Дальневосточный математический сборник в окончательной форме 20 ноября 2002 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Грант № 01-01-00928

A.V. Fursikov, Stabilization from the boundary of solution for Navier-Stokes system: solvability and justification of numerical simulation. Far Eastern Mathematical Journal, 2003. v. 4, № 1, pp. ??–??.

SUMMARY

A stabilization method for solution of Navier-Stokes system near steady-state (unstable) solution is expounded. Stabilization is done by a control from the boundary of the domain where equations are defined. Important point of the stabilization problem which we study in this paper is justification of possibility for numerical simulation. We solve the problem choosing feedback control.