Существование решений экстремальных задач

В.М.Тихомиров, А.В.Фурсиков

23 ноября 2003 г.

Я убежден, что будет возможно доказывать теоремы существования с помощью общего принципа [...]. Этот общий принцип, возможно, приблизит нас к ответу на следующий вопрос: имеет ли решение каждая регулярная вариационная проблема, если самому понятию "решение" при случае придавать расширенное толкование.

Д. Гильберт.

1 Принцип компактности

Тема, рассматриваемая в этой главе, непосредственно связана с двадцатой проблемой Гильберта — одной из двадцати трех знаменитых проблем, поставленных в его докладе на парижском Конгрессе 1900 года — проблемой существования решений задач вариационного исчисления. "Общий принцип" доказательства теорем существования, о котором говорит Гильберт, это, видимо, принцип компактности.

1.1 Предварительные сведения

Напомним сначала несколько определений. Пусть X — топологическое пространство[1] и $\overline{\mathbb{R}}$ — расширенная прямая, т. е. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$, где $\mathbb{R}$ — вещественная ось.

[1]Топологическим пространством (X, τ) называется множество X и система τ его подмножеств, содержащих $X, \emptyset$, и замкнутых относительно операции объединения любой совокупности множеств и пересечения любого конечного числа множеств. В

Функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *собственной*, если она не равна тождественно $+\infty$, и для всех $x \in X, f(x) > -\infty$.

Функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *полунепрерывной снизу*, если выполнено одно из условий:

i) Для любого $x \in X$ и любой последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящейся к x при $n \to \infty$

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) := \lim_{n\to\infty} \inf_{i\geq n} f(x_i),$$

ii) Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ Лебегово множество функции f, т. е. $\mathcal{L}_\lambda f := \{x \in X \mid f(x) \leq \lambda\}$, замкнуто.

iii) Надграфик функции f, т. е. множество $\mathrm{epi} f := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \alpha \geq f(x)\}$, замкнут в $X \times \mathbb{R}$.

Предложение 1.1. *Свойства* i), ii), iii) *эквивалентны.*

Доказательство. i) $\Rightarrow$ ii). Пусть $\lambda \in \mathbb{R}, x_n \in \mathcal{L}_\lambda f$ и $x_n \to \widehat{x}$ при $n \to \infty$. Так как согласно i) $f(\widehat{x}) \leq \liminf f(x_n) \leq \lambda$, то $\widehat{x} \in \mathcal{L}_\lambda f$, что доказывает замкнутость $\mathcal{L}_\lambda f$.

ii) $\Rightarrow$ iii). Пусть $(x_n, \alpha_n) \in \mathrm{epi} f$, т. е. $\alpha_n \geq f(x_n)$, и $x_n \to \widehat{x}, \alpha_n \to \widehat{\alpha}$ при $n \to \infty$. Допустим, что $\widehat{\alpha} < f(\widehat{x})$, т. е. iii) не верно, и положим $\varepsilon = (f(\widehat{x}) - \widehat{\alpha})/2$. Так как $\alpha_n \to \widehat{\alpha}$, то при любом достаточно большом n $\alpha_n \leq \widehat{\alpha} + \varepsilon$. Отсюда и из условия $f(x_n) \leq \alpha_n$ в силу ii) следует, что $f(\widehat{x}) \leq \alpha + \varepsilon$. Подставляя в это неравенство выражение для ε, получим противоречие с предположением, что $f(\widehat{x}) > \widehat{\alpha}$.

iii) $\Rightarrow$ i). Пусть i) не верно, т. е. существует такая последовательность

$$x_n \to \widehat{x} \text{ при } n \to \infty, \text{ что } f(\widehat{x}) > \beta := \liminf_{n\in\infty} f(x_n).$$

Пусть $\{x_m\}$ – подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ такая, что $f(x_m) \to \beta$ при $m \to \infty$. Таким образом, при любом m

$$(x_m, f(x_m)) \in \mathrm{epi} f, \ (x_m, f(x_m)) \to (\widehat{x}, \beta) \text{ при } m \to \infty.$$

Но $(\widehat{x}, \beta) \notin \mathrm{epi} f$, что противоречит iii). $\square$

топологическом пространстве определено понятие сходимости. Множества из τ называют *открытыми*, а их дополнения *замкнутыми*. Топологическое пространство называется *компактным* (или *компактом*), если из любого его покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Контрольный вопрос(далее КВ): Привести пример разрывной функции, полунепрерывной снизу.

В основе теории существования решения экстремальных задач лежит

Теорема 1.1. *(Принцип компактности Вейерштрасса — Лебега) Пусть X — компактное топологическое пространство и f — собственная полунепрерывная снизу функция на X. Тогда f ограничена снизу и существует точка $\widehat{x} \in X$, в которой f достигает абсолютного минимума.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{L}_n f$, $n \in \mathbb{Z}$. Из определения ii) полунепрерывности снизу следует, что $U_n := X \setminus \mathcal{L}_n f$, $n \in \mathbb{Z}$ открытые множества в X. Ясно, что $\ldots \subset U_n \subset U_{n-1} \subset \ldots$ и что $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — открытое покрытие в X. Из определения компактности существует число $m \in \mathbb{Z}$ такое, что $U_m = X$, т. е. f ограничена снизу и потому существует нижняя грань $\mu := \inf_{x \in X} f(x)$. Если нижняя грань не достигается,то положив $V_n := X \setminus \mathcal{L}_{\mu+1/n} f$, $n \in \mathbb{N}$, получим, что $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ есть открытое покрытие X. Следовательно, (снова из-за определения компактности) существует число $s \in \mathbb{N}$ такое, что $X = V_s$, т. е. $f > \mu + 1/s$. Но это противоречит определению μ. $\square$

О том, насколько существенно требование компактности области определения минимизируемой функции свидетельствует следующий пример задачи минимизации на $\mathbb{R}^2$ неотрицательного *многочлена четвертого порядка от двух переменных*, в которой нет решения: $x_1^2 + (x_1 x_2 - 1)^2 \to \min$. (Разумеется, существуют тривиальные примеры несуществования при отсутствии компактности даже для функций одного переменного. Такова, скажем, задача $\frac{1}{1+x^2} \to \min$, $x \in \mathbb{R}$, где решения нет.)

Отметим, что в задачах вариационного исчисления минимизируются функционалы, которые обычно определены на неограниченных множествах бесконечномерных пространств. Так как такие множества не являются компактными, непосредственное применение теоремы 1.1 в такой ситуации невозможно.

Установим принцип компактности, применимый к задачам вариационного исчисления.

1.2 Принцип компактности

Пусть X–нормированное пространство, т.е. линейное пространство, снабженное нормой $\|\cdot\|$. В нем помимо сходимости по норме $\|\cdot\|$ (т.е. сильной сходимости) существует и другой тип предельного перехода. Последовательность элементов $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ нормированного пространства X называется *слабо сходящейся*, если для любого линейного ограниченного функционала x^* на X (т.е. для $x^* \in X^*$)

$$\langle x^*, x_n\rangle \to \langle x^*, x\rangle \qquad n\to\infty$$

где $\langle x^*, x\rangle$ — значение функционала x^* на векторе x.

Напомним, что нормированное пространство называется *банаховым*, если оно является полным, т.е. любая его фундаментальная последовательность элементов сходится. Банахово пространство X называется *рефлексивным*, если из всякой ограниченной последовательности его элементов можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность. [2]

Примером рефлексивного пространства является пространство $L_p(\Omega)$ (где Ω — область в пространстве $\mathbb{R}^n$) при $1 < p < \infty$ (см. [I]).

Кв 2. Привести пример нормированного, но не банахова пространства.

Задача 1. Доказать, что все конечномерные нормированные пространства рефлексивны.

Задача 2*. Привести пример нерефлексивного банахова пространства.

В полном соответствии с определениями i), ii), iii) функций, полунепрерывных снизу, можно дать следующее определение.

Функционал $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *полунепрерывным снизу относительно слабой сходимости*, если выполнено одно из условий:

i') Для любого $x \in X$ и любой последовательности $\{x_n\}$, слабо сходящейся к x при $n\to\infty$

$$f(x) \le \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

i') Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ лебегово множество $\mathcal{L}_\lambda f$ секвенциально слабо замкнуто.

ii') Надграфик epi$f$ секвенциально слабо замкнут в $X \times \mathbb{R}$.

В точности как предложение 1.1 можно доказать

Предложение 1.2. *Свойства* i'), ii'), iii') *эквивалентны.*

[2] Отметим, что очень часто рефлексивным называют банахово пространство X, совпадающее со своим вторым сопряженным $X^{**} := (X^*)^*$при каноническом вложении X в X^{**}. Эквивалентность этих двух определений составляет содержание теоремы Эберлейна-Шмульяна (см. [I]).

Подмножество $\mathcal{A}$ пространства X называется *секвенциально слабо замкнутым*, если предел $\widehat{x}$ любой слабо сходящийся последовательности его элементов $x_n \in \mathcal{A}$ принадлежит $\mathcal{A}$.

Кв 3. Пусть X– нормированное пространство и A– (сильно) замкнутое поднножество X. Всегда ли оно является секвенциально слабо замкнутым?

Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $\mathcal{A} \subset X$, f — функционал на X. Рассмотрим экстремальную задачу:

$$f(x) \to \min; \quad x \in \mathcal{A}. \tag{1.1}$$

Решение задачи, т. е. точку, в которой достигается глобальный минимум функционала f, обозначим $\hat{x}$.

Говорят, что функционал f *коэрцитивен*, если для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ лебегово множество $\mathcal{L}_\lambda(f) = \{x \in \mathcal{A} \mid f(x) \leq \lambda\}$ непусто и ограничено в X.

Теорема 1.2. *(О существовании точки минимума) Пусть в задаче* (1.1) *собственный функционал f определен на рефлексивном банаховом пространстве X и удовлетворяет условиям коэрцитивности и полунепрерывности снизу относительно слабой сходимости. Тогда, если множество $\mathcal{A}$ секвенциально слабо замкнуто, то функционал ограничен снизу и достигает своего абсолютного минимума.*

Доказательство. Пусть

$$\mu = \inf_{x \in \mathcal{A}} f(x)$$

и λ — число из определения коэрцитивности f. Так как $\mathcal{L}_\lambda(f) \neq \emptyset$, то $\lambda \geq \mu$. Если $\lambda = \mu$, то любая точка $x \in \mathcal{L}_\lambda f \neq \emptyset$ является точкой абсолютного минимума $f(x)$ и теорема доказана. Рассмотрим случай $\lambda > \mu$. Согласно определению нижней грани существует такая последовательность $x_n \in \mathcal{A}$, что $f(x_n) \to \mu$. Все члены последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ за исключением, возможно, конечного числа принадлежат $\mathcal{L}_\lambda(f)$ и поэтому множество $\{\|x_n\|\}$ ограничено. Вследствие рефлексивности X, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $x_n \to \hat{x}$ слабо в X. Вследствие секвенциальной слабой замкнутости $\mathcal{A}$ $\hat{x} \in \mathcal{A}$, а благодаря полунепрерывности снизу относительно слабой сходимости $f(\hat{x}) \leq \mu = \lim_{n\to\infty} f(x)$. Так как по условию $f(\hat{x}) > -\infty$, то μ конечно и $f(\hat{x}) = \mu$, т. е. $\hat{x}$ — точка абсолютного минимума функционала f. $\square$

У теоремы 1.2 имеются два достаточно трудно проверяемых условия: секвенциально слабой замкнутости множества $\mathcal{A}$ и полунепрерывности снизу функционала f относительно слабой сходимости. В следующем пункте мы приведем легко проверяемые условия, гарантирующие их выполнение.

1.3 Теорема Мазура и ее следствия

Начнем с напоминания определений. Если a, b — точки линейного пространства X, то отрезок $[a, b]$, соединяющий эти точки, определяется формулой

$$[a, b] := \{x \in X | \ x = \alpha a + (1 - \alpha)b, \qquad \alpha \in [0, 1]\}.$$

Подмножество A пространства X называется *выпуклым*, если для любых точек $a, b \in A$ отрезок $[a, b]$ принадлежит A.

Если $x_1, \dots, x_n \in X$, то при любых $\alpha_i \geq 0$ таких, что $\Sigma_{i=1}^n \alpha_i = 1$ вектор

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \tag{1.2}$$

называется *выпуклой комбинацией* вектров $x_1, \dots, n$.

Если A — выпуклое множество и $x_1, \dots, x_n \in A$, то любая выпуклая комбинация (1.2) принадлежит A. Действительно, если в (1.2) $n = 2$, то утверждение следует из определения выпуклого множества. Пусть утверждение доказано для всех выпуклых комбинаций не более, чем $n-1$ элементов и пусть в (1.2) $|\alpha'| = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} > 0$ (в противном случае $x = x_n \in A$). Тогда по предположению индукции $x' = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{|\alpha'|} x_i \in A$ и по определению выпуклого множества $x = |\alpha'| x' + \alpha_n x_n \in A$.

Пусть B — подмножество в X. *Овыпуклением* B называется множество всех выпуклых комбинаций элементов B. Овыпукление обозначается $\mathrm{Conv}B$. $\mathrm{Conv}B$ — выпуклое множество, потому, что, если

$$y_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \qquad y_2 = \sum_{j=1}^m \beta_j z_j$$

— выпуклые комбинации элементов $x_i \in B$, $i = 1, \dots n$, $z_j \in B$, $j = 1, \dots, m$, то при любом $\gamma \in (0, 1)$ элемент

$$\gamma y_1 + (1 - \gamma) y_2 = \sum_{i=1}^n \gamma \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m (1 - \gamma) \beta_j z_j$$

является выпуклой комбинацией элементов из B и поэтому принадлежит $\mathrm{Conv}B$.

Задача 3. Вычислить овыпукление объединения двух гипербол на плоскости: $H_1\{(x_1, x_2)|x_1x_2 = 1, x_i > 0, i = 1, 2\}$ и $H_2 = \{x_1x_2 = -1, x_1 < 0, x_2 > 0\}$.

Теорема 1.3. *(Мазур) Пусть $\widehat{x}$ является слабым пределом последовательности $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ при $n \to \infty$. Тогда существует такая последовательность $y_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,n} x_j$ выпуклых комбинаций элементов x_k, что $y_n \to \widehat{x}$ сильно при $n \to \infty$.*

Доказательство. Допустим противное. Это означает, что $\widehat{x}$ не принадлежит замыканию $\overline{\mathrm{Conv}\{x_n\}}$ овыпукления счетного множества $\{x_n\}$. Так как замыкание выпуклого множества выпукло, то $\overline{\mathrm{Conv}\{x_n\}}$ — замкнутое выпуклое множество, и $\widehat{x} \notin \overline{\mathrm{Conv}\{x_n\}}$. Поэтому в силу теоремы отделимости существует линейный непрерывный функционал x^* такой, что

$$\sup_{z \in \overline{\mathrm{Conv}\{x_n\}}} \langle x^*, z \rangle < \langle x^*, \widehat{x} \rangle - \varepsilon$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Но это неравенство противоречит слабой сходимости последовательности x_n к $\widehat{x}$. $\square$

Важную роль в дальнейшем играют два следствия теоремы Мазура.

Следствие 1.1. *Если множество выпукло и замкнуто, то оно секвенциально слабо замкнуто.*

Доказательство. Пусть $x_n \in A$ и $x_n \to \widehat{x}$ слабо при $n \to \infty$. По теореме Мазура существует такая последовательность y_k выпуклых комбинаций элементов x_n, что $y_k \to \widehat{x}$ сильно при $k \to \infty$. Так как A — выпукло, то $y_k \in A$, а из замкнутости A следует, что $\widehat{x} \in A$. $\square$

Следствие 1.2. *Если функционал $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ является выпуклым и полунепрерывным снизу, то он полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости.*

Доказательство. Из условий теоремы и свойства iii) полунепрерывности снизу множество $\mathrm{epi}f$ выпукло и замкнуто в $X \times \mathbb{R}$. Поэтому согласно следствию 1.1 $\mathrm{epi}f$ секвенциально слабо замкнуто, а в силу свойства iii') функция f полунепрерывно снизу относительно слабой сходимости. $\square$

2 Постановка задачи о существовании решения. Контрпримеры

Начнем с формулировки теоремы существования решения вариационной задачи.

2.1 Одномерная вариационная задача

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления:

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \min, \quad x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \tag{2.1}$$

$-\infty < t_0 < t_1 < \infty$.

Применим наш общий подход к этой задаче. Первые общие теоремы существования решений были доказаны Тонелли.

Функция $L(t, x, p)$, $(t, x, p) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^2$ называется *квазирегулярной*, если при любых $(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}$ она выпукла по p.

Совокупность абсолютно непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$ функций, производная которых принадлежит пространству $L_p([t_0, t_1])$, обозначается $W_p^1([t_0, t_1])$ (такие пространства носят имя С. Л. Соболева). Имеет место следующая

Теорема 2.1. *(Тонелли о существовании) Пусть интегрант* $(t, x, \dot{x}) \mapsto L : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *в задаче* (2.1) *непрерывен по всем переменным, непрерывно дифференцируем по* $\dot{x}$*, квазирегулярен и удовлетворяет следующему условию роста:* $L(t, x, \dot{x}) \geq \alpha |\dot{x}|^p + \beta$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $p > 1$[3]. *Тогда в пространстве* $W_p^1([t_0, t_1])$ *существует решение* (*абсолютный минимум*) *задачи* (2.1).

Эта теорема будет доказана (причем в многомерном случае) в следующем разделе. Ее доказательство состоит в сведении к теореме 1.2. При этом наиболее трудным оказывается проверка того, что из квазирегулярности интегранта следует слабая полунепрерывность снизу функционала.

[3] В следующем разделе будет показано, что это условие роста по существу эквивалентно условию коэрцитивности. В литературе это условие роста обычно и называют условием коэрцитивности (см., например, [E]).

Отметим, что условие роста в теореме Тоннели диктует выбор функционального пространства, на котором естественно рассматривать задачу (2.1). Этим пространством является пространство Соболева $W_p^1(t_0, t_1)$. Выбор функционального пространства, наиболее естественного для поставленной задачи лежит в основе подхода Соболева.

На пространстве Соболева $W_p^1(t_0, t_1)$ введем норму

$$\|x(\cdot)\|_{W_p^1(t_0,t_1)} = \left(\int_{t_0}^{t_1} (|x(t)|^p + |\dot{x}(t)|^p)\, dt \right)^{1/p}.$$

Легко проверить, что все свойства нормы здесь выполнены за исключением одного: $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$. Действительно, $\|x\|_{W_p^1(t_0,t_1)} = 0$ и для $x(t) = 0$ лишь при почти всех $t \in (t_0, t_1)$. Однако, если элементом пространства $W_p^1(t_0, t_1)$ считать класс эквивалентных (т. е. совпадающих почти всюду) функций, то $W_p^1(t_0, t_1)$ будет банаховым пространством. Так как любой класс содержит единственную абсолютно непрерывную функцию, то мы можем оперировать с элементами $W_p^1(t_0, t_1)$ как с абсолютно непрерывными функциями.

2.2 Примеры несуществования решения

Рассмотрим теперь примеры задачи (2.1) в которых нет решения, т. е. нижняя грань функционала J не достигается. Эти примеры, в частности, устанавливают существенность всех условий теоремы 1.2 для существования решения задачи (1.1).

Пример 2.1. *(Больца: невыпуклость интегранта по $\dot{x}$)*

$$J_1(x(\cdot)) = \int_0^1 ((\dot{x}^2(t) - 1)^2 + x^2(t))\, dt \to \min, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Интегрант $(\dot{x}^2 - 1)^2 + x^2$ функционала J_1 растет как четвертая степень по $\dot{x}$ и поэтому задачу естественно рассматривать в пространстве Соболева $W_4^1(0, 1)$.

Ясно, что $J_1(x(\cdot)) > 0$ для любого $x(\cdot) \in W_4^1(0, 1)$, $x(t) \not\equiv 0$, а с другой стороны, если $\bar{x}(t) \equiv 0$, то $J(\bar{x}(\cdot)) = 1$.

Если же взять последовательность

$$x_n(t) = \int_0^t U_n(\tau)\, d\tau, \text{ где } U_n(t) = \operatorname{sgn} \sin 2\pi n t,\ n \in \mathbb{N},$$

(она изображена на рисунке), то очевидно, что $x_n(\cdot) \to 0$ $(n \to \infty)$ равномерно на $[0,1]$, в то время как $|\dot{x}_n(t)| = 1$ п.в. и следовательно, $J(x_n(\cdot)) \to 0$ $(n \to \infty)$. Значит нижняя грань у задачи — нуль, а решения в $W_4^1(0,1)$ нет, и причина в том, что функция $\dot{x} \mapsto (\dot{x}^2 - 1)^2$ — невыпуклая.

Сопоставим теперь пример Больца с теоремой 1.2. Выбор пространства $W_4^1(0,1)$ в качестве области определиния задачи Больца сразу обеспечивает коэрцивность функционала и конечность его значений. Множество

$$\mathcal{A} = \{x(t) \in W_4^1(0,1) \mid x(0) = x(1) = 0\}$$

замкнуто. Это вытекает из приведенной в следующем разделе теоремы 3.2 (о следе). Поэтому, будучи выпуклым, множество $\mathcal{A}$ является секвенциально слабо замкнутым. Из всех условий теоремы 1.2 осталось непроверенным лишь условие о полунепрерывности снизу относительно слабой сходимости функционала J_1. Так как задача из примера 2.1 не имеет решения, то J_1 этому условию не удолетворяет.

Вывод: Условие о полунепрерывности снизу относительно слабой сходимости существенно для справедливости теоремы 1.2 о существовании решения.

Именно его нарушение и является истинной причиной несуществования решения в рассматриваемой задаче. (Здесь впрочем уместно отметить, что в силу утверждений, приведенных ниже, квазирегулярность интегранта из (2.1), т. е. его выпуклость по $\dot{x}$, эквивалентна его полунепрерывности снизу относительно слабой сходимости в соответствующем пространстве Соболева.)

Пример 2.2. *(Вейерштрасса: вырождение интегранта)*

$$J_2(x(\cdot)) = \int_0^1 t^2 \dot{x}^2(t)\, dt \to \min, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

Это — знаменитый пример Вейерштрасса, которым он аргументировал неполноту аргументов Римана, касающихся существования решения.[4].

[4]Из книги в книгу переходят рассказы о том, как Вейерштрасс возразил Риману, якобы считавшему, что минимум интеграла Дирихле существует, так как интегрант положителен. В книге [K] автор пишет, что “Вейерштрасс нашел слабое место в принципе Дирихле и в 1869 году опубликовал критику этого принципа”, и далее: “Риман умер, так и не найдя ответа на возражение Вейерштрасса”. Некоторая деликатность состоит в том, что Риман умер в 1866 году.

Здесь естественным функциональным пространством является не Соболевский класс, а пространство $W(0,1)$ измеримых функций с конечной нормой

$$\|x\|_{W(0,1)} = \left(\int_0^1 (t^2\dot{x}^2(t) + tx^2(t))\, dt \right)^{1/2}.$$

Первое слагаемое в норме определяется функционалом J_2, а член $tx^2(t)$ добавлен, чтобы норма на функциях, тождественно равных константе, не была нулевой. При этом коэффициент t перед x^2 делает этот член подчиненным члену $t^2\dot{x}^2$ (см. ниже неравенство (2.2)).

Мы видим, что $J_2(x(\cdot)) > 0$ для функции $x(\cdot) \in W(0,1)$, удовлетворяющей условиям $x(0) = 0$, $x(1) = 1$. А если взять

$$x_N(t) = \begin{cases} Nt, & 0 \le t \le 1/N, \\ 1, & t \ge 1/N,\ N \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

то, очевидно, $J_2(x_N(\cdot)) \to 0$ $(N \to \infty)$.

Снова: значение задачи — нуль, а решения в $W(0,1)$ нет.

Сопоставим пример Вейерштрасса с теоремой 1.2. Конечность функционала $J_2(x)$ и его непрерывность в $W(0,1)$, а значит, в силу выпуклости и полунепрерывность снизу относительно слабой сходимости, очевидны. Для проверки коэрцитивности J_2 покажем, что

$$\int_0^1 tx^2(t)\, dt \le \frac{1}{2} \int_0^1 t^2\dot{x}^2(t)\, dt \tag{2.2}$$

для любой функции $x(t) \in W_0 \equiv \{y(t) \in W(0,1) \mid y(1) = 0\}$. Действительно,

$$|x(t)|^2 = \left| - \int_t^1 \dot{x}(\tau)\, d\tau \right|^2 \le \left(\int_t^1 \frac{d\tau}{\tau^2} \right) \int_t^1 \tau^2\dot{x}^2(\tau)\, d\tau =$$
$$= \frac{1-t}{t} \int_t^1 \tau^2\dot{x}^2(\tau)\, d\tau$$

и поэтому

$$\int_0^1 tx^2(t)\, dt \le \int_0^1 (1-t) \int_0^1 \tau^2\dot{x}^2(\tau)\, d\tau\, dt \le \frac{1}{2} \int_0^1 \tau^2\dot{x}^2(\tau)\, d\tau.$$

Множество $\mathcal{A}$ из (1.1) в случае примера Вейерштрасса имеет вид

$$\mathcal{A} = \{x \in W(0,1) \mid x(0) = 0,\ x(1) = 1\}$$

и значит $\mathcal{A} \subset W_0 + \mathbf{1}$, причем справа стоит сдвиг множества W_0 на функцию, тождественно равную единице. Поэтому коэрцивность J_2 следует из ограниченности на $W(0,1)$ множества

$$\{x \in W_0 + \mathbf{1} \mid J_2(x) \leq R\} \quad \forall R > 0,$$

которая вытекает из (2.2).

С помощью последовательности функций $x_N(t)$, использованной для доказательства несуществования решения в примере Вейерштрасса, устанавливается незамкнутость множества $\mathcal{A}$, а значит, $\mathcal{A}$ не является секвенциально слабо замкнутым.

Вывод: Условие секвенциально слабой замкнутости множества $\mathcal{A}$ существенно для справедливости теоремы 1.2.

Причина несуществования решения в примере Вейерштрасса — в наличии условия $x(0) = 0$ при сильной вырожденности интегранта в нуле. Действительно, если в задаче убрать это граничное условие, то множество $\mathcal{A}$ заменится на

$$\hat{\mathcal{A}} = \{x \in W(0,1) \mid x(1) = 1\},$$

а это множество, как легко проверить, замкнуто в $W(0,1)$.

Пример 2.3. *(Гармонический осциллятор: некоэрцитивность функционала)*

$$J_3(x(\cdot)) = \int_0^T (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \to \min, \quad T > \pi,\ x(0) = x(T) = 0.$$

Эту задачу естественно рассматривать на пространстве Соболева $W_2^1(0,T)$. Здесь, если рассмотреть последовательность $x_n(t) = n\sin(\pi t/T)$, $n \in \mathbb{N}$, то легко убедится, что $J_3(x_n(\cdot)) \to -\infty$ $(n \to \infty)$, и значит, абсолютного минимума в задаче нет.

Причиной несуществования решения здесь является некоэрцивность функционала $J_3(x)$, которая легко устанавливается с помощью указанной выше последовательности $x_n(t) = n\sin(\pi t/T)$. Действительно, для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ лебегово множество $\mathcal{L}_\lambda J_3$ содержит x_n при достаточно больших n и $\|x_n\|_{W_2^1(0,\tau)} \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому множество $\mathcal{L}_\lambda J_3$ неограничено при любом $\lambda \in \mathbb{R}$. Все остальные условия теоремы 1.2 выполнены для этой задачи. В частности, полунепрерывность снизу относительно слабой сходимости для J_3 устанавливается как в доказательстве теоремы Тонелли (см. теорему 3.5 в следующем разделе).

3 Существование решений вариационной задачи

В этом разделе после напоминания некоторых фундаментальных фактов теории пространств Соболева доказывается теорема Тонелли о существовани решения задачи вариационного исчисления.

3.1 Пространства Соболева

Пусть Ω — область в пространстве $\mathbb{R}^d$, граница которой $\partial\Omega$ является бесконечно дифференцируемым многообразием. Напомним, что символом $C^\infty(\overline{\Omega})$ обозначается пространство бесконечно дифференцируемых функций, определенных на замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω, а $C_0^\infty(\Omega)$– это подпространство пространства $C^\infty(\overline{\Omega})$, состоящее из функций с компактным носителем. При этом носитель f ($\mathrm{supp} f$) определяется формулой: $\mathrm{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$, причем черта наверху опять обозначает операцию замыкания множества.

Рассмотрим функцию $x \to u(x)$, принадлежащую пространству $L_p(\Omega)$. Ее обобщенной производной $\partial u/\partial x_k$ называется такая обобщенная функция (т. е. линейный непрерывный функционал на пространстве $C_0^\infty(\Omega)$, что

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}\,dx = -\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_k}, \varphi\right\rangle, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

причем справа стоит значение обобщенной функции $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ на пробной функции φ). Пространством Соболева $W_p^1(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, называется множество таких функций $u(\cdot) \in L_p(\Omega)$ у которых все обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial x_k}$, $k = 1, \ldots, d$, принадлежат пространству $L_p(\Omega)$.

Норма в пространстве $W_p^1(\Omega)$ определяется формулой:

$$\|u(\cdot)\|^p_{W_p^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(|u(x)|^p + \sum_{k=1}^d \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^p\right)dx = \int_\Omega (|u(x)|^p + |\nabla u(x)|^p)dx.$$

Как и в случае одного переменного, чтобы выписанное выражение действительно определяло норму, элементом пространства нужно считать не фиксированную функцию $u(x)$, а класс эквивалентных функций, совпадающих с $u(x)$ при почти всех $x \in \Omega$). Именно так мы и будем считать, хотя и будем допускать вольность речи, называя элементом пространства Соболева конкретные функции.

Используя полноту пространства $L_p(\Omega)$ и определение обобщенной производной, легко установить полноту пространства $W_p^1(\Omega)$. Приведем без доказательства [5] следующую фундаментальную теорему:

Теорема 3.1. *(о плотности для пространства $W_p^1(\Omega)$) Пространство $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $W_p^1(\Omega)$ при $1 \leq p < \infty$.*

Лемма 3.1. *Пусть область Ω ограничена. Тогда пространство $W_q^1(\Omega)$ вполне непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$: $W_q^1(\Omega) \Subset L_q(\Omega)$.*

Если $u(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, то, очевидно, определено сужение (след) функции $u(\cdot)$ на границу $\partial\Omega$: $\gamma u = u(\cdot)|_{\partial\Omega}$. Имеет место

Теорема 3.2. *(о следе) Оператор следа продолжается с $C^\infty(\bar{\Omega})$ до непрерывного оператора $\gamma : W_p^1(\Omega) \to L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.*

Схема доказательства. Сначала для произвольной функции $u(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ устанавливается оценка

$$\|\gamma u(\cdot)\|_{L_p(\partial\Omega)} \leq C\|u(\cdot)\|_{W_p^1(\Omega)},$$

где константа C не зависит от $u(\cdot)$ (и это является главной частью доказательства). Потом для произвольной функции $u(\cdot) \in W_p^1(\Omega)$ с помощью теоремы о плотности выбирается последовательность $u_n(\cdot) \in C^\infty(\Omega)$, сходящаяся к $u(\cdot)$ в $W_p^1(\Omega)$. Эта последовательность фундаментальна в $W_p^1(\Omega)$, а в силу приведенной выше оценки последовательность $\gamma u_n(\cdot)$ фундаментальна в $L_p(\partial\Omega)$. Значит, $\gamma u_n(\cdot)$ имеет предел в $L_p(\partial\Omega)$, который обозначается $\gamma u(\cdot)$. Далее устанавливается, что след $\gamma u(\cdot)$ связан лишь с $u(\cdot)$ (т. е. не зависит от аппроксимирующей последовательности) и для $\gamma u(\cdot)$ и $u(\cdot)$ справедлива приведенная выше оценка. $\square$

Такая схема доказательства характерна для теории пространств Соболева: сначала доказываемый факт устанавливается для гладких функций, а потом проводится процесс замыкания.

Определим следующее подпространство пространства $W_p^1(\Omega)$:

$$\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega) = \{u(\cdot) \in W_p^1(\Omega) \mid \gamma u(\cdot) = 0\},$$

[5] Относительно доказательства этой и других теорем о пространствах Соболева см., например, [SU].

где γ — оператор сужения на границу $\partial\Omega$. Справедлив следующий аналог теоремы о плотности, который мы также приводим без доказательства.

Теорема 3.3. *(оплотности для пространства $\overset{o}{W}{}^1_p(\Omega)$) Пространство $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $\overset{o}{W}{}^1_p(\Omega)$ при $1 \le p < \infty$.*

В дальнейшем при $p = 2$ мы будем использовать также обозначения: $W_2^1(\Omega) = H^1(\Omega)$, $\overset{o}{W}{}^1_2(\Omega) = H_0^1(\Omega)$.

Наконец, приведем еще следующую важную оценку (оставив ее также без доказательства).

Теорема 3.4. *(неравенство Фридрихса) Для любой функции $u(\cdot) \in \overset{o}{W}{}^1_p(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \le c \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx$$

с константой c, зависящей лишь от области Ω.

В силу неравенства Фридрихса норму в пространстве $\overset{o}{W}{}^1_p(\Omega)$ естественно задавать равенством:

$$\|u\|_{\overset{o}{W}{}^1_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Рассмотрим теперь некоторые задачи вариационного исчисления.

3.2 Вариационная задача: коэрцитивность и условия роста

Мы изучим следующий многомерный аналог простейшей задачи вариационного исчисления (2.1):

$$J(y(\cdot)) = \int_\Omega L(x, y(x), \nabla y(x))\, dx \to \min \tag{3.1}$$

при условии, что

$$y(x)|_{x\in\partial\Omega} = 0 \tag{3.2}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega$ — независимые переменные, $y(x)$ — искомая вещественнозначная функция, $\nabla y(x) = (\partial y/\partial x_1, \dots, \partial y/\partial x_d)$ — ее градиент. Об интегранте $L(x, y, p) = L(x, y, p_1, \dots, p_d)$ будем предполагать, что

$$L(\cdot, \cdot, \cdot) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d), \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \;\; L(x, y, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^d). \tag{3.3}$$

Отметим, что полным аналогом одномерной простейшей задачи из предыдущего раздела является минимизация функционала (3.1) при условии

$$y(x)|_{x \in \partial\Omega} = y_0(x),$$

где заданная функция $y_0(x) \neq 0$. Здесь мы ограничимся изучением задачи (3.1), (3.2) с однородным граничным условием.

Теорема существования решения задачи (3.1), (3.2) (теорема Тонелли) будет доказана с помощью теоремы 1.2 о существовании решения абстрактной задачи. Чтобы гарантировать справедливость условия *коэрцитивности* функционала $J(y)$ из (3.1) мы наложим на функцию $L(x, y, p)$ следующее *условие роста*:

Пусть задано

$$1 < q < \infty \tag{3.4}$$

Существуют константы $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ такие, что неравенство

$$L(x, y, p) \geq \alpha |p|^q - \beta \tag{3.5}$$

справедливо при всех $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^d$.

Если функция L удовлетворяет условию (3.4), (3.5), то задачу (3.1), (3.2) естественно рассматривать на пространстве Соболева $\overset{o}{W}{}^1_q(\Omega)$.

Лемма 3.2. *Функционал $J(y)$, $y \in \overset{o}{W}{}^1_q(\Omega)$ ограничен снизу, не равен тождественно $+\infty$ и удовлетворяет условию коэрцитивности.*

Доказательство. Подставляя в (3.5) $(y, p) \to (y(x), \nabla y(x))$ и интегрируя по Ω получим, что

$$J(y) \geq \alpha \int_\Omega |\nabla y(x)|^q dx - \beta \int_\Omega dx = \alpha \|y\|^q_{\overset{o}{W}{}^1_q(\Omega)} - \beta |\Omega|, \tag{3.6}$$

откуда следует ограниченность снизу функционала $J(y)$ на $\overset{o}{W}{}_q^1(\Omega)$.

Так как $L(x,y,p)$ удовлетворяет (3.3), то при $y \in C^1(\bar{\Omega})$, $y|_{\partial\Omega} = 0$ имеем $J(y) < \infty$.

Возьмем произвольную функцию $y_0(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $y_0|_{\partial\Omega} = 0$ и положим $R = J(y_0)$. Очевидно, $\mathcal{L}_R J = \{y \in \overset{o}{W}{}_q^1(\Omega)\colon J(y) \le R\} \ne \emptyset$. Кроме того, в силу неравенства (3.6)

$$\mathcal{L}_R J \subset \{y \in W_q^1(\Omega) \,:\, \|y\|^q_{\overset{o}{W}{}_q^1(\Omega)} \le \frac{1}{\alpha}(\beta|\Omega| + R)\}.$$

Следовательно, множество $\mathcal{L}_R J$ ограничено, и функционал J удовлетворяет условию коэрцитивности. $\square$

Итак, в лемме 3.2 показано, что условия (3.4), (3.5) гарантируют выполнение условия коэрцитивности у задачи (3.1), (3.2). Покажем на простом примере, что невыполнение условий (3.4), (3.5) приводит к отсутствию коэрцитивности. Это указывает, что условия (3.4), (3.5) родственны условию коэрцитивности в случае задачи (3.1), (3.2).

Рассмотрим следующую одномерную задачу вариационного исчисления

$$J(y) = \int_{-1}^{1} L(\dot{y}(x))\,dx \to \inf, \quad y(-1) = y(1) = 0, \tag{3.7}$$

где $L(p) \in C^1(\mathbb{R})$, $L(0) = 0, L(p) \ge 0$ и при $|p| > p_0$, $L(p) = |p|^{q-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. Будем считать, что $q > 1$, $q - \varepsilon > 1$. Конечно, $L(p)$ удовлетворяет условиям (3.4), (3.5) с q, замененным на $q - \varepsilon$, и поэтому задача (3.7) коэрцитивна в пространстве $\overset{o}{W}{}_{q-\varepsilon}^1(-1,1)$. Однако $L(p)$ не удовлетворяет условиям (3.4), (3.5) с q. Это приводит к следующему утверждению.

Лемма 3.3. *Задача* (3.7) *не коэрцитивна в пространстве* $\overset{o}{W}{}_q^1(-1,1)$.

Доказательство. Определим последовательность функций $y_k(x)$ с помощью их производных

$$\dot{y}_k(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1/k, \\ k^\alpha, & 0 < x < 1/k, \\ -k^\alpha, & -1/k < x < 0, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$ удовлетворяет условиям:

$$\frac{1}{q} < \alpha < \frac{1}{q-\varepsilon} \tag{3.8}$$

и краевым условиям $y_k(-1) = y_k(1) = 0$. Прямые вычисления показывают, что вследствие (3.8) при достаточно больших k

$$\int_{-1}^{1} L(\dot{y}_k(x))\,dx \ = \ 2\int_0^{1/k} k^{\alpha(q-\varepsilon)}dx \ = \ 2k^{\alpha(q-\varepsilon)-1} \ \to \ 0 \quad k \ \to \ \infty,$$

а также

$$\|y_k\|^q_{\overset{o}{W}{}^1_q(-1,1)} = \int_{-1/k}^{1/k} k^{\alpha q}dx = 2k^{\alpha q-1} \to \infty \ \ k \to \infty.$$

Первое из этих соотношений показывает, что для любого $\lambda > 0$ $y_k \in \mathcal{L}_\lambda J$ при достаточно больших k. В силу второго соотношения множество $\mathcal{L}_\lambda J$ неограничено на $\overset{o}{W}{}^1_q(-1,1)$ при любом $\lambda > 0$. Так как вследствие неравенства $L(p) \geq 0$ множество $\mathcal{L}_\lambda J \neq \emptyset\ \forall\lambda > 0$, то установлено, что функционал J коэрцитивен на $\overset{o}{W}{}^1_q(-1,1)$. $\square$

3.3 Квазирегулярность и полунепрерывность снизу относительно слабой сходимости

Запись задачи (3.1), (3.2) в форме абстрактной задачи (1.1) такова:

$$J(y) \to \min, \quad y \in \overset{o}{W}{}^1_q(\Omega), \tag{3.9}$$

причем функционал J задается равенством (3.1) и определен на $W_q^1(\Omega)$. Будучи замкнутым линейным подпространством пространства $W_q^1(\Omega)$, множество $\overset{o}{W}{}^1_q(\Omega)$ является секвенциально слабо замкнутым. Таким образом, для задачи (3.9) проверены все условия абстрактной теоремы существования, за исключением условия полунепрерывности снизу относительно слабой сходимости для функционала J. Оказывается, чтобы обеспечить выполнимость этого условия для интегрального функционала вида (3.1) не обязательно требовать выпуклости этого функционала, а достаточно требовать выпуклости интегранта $L(x, y, p)$ только по переменным p, т. е. *его квазирегулярности.* Наложим это условие:

$$p \mapsto L(x, y, p) \quad x \in \bar{\Omega},\ y \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Теорема 3.5. *Пусть интегрант L ограничен снизу и удовлетворяет условиям квазирегулярности* (3.10) *и гладкости* (3.3). *Тогда функционал J, определенный в* (3.1), *полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости на $W_q^1(\Omega)$.*

Доказательство. Мы должны показать, что если

$$y_k \to \hat{y} \quad W_q^1(\Omega), \tag{3.11}$$

то

$$J(\hat{y}) \leq \hat{J} \equiv \liminf_{k\to\infty} J(y_k).$$

Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что

$$\lim_{k\to\infty} J(y_k) = \hat{J}.$$

В силу (3.11) $\max\limits_k \|y_k\|_{W_q^1} < \infty$ и поэтому, вследствие леммы 3.1 о полной непрерывности вложения $W_q^1(\Omega) \Subset L_q(\Omega)$, $y_k \to \hat{y}$ сильно в $L_q(\Omega)$. Поэтому, переходя если нужно к подпоследовательности, можно считать, что

$$y_k(x) \to \hat{y}(x) \qquad x \in \Omega. \tag{3.12}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ согласно теореме Егорова ([KF], гл. 5 § 4)

$$y_k(x) \to \hat{y}(x) \quad x \in E_\varepsilon, \tag{3.13}$$

где E_ε — некоторое измеримое подмножество Ω, для которого

$$\mathrm{mes}(\Omega \setminus E_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

($\mathrm{mes}A$ — это лебегова мера множества A).

Пусть $F_\varepsilon = \{x \in \Omega\colon |\hat{y}(x)| + |\nabla\hat{y}(x)| \leq 1/\varepsilon\}$. Так как $\mathrm{mes}(\Omega \setminus F_\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то для множества

$$G_\varepsilon = F_\varepsilon \cap E_\varepsilon \tag{3.14}$$

справедливо соотношение

$$\mathrm{mes}(\Omega \setminus G_\varepsilon) \to 0 \;\; \varepsilon \to 0. \tag{3.15}$$

Вследствие (3.11)

$$\int(\varphi(x), \nabla y_k(x) - \nabla\hat{y}(x))\,dx \to 0 \ \ k\to\infty$$

для любой $\varphi \in (L_p(\Omega))^d \equiv L_p(\Omega)\times\cdots\times L_p(\Omega)$ (d раз) с $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и поэтому при любом достаточно малом $\varepsilon>0$

$$\gamma_k^\varepsilon := \int_{G_\varepsilon}(L_p(x,\hat{y}(x),\nabla\hat{y}(x)), \nabla y_k(x)-\nabla\hat{y}(x))\,dx \to 0 \ \ k\to\infty.$$

В силу (3.12), (3.14) при каждом достаточно малом $\varepsilon>0$

$$\alpha_k^\varepsilon := \int_{G_\varepsilon}(L(x,y_k(x),\nabla\hat{y}(x)) - L(x,\hat{y}(x),\nabla\hat{y}(x)))\,dx +$$
$$+\int_{G_\varepsilon}(L_p(x,y_k(x),\nabla\hat{y}(x)) - L_p(x,\hat{y}(x),\nabla\hat{y}(x)), \nabla y_k(x)-\nabla\hat{y}(x))\,dx \to 0$$
$$k\to\infty$$

Вследствие (3.10)

$$\begin{gathered}L(x,y_k(x),\nabla y_k(x)) \ge L(x,\hat{y}(x),\nabla\hat{y}(x)) +\\ +[L(x,y_k(x),\nabla\hat{y}(x)) - L(x,\hat{y}(x),\nabla\hat{y}(x))]+\\ +(L_p(x,\hat{y}(x),\nabla\hat{y}(x)),\nabla y_k(x)-\nabla\hat{y}(x))+\\ +(L_p(x,y_k(x),\nabla\hat{y}(x)) - L_p(x,\hat{y}(x),\nabla\hat{y}(x)), \nabla y_k(x)-\nabla\hat{y}(x)).\end{gathered}$$

Интегрируя это неравенство по G_ε, получим, учитывая определение γ_k^ε, α_k^ε:

$$\int_{G_\varepsilon} L(x,y_k(x),\nabla y_k(x))\,dx \ge \int_{G_\varepsilon} L(x,\hat{y}(x),\nabla\hat{y}(x))\,dx + \gamma_k^\varepsilon + \alpha_k^\varepsilon. \qquad (3.16)$$

В соответствии с условием ограниченности снизу интегранта L

$$L(x,y,p) \ge -\beta \ \ \forall(x,y,p)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$$

с некоторым $\beta\ge 0$. Поэтому в силу (3.15), (3.16) для любого $\delta>0$ существуют такие $\varepsilon>0$ и $k_0>0$, что при всех $k>k_0$

$$J(u_k) = \int_{G_\varepsilon} L(x,y_k,\nabla y_k)\,dx + \int_{\Omega\setminus G_\varepsilon} L(x,y_k,\nabla y_k)\,dx \ge$$
$$\ge -\beta\mathrm{mes}(\Omega\setminus G_\varepsilon) + J(\hat{y}) - \int_{\Omega\setminus G_\varepsilon} L(x,\hat{y},\nabla\hat{y})\,dx + \gamma_k^\varepsilon + \alpha_k \ge J(\hat{y}) - \delta.$$

Так как δ здесь произвольно, то $J(\hat{y}) \le \hat{J} = \lim_{k\to\infty} J(y_k)$. $\square$

3.4 Необходимость условий квазирегулярности

Оказывается, что справедливо утверждение, обратное Теореме 3.5. Действительно, имеет место

Теорема 3.6. *Пусть функционал J, определенный в (3.1), (3.2), удовлетворяет условиям роста (3.5) и гладкости (3.3). Предположим также, что этот функционал полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости в пространстве $W_q^1(\Omega)$. Тогда для всех $x_0 \in \Omega, y_0 \in \mathbb{R}$ интегрант $L(x_0, y_0, p)$ является выпуклым по $p \in \mathbb{R}^d$.*

Эта теорема доказана, например, в монографии Ч.Б.Морри [M].

Отметим, что утверждение теоремы 3.6 справедливо и для одномерных векторных задач вариационного исчисления, т. е. для лагражианов $L(x, y, p)$ с $x \in [t_0, t_1], y \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n$. В случае же многомерных векторных задач вариационного исчисления справедлив следующий результат:

Теорема 3.7. *Пусть функционалу из (3.1) отвечает лагранжиан $L(x, y, p)$ с $x \in \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^{dn}$ и при этом J полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости в $(W_q^1(G))^n$. Тогда для всех $x_0 \in \overline{\Omega}, y_0 \in \mathbb{R}^n, p_0 \in \mathbb{R}^{dn}$*

$$\int_G L(x_0, y_0, p_0 + \nabla\zeta)\, dx \geq L(x_0, y_0, p_0)\mathrm{mes} G \tag{3.17}$$

для любого постоянного вектора (x_0, y_0, p_0), любой ограниченной области G с липшецевой границей и любой функции $\zeta \in (C^1(G))^n$ равной тождественно нулю на границе ∂G.

Доказательство этого утверждения также можно найти в книге Ч.Б.Морри [M].

Интегрант L, удовлетворяющий неравенству (3.17) обычно называют квазивыпуклым по Морри. Из квазивыпуклости по Морри в случаях $n = 1$ или $d = 1$ следует выпуклость лагранжиана $L(x, y, p)$ по переменным p (см. [M]). В общем случае $n > 1, d > 1$ выпуклость L по переменным p из квазивыпуклости по Морри не следует.

3.5 Теорема Тоннели

Теперь мы можем доказать основную теорему о существовании решения задачи (3.1), (3.2).

Теорема 3.8. *(Тонелли) Пусть интегрант* $L(x, y, p) \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ *из* (3.1) *удовлетворяет условиям гладкости* (3.3)*, роста* (3.4)*,* (3.5) *и выпуклости по* p (3.10)*. Тогда в пространстве* $W_q^1(\Omega)$ *существует решение* $\hat{y}(x) \in W_q^1(\Omega)$ *задачи* (3.1)*,* (3.2)*.*

Доказательство. В силу леммы 3.2 и теоремы 3.5 задача (3.1), (3.2) удовлетворяет всем предположениям теоремы 1.2 о разрешимости абстрактной экстремальной задачи. Поэтому из этой теоремы следует справедливость теоремы Тонелли. $\square$

4 Уравнение Эйлера

Мы выводим необходимое условие, которому удовлетворяет решение $\widehat{y}(x)$ задачи (3.1), (3.2). В результате получим так называемое уравнение Эйлера. Далее мы определяем понятие эллиптичности и, используя уравнение Эйлера, обсуждаем связь этого понятия с условием квазирегулярности соответствующего лагранжиана.

4.1 Необходимое условие минимума

Наложим на интегрант L из (3.1) дополнительное условие более жесткое, чем условие (3.3):

$$L(x, y, p) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d), \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ L(x, \cdot, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^{d+1}). \tag{4.1}$$

Кроме того, необходимо наложить ограничения на скорость роста интегранта $L(x, y, p)$ при $|y| + |p| \to \infty$ Мы предположим, что существуют такие константы $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ что

$$|L(x, y, p)| \le \alpha_1(1 + |y|^q + |p|^q), \tag{4.2}$$

а также

$$|L_y(x, y, p)| + \sum_{j=1}^{d} |L_{p_j}(x, y, p)| \le \alpha_2(1 + |y|^{q-1} + |p|^{q-1}), \tag{4.3}$$

для любых $(x, y, p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{d+1}$, где $L_y = \partial L/\partial y,\ L_{p_i} = \partial L/\partial p_i$

Лемма 4.1. *Пусть для интегранта L выполнены условия теоремы* 3.8 *(Тонелли), а также условия* (4.1)–(4.3). *Тогда решение $\widehat{y}(x) \in \overset{o}{W}{}_q^1(\Omega)$ задачи* (3.1), (3.2) *удовлетворяет следующему интегральному тождеству:*

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{j=1}^{d} L_{p_j}(x, \widehat{y}(x), \nabla\widehat{y}(x)) \frac{\partial h(x)}{\partial x_j} + L_y(x, \widehat{y}(x), \nabla\widehat{y}(x)) h(x) \right\} dx = 0 \quad (4.4)$$

для любых $h \in \overset{o}{W}{}_q^1(\Omega)$

Доказательство. Главное, что требуется доказать– это дифференцируемость по Гато функционала $J(y)$, определенного в (3.1), в точке $\widehat{y}$. Покажем это, используя (4.1)–(4.3). Пусть $h \in \overset{o}{W}{}_q^1(\Omega)$ и $\lambda \in (0,1)$. В силу (3.1)

$$\frac{J(\widehat{y} + \lambda h) - J(\widehat{y})}{\lambda} = \int\limits_{\Omega} M(x, \widehat{y}, h, \lambda)\, dx \quad (4.5)$$

где

$$M(x, \widehat{y}, h, \lambda) = \frac{L(x, \widehat{y}(x) + \lambda h(x), \nabla\widehat{y}(x) + \lambda\nabla h(x)) - \widehat{L}(x)}{\lambda}, \quad (4.6)$$

а $\widehat{L}(x) = L(x, \widehat{y}(x), \nabla\widehat{y}(x))$.

Вследствие условия (4.1) при почти всех $x \in \Omega$

$$M(x, y, h, \lambda) \to \widehat{L}_y(x) h(x) + (\widehat{L}_p(x), \nabla h(x)), \quad (4.7)$$

при $\lambda \to 0$, причем

$$\widehat{L}_y(x) = L_y(x, \widehat{y}(x), \nabla\widehat{y}(x)),\ \widehat{L}_p(x) = L_p(x, \widehat{y}(x), \nabla\widehat{y}(x)).$$

Мы перейдем к пределу в (4.5) при $\lambda \to 0$, используя теорему Лебега. Для этого нам нужно указать мажоранту функции $M(x, y, h, \lambda)$, не зависящую от λ и принадлежащую $L_1(\Omega)$. В силу (4.6) и равенства $g(\lambda) - g(0) = \int_0^1 \frac{d}{ds} g(\lambda s) ds$ получим:

$$M(x, y, h, \lambda) = \int\limits_0^1 L_y(x, y(x) + \lambda s h(x), \nabla y(x) + \lambda s \nabla h(x)) h(x) +$$
$$+ (L_p(x, y + \lambda s h, \nabla y + \lambda s \nabla h), \nabla h(x))\, ds \quad (4.8)$$

Оценивая правую часть (4.8) с помощью неравенств (4.3), Гельдера и Юнга, получим

$$|M(x,y,h,\lambda)| \leq c_0 \int\limits_0^1 (1+|y(x)+\lambda s h(x)|^{q-1}+$$
$$+|\nabla y(x)+\lambda s \nabla h(x)|^{q-1})(|h(x)|+|\nabla h(x)|)\,ds \leq$$
$$\leq c_1 \int\limits_0^1 (1+|y+\lambda s h|^q+|\nabla y+\lambda s\nabla h|^q+|h|^q+|\nabla h|^q)\,ds \leq$$
$$\leq c_2 \int\limits_0^1 (1+|y(x)|^q+|\nabla y(x)|^q+|h(x)|^q+|\nabla h(x)|^q)\,ds, \tag{4.9}$$

где c_2 не зависит от $\lambda \in (-1,1)$. Следовательно правая часть неравенства (4.9) принадлежит $L_1(\Omega)$. Поэтому, переходя в (4.5) к пределу при $\lambda \to 0$ с помощью теоремы Лебега, получим, что $J(y)$ интегрируем по Гато, и

$$\langle J'(\widehat{y}), h\rangle = \int_\Omega \left\{ \widehat{L}_y(x)h(x) + (\widehat{L}_p(x), \nabla h(x)) \right\} dx \tag{4.10}$$

Так как $\widehat{y}$ — точка абсолютного минимума задачи (3.1), (3.2), то левая часть (4.5) неотрицательна при любом $\lambda \in (-1,1)$, и $h \in \overset{o}{W}{}_q^1(\Omega)$. Поэтому и левая часть (4.10) неотрицательна при любом $h \in \overset{o}{W}{}_q^1(\Omega)$. Так как вместе с h мы можем поставить в (4.10) и $-h$, то справедливо равенство (4.4). $\square$

Взяв в (4.4) $h \in C_0^\infty(\Omega)$, получаем, что это интегральное равенство эквивалентно уравнению

$$-\sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} L_{p_j}(x,\hat{y}(x),\nabla\hat{y}(x)) + L_y(x,\hat{y}(x),\nabla y(x)) = 0, \tag{4.11}$$

где производные $\frac{\partial}{\partial x_j}L_{p_j}$ понимаются в смысле теории обобщенных функций.

Определение 4.1. *Уравнение (4.11) называется уравнением Эйлера, соответствующим вариационной задаче (3.1), (3.2).*

Определение 4.2. *Функция* $\hat{y}(x) \in \overset{o}{W}{}_q^1(\Omega)$ *называется обощенным решением краевой задачи* (4.11), (3.2), *если* $\hat{y}$ *удовлетворяет интегральному тождеству* (4.4).

Из теоремы 3.8 (Тоннели) и леммы 4.1 сразу следует

Предложение 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.8 *и леммы* 4.1. *Тогда у задачи* (4.11), (3.2) *существует обобщенное решение* $\hat{y}(x) \in \overset{o}{W}{}^{1}_{q}(\Omega)$.

4.2 Эллиптические уравнения

Предположим дополнительно, что

$$\forall x \in \overline{\Omega} \qquad L(x, y, p) \in C^2(\mathbb{R}^{d+1}). \tag{4.12}$$

Уравнение (4.11) можно формально переписать в следующем виде:

$$-\sum_{i,j=1}^{d} \hat{L}_{p_j,p_i} \frac{\partial^2 \hat{y}(x)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=1}^{d} \hat{L}_{p_j,y} \frac{\partial \hat{y}(x)}{\partial x_j} + \hat{L}_y = 0, \tag{4.13}$$

где $\hat{L}_{p_j,p_i} = \frac{\partial L(x,\hat{y}(x),\nabla \hat{y}(x))}{\partial p_j \partial p_i}$, а функции $\hat{L}_{p_j,y}$, $\hat{L}_y$ определяются аналогично. Отметим, что в уравнении (4.13) вторые производные являются, вообще говоря, обобщенными функциями, и поэтому сумме $\sum_{i,j=1}^{d} \hat{L}_{p_j,p_i} \frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial x_i \partial x_j}$ можно придать смысл только с помощью уравнения (4.11). Тем не менее запись (4.13) уравнения (4.11) полезна, потому что позволяет определить один очень важный класс уравнений в частных производных – класс эллиптических уравнений.

Определение 4.3. *Нелинейное уравнение (4.11) называется эллиптическим на функции $\hat{y}(x)$ если существует константа $\gamma > 0$ такая, что для любого вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ и точки $x \in \overline{\Omega}$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^{d} L_{p_j,p_i}(x, \hat{y}(x), \nabla \hat{y}(x)) \xi_j \xi_i \geq \gamma |\xi|^2, \tag{4.14}$$

где, напомним, $|\xi|^2 = \sum_{j=1}^{d} \xi_j^2$.

Эллиптические уравнения важны потому, что возникают во многих задачах математической физики и в других приложениях. Они также тесно связаны с задачами вариационного исчисения. Последнее объясняется тем, что условие эллиптичности является усилением условия выпуклости, играющего в теории задач вариационного исчисления фундаментальную роль. Чтобы это показать, напомним следующее утверждение:

Лемма 4.2. *Пусть $F(z) \in C^2(\mathbb{R}^k)$. Функция $F(z)$ выпукла в том и только том случае, когда*

$$\sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 F(z)}{\partial z_i \partial z_j} \xi_i \xi_j \geq 0 \qquad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k \tag{4.15}$$

при каждом $z \in \mathbb{R}^k$.

Доказательство. Пусть $F(z)$– выпуклая функция на $\mathbb{R}^k$. Положим $\Phi(\alpha) = F(z + \alpha(v - z))$, где $\alpha \in [0,1]$, $z \in \mathbb{R}^k$, $v \in \mathbb{R}^k$. Очевидно $\Phi(\alpha)$– выпуклая функция. В силу неравенства Иенссена и теоремы Лагранжа (о среднем) при любом $\alpha \in (0,1)$ получим:

$$0 \leq \frac{\Phi(1) - \Phi(\alpha)}{1 - \alpha} - \frac{\Phi(\alpha) - \Phi(0)}{\alpha} = \Phi^{'}(\alpha_2) - \Phi^{'}(\alpha_1) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi^{''}(\beta)\, d\beta \tag{4.16}$$

где α_1, α_2 — некоторые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 < \alpha_1 < \alpha < \alpha_2 < 1$. Положив $\xi = v - z$, $\varphi = \xi/|\xi|$ и используя обозначение $F^{''}(z) = \|\frac{\partial^2 F(z)}{\partial z_i \partial z_j}\|$ для матрицы вторых производных функции F, получим из (4.16), что

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)|\xi|^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi^{''}(\beta)\, d\beta = \\ &= \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \langle F^{''}(z + \beta|\xi|\varphi)\varphi, \varphi\rangle\, d\beta = \\ &= \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)|\xi|} \int_{\alpha_1|\xi|}^{\alpha_2|\xi|} \langle F^{''}(z + \zeta\varphi)\varphi, \varphi\rangle\, d\zeta \end{aligned} \tag{4.17}$$

Переходя в правой части (4.17) к пределу при $|\xi| \to 0$, получим (4.15). Если $F(z)$ удовлетворяет (4.15), то повторяя приведенные выше рассуждения в обратном порядке, получим, что $\Phi(\alpha)$, а значит и $F(z)$, удовлетворяют неравенству Иенссена, т. е. являются выпуклыми функциями. □

Аналог условия эллиптичности (4.14) для функции $F(z)$ переписывается следующим образом:

$$\sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 F(z)}{\partial z_i \partial z_j} \xi_i \xi_j \geq \gamma |\xi|^2 \qquad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k,\ z \in \mathbb{R}^k \tag{4.18}$$

где γ не зависит от ξ и z.

Если $F(z)$ удовлетворяет условию (4.18), то эта функция строго выпукла. Действительно, из (4.18), (4.17), (4.16) следует, что

$$\rho + \Phi(\alpha) \leq \alpha\Phi(1) + (1-\alpha)\Phi(0)$$

где $\rho = \gamma\alpha(1-\alpha)(\alpha_2(\alpha) - \alpha_1(\alpha))|v-z|^2$, причем числа $\alpha_2(\alpha) > \alpha_1(\alpha)$ определяются по α. Так как $\rho > 0$ при любом $\alpha \in (0,1)$, то $\Phi(\alpha)$–строго выпуклая функция. Значит и $F(z)$ строго выпукла.

Как показывает пример строго выпуклой функции $F(z) = z^4$, не удовлетворяющий при $z = 0$ условию (4.18), условие эллиптичности (4.18) сильнее условия строгой выпуклости.

Если в правой части неравенства (4.14) из определения 4.3 $\gamma = 0$, то уравнение (4.11) называется вырождающимся эллиптическим уравнением. Таким образом, условие выпуклости интегранта $L(x, y, p)$ по переменным p эквивалентно условию вырожденной эллиптичности. Именно оно гарантирует существование решения вариационной задачи в теореме Тонелли (при выполнении других требуемых условий), а не условие эллиптичности.

Тем не мение, условие эллиптичности играет в анализе очень важную роль, что объясняется по крайней мере двумя причинами. Во-первых, класс эллиптических уравнений значительно шире класса эллиптпческих уравнений Эйлера вариационных задач, и для этого класса удается построить теорию существования и единственности решений (или по крайней мере теорию нормальной разрешимости, т. е. разрешимости для исходных данных, обнуляющих конечное число соответствующих функционалов).

Во-вторых, для эллиптических уравнений обычно удается доказать теорему о гладкости решений при гладких исходных данных. Для вырожденных эллиптических уравнений, даже являющихся уравнениями Эйлера вариационной задачи, гладкость решений часто доказать не удается. Более того, эти решения часто и не являются гладкими.

5 Вариационные неравенства.

В этом разделе исследуются вариационные неравенства. Такие неравенства возникают как системы оптимальности для задач вида (1.1) с множествами ограничений $\mathcal{A}$, имеющими структуру более сдожную, чем у линейного пространства. Рассмотрен пример вариационного неравенства, возникающего в задаче с препятствием.

5.1 Абстрактное неравенство

Вернемся к задаче (1.1) из раздела 1:

$$f(x) \to \inf, \qquad x \in \mathcal{A}, \tag{5.1}$$

где $\mathcal{A}$– подмножество банахова пространства X, $f :\to \overline{\mathbb{R}}$– собственный функционал и выведем для нее необходимые и достаточные условия минимума в предположении выпуклости f и $\mathcal{A}$ и дифференцируемости по Гато функционала f.

Теорема 5.1. *Пусть задача* (5.1) *имеет решение, множество $\mathcal{A}$ выпукло, а функционал f дифференцируем по Гато и является выпуклым. Тогда* а) *$\hat{x}$ является решением задачи* (5.1) *в том и только том случае, если*

$$\widehat{x} \in \mathcal{A}; \qquad \langle f'(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{A} \tag{5.2}$$

где,напомним, $\langle f'(\hat{x}), z \rangle$–это значение линейного функционала $f'(\hat{x}) \in X^*$ на векторе $z \in X$. b) *решение задачи* (5.1) *единственно, если f — строго выпуклый функционал.*

Доказательство. а) Пусть $\hat{x}$– решение задачи, а $x \in \mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A}$–выпукло, то при любом $\delta \in (0, 1)$ вектор $\hat{x} + \delta(x - \hat{x}) \in A$ и поэтому $(f(\hat{x} + \delta(x - \hat{x})) - f(\hat{x}))/\delta \geq 0$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\delta \to 0$, получим (5.2).

Пусть $\hat{x}$ удовлетворяет (5.2). По неравенству Иеннсена

$$(f(\hat{x} + \delta(x - \hat{x})) - f(\hat{x}))/\delta \leq f(x) - f(\hat{x})$$

Левая часть этого неравенства при $\delta \to 0$ стремится к $\langle f'(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle \geq 0$. Поэтому $f(x) - f(\hat{x}) \geq 0 \ \forall x \in \mathcal{A}$.

b)Если $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$ — два решения, то из-за выпуклости $\mathcal{A}$ $(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)/2 \in \mathcal{A}$, а в силу строгой выпуклости f,

$$f((\hat{x}_1 + \hat{x}_2)/2) < \frac{1}{2}(f(\hat{x}_1) + f(\hat{x}_2)) = \inf_{x \in \mathcal{A}} f(x),$$

что противоречит предположению, что $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ — решения задачи. □

Определение 5.1. *Неравенство* (5.2) *называется вариационным неравенством.*

5.2 Задача с препятствием

Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, а $\varphi(x) \in C(\overline{\Omega})$ заданная функция, причем

$$\varphi(x)|_{\partial\Omega} \leq 0$$

Рассмотрим множество

$$X_\partial = \{u(x) \in H_0^1(\Omega) \,:\, u(x) \geq \varphi(x) \ ..\ x \in \Omega\} \tag{5.3}$$

(п. в. значит "при почти всех") и запишем экстремальную задачу:

$$J(u) = \int\limits_\Omega (|\nabla u(x)|^2 - 2u(x)f(x))\,dx \to \inf, \quad u \in X_\partial, \tag{5.4}$$

где $f(x) \in L_2(\Omega)$ — заданная функция, а функция $u(x)$ ищется в $H_0^1(\Omega)$. Задача (5.4) описывает положение равновесия мембраны со смещением $u(x)$, $x \in \Omega$, закрепленной на $\partial\Omega$: $u|_{\partial\Omega} = 0$. При этом на мембрану действует сила с плотностью $f(x)$, и мембрана имеет ограничение снизу вида $u(x) \geq \varphi(x)$. (От препятствия $\varphi(x)$ и произошло название задачи.)

Теорема 5.2. *Задача* (5.4) *имеет единственное решение* $\hat{u}(x) \in H_0^1(\Omega)$. *Это решение может быть описано с помощью вариационного неравенства:*

$$\hat{u} \in X_\partial \qquad \forall u \in X_\partial$$

$$\int\limits_\Omega \Big(\nabla\hat{u}(x) \cdot (\nabla u(x) - \nabla\hat{u}(x)) - f(x)(u(x) - \hat{u}(x))\Big) dx \geq 0, \tag{5.5}$$

где X_∂ — *множество* (5.3).

Доказательство. Сведем задачу (5.4) к абстрактной задаче (5.1). Положим $X = H_0^1(\Omega)$, тогда множество X_∂, определенное в (5.3), выпукло и замкнуто в X, а значит, и секвенциально слабо замкнуто. Функционал $J(u)$ из (5.4) удовлетворяет условиям теорем 1.2 и 5.1. В частности, его коэрцитивность вытекает из очевидного свойства: $J(u) \to \infty$ при $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \to \infty$, а полунепрерывность снизу относительно слабой сходимости – из его выпуклости и непрерывности на $H_0^1(\Omega)$. Поэтому, применяя теоремы 1.2,5.1 и следствия 1.1, 1.2, мы установим существование и единственность решения, а также его характеризацию с помощью вариационного неравенства (5.2), которое в случае задачи (5.4) имеет вид (5.5). $\square$

В том частном случае, когда в задаче (5.1) $\mathcal{A} = X$, неравенство (5.2) превращается в равенство $\langle f'(x), \varphi\rangle = 0 \ \forall \varphi \in X$. Чтобы его получить, достаточно в (5.2) взять $x = \hat{x} \pm \varphi$. Применяя это равенство к экстремальной задаче

$$J(u) = \int_\Omega \big(|\nabla u(x)|^2 - 2u(x)f(x)\big)dx \to \inf, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (5.6)$$

в которой $X = H_0^1(\Omega)$, получим, что справедливо

Предложение 5.1. *Для любого* $f \in L_2(\Omega)$ *задача* (5.6) *имеет единственное решение* $\hat{u}(x) \in H_0^1(\Omega)$ *и это решение описывается с помощью равенства*

$$\int\limits_\Omega \nabla\hat{u}(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \qquad (5.7)$$

Если предположить, что $\hat{u}(x)$ в (5.7) — достаточно гладкая функция, то интегрируя в левой части (5.7) по частям и учитывая, что $\hat{u}|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega} = 0$ получим, что $\hat{u}(x)$ является решением краевой задачи Дирихле для оператора Лапласа:

$$-\Delta\hat{u}(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad \hat{u}|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (5.8)$$

(где $-\Delta = -\sum_{j=1}^d \partial^2/\partial x_j^2$).

Напомним, что функция $\hat{u}(x) \in H_0^1(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи (5.8), если $\hat{u}$ удовлетворяет интегральному равенству (5.7).

Таким образом, решение $\hat{u}(x)$ экстремальной задачи (5.7) является обобщенным решением краевой задачи (5.8). Предложение 5.1 автоматически устанавливает существование и единственность обобщенного решения задачи Дирихле для оператора Лапласа.

6 Оптимальное управление системами с распределенными параметрами.

В этом разделе мы будем изучать задачи управления: абстрактную задачу и одну задачу с распределенными параметрами: мы докажеи их разрешимость и для решения второй задачи выведем систему оптимальности. Более полно эта тема исследована в [F]

6.1 Абстрактная нелинейная задача управления

Пусть Y, V — линейные нормированные пространства, Y_1, U — рефлексивные банаховы пространства, причем Y_1 непрерывно вложено в Y, U_∂ — выпуклое замкнутое подмножество пространства U, $L : Y_1 \times U \to V$ линейный, а $F : Y_1 \to V$ нелинейный непрерывные операторы, $J(y, u) : Y \times U \to \mathbb{R}$ – собственный функционал, полунепрерывный снизу относительно слабой сходимости в $Y \times U$. Рассматривается экстремальная задача

$$J(u, y) \to \inf, \quad L(y, u) + F(y) = 0, \quad u \in U_\partial. \tag{6.1}$$

Пара $(y, u) \in Y_1 \times U$ называется допустимой, если она удовлетворяет второму и третьему из соотношений (6.1) и $J(u, y) < \infty$. Множество допустимых пар обозначается символом $\mathcal{A}$.

Решением задачи (6.1) называется такая допустимая пара $(\hat{y}, \hat{u}) \in \mathcal{A}$, что

$$J(\hat{y}, \hat{u}) = \inf_{(y,u)\in\mathcal{A}} J(y, u) \equiv J_{\min}.$$

На задачу (6.1) накладываются следующие условия:

Условие 6.1. (нетривиальности). $\mathcal{A} \neq \emptyset$

Условие 6.2. (коэрцитивности). *Существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что множество $\mathcal{A}_\lambda = \{(y, u) \in \mathcal{A}\colon J(y, u) \leq \lambda\}$ непусто и ограничено в $Y_1 \times U$.*

Условие 6.3. (компактности). *Существует нормированное пространство Y_{-1}, содержащее Y, причем вложение $Y_1 \subset Y_{-1}$ вполне непрерывно, и выполнено условие: для любого функционала s из некоторого всюду плотного множества $S \subset V^*$ функция $y \mapsto \langle F(y), s\rangle$ продолжается с пространства Y_1 до непрерывного функционала на пространстве Y_{-1}.*

Теорема 6.1. *При выполнении перечисленных выше условий существует решение $(\hat{y}, \hat{u})$ задачи (6.1).*

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 1.2 устанавливается ограниченность снизу функционала J на множестве $\mathcal{A}$. Пусть $(y_n, u_n) \in \mathcal{A}$ — последовательность, минимизирующая J:

$$J(y_n, u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} J_{\min} \equiv \inf_{(y,u)\in\mathcal{A}} J(y, u).$$

В силу условия коэрцитивности $\|y_n\|_{Y_1} + \|u_n\|_U \le C$ и C не зависит от n. Поэтому, используя рефлексивность пространства $Y_1 \times U$, и переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что

$$y_n \to \hat{y} \quad Y_1, \quad u_n \to \hat{u} \quad U.$$

В силу выпуклости и замкнутости U_∂, условия $u_n \in U_\partial$ и следствия 1.1 справедливо включение $\hat{u} \in U_\partial$. Кроме того, для любого функционала $v^* \in V^*$

$$\langle v^*, L(y_n, u_n)\rangle = \langle L^* v^*, (y_n, u_n)\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle L^* v^*, (\hat{y}, \hat{u})\rangle = \langle v^*, L(\hat{y}, \hat{v})\rangle.$$

Так как вложение $Y_1 \subset Y_{-1}$ вполне непрерывно, $y_n \to \hat{y}$ при $n \to \infty$ сильно в Y_{-1}. Поэтому в силу Условия 6.3 (компактности) для любого $s \in S \subset V^*$

$$\langle F(y_n), s\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle F(\hat{y}), s\rangle.$$

Подставив (y_n, u_n) во второе из соотношений (6.1), перейдем к пределу при $n \to \infty$ в этом равенстве, учитывая полученные выше соотношения. В результате получим равенство $L(\hat{y}, \hat{u}) + F(\hat{y}) = 0$, которое вместе с включением $\hat{u} \in U_\partial$ доказывает, что $(\hat{y}, \hat{u}) \in \mathcal{A}$. Так как вложение $Y_1 \subset Y$ непрерывно, $y_n \to \hat{y}$ слабо в Y и поэтому

$$J(\hat{y}, \hat{u}) \le \lim_{n\to\infty} J(y_n, u_n) = J_{\min}.$$

Поэтому $(\hat{y}, \hat{u})$ — решение задачи (6.1). $\square$

Очевидно, задача (6.1) является спецификацией задачи (5.1).

Существенность предположений теоремы 1.2 о существовании решения задачи (5.1) подробно обсуждалась на конкретных примерах. Эти примеры автоматически подтверждают существенность всех условий теоремы 6.1 доказанной выше, за исключением условия 6.3 (компактности). Для проверки существенности этого условия рассмотрим задачу

$$J(y,u) = \int_0^1 (y^2(t) + u^2(t))\, dt \to \inf, \quad u(t) + \dot{y}(t)^2 = 1, \quad y(0) = y(1) = 0. \tag{6.2}$$

Выразив $u(t)$ через $\dot{y}(t)$ из второго соотношения и подставив это выражение в первое соотношение, получим задачу из примера 2.1 Больца. В этом примере было показано, что задача Больца не имеет решения

$x \in W_4^1(0,1)$. Следовательно, не имеет решения (y,u) в пространстве $W_4^1(0,1) \times L_2(0,1)$ и задача (6.2). Ниже мы покажем, что задача (6.2) удовлетворяет всем предположениям теоремы 6.1 за исключением условия компактности. Отсюда вследствие отсутствия решений у (6.2), будет следовать два факта: а) Задача (6.2) условию 6.3 (компактности) не удовлетворяет, и б) Это условие компактности существенно для справедливости теоремы 6.1.

Предложение 6.1. *Задача* (6.2) *удовлетворяет всем условиям теоремы* 6.1 *кроме условия* (6.3) *(компактности).*

Доказательство. Положим $Y = U = V = U_\partial = L_2(0,1)$, $Y_1 = \overset{o}{W}{}_4^1(0,1)$, $L(y,u) = u$, $F(y) = \dot{y}^2 - 1$, $J(y,u)$ — функционал из (6.2). Этот функционал является квадратом нормы пространства $Y \times U = (L_2(0,1))^2$ и поэтому выпукл и непрерывен, а значит, и полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости в $Y \times U$. Очевидно, операторы $L(y,u) = u$: $\overset{o}{W}{}_4^1(0,1) \times L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ и $F(y) = \dot{y}^2 - 1$: $\overset{o}{W}{}_4^1(0,1) \to L_2(0,1)$ непрерывны. Множество $\mathcal{A}$ допустимых элементов не пусто, так как, например, $(y,u) = (0,1) \in \mathcal{A}$. Докажем коэрцитивность задачи. Так как $\mathcal{A} = \{(y,u) \in \overset{o}{W}{}_4^1 \times L_2 \colon u + \dot{y}^2 - 1 = 0\}$, то

$$\mathcal{A}_\lambda = \left\{(y,u) \in \overset{o}{W}{}_4^1 \times L_2 \mid u = 1 - \dot{y}^2, \int_0^1 y^2 + u^2 dt \le \lambda\right\} \subset$$

$$\subset \left\{(y,u) \in \overset{o}{W}{}_4^1 \times L^2 \mid \|u\|^2 \le \lambda,\ \int_0^1 \dot{y}^4 dt = \int (1-u)^2 dt\right\} \subset$$

$$\subset \left\{(y,u) \in \overset{o}{W}{}_4^1 \times L^2 \mid \|u\|^2 \le \lambda,\ \int_0^1 \dot{y}^4 dt \le (\|u\| + 1)^2 \le (\sqrt{\lambda} + 1)^2\right\},$$

где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(0,1)}$, причем первое включение получилось в результате интегрирования равенства и отбрассывания члена с y^2 в неравенстве из первого множества. Последнее множество в цепочке ограничено в $Y_1 \times U = \overset{o}{W}{}_4^1 \times L_2$ в силу неравенства Фридрихса (см. теорему 3.4). $\square$

6.2 Пространства $H^{-1}(\Omega)$

Для применения теоремы 6.1 к конкретным задачам нам понадобится функциональное пространство $H^{-1}(\Omega)$. На пространстве $L_2(\Omega)$ определим норму

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\varphi\in H_0^1(\Omega),\varphi\neq 0} \frac{\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}$$

и определим пространство $H^{-1}(\Omega)$ как пополнение $L_2(\Omega)$ по этой норме. Пусть $f_n \in L_2(\Omega)$ — фундаментальная по норме $H^{-1}(\Omega)$ последовательность, реализующая некоторый элемент этого пополнения. Из определения нормы $\|\cdot\|_{H^{-1}(\Omega)}$ следует, что

$$\int_\Omega f_n(x)\varphi(x)\,dx \leq \|f_n\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Значит функционалы из левой части этого неравенства, задаваемые элементами f_n, стремятся к некоторому функционалу f на $H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющему неравенству

$$|\langle f,\varphi\rangle| \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)},$$

причем, очевидно, соотношение двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ слева порождено скалярным произведением в $L_2(\Omega)$, а норма $\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$ справа определяется равенством

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\varphi\in H_0^1(\Omega),\varphi\neq 0} \frac{\langle f,\varphi\rangle}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}.$$

Таким образом показано, что $H^{-1}(\Omega)$ состоит из подпространства линейных функционалов на $H_0^1(\Omega)$. Покажем, что $H^{-1}(\Omega)$ изоморфно $(H_0^1(\Omega))^*$. Пусть $F \in (H_0^1(\Omega))^*$. Согласно теореме Рисса существует функция $u_F \in H_0^1(\Omega)$ такая, что

$$F(\varphi) = \int_\Omega \nabla u_F(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega).$$

Взяв в правой части этого равенства $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, получим, используя определение обобщенной производной:

$$\langle -\Delta u_F,\varphi\rangle = \int_\Omega \nabla u_F(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx \leq \|\nabla u_F\|_{L_2(\Omega)}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{6.3}$$

Поделив обе части этого неравенства на $\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}$, взяв supremum по $0\neq\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ и воспользовавшись теоремой 3.3, получим, что $-\Delta u_F \in H^{-1}(\Omega)$ и

$$\|-\Delta u_F\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|u_F\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Поэтому доказана непрерывность оператора

$$-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega). \tag{6.4}$$

В силу теоремы Рисса для любого $f \in H^{-1}(\Omega)$ существует $u \in H_0^1(\Omega)$, что

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x)\, dx = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{6.5}$$

и поэтому, учитывая (6.3), получаем, что оператор (6.4) сюръективен. Следовательно, в силу теоремы Банаха об обратном операторе доказана

Лемма 6.1. *Оператор* (6.4) *устанавливает изоморфизм между* $H_0^1(\Omega)$ *и* $H^{-1}(\Omega)$.

Итак, из теоремы Рисса и Леммы 6.1 следует изоморфизм пространств $(H_0^1(\Omega))^*$ и $H^{-1}(\Omega)$.

Функция $u \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющая (6.5), называется обобщенным решением задачи Дирихле для оператора Лапласа (ср. с (5.7), (5.8)). Таким образом, мы получили еще одно доказательство существования и единственности задачи (5.8), правда, уже для произвольного $f \in H^{-1}(\Omega)$.

6.3 Пример задачи оптимального управления

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления нелинейной системой с распределенными параметрами.

$$J(y, u) = \int_\Omega |y(x) - w(x)|^4 dx + N \int_\Omega |u(x)|^2 dx \to \inf, \tag{6.6}$$

$$-\Delta y(x) + y^2(x) = f(x) + u(x), \quad x \in \Omega; \quad y|_{\partial\Omega} = 0; \tag{6.7}$$

$$u \in U_\partial, \tag{6.8}$$

где $w \in L_4(\Omega)$, $f \in H^{-1}(\Omega)$ — заданные функции, $N > 0$, U_∂ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_2(\Omega)$. Характерными примерами U_∂ являются следующие: $U_\partial = \{u \in L_2(\Omega),\ \|u\|_{L_2} \le R\}$ и $U_\partial = \{u \in L_2(\Omega) \mid \alpha_1(x) \le u(x) \le \alpha_2(x)$ п.в.$\}$, где $\alpha_i(x) \in C(\bar{\Omega})$, $i = 1, 2$ и $\alpha_1(x) \le \alpha_2(x) - \delta$ с некоторым $\delta > 0$. Искомой является пара $(y(x), u(x))$.

Предполагается, что $y(x)$ является обобщенным решением задачи (6.7) с правой частью $f(x)+u(x)$, т. е. $y \in H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega (\nabla y(x) \cdot \nabla \varphi(x) + y^2(x)\varphi(x))\, dx = \langle f + u, \varphi \rangle \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Отметим, что существование обобщенного решения задачи (6.7) не доказано при произвольной правой части $f + u$. Более того, есть все основания полагать, что не при всех правых частях обобщенное решение существует, а значит, не при всех U_∂ и f задача будет удовлетворять условию нетривиальности. Поэтому мы вынуждены наложить

Условие 6.4. *Существует пара* $(y, u) \in (H_0^1(\Omega) \cap L_4(\Omega)) \times L_2(\Omega)$*, удовлетворяющая соотношениям* (6.7), (6.8).

Условие 6.4 будет, например, выполнено, если $f \in L_2(\Omega)$ и $-f \in U_\partial$. Тогда пара $(y, u) = (0, -f)$ удовлетворяет (6.7), (6.8).

Теорема 6.2. *Пусть заданы* $w \in L_4(\Omega)$*,* $f \in H^{-1}(\Omega)$*,* $N > 0$ *и выполнено условие 6.4. Тогда существует решение* $(\hat{y}, \hat{u}) \in (H_0^1(\Omega) \cap L_4(\Omega)) \times L_2(\Omega)$ *задачи* (6.6)–(6.8).

Доказательство. Воспользуемся теоремой 6.1. Положим $Y = L_4(\Omega)$, $Y_1 = L_4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $U = L_2(\Omega)$, $V = H^{-1}(\Omega)$, $L(y, u) = -\Delta y - u$, $F(y) = y^2$, $J(y, u)$ — функционал (6.6).

Из непрерывности и выпуклости $J(y, u)$ следует его полунепрерывность снизу относительно слабой сходимости в $L_4(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Непрерывность отображений $L(y, u) = -\Delta - u : (H_0^1(\Omega) \cap L_4(\Omega)) \times L_2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, $F(y) = y^2 - f$: $(L_4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \to H^{-1}(\Omega)$ очевидна (см. лемму 6.1), а условие нетривиальности гарантировано условием 6.4.

Проверим теперь коэрцивность. Имеем при $\lambda > 0$:

$$\mathcal{A}_\lambda = \{(y, u) \in (L_4 \cap H_0^1) \times L_2 \mid -\Delta y = f + u - y^2, \quad J(y, u) \leq \lambda\} \subset$$
$$\subset \{(y, u) \in (L_4 \cap H_0^1) \times L_2 \mid -\Delta y = f + u - y^2, \quad \|y\|_{L_4} \leq \sqrt[4]{\lambda} + \|w\|_{L_4},$$
$$\|u\|_{L_2} \leq \sqrt{\lambda / N}\}.$$

В силу леммы 6.1 $\|y\|_{H_0^1} \leq \|f\|_{H^{-1}} + c\|u\|_{L_2} + c\|y\|_{L_4}^2$ и поэтому последнее из выписанных выше множеств включается в множество

$$\{(y, u) \in (L_4 \cap H_0^1) \times L_2 \mid \|y\|_{L_4} \leq \sqrt[4]{\lambda} + \|w\|_{L_4},$$
$$\|y\|_{H_0^1} \leq c(\sqrt[4]{\lambda} + \|w\|_{L_4})^2 + \|f\|_{H^{-1}} + c\sqrt{\lambda / N}, \quad \|u\|_{L_2} \leq \sqrt{\lambda / N}\},$$

которое, очевидно, ограничено в $(L_4 \cap H_0^1) \times L^2$.

Докажем, наконец, условие компактности. Положим $Y_{-1} = L_2(\Omega)$. В силу ограниченности области Ω, вложения $L_4(\Omega) \subset L_2(\Omega)$, т. е. $Y \subset Y_{-1}$

непрерывно. Пространство $Y_1 = L_4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ вполне непрерывно вкладывается в $Y_{-1} = L_2(\Omega)$ в силу леммы 3.1, в которой взято $q = 2$.

Очевидно, функционал $y \mapsto \langle F(y), s\rangle = \int_\Omega y^2(x)s(x)\,dx - \langle f, s\rangle$ непрерывен на $L_2(\Omega)$ при любой функции $s(x) \in C_0^\infty(\Omega)$. Так как множество $S = C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $H_0^1(\Omega) = (H^{-1}(\Omega))^*$, то справедливость условия компактности установлена. Следовательно, доказываемая теорема вытекает из теоремы 6.1. $\square$

6.4 Система оптимальности

Предположим, что в задаче (6.6)–(6.8) $U_\partial = U = L_2(\Omega)$, т.е., другими словами, рассмотрим задачу (6.6), (6.7).

Нам понадобится следующая теорема о вложении пространств Соболева, которая приводится без доказательства.

Теорема 6.3. *(Соболева о вложении) Вложение $H^1(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ непрерывно, если $d(1/2 - 1/p) \le 1$, где $d = \dim\Omega$.*

Систему оптимальности, т.е. необходимые условия экстремума для задачи (6.6), (6.7), мы выведем в случае, когда $H_0^1(\Omega)$ непрерывно вкладывается в $L_4(\Omega)$ и поэтому $Y_1 = L_4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. В силу теоремы 6.3 Соболева о вложении, это условие будет выполнено, если

$$d = \dim\Omega \le 4. \tag{6.9}$$

Теорема 6.4. *Пусть выполнено условие (6.9) и $(\hat{y}, \hat{u}) \in H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ — решение задачи (6.6), (6.7). Тогда существует функция $p \in H_0^1(\Omega)$ такая, что тройка $(\hat{y}, \hat{u}, p)$ удовлетворяет краевой задаче, состоящей из равенств (6.7) и уравнений*

$$-\Delta p(x) + 2\hat{y}(x)p(x) = -4(\hat{y}(x) - w(x))^3, \quad x \in \Omega; \quad p|_{\partial\Omega} = 0, \tag{6.10}$$

$$p(x) = 2N\hat{u}(x). \tag{6.11}$$

Доказательство. Применим принцип Лагранжа для гладкой задачи:

$$J(x) \to \inf, \qquad F(x) = 0,$$

где $J(\cdot) : X \to \mathbb{R}$ — функционал и $F(\cdot) : X \to V$ —оператор, строго дифференцируемые в точке минимума $\hat{x}$ этой задачи, причем известно, что оператор $F'(\hat{x}) : X \to V$ действует на. Тогда производная функции

Лагранжа $\mathcal{L}(x, v^*) = f(x) + \langle v^*, F(x) \rangle$ при некотором $v \in V^*$ обращается в нуль в точке $\hat{x}$: $\mathcal{L}'_x(\hat{x}, v^*) = 0$.

Положим $X = Y_1 \times U = H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$, $V = H^{-1}(\Omega)$, $x = (y, u)$, $F(x) = -\Delta y + y^2 - u - f$. Так как в силу (6.9) и теоремы вложения Соболева $H_0^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$, то оператор $F(x) : H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \equiv V$ нерперывен. Легко проверить, что производная F' определяется по формуле

$$F'(\hat{y}, \hat{u})(y, u) = F'_y(\hat{y}, \hat{u})y + F'_u(\hat{y}, \hat{u})u = -\Delta y + 2\hat{y}y - u,$$

причем оператор $F'(\hat{y}, \hat{u}) : H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ непрерывен. Чтобы доказать сюръективность этого оператора, нужно для любого $g \in H^{-1}(\Omega)$ найти $(z, v) \in H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$, удовлетворяющие равенству

$$-\Delta z(x) + 2\hat{y}(x)z(x) - v(x) = g(x). \tag{6.12}$$

Возьмем $z \in H_0^1(\Omega)$ удовлетворяющим уравнению $-\Delta z = g$. Существование такого z доказано в лемме 6.1. Положим $v(x) = 2\hat{y}(x)z(x)$. Так как $\hat{y}, z \in H_0^1(\Omega)$, то в силу вложения $H_0^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$, $v(x) \in L_2(\Omega)$. Очевидно, построенная пара $(z, v) \in H_0^1 \times L_2$ удовлетворяет (6.12) и тем самым справедливость условий применимости принципа Лагранжа проверена.

Функция Лагранжа в случае задачи (6.6), (6.7) имеет вид:

$$\mathcal{L}(y, u, p) = \int_\Omega ((y - w)^4 + Nu^2 + p(x)(-\Delta y + y^2 - u))\, dx - \langle p, f \rangle, \tag{6.13}$$

$p \in H_0^1(\Omega)$, а сам принцип Лагранжа эквивалентен двум соотношениям

$$\langle \mathcal{L}'_y(\hat{y}, \hat{u}, p), y \rangle = 0 \quad \forall y \in H_0^1(\Omega), \tag{6.14}$$

$$\langle \mathcal{L}'_u(\hat{y}, \hat{u}, p), u \rangle = 0 \quad \forall u \in L_2(\Omega). \tag{6.15}$$

Применяя (6.14) к (6.13), получим, что

$$\int_\Omega [4(\hat{y} - w)^3 y + p(-\Delta y + 2\hat{y}y)]\, dx = 0 \quad \forall y \in H_0^1(\Omega),$$

откуда следует, что $p \in H_0^1(\Omega)$ является обобщенным решением задачи (6.10), которая определяется аналогично обобщенному решению задачи (6.7), введенному выше.

Применяя равенство (6.15) к (6.13), получим соотношение

$$\int_\Omega (2N\hat{u}(x)u(x) - p(x)u(x))dx = 0 \ \ \forall u \in L_2(\Omega),$$

откуда следует (6.11). $\square$

Список литературы

[I] Функциональный анализ. М., Мир, 1967.

[KF] А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1968.

[K] Р.Курант. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М., ИЛ., 1953.

[M] C.B.Morrey. Multiple integrals in the calculus of variations. Grundlehren math. Wiss. 130, Springer, Berlin, 1966.

[F] А.В.Фурсиков. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск, Научная книга, 1999.

[SU] В.А.Солонников, Н.Н.Уральцева

[E] L.C.Evans. Partial Differential Equations. AMS serie Graduate Studies in Mathematics. v.19, Providens, Rhode Island, 1998.