

Штрафные задачи

Общие задачи

1. Доказать, что для векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $h > 0$ выражение $\|\mathbf{x}\|_h = \max(|x_1|, |x_2 - x_1|/h)$ является нормой. Найти матричную норму, подчиненную этой норме.
2. Доказать, выражение $\|A\|_F = (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2)^{1/2}$ является матричной нормой. Найти константы эквивалентности, связывающие матричную норму Фробениуса и нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.
3. Оценить $\text{cond}_2(A)$, где A — матрица размера $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Оценить снизу $\text{cond}_2(A)$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 30 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.03 & 0.01 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

5. Доказать, что все собственные значения $n \times n$ -матрицы A принадлежат области $G(A)$ в комплексной плоскости, представляющей собой объединение кругов

$$G_i(A) = \left\{ z : |z - a_{ii}| \leq R_i(A) = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

6. Доказать, что все собственные значения $n \times n$ -матрицы A принадлежат области $G(A) \cap G(A^T)$.
7. Исследовать сходимость метода Якоби для $n \times n$ -матрицы с элементами $a_{ij} = 3^{-|i-j|}$.
8. Исследовать сходимость метода Гаусса–Зейделя для $n \times n$ -матрицы с элементами $a_{ij} = 3^{-|i-j|}$.
9. Исследовать сходимость метода Якоби для $n \times n$ -матрицы с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j, \\ -1, & |i - j| = 1, \\ 0, & |i - j| > 1. \end{cases}$$

10. Исследовать сходимость метода Гаусса–Зейделя для $n \times n$ -матрицы с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j, \\ -1, & |i - j| = 1, \\ 0, & |i - j| > 1. \end{cases}$$

Математики

11. Для дифференциальной задачи $u'' + au' + bu = f(x)$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, построить сеточную задачу с третьим порядком аппроксимации.
12. Определить порядок аппроксимации разностной схемы (Нумерова):

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = \frac{f_{k+1} + 10f_k + f_{k-1}}{12}.$$

13. Найти решение системы:

$$\begin{aligned} y_0 - y_1 &= 0, \\ y_{i-1} - y_i + y_{i+1} &= 0, \quad 0 < i < N, \\ y_N &= 1 \end{aligned}$$

методом стрельбы и проанализировать его устойчивость.

14. Исследовать устойчивость схемы при $\theta \in [0, 1]$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{t} = (1 - \theta) \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \theta \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}.$$

15. Исследовать спектральную устойчивость схемы

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{t} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} - \frac{h^2}{4t} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0.$$

16. Для уравнения теплопроводности построить схему наивысшего порядка аппроксимации на шаблоне из точек:

$$(x_{m-1}, t^{n-1}), \quad (x_{m+1}, t^{n+1}), \quad (x_m, t^k), \quad k = n-1, n, n+1.$$

Проверить ее спектральную устойчивость.

17. Построить аппроксимацию в точке (x, y) смешанной производной $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ на семиточечном шаблоне

$$(x, y), (x \pm h, y), (x, y \pm h), (x - h, y + h), (x + h, y - h).$$

Механики

11. Построить тригонометрический интерполяционный полином второй степени

$$T_2(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x + a_3 \cos 2x + a_4 \sin 2x,$$

удовлетворяющий условиям:

$$T_2(0) = 0, \quad T_2(\pi/4) = 1, \quad T_2(\pi/2) = 1, \quad T_2(3\pi/4) = 1, \quad T_2(1) = 1.$$

12. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени 3 для функции $f(x) = \exp(x^2)$ на отрезке $[-1, 1]$.

13. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени 3 для функции $f(x) = 3 \sin^2(10x) + |x^2 - 7x + 10|$ на отрезке $[3, 4]$.

14. Доказать, что все корни ортогонального многочлена для неотрицательного веса $p(x)$ на отрезке $[a, b]$ действительны, различны и не выходят за пределы этого отрезка.

15. Доказать, что все коэффициенты квадратуры Гаусса для неотрицательного, обращающегося в ноль в конечном числе точек, веса $p(x)$ положительны.

16. Вывести оценку погрешности численного интегрирования квадратуры Симпсона: $R(f) = \|f^{(4)}\|_{[a, b]}(b-a)^5/2880$.

17. Доказать что экстраполяция по Рундсону, примененная к квадратурной формуле трапеций, приводит к квадратурной формуле Симпсона. (1. Применить правило Рунге оценки погрешности к квадратурной формуле трапеций. 2. Для уточнение формулы вычесть полученную оценку главного члена погрешности.)