Пример 6. Задача минимизации функции многих переменных с ограничениями–равенствами ([1, задача 2.14], [2, гл. 1, задача 2.11] или [3, гл. 1, задача 2.11]).

$$xyz \to \min, \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{2}$$

$$x + y + z = 0. \tag{3}$$

Функция Лагранжа задачи (1)–(3):

$$\mathcal{L} = \lambda_0 xyz + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z).$$

Необходимые условия оптимальности:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \lambda_0 yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0,\\ \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \lambda_0 xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0,\\ \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= \lambda_0 xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Так как анормальный случай $\lambda_0 = 0$ не имеет решений, то в качестве условия нормировки выбирается $\lambda_0 = 1$.

В результате применения принципа Лагранжа решение задачи минимизации целевой функции (1) с ограничениями (2), (3) свелось к решению системы 5-и нелинейных уравнений относительно 5 неизвестных:

$$\begin{aligned} f_1 &= \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0,\\ f_2 &= \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0,\\ f_3 &= \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0,\\ f_4 &= \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,\\ f_5 &= \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = x + y + z = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Аналитическое решение этой задачи несложно.

Для численного решения системы (4) методом Ньютона[1] требуется вычислить матрицу Якоби:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & z & y & 2x & 1\\ z & 2\lambda_1 & x & 2y & 1\\ y & x & 2\lambda_1 & 2z & 1\\ 2x & 2y & 2z & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } x_j = \{x, y, z, \lambda_1, \lambda_2\}.$$

[1] Разумеется, даже в учебных целях желательно использовать наилучшую в смысле области сходимости модификацию Исаева-Сонина-Федоренко.

В основной программе выбираются некоторые значения величин x, y, z, λ_1, λ_2, и сравниваются значения вектор-функции невязок и матрицы Якоби, вычисленные с использованием явных аналитических формул и с использованием проекта `ext_value`.

Заметим, что часть матрицы вторых производных в точках экстремума можно использовать для проверки условий второго порядка.

Список литературы

[1] *Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984.

[2] *Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Оптимизация: теория, примеры, задачи. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[3] *Галеев Э. М.* Оптимизация: теория, примеры, задачи: Учебное пособие. М.: Эдиториал УРСС, 2002.