

Пример 7. Вычисление вторых производных по начальным условиям решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассматривается задача движения центра масс космического аппарата в гравитационном поле Земли с учётом второй зональной гармоники:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3} + \frac{3}{2}J_2\mu\frac{r_e^2}{r^5}\left(\frac{5xz^2}{r^2} - x\right) + \omega^2x + 2\omega\dot{y}, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3} + \frac{3}{2}J_2\mu\frac{r_e^2}{r^5}\left(\frac{5yz^2}{r^2} - y\right) + \omega^2y - 2\omega\dot{x}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3} + \frac{3}{2}J_2\mu\frac{r_e^2}{r^5}\left(\frac{5z^3}{r^2} - 3z\right),\end{aligned}$$

где $\mu = 3.9860044 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2$ — геоцентрическая гравитационная постоянная, $r_e = 6378.136 \text{ км}$ — экваториальный радиус Земли, $J_2 = 1082.628 \cdot 10^{-6}$ — коэффициент второй зональной гармоники, x, y, z — геоцентрические декартовы прямоугольные координаты, начало системы координат связано с центром Земли, оси Zx и Zy расположены в плоскости экватора, ось Zz направлена по оси север-юг, система координат вращается с угловой скоростью ω движения КА по некоторой круговой орбите (в качестве такой круговой орбиты в работе выбрана геостационарная орбита и, потому, можно считать что система координат является гринвической). В начальный момент времени КА находится в некоторой заданной точке с известной начальной скоростью. В работе в качестве тестовой выбрана точка перицентра мгновенной эллиптической орбиты на оси Zx и скорость на 5% превышающую скорость на круговой орбите с углом наклона 0.9 рад. к плоскости экватора. В качестве продолжительности перелёта вырана величина 600 с (10 мин).

Вычисляется решение задачи Коши, в том числе значения координат и скоростей КА в конечный момент времени, их первых и вторых производных по начальным условиям.

Эти вычисления производятся, во-первых, с использованием класса `ext_value2` и, во-вторых, с использованием конечно-разностных формул численного дифференцирования.

Для повторения расчётов необходимо откомпилировать и собрать две выполнимые программы.

Например:
`g++ main-ext.cpp -lm`
и
`g++ main.cpp -lm`

Отметим, что для упрощения переносимости, другие файлы включаются в указанный директивами прекомпилятора `#include`.

С использованием класса `ext_value2` значения в конечный момент времени и все производные вычисляются сразу одним расчётом. Выводятся на экран только нужные для сравнения.

С использованием конечно-разностных формул численного дифференцирования вычисляется само решение (одно решение задачи Коши) и одна из смешанных производных (четыре решения задачи Коши) для каждого из значений; именно они и выводятся на экран.

Отметим, что конечно-разностные формулы не могут дать высокой точности вычисления производных. Поэтому на экран выводятся значения в “обычном формате”. Совпадение значений подтверждает “правильность” проведённых вычислений.

Отметим, что при необходимости вычислить третьи производные класс `ext_value2` следует заменить на `ext_value3`, а если требуются только первые производные — на класс `ext_value1` (это уменьшит объёмы используемой памяти и проводимых вычислений).

Замена данных типа `double` на один из классов `ext_value` при решении задачи Коши соответствует применению теорем об уравнениях в вариациях (первых, вторых, третьих) и представляет собой с точки зрения программирования упаковку требуемых вычислений в методы класса.

Отметим, что в примере вычисляются только производные значений фазовых переменных в конечный момент времени только по начальным условиям. Разумеется, аналогичным образом можно вычислять производные более сложных функционалов как по начальным условиям, так и по параметрам.

Отметим, что сравнительно маленькая протяжённость временного интервала решения задачи Коши в рассмотренном примере обусловлена использованием декартовой системы координат. В случае необходимости построения многовитковой траектории необходимо выбрать более подходящую координатную. Если же отложить в сторону особенности вычислений с плавающей точкой, то протяжённость интервала интегрирования и система дифференциальных уравнений могут быть любыми.

Отметим, что использование “универсальной” программы решения

задачи Коши за счёт использования шаблона возможно, если речь идёт о взаимозаменяемости классов `ext_value`, но подстановка в такой шаблон исходного типа данных `double` при этом будет приводить к ошибке. В `d87-ext.cpp` соответствующее место отмечено комментарием.