Пример 8. Решение задачи Лагранжа [1, задача 3].

Рассматривается следующая учебная задача Лагранжа [1, задача 3]:

$$\int_0^{\pi/2} u^2 \mathrm{d}t \to inf,$$

$$\ddot{x} + x\exp(-\alpha x) = u,$$

$$x(0) = x(\pi/2) = 0, \quad \dot{x}(\pi/2) = -\pi/2,$$

$\alpha \in [0.0;\ 25.0]$.

В соответствии с методикой [1, 2] рассматриваемая задача формализуется как задача оптимального управления:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = u - x_1\exp(-\alpha x_1),$$

$$u \in \mathbb{R}$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_1(\pi/2) = 0, \quad x_2(\pi/2) + \pi/2 = 0,$$

$$\int_0^{\pi/2} u^2 \mathrm{d}t \to inf,$$

$\alpha \in [0.0;\ 25.0]$.

На основе принципа максимума Л.С. Понтрягина её оешение сводится к решению краевой задачи.

Функция Понтрягина:

$$H = p_1 x_2 + p_2(u - x_1\exp(-\alpha x_1)) - \lambda_0 u^2.$$

Терминант:

$$l = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_1(\pi/2) + \lambda_3 x_2(\pi/2).$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\dot{p}_1 = p_2(1 - \alpha x_1)\exp(-\alpha * x_1),$$

$$\dot{p}_2 = -p_1.$$

Условие оптимальности (в предположении $\lambda_0 = 1/2$, невозможность случая $\lambda_0 = 0$ доказывается стандартно и опускается):

$$\hat{u} = p_2$$

Условия трансверсальности:

$$p_1(0) = \lambda_1, \quad p_1(\pi/2) = -\lambda_2,$$

$$p_2(0) = 0, \quad p_2(\pi/2) = -\lambda_3,$$

Условия стационарности и дополняющей нежёсткости нет.

Условия неотрицательности и возможности выбора нормировки задачи в силу однородности функции Лагранжа по множителям Лагранжа выполнены в силу выбора $\lambda_0 = 1/2$.

Итак, краевая задача принципа максимума имеет вид:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = p_2 - x_1 \exp(-\alpha x_1),$$

$$\dot{p}_1 = p_2(1 - \alpha x_1) \exp(-\alpha x_1),$$

$$\dot{p}_2 = -p_1;$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_1(\pi/2) = 0,$$

$$p_2(0) = 0, \quad x_2(\pi/2) + \pi/2 = 0.$$

Краевая задача принципа максимума решается численно методом стрельбы.

Метод стрельбы относится к классу методов декомпозиции и разделяет все неизвестные на свободные и зависимые.

При выборе классической вычислительной схемы метода стрельбы свободными неизвестными будут значения $\beta_1 := x_2(0)$ и $\beta_2 := p_1(0)$. В соответствии с устоявшейся терминоголией они называются параметрами пристрелки. Задав эти два значения неким образом удаётся найти зависимые переменные — функции $x_1(t)[\vec{\beta}]$, $x_2(t)[\vec{\beta}]$, $p_1(t)[\vec{\beta}]$, $p_2(t)[\vec{\beta}]$ $\forall t \in [0; \pi/2]$. Квадратные скобочки обозначают что функции — решения задачи Коши — зависят от выбора начальных условий.

Отметим, что несуществование решения задачи Коши для каких-либо значений $\vec{\beta}$ усложнило бы изложение и программную реализацию, но не существо метода стрельбы.

Для того, чтобы решение задачи Коши для выбранного значения $\vec{\beta}$ было решением краевой задачи необходимо выполнение условий:

$$F_1(\vec{\beta}) := x_1(\pi/2)[\vec{\beta}] = 0,$$

$$F_2(\vec{\beta}) := x_2(\pi/2)[\vec{\beta}] + \pi/2 = 0.$$

Левые части этих условий в соответствии с устоявшейся терминологией называются невязками.

Таким образом метод стрельбы свёл решение краевой задачи принципа максимума к решению системы двух нелинейных алгебраических (в смысле не являющихся дифференциальными, это устоявшаяся терминология) уравнений от двух неизвестных. Разумеется, явные формулы вектор-функции невязок от параметров пристрелки $\vec{F}(\vec{\beta})$ незвестны (явные формулы известны только в элементарных учебных задачах), но есть алгоритм вычисления этих функций, включающий в себя в качестве составной части решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений краевой задачи принципа максимума.

Система нелинейных алгебраических уравнений решается численно методом Ньютона-Исаева-Сонина (`resh.cpp`).

Задача Коши решается численно методом Дормана-Принса 8(7) (`d87-ext1.cpp`).

Правая часть системы ОДУ реализована в функции (`fcn.cpp`). Следует отметить, что в проекте `ext_value` в настоящий момент не реализованы операторы присвоения:
`ext_value`→`double`
и `double`→`ext_value`.
Реализация таких операторов возможна, но спорна. В настоящий момент такие присвоения диагностируются компилятором как ошибочные. Предположительно, это помогает при отладке программы. При определении вышеуказанных операторов присвоения ошибочное присвоение будет сложно диагностировать и исправить. Поэтому использование `ext_null(2)` в качестве нулевой константы в представленной реализации важно. Значение “2” соответствует размерности вектора параметров пристрелки и вектор-функции невязок, то есть соответствует числу аргументов, по которым вычисляется производная.

Система линейных алгебраических уравнений, входящая составной частью в метод Ньютона, могла бы быть решена любым способом (так как уравнений всего два). В программе используется метод метод Гаусса-Жордана с выбором ведущего элемента по столбцу и хранением матрицы в линейном массиве по строкам (`gauss.cpp`).

Производные по начальным условиям вычисляются с использованием класса `ext_value1`.

Функция (`f.cpp`) реализует вычисление функции невязок, являясь прокладкой между методом Ньютона и методом решения задачи Коши. В этой функции параметр α пределяется как фазовая переменная с нулевой правой частью. Добавление такого дифференциального уравнения решения не осложняет, позволяет не менять структуру передаваемых параметров между функциями и избежать использования глобальных переменных, соответствует классическому подходу, известному со времён программирования на Фортране-77.

(`main.cpp`) — главный файл проекта, включающий в себя с использованием директив прекомпилятора `#include` все остальные файлы проекта (в целях упрощения переносимости), задаёт начальные данные и выводит результат. Компиляция в UNIX-системах:

```
g++ main.cpp -lm
```

В приведённой программе реализован необходимый минимум. В частности:

- не реализован метод продолжения решения по параметру (вообще говоря он должен находиться в `main.cpp`, в этой элентарной задаче метод продолжения решения по параметру не требуется так как решение и так находится);

- не реализована проверка условий второго порядка;

- не реализованы оценки точности решения задачи Коши;

- не реализована оценка множества остановки метода Ньютона-Исаева-Сонина (это позволяет оценить тчность определения параметров пристрелки);

- в случае $\alpha = 0$ существует аналитическое решение задачи и сравнение численного решения с аналитическим не приведен;.

- нет вычисления функционала (для этого достаточно реализовать ещё одно решение задачи Коши с дифференциальным дифференциальным уравнением, задав в качестве его правой части подынтегральную функцию, и реализовать вывод ответа).

Всё это остаётся для реализации заинтересованным читателям.

Таблица 1: Экстремали задачи:

α	$\dot{x}(0)$	$p_1(0)$	B_0
0.0	1.00000000	2.00000000	3.14159
5.0	0.796751905	1.82016728	4.45539
10.0	0.787460299	1.86972874	4.64774
15.0	0.787021323	1.89202803	4.68804
20.0	0.786670784	1.90026267	4.70004
25.0	0.786356937	1.90384498	4.70493

Список литературы

[1] *Григорьев И. С.* Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления — М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико–математическом факультете МГУ, 2005.
http://mech.math.msu.su/∼iliagri/prak2005.htm

[2] *Григорьев И. С., Григорьев К. Г., Заплетин М. П.* Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. Дополнение I. — М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико–математическом факультете МГУ, 2007.
http://mech.math.msu.su/∼iliagri/prak2007.htm