

И. С. Григорьев,
М. П. Заплетин

МГУ им. М. В. Ломоносова

Проблема построения
экстремалей Понтрягина
в задачах оптимизации
перелетов КА
к астероидам

Earth \rightarrow 96 \rightarrow Earth flyby \rightarrow 88 \rightarrow 49 \rightarrow Earth

Постановка задачи

Дифференциальные уравнения управляемого движения центра масс КА в декартовой эклиптической системе координат:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{z} = v_z, \quad \dot{m} = -T/c, \\ \dot{v}_x &= -\frac{\mu x}{r^3} + \frac{T_x}{m} = F_x, \quad \dot{v}_y = -\frac{\mu y}{r^3} + \frac{T_y}{m} = F_y, \quad \dot{v}_z = -\frac{\mu z}{r^3} + \frac{T_z}{m} = F_z, \\ T &\equiv \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2} \leq T_{\max} = 0.15 \text{ N}.\end{aligned}$$

$$c = P_{\text{уд}} \cdot g_E, \quad P_{\text{уд}} = 3000 \text{ с}, \quad g_E = 9.80665 \text{ м/с.}$$

Краевые условия:

— старт с Земли:

$$m(t_{sE}) = 2000 \text{ кг}, \quad x(t_{sE}) - x^E(t_{sE}) = 0, \quad y(t_{sE}) - y^E(t_{sE}) = 0, \quad z(t_{sE}) - z^E(t_{sE}) = 0,$$

$$(v_x(t_{sE}) - v_x^E(t_{sE}))^2 + (v_y(t_{sE}) - v_y^E(t_{sE}))^2 + (v_z(t_{sE}) - v_z^E(t_{sE}))^2 \leq (0.5 \text{ км/с})^2,$$

$$57388.0 \text{ MJD} < t_{sE} < 61041.0 \text{ MJD};$$

— прилет на астероид $i = 1, 2, 3$ и отлет с него:

$$\begin{aligned} x(t_{fi}) - x^{Ai}(t_{fi}) &= 0, & y(t_{fi}) - y^{Ai}(t_{fi}) &= 0, & z(t_{fi}) - z^{Ai}(t_{fi}) &= 0, \\ v_x(t_{fi}) - v_x^{Ai}(t_{fi}) &= 0, & v_y(t_{fi}) - v_y^{Ai}(t_{fi}) &= 0, & v_z(t_{fi}) - v_z^{Ai}(t_{fi}) &= 0, \\ x(t_{si}) - x^{Ai}(t_{si}) &= 0, & y(t_{si}) - y^{Ai}(t_{si}) &= 0, & z(t_{si}) - z^{Ai}(t_{si}) &= 0, \\ v_x(t_{si}) - v_x^{Ai}(t_{si}) &= 0, & v_y(t_{si}) - v_y^{Ai}(t_{si}) &= 0, & v_z(t_{si}) - v_z^{Ai}(t_{si}) &= 0, \\ m(t_{si}) - m(t_{fi}) &= 0, & t_{si} - t_{fi} &\geq \Delta t_{\min} \geq 60 \text{ дней}; \end{aligned}$$

— окончание перелета — прилет к Земле:

$$\begin{aligned} x(t_{fE}) - x^E(t_{fE}) &= 0, & y(t_{fE}) - y^E(t_{fE}) &= 0, & z(t_{fE}) - z^E(t_{fE}) &= 0, \\ v_x(t_{fE}) - v_x^E(t_{fE}) &= 0, & v_y(t_{fE}) - v_y^E(t_{fE}) &= 0, & v_z(t_{fE}) - v_z^E(t_{fE}) &= 0; \end{aligned}$$

— общая продолжительность перелета ограничена:

$$t_{fE} - t_{sE} < t_{\max} = 3652.5 \text{ ED};$$

— функционал:

$$J = \frac{m(t_{fE})}{2000 \text{ кг}} + \frac{\Delta t_{\min}}{50 \text{ лет}} \rightarrow \max.$$

Допустимы пертурбационные маневры у Земли:

$$\begin{aligned}
t_{p-} &= t_{p+}, \quad m(t_{p-}) = m(t_{p+}), \\
x(t_{p-}) &= x^E(t_{p-}), \quad y(t_{p-}) = y^E(t_{p-}), \quad z(t_{p-}) = z^E(t_{p-}), \\
x(t_{p+}) &= x^E(t_{p+}), \quad y(t_{p+}) = y^E(t_{p+}), \quad z(t_{p+}) = z^E(t_{p+}), \\
\Delta v_{x-} &:= v_x(t_{p-}) - v_x^E(t_{p-}), \quad \Delta v_{y-} := v_y(t_{p-}) - v_y^E(t_{p-}), \quad \Delta v_{z-} := v_z(t_{p-}) - v_z^E(t_{p-}), \\
\Delta v_{x+} &:= v_x(t_{p+}) - v_x^E(t_{p+}), \quad \Delta v_{y+} := v_y(t_{p+}) - v_y^E(t_{p+}), \quad \Delta v_{z+} := v_z(t_{p+}) - v_z^E(t_{p+}), \\
\Delta v_- &:= \sqrt{\Delta v_{x-}^2 + \Delta v_{y-}^2 + \Delta v_{z-}^2}, \quad \Delta v_+ := \sqrt{\Delta v_{x+}^2 + \Delta v_{y+}^2 + \Delta v_{z+}^2}, \\
\Delta v_- &= \Delta v_+
\end{aligned}$$

Радиус пролета ограничен:

$$\begin{aligned}
\cos \delta &:= \frac{\Delta v_{x-} \cdot \Delta v_{x+} + \Delta v_{y-} \cdot \Delta v_{y+} + \Delta v_{z-} \cdot \Delta v_{z+}}{\Delta v_- \cdot \Delta v_+}, \\
\sin(\delta/2) &= \sqrt{(1 - \cos \delta)/2}, \quad R_p := \frac{\mu_E(1 - \sin(\delta/2))}{\Delta v_- \cdot \Delta v_+ \cdot \sin(\delta/2)} \geq 6871 \text{ км},
\end{aligned}$$

где μ_E — гравитационный параметр Земли.

Краевая задача принципа максимума

$$\dot{p}_j = -\partial H/\partial j, \quad j = x, y, z, v_x, v_y, v_z, m; \\ H \equiv p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z - p_m T/c + p_{vx} F_x + p_{vy} F_y + p_{vz} F_z.$$

$$T_x = T_{opt} \frac{p_{vx}}{\rho}, \quad T_y = T_{opt} \frac{p_{vy}}{\rho}, \quad T_z = T_{opt} \frac{p_{vz}}{\rho}, \quad T_{opt} \equiv \begin{cases} T_{max}, & \chi > 0, \\ 0, & \chi < 0, \\ \forall T \in [0, T_{max}], & \chi = 0, \end{cases}$$

$$\rho \equiv \sqrt{p_{vx}^2 + p_{vy}^2 + p_{vz}^2}, \quad \chi \equiv \frac{\rho}{m} - \frac{p_m}{c}.$$

$$\lambda_V^{s1}((v_x(t_{s1}) - v_x^E(t_{s1}))^2 + (v_y(t_{s1}) - v_y^E(t_{s1}))^2 + (v_z(t_{s1}) - v_z^E(t_{s1}))^2 - (0.5 \text{ км/с})^2) = 0,$$

$$\lambda_t^i(\Delta t_{\min} - t_{si} + t_{fi}) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\lambda_V^{sE} \geq 0, \quad \lambda_t^1 \geq 0, \quad \lambda_t^2 \geq 0, \quad \lambda_t^3 \geq 0, \quad \lambda_0 \geq 0. \quad \lambda_t^1 + \lambda_t^2 + \lambda_t^3 = \lambda_0.$$

$$\begin{aligned}
p_j(t_{sE}) &= \lambda_j^{sE} \quad j = x, y, z, m; \\
p_{vx}(t_{sE}) &= 2\lambda_V^{sE}v_x(t_{sE}), \quad p_{vy}(t_{sE}) = 2\lambda_V^{sE}v_y(t_{sE}), \quad p_{vz}(t_{sE}) = 2\lambda_V^{sE}v_z(t_{sE}), \\
p_j(t_{f1}) &= -\lambda_j^{f1}, \quad p_j(t_{f2}) = -\lambda_j^{f2}, \quad p_j(t_{f3}) = -\lambda_j^{f3}, \quad p_j(t_{fE}) = -\lambda_j^{fE}, \\
p_j(t_{s1}) &= \lambda_j^{s1}, \quad p_j(t_{s2}) = \lambda_j^{s1}, \quad p_j(t_{s3}) = \lambda_j^{s1}, \quad j = x, y, z, v_x, v_y, v_z; \\
p_m(t_{f1}) &= \lambda_m^1 = p_m(t_{s1}), \quad p_m(t_{f2}) = \lambda_m^2 = p_m(t_{s2}), \quad p_m(t_{f3}) = \lambda_m^3 = p_m(t_{s3}), \\
&\quad p_m(t_{fE}) = -\lambda_0/m(t_{sE}); \\
p_x(t_{sE})(u(t_{sE}) - u_E(t_{sE})) + p_y(t_{sE})(v(t_{sE}) - v_E(t_{sE})) + p_z(t_{sE})(w(t_{sE}) - w_E(t_{sE})) + \\
&\quad + P_{opt}(t_{sE}) \left(\frac{\rho(t_{sE})}{m(t_{sE})} - \frac{p_m(t_{sE})}{c} \right) &= 0. \\
P_{opt}(t_{si}) \left(\frac{\rho(t_{si})}{m(t_{si})} - \frac{p_m(t_{si})}{c} \right) &= \lambda_t^i = P_{opt}(t_{fi}) \left(\frac{\rho(t_{fi})}{m(t_{fi})} - \frac{p_m(t_{fi})}{c} \right), \quad i = 1, 2, 3; \\
P_{opt}(t_{fE}) \left(\frac{\rho(t_{fE})}{m(t_{fE})} - \frac{p_m(t_{fE})}{c} \right) &= 0.
\end{aligned}$$

Условия оптимальности пертурбационного маневра(-ов) у Земли

$$\begin{aligned}
p_m(t_{p-}) &= p_m(t_{p+}), \quad p_j(t_{p-}) = -\lambda_j^{p-}, \quad p_j(t_{p+}) = \lambda_j^{p+}, \\
p_{vj}(t_{p-}) &= 2\lambda_V^p \Delta v_{j-} - \lambda_R^p \frac{\partial R_p}{\partial \Delta v_{j-}}, \quad p_{vj}(t_{p+}) = 2\lambda_V^p \Delta v_{j+} + \lambda_R^p \frac{\partial R_p}{\partial \Delta v_{j+}}, \quad j = x, y, z; \\
H(t_{p-}) &= \sum_{j=x,y,z} (-\lambda_j^{p-} \cdot v_j^E(t_{p-})) + \sum_{j=x,y,z} \left(2\lambda_V^p \Delta v_{j-} - \lambda_R^p \frac{\partial R_p}{\partial \Delta v_{j-}} \right) \left(-\frac{\mu j^E}{(r^E)^3} \right) + \lambda_t^p, \\
H(t_{p+}) &= \sum_{j=x,y,z} (\lambda_j^{p+} \cdot v_j^E(t_{p+})) + \sum_{j=x,y,z} \left(2\lambda_V^p \Delta v_{j+} + \lambda_R^p \frac{\partial R_p}{\partial \Delta v_{j+}} \right) \left(-\frac{\mu j^E}{(r^E)^3} \right) + \lambda_t^p; \\
\lambda_R^p &\leq 0, \quad \lambda_R^p(R_p - 6871 \text{ км}) = 0.
\end{aligned}$$

Следствие условий стационарности с учетом условий трансверсальности:

$$\begin{aligned}
p_x(t_{p-}) \Delta v_{x-} + p_y(t_{p-}) \Delta v_{y-} + p_z(t_{p-}) \Delta v_{z-} + T_{opt}(t_{p-}) \chi(t_{p-}) &= \\
&= p_x(t_{p+}) \Delta v_{x+} + p_y(t_{p+}) \Delta v_{y+} + p_z(t_{p+}) \Delta v_{z+} + T_{opt}(t_{p+}) \chi(t_{p+}).
\end{aligned}$$

Метод решения.

Задача решается в два этапа. Первый этап — выбор астероидов для перелета.

Выбор астероидов, примерный момента старта, и необходимого для решения задачи начального приближения осуществлялся на основе решения задач двухимпульсного перехода между орбитами и задач Ламберта.

Схема перелета:

Earth -> 96 -> Earth flyby -> 88 -> 49 -> Earth

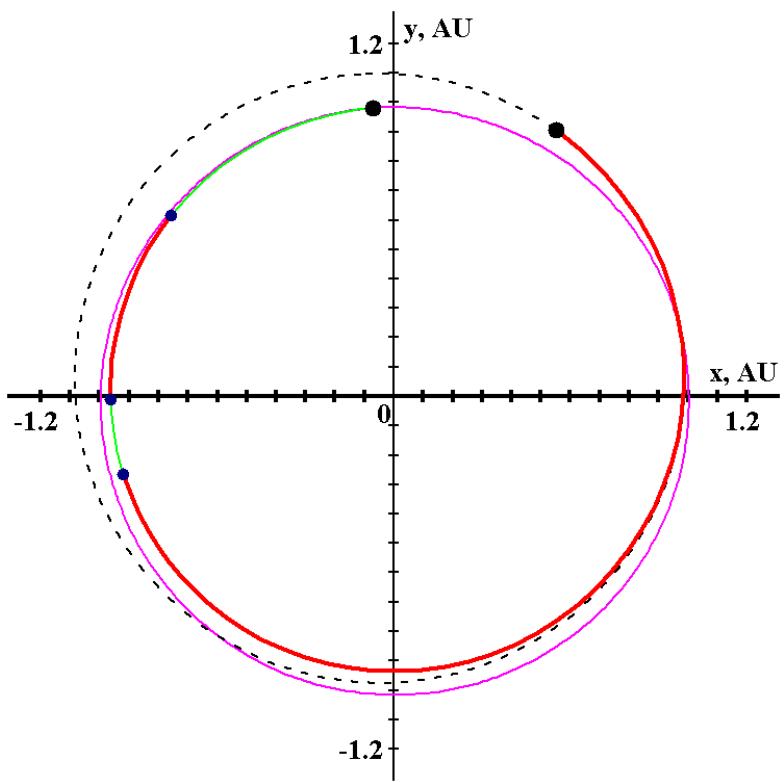
Второй этап — решение задачи оптимального управления.

Краевая задача решалась численно методом стрельбы.

Использовались решения вспомогательных задач оптимизации наискорейших перелетов.

При оптимизации пертурбационного маневра — задачи оптимизации перелетов между астероидом и Землей с заданной относительной скоростью КА у Земли.

Решение исходной задачи получалось из решений вспомогательных задач с использованием метода продолжения решения по параметру. Основная трудность была связана с перестройками структуры траекторий (изменением числа включений двигателя).



Earth → 96

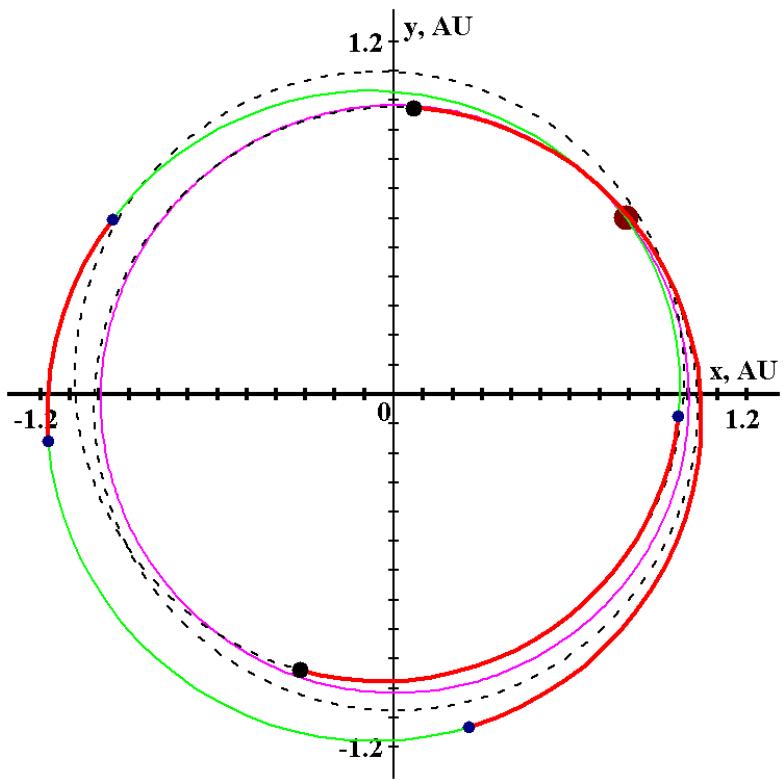
Start in Earth: 58478.103 MJD.

Passive arc 46.574 Day,
thrust arc 38.513 Day,
passive arc 14.880 Day,
thrust arc 212.446 Day.

Finish in Asteroid 96: 58790.517 MJD.

Mass SC: 1889.448 kg.

$t_{s1} - t_{f1} = 222.553$ Day.



96 → Earth flyby → 88

Start in Asteroid 96: 59013.069 MJD.

Thrust arc 98.649 Day,
passive arc 40.778 Day.

Earth flyby: 59152.497 MJD.

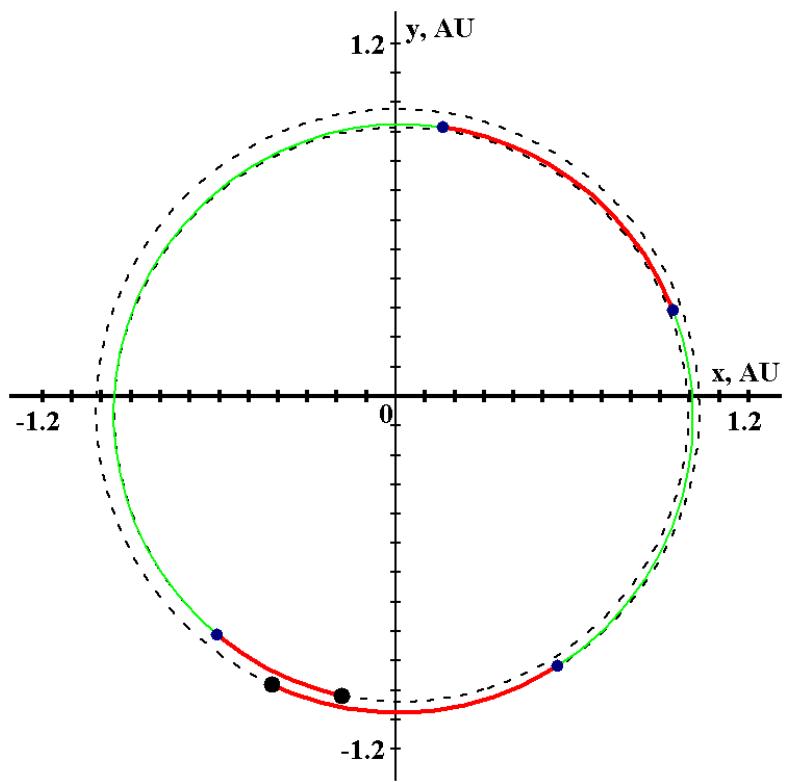
$R_p = 6871.000$ km.

Passive arc 117.524 Day,
thrust arc 51.617 Day,
passive arc 130.726 Day,
thrust arc 176.911 Day.

Finish in Asteroid 88: 59629.273 MJD.

Mass SC: 1745.321 kg.

$t_{s2} - t_{f2} = 165.170$ Day.



$88 \rightarrow 49$

Start in Asteroid 88: 59794.443 MJD.

Thrust arc 63.146 Day,

passive arc 82.524 Day,

thrust arc 58.564 Day,

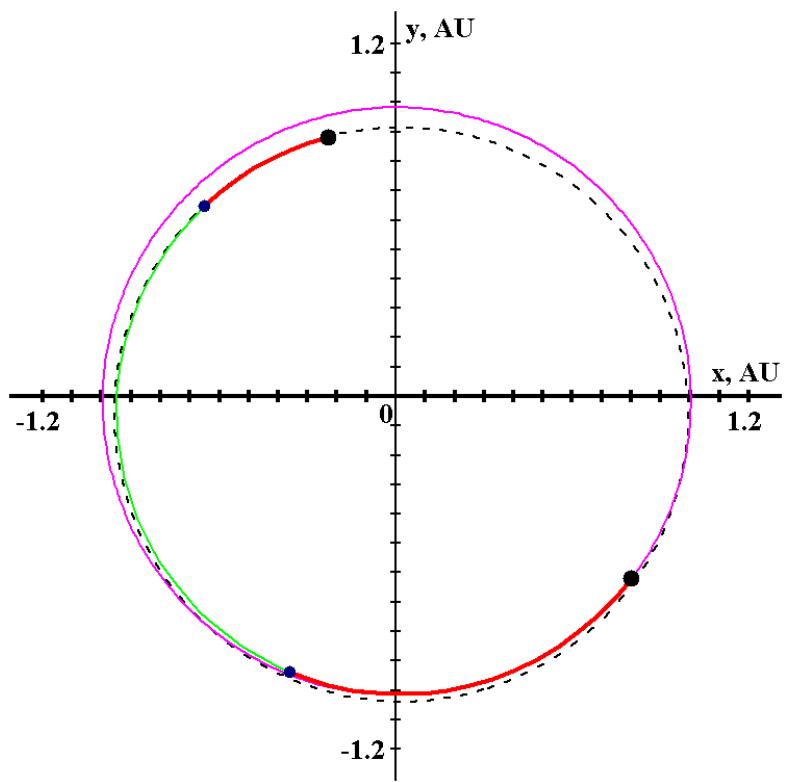
passive arc 141.733 Day,

thrust arc 28.810 Day.

Finish in Asteroid 49: 60169.221 MJD.

Mass SC: 1679.014 kg.

$t_{s3} - t_{f3} = 1616.428$ Day.



49 → Earth

Start in Asteroid 49: 61785.650 MJD.

Thrust arc 26.478 Day,
passive arc 108.492 Day,
thrust arc 77.253 Day.

Mass SC: 1633.319 kg.

Total flight time 3519.769 Day.

Objective function $J = 0.82570369$.