Гртгорьев И.С., Заплетин М.П.
GTOC5 — проверка траекторий

Дорогие коллеги!

Представляем Вашему вниманию краткое описание использованного способа проверки траекторий.

Представленные в качестве ответов траектории проверялись подстановкой. Подстановка решения в уравнение должна давать ноль. Однако, в силу приближенности проводимых вычислений вместо нуля может получиться какая–нибудь малая величина. На проверке поточечных условий при отлете от Земли и встречах с астероидами (rendezvous and flyby) останавливаться не будем, сосредоточившись на анализе протяженных участков. Проверка траектории производилась отдельно на активных и пассивных участках.

1 Проверка пассивных участков

При проверке пассивного участка использовались значения времени, положения и скорости КА в начале и конце пассивного участка. По этим величинам определялись параметры эллипсов: a — большая полуось, e — эксцентриситет, i — наклонение орбиты, Ω — долгота восходящего узла, ω — аргумент перицентра, M_0 — средняя аномалия в выбранную эпоху. Вычислялись разности параметров двух эллипсов, соответствующих начальному и конечному положениям на участке. Если полученные отличия были меньше заданных величин, соответствующий участок считается верифицированным.

В качестве допустимых отличий нормальной верификации использовались величины:

$$\begin{array}{lll} \Delta a_{\max} = 10^{-13}\ AU, & \Delta e_{\max} = 10^{-13}, & \Delta i_{\max} = 10^{-13}\ deg, \\ \Delta\Omega_{\max} = 10^{-13}\ deg, & \Delta\omega_{\max} = 10^{-11}\ deg, & \Delta M_{0\max} = 10^{-8}\ deg. \end{array} \tag{1}$$

В качестве допустимых отличий ослабленной верификации использовались величины:

$$\begin{array}{lll} \Delta a_{\max} = 10^{-8}\ AU, & \Delta e_{\max} = 10^{-8}, & \Delta i_{\max} = 10^{-5}\ deg, \\ \Delta\Omega_{\max} = 10^{-5}\ deg, & \Delta\omega_{\max} = 10^{-5}\ deg, & \Delta M_{0\max} = 10^{-5}\ deg. \end{array} \tag{2}$$

2 Проверка активных участков

Основная проблема при проверке была связана с выполнением ограничения на величину тяги на траектории и точностью выполнения соответствующей дифференциальной связи.

Для активных участков использовалась следующую модель аппроксимации вектора тяги между представленными в таблице моментами времени:

$$\begin{gathered} \dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{z} = v_z, \quad \dot{m} = -T/c, \\ \dot{v}_x = -\frac{\mu_S x}{r^3} + \frac{T}{m}e_x, \quad \dot{v}_y = -\frac{\mu_S y}{r^3} + \frac{T}{m}e_y, \quad \dot{v}_z = -\frac{\mu_S z}{r^3} + \frac{T}{m}e_z, \\ \dot{e}_x = \omega_y e_z - \omega_z e_y, \quad \dot{e}_y = \omega_z e_x - \omega_x e_z, \quad \dot{e}_z = \omega_x e_y - \omega_y e_x, \end{gathered} \tag{3}$$

$$\dot{T} = Q,$$

где x, y, z — координаты КА, v_x, v_y, v_z — компоненты скорости КА, m — масса КА, T — величина реактивной тяги, e_x, e_y, e_z — компоненты единичного вектор направления тяги, μ_S — гравитационный параметр Солнца, $c = I_{sp} g_E$ — скорость истечения, ω_x, ω_y, ω_z, Q — константы интерполяции. Предполагается, что выполняются условия:

$$T(t_1) \le T_{\max}, \quad T(t_2) \le T_{\max}, \quad |\vec{e}| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2} = 1.$$

Особо отметим, что в рассматриваемом случае величина реактивной тяги T и компоненты единичного вектора направления тяги e_x, e_y, e_z считаются фазовыми переменными, а не управлениями.

Для каждой последовательной пары моментов, представленных в таблице результатов проводилось вычисление значений $e_x(t_1)$, $e_y(t_1)$, $e_z(t_1)$, $T(t_1)$ и параметров ω_x, ω_y, ω_z, Q, численное интегрирование задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (3) и сравнение полученных значений с представленными в таблице.

Итак пусть имеется две строки результатов:
t_1, $x(t_1)$, $y(t_1)$, $z(t_1)$, $v_x(t_1)$, $v_y(t_1)$, $v_z(t_1)$, $m(t_1)$, $T_x(t_1)$, $T_y(t_1)$, $T_z(t_1)$
t_2, $x(t_2)$, $y(t_2)$, $z(t_2)$, $v_x(t_2)$, $v_y(t_2)$, $v_z(t_2)$, $m(t_2)$, $T_x(t_2)$, $T_y(t_2)$, $T_z(t_2)$

Значения t_1, $x(t_1)$, $y(t_1)$, $z(t_1)$, $v_x(t_1)$, $v_y(t_1)$, $v_z(t_1)$, $m(t_1)$ определяют начальный момент времени и первые 7 искомых начальных значений для решения задачи Коши. Начальное значение $T(t_1)$ определялось по формуле

$$T(t_1) = \sqrt{T_x^2(t_1) + T_y^2(t_1) + T_z^2(t_1)}, \tag{4}$$

значение константы Q определялось соотношением

$$Q = (T(t_2) - T(t_1))/(t_2 - t_1), \tag{5}$$

где

$$T(t_2) = \sqrt{T_x^2(t_2) + T_y^2(t_2) + T_z^2(t_2)}. \tag{6}$$

Начальные значения $e_x(t_1)$, $e_y(t_1)$, $e_z(t_1)$ определялись соотношениями:

$$e_x(t_1) = T_x(t_1)/T(t_1), \quad e_y(t_1) = T_y(t_1)/T(t_1), \quad e_z(t_1) = T_z(t_1)/T(t_1). \tag{7}$$

Заметим, что из приведенных формул для случая участка максимальной тяги следует $T(t_1) = T(t_2) = T_{\max}$, $Q = 0$.

Для определения констант ω_x, ω_y, ω_z использовались формулы:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\omega}_x = e_y(t_1)e_z(t_2) - e_z(t_1)e_y(t_2),\\
&\tilde{\omega}_y = e_z(t_1)e_x(t_2) - e_x(t_1)e_z(t_2),\\
&\tilde{\omega}_z = e_x(t_1)e_y(t_2) - e_y(t_1)e_x(t_2),\\
&\sin\alpha = \sqrt{\tilde{\omega}_x^2 + \tilde{\omega}_y^2 + \tilde{\omega}_z^2},\\
&\cos\alpha = e_x(t_1)e_x(t_2) + e_y(t_1)e_y(t_2) + e_z(t_1)e_z(t_2),
\end{aligned}$$

$$\omega_x = \frac{\tilde{\omega}_x}{\sin\alpha}\frac{\alpha}{(t_2 - t_1)}, \quad \omega_y = \frac{\tilde{\omega}_y}{\sin\alpha}\frac{\alpha}{(t_2 - t_1)}, \quad \omega_z = \frac{\tilde{\omega}_z}{\sin\alpha}\frac{\alpha}{(t_2 - t_1)}. \tag{8}$$

Такой выбор $\vec{\omega}$ соответствует равномерному переходу вектора $\vec{e}$ по кратчайшей геодезической единичной сферы из точки $\vec{e}(t_1)$ в точку $\vec{e}(t_2)$[1].

Формулы (7)–(8) работоспособны, если тяга отделена от нуля и $\alpha \neq 0$. При $\alpha = 0$ производилось доопределение по непрерывности:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0. \tag{9}$$

Решение задачи Коши от t_1 до t_2 производилось методом Дормана–Принса 8(7) с ограничением относительной погрешности на шаге 10^{-12} [1]. Причины выбора этого метода связаны, во-первых, со сравнением нескольких методов численного решения на астродинамических задачах, проведенным в монографии [1], и, во-вторых, с личным опытом (ничего более подходящего на данный момент нам не известно).

Вычисленные в результате решения задачи Коши от $t = t_1$ до $t = t_2$ значения переменных $\tilde{x}(t_2)$, $\tilde{y}(t_2)$, $\tilde{z}(t_2)$, $\tilde{v}_x(t_2)$, $\tilde{v}_y(t_2)$, $\tilde{v}_z(t_2)$, $\tilde{m}(t_2)$ сравнивались с авторскими значениями $x(t_2)$, $y(t_2)$, $z(t_2)$, $v_x(t_2)$, $v_y(t_2)$, $v_z(t_2)$, $m(t_2)$ и вычислялись погрешности

$$\Delta R = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \quad \Delta V = \sqrt{\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2 + \Delta v_z^2}, \quad \Delta m = |\tilde{m}(t_2) - m(t_2)|,$$

где

$$\begin{array}{lll} \Delta x = \tilde{x}(t_2) - x(t_2), & \Delta y = \tilde{y}(t_2) - y(t_2), & \Delta z = \tilde{z}(t_2) - z(t_2), \\ \Delta v_x = \tilde{v}_x(t_2) - v_x(t_2), & \Delta v_y = \tilde{v}_y(t_2) - v_y(t_2), & \Delta v_z = \tilde{v}_z(t_2) - v_z(t_2). \end{array}$$

Траектория считалась верифицированной, если для всех шагов на активных участках траектории $\Delta R \leq \Delta R_{\max}$, $\Delta V \leq \Delta V_{\max}$, $\Delta m \leq \Delta m_{\max}$.

Для нормальной верификации участка максимальной тяги при среднем шаге 1 день использовались величины (это важно с точки зрения проверки условий ограничения на величину тяги):

$$\Delta R_{\max} = 10^{-9}\ AU, \quad \Delta V_{\max} = 10^{-9}\ AU/Day, \quad \Delta m_{\max} = 10^{-11}\ kg, \tag{10}$$

а для участка промежуточной (не максимальной) тяги — величины:

$$\Delta R_{\max} \leq 10^{-8}\ AU, \quad \Delta V_{\max} \leq 2 \cdot 10^{-8}\ AU/Day, \quad \Delta m_{\max} \leq 1\ g. \tag{11}$$

Для ослабленной верификации величина шага по времени уменьшалась, а ограничения немного увеличивались.

Кроме того вычисленные в результате решения задачи Коши величины $\tilde{e}_x(t_2)$, $\tilde{e}_y(t_2)$, $\tilde{e}_z(t_2)$, $\tilde{P}(t_2)$ сравнивались с исходными величинами $e_x(t_2)$, $e_y(t_2)$, $e_z(t_2)$, $P(t_2)$. Если их отличие на каком–либо из участков превышало 10^{-14}, это свидетельствовало о плохой аппроксимации и необходимости ее уточнения.

3 Предварительное тестирование

Выбор величин $\Delta a_{\max}$, $\Delta e_{\max}$, $\Delta i_{\max}$, $\Delta\Omega_{\max}$, $\Delta\omega_{\max}$, $\Delta M_{0\,\max}$ для верификации пассивных участков и $\Delta R_{\max}$, $\Delta V_{\max}$, $\Delta m_{\max}$ для верификации активных участков был сделан эмпирически на основе анализа решений нескольких задач Коши. Сначала проводился анализ траекторий, поданных нашей командой в качестве решений на предыдущих GTOC. Кроме этих “эталонных” траекторий использовались траектории со специально сгенерированными ошибками.

[1]Это можно доказать.

3.1 Тестирование пассивных участков

Тестирование пассивных участков (на примере экстремалей Понтрягина, поданных нашей командой в качестве решений GTOC2, GTOC3) показало, что максимальное различие параметров по их совокупности достигает значений:

$$\begin{array}{lll} \max_t \Delta a = 2 \cdot 10^{-15}\ AU, & \max_t \Delta e = 6 \cdot 10^{-16}, & \max_t \Delta i = 2 \cdot 10^{-15}\ deg, \\ \max_t \Delta \Omega = 5 \cdot 10^{-14}\ deg, & \max_t \Delta \omega = 9.1 \cdot 10^{-13}\ deg, & \max_t \Delta M_0 = 2 \cdot 10^{-10}\ deg. \end{array}$$

Потому, удовлетворение более слабых ограничений (1) нам показалось не сложным. Впрочем, дальнейшее ослабление точности, приводящее к различию положений в начале и конце на несколько километров тоже кажется вполне приемлимым. Забегая вперед, отметим, что тестирование пассивных участков непосильным барьером ни для одной из представивших решения команд не стало.

3.2 Тестирование участков максимальной тяги

Тестирование участков максимальной тяги также проводилось на примере экстремалей Понтрягина, поданных нашей командой в качестве решений GTOC2, GTOC3. По совокупности таких участков максимальные значения ошибок составили:

$$\max_t \Delta R < 2 \cdot 10^{-10}\ AU, \quad \max_t \Delta V < 2 \cdot 10^{-10}\ AU/day, \quad \max_t \Delta m < 4 \cdot 10^{-12}\ kg.$$

Забегая вперед, отметим, что тестирование решения команды Team 29 Aerospace Corporation дало практически аналогичные результаты. Так как это решение было прислано одним из первых, нас это сильно обнадежило, и мы утвердились в мысли о разумности приведенных выше ограничений погрешности.

3.3 Тестирование участков промежуточной тяги

Предварительный анализ участков промежуточной тяги проводился на примере траектории, поданной нашей командой в качестве решения GTOC4. По совокупности участков промежуточной тяги:

$$\max_t \Delta R < 6 \cdot 10^{-9}\ AU, \quad \max_t \Delta V < 1.5 \cdot 10^{-8}\ AU/day, \quad \max_t \Delta m < 0.6\ g.$$

Характерно, что максимальные погрешности приходились на участки быстрого изменения величины тяги. Важно отметить, что в окрестности максимумов величины тяги, вплотную приближающихся к границе области допустимых управлений, ошибки были меньше.

Увеличение максимальных отклонений $\Delta R_{\max}$, $\Delta V_{\max}$, $\Delta m_{\max}$ для участков промежуточной тяги по сравнению с участками максимальной тяги по всей видимости связано именно с погрешностями приближения величины тяги. Улучшение метода приближения, возможно, могло бы это отличие уменьшить.

3.4 Тестирование активных участков со специально сгенерированными ошибками

Во–первых, генерировались траектории с ошибочной величиной тяги: величина тяги в уравнениях превышала заявленную на 2% и на 5%. Такое превышение очень существенно. По опыту GTOC4 можно отметить, что повышение тяги на 2% на построенных нами решениях увеличивало функционал (число пролетов у астероидов) на 1. Такая ошибка вполне возможна: расчеты траекторий ведутся в удобной для команд системе едениц и потом пересчитываются в требуемую.

Такая ошибка достаточно легко отлавливалась по величине Δm. Точнее, по заявленным величинам $m(t_1)$, $m(t_2)$ и временам t_1, t_2 из дифференциального уравнения

$$\dot{m} = -T/c$$

вычислялась величина тяги, которая могла бы реализовать такие затраты массы, если бы тяга была постоянной.

$$m(t_2) - m(t_1) = -T_{const}/c(t_2 - t_1), \quad T_{const} = \frac{m(t_1) - m(t_2)}{t_2 - t_1}c.$$

Если рассматривался участок максимальной тяги, то проблема мгновенно становилась очевидной. Для промежуточной тяги превышение используемой в уравнениях тяги над заявленной не фатально, если она не превышала заданного ограничения $P_{\max}$. В любом случае эта ситуация диагностировалась.

Во–вторых, генерировались траектории с ошибочной величиной тяги только в дифференциальных уравнениях для скорости. Величина тяги также превышала заявленную на 2% и на 5%. В этом случае в решении программа диагностировала появление заметных ошибок ΔR, ΔV на всех шагах интегрирования. Причем ошибки ΔV на порядок превышали ошибки ΔR (что, в общем-то, соверешенно естественно). Ошибки по массе укладывались в нормальные диапазоны.

Выяснилось, что для участков максимальной тяги в случае превышения заявленной тяги на 2% максимальная ошибка по скорости вплотную подбирается к величине $\max_t \Delta V \approx 1 \cdot 10^{-7}$ AU/day, а в случае превышения заявленной тяги на 5% — к величине $\max_t \Delta V \approx 2.5 \cdot 10^{-7}$ AU/day. Для участков промежуточной тяги в случае превышения заявленной тяги на 2% максимальная ошибка по скорости вплотную подбирается к величине $\max_t \Delta V \approx 2 \cdot 10^{-7}$ AU/day, а в случае превышения заявленной тяги на 5% — к величине $\max_t \Delta V \approx 5 \cdot 10^{-7}$ AU/day.

Собственно говоря эти тесты и привели к выбору величин ограничений (10), (11).

Отметим еще одно важное свойство этих погрешностей: при уменьшении шага представления данных они уменьшались линейно.

4 Тестирование

Практически сразу выяснилось, что к проверке мы не готовы. Нет, у нас были готовые тестирующие программы, были заготовленные ограничения погрешностей, однако все это оказалось бесполезным, если авторами применялся метод с невысоким порядком аппроксимации и/или использовании невысоких требований к погрешности.

4.1 Пример

Одной из важных причин, приводящих к отказу автоматизированных средств проверки приводило использование кусочно–непрерывного управления без выделения точек разрыва.

В качестве примера рассмотрим набор данных одного из решений.

```
# t (MJD)  Thrust_x (N)    Thrust_y (N)    Thrust_z (N)
  60090.0 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60091.0 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60092.0 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60093.0 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60094.0 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60095.0 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60096.0  0.89636482E-03 -0.92208983E-03  0.10697305E+00
  60097.0  0.89636482E-03 -0.92208983E-03  0.10697305E+00
  60098.0  0.89636482E-03 -0.92208983E-03  0.10697305E+00
  60099.0  0.89636482E-03 -0.92208983E-03  0.10697305E+00
  60100.0  0.89636482E-03 -0.92208983E-03  0.10697305E+00
```

В представленном выше решении пропущены не важные для нашего анализа значения координат, скоростей и массы. Видно, что между $t = 60095.0$ и 60096.0 управление меняется очень сильно. Это может свидетельствовать о том, что на данном участке у итоговой траектории присутствует точка переключения управления. В такой точке переключения функции координат, скоростей и массы непрерывны (левые и правые пределы существуют и совпадают), а левые и правые пределы компонент тяги существуют и различны.

Приведенное ниже “уточненное” решение укрепляет уверенность в том, что на данном участке действительно имеется точка переключения (разрыва) управления.

```
# t (MJD)  Thrust_x (N)    Thrust_y (N)    Thrust_z (N)
  60094.0 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60094.1 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60094.2 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60094.3 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60094.4 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60094.5 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60094.6 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60094.7 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60094.8 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60094.9 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60095.0 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60095.1 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60095.2 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60095.3 -0.26094494E-02  0.27197042E-02 -0.12774956E+00
  60095.4  0.89636482E-03 -0.92208983E-03  0.10697305E+00
  60095.5  0.89636482E-03 -0.92208983E-03  0.10697305E+00
```

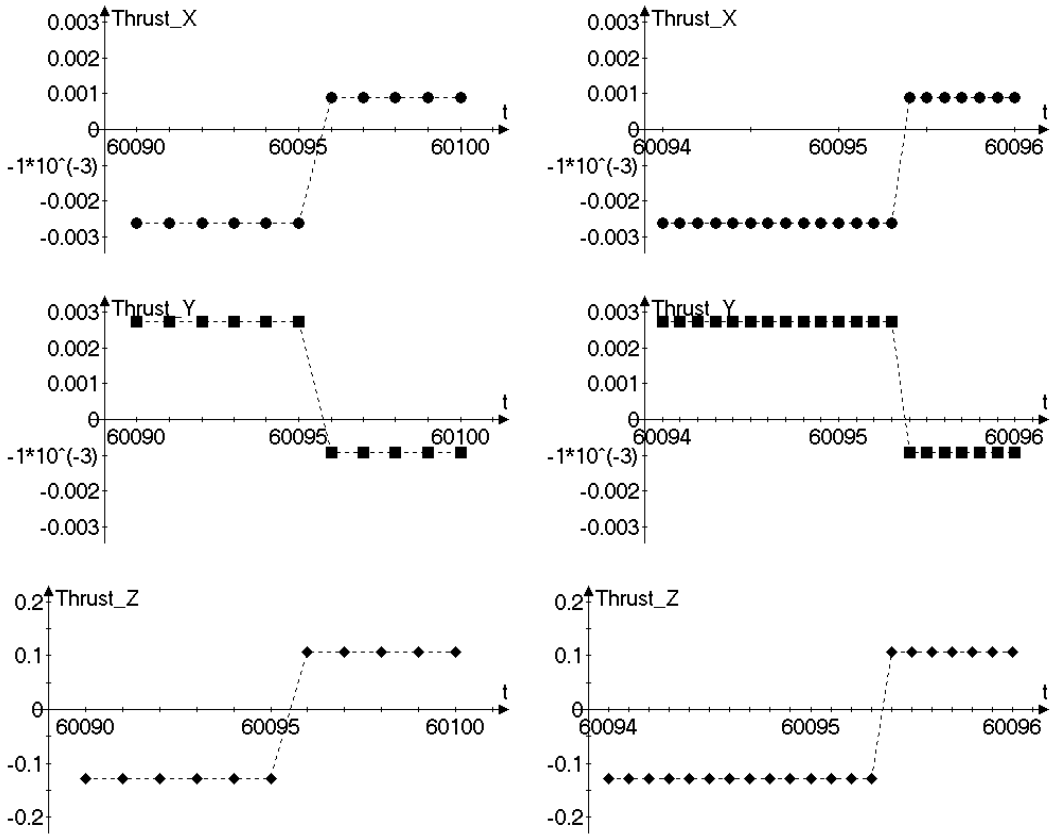

Рис. 1: Зависимости компонент тяги от времени для приведенных примеров

```
60095.6  0.89636482E-03 -0.92208983E-03  0.10697305E+00
60095.7  0.89636482E-03 -0.92208983E-03  0.10697305E+00
60095.8  0.89636482E-03 -0.92208983E-03  0.10697305E+00
60095.9  0.89636482E-03 -0.92208983E-03  0.10697305E+00
60096.0  0.89636482E-03 -0.92208983E-03  0.10697305E+00
```

На рис. 1 для наглядности представлены приведенные выше зависимости компонент вектора тяги от времени.

Попытка проинтегрировать по сути функцию скачка к успеху (малой погрешности) не приводит.

Выделение точки переключения, как это приводилось в шаблоне файла решения на примере стыковки активного и пассивного участка (приведение двух строчек с одинаковым временем, одинаковыми значениями координат, скоростей и массы КА и различающимися управлениями, разделенных одной или несколькими строчками комментария) полность решило бы проблему автоматизированной проверки данного участка. Следует подчеркнуть, что простая вставка строчки комментария проблему автоматизированной проверки не решает, так как участок времени ненулевой длины не верифицируется.

4.2 Окончание тестирования

Две команды представило траектории, не проходящие автоматическое тестирование, не уточняемые авторами для прохождения автоматического тестирования, но в то же время достаточно точные, чтобы относиться к ним серьезно.

Эти две траектории проверялись следующим образом.

По заданным начальному положению КА (отлету от Земли или от астероида в известный момент времени с известной скоростью) и конечному положению КА (подлету к астероиду в известный момент времени с известной скоростью) решалась задача минимизации затрат массы при заданном времени перелета. Решение осуществлялось либо на основе принципа максимума Понтрягина, либо на основе упрощенного псевдо–оптимального подхода. Если на построенном нами решении затраты массы не превосходили заявленного авторами (для экстремалей Понтрягина) или превосходили не значительно (в пределах 0.5 kg для псевдо–оптимального подхода), такой участок засчитывался.

Единственный напряженный участок, на котором решение задачи для заявленного ограничения тяги построить не удавалось, а удавалось только при превышении ограничения тяги на 0.0075% также решено было засчитать.

Такой подход изначально применять очень не хотелось. Конечно, имеющийся у нас опыт позволяет достаточно эффективно решать оптимизационные задачи. Но на настоящий момент для нас решение задач оптимального управления все таки не является полностью автоматизированным процессом, зачастую требует значительных усилий. Построение нами соответствующих траекторий действительно нас убедило, что предложенные авторами траектории существуют. В то же время, если бы нам траекторию на каком–либо из участков построить не удалось, то это не могло бы служить доказательством отсутствия предложенной авторами траектории.

В любом случае, за неимением других бесспорных идей, такая проверка была проведена, продлила время проверки на неделю и дала положительные результаты.

5 Не использованные возможности

Заметим, что выбор вектора $\vec{\omega}$ не перпендикулярным вектору $\vec{e}$ также приводит к движению $\vec{e}$ по единичной сфере. Это равномерное движение по окружности, плоскость которой перпендикулярна вектору $\vec{\omega}$. Или, другими словами, вектор $\vec{\omega}$ является нормалью к плоскости; угол тангажа относительно этой плоскости постоянен, а угол рысканья меняется линейно.

Сделанное замечание позволяет попробовать улучшить выбор направления вектора тяги за счет учета направлений вектора тяги в предыдущие и последующие моменты времени. Например, за счет учета одного предыдущего и одного последующего моментов времени можно попробовать выбрать вектор $\vec{\omega}$, дающий лучшее приближение закона изменения вектора направления тяги (эта идея на стадии разработки — конкретные вычислительные эксперименты пока не проведены).

Учитывая известные значения величины тяги в предыдущий и последующий моменты времени можно получить кубическую интерполяцию величины тяги. Известно, что на среднем отрезке такая интерполяция для гладких функций дает лучшие результаты

по сравнению с линейной. Единственная не решенная проблема — учет возможности нарушения ограничения величины тяги, впрочем, она не кажется неразрешимой.

Наконец, на траекториях со специально сгенерированными ошибками имелась характерная особенность: угол между вектором ошибки по скорости и средним вектором тяги на участке был мал. Эту особенность можно было бы также попытаться использовать при анализе.

Список литературы

[1] Hairer, E., Norsett, S.P. and Wanner, G., Solving Ordinary Differential Equations: I. Nonstiff Problems. Springer, 1987.