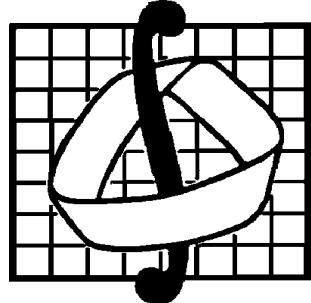


**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**



Механико-математический факультет

**К. Г. Григорьев,
И. С. Григорьев, М. П. Заплетин**

**Практикум по численным методам в
задачах оптимального управления.
Дополнение I.**

Москва 2007 год

[К. Г. Григорьев], И. С. Григорьев, М. П. Заплетин, Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. Дополнение I. — М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико–математическом факультете МГУ, 2007. — 184 с.

Данное пособие призвано помочь при выполнении заданий Практикума по численным методам решения задач оптимального управления. Задачи оптимального управления в Практикуме решаются на основе принципа максимума Л.С. Понtryгина. Краевые задачи принципа максимума решаются методом стрельбы. Пособие состоит из двух глав. Первая глава состоит из теоретической части, включающей в себя постановку задачи оптимального управления и формулировку основной теоремы, и аналитического решения серии характерных примеров. Вторая глава содержит описание метода стрельбы и примеры применения метода стрельбы к серии задач, аналитически решенных в первой главе. Подробно обсуждается понятие вычислительной схемы метода стрельбы, показывается различие трудности решения задач при выборе разных вычислительных схем.

Для студентов, аспирантов и широкого круга специалистов, занимающихся численным решением задач оптимального управления.

Рецензенты:
д.ф.-м.н., проф. В. М. Тихомиров,
д.ф.-м.н., проф. Е. В. Чижонков.

©Механико-математический факультет МГУ, 2007 г.
©[К. Г. Григорьев], И. С. Григорьев, М. П. Заплетин, 2007 г.

Оглавление

Введение	6
Глава 1. Краткое введение в теорию	9
1.1 Постановка задачи	9
1.2 Необходимые условия первого порядка сильно- го локального минимума функционала (условия принципа максимума) в задаче оптимального управления (1.0)–(1.4)	16
ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА	16
Комментарий к условиям а)–е) и разделу 1.2 в целом	18
Правило решения задач оптимального управления	28
1.3 Примеры аналитического решения на основе принципа максимума характерных задач класси- ческого вариационного исчисления, задач Лаг- ранжа и задач оптимального управления	30
1.3.1 Задачи классического вариационного ис- числения	30
Пример 1	30
Пример 2	34
Пример 3	38
Пример 4	42
Пример 5	48
Пример 6	52
Пример 7	57
Пример 8	62
Пример 9	65
1.3.2 Задачи Лагранжа	69
Пример 1	69
Пример 2	73
Пример 3	77
Пример 4	81
Пример 5	84
Пример 6	88
1.3.3 Задачи оптимального управления	92
Пример 1	92
Пример 2	97

Пример 3	100
Пример 4	106
Пример 5	109
Пример 6	114
Комментарий к разделу 1.3	119
Дополнение к главе 1 (В. М. Тихомиров)	120
Глава 2. Метод стрельбы численного решения краевых задач принципа максимума в за- дачах оптимального управления	126
2.1 Алгоритм численного решения методом стрельбы краевой задачи принципа максимума для задачи (2.0)–(2.3)	136
2.2 Примеры применения метода стрельбы при реше- нии на основе принципа максимума задач п. 1.3	138
2.2.1 Задачи классического вариационного ис- числения	138
Пример 1	138
Пример 2	139
Пример 3	140
Пример 4	141
Пример 5	142
Пример 6	144
Пример 7	146
Пример 8	148
Пример 9	149
2.2.2 Задачи Лагранжа	151
Пример 1	151
Пример 2	152
Пример 3	154
Пример 4	156
Пример 5	159
Пример 6	162
2.2.3 Задачи оптимального управления	163
Пример 1	163
Пример 2	165
Пример 3	167
Пример 4	170
Пример 5	171

Пример 6	174
Задачи	177
Литература	182

Введение

Рассматриваемые в данном учебном пособии (Практикуме) *задачи оптимального управления* представляют собой задачи определения глобального (абсолютного) или локального (относительного) минимума (максимума) функционала на множестве решений управляемой динамической системы, удовлетворяющих некоторой совокупности условий. В Практикуме такими условиями являются терминальные (краевые, или граничные), изопериметрические и терминально-изопериметрические условия типа равенств и неравенств.

Задачи оптимального управления динамическими системами возникают в самых различных областях науки и практики и среди задач оптимизации занимают по объему и важности значительное место. Эти задачи, как правило, сложные, большая часть их не поддается аналитическому решению и требует для своего решения применения численных методов с использованием ЭВМ.

Численные методы решения задач оптимизации, в том числе задач оптимального управления динамическими системами, принято условно разделять на “*прямые*” и “*непрямые*” [1].

“*Прямыми*” методами решения задач оптимизации называются методы, не использующие при решении исходной экстремальной задачи необходимые и/или достаточные условия экстремума. К ним относятся, в первую очередь, *градиентные методы*, например *метод наискорейшего спуска*.

“*Непрямыми*” методами решения задач оптимизации называются методы, основанные на использовании необходимых и/или достаточных условий экстремума.

В Практикуме [1] из “непрямых” методов рассмотрен метод численного решения задач оптимального управления, использующий необходимые условия первого порядка сильного локального экстремума функционала — *принцип максимума Л.С. Понtryгина* [2, 3, 17]. Метод применен к задачам оптимального управления с терминальными, изопериметрическими

и терминально–изопериметрическими ограничениями типа *неравенств*. Поскольку *принцип максимума* сводит решение любой задачи оптимального управления динамической системой к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (краевой задачи принципа максимума) [1, 2, 3, 17, 8], то основной проблемой решения задачи оптимального управления на основе принципа максимума является проблема решения этой краевой задачи. В Практикуме [1] рассмотрены два метода численного решения краевой задачи принципа максимума — *метод стрельбы (пристрелки)* и *итерационный метод И.А. Крылова–Ф.Л. Черноусько*. Из “прямых” методов численного решения задач оптимального управления в Практикуме [1] рассмотрен *метод градиентного спуска*.

Опыт использования в учебном процессе Практикума [1] показал, что часть его разделов полезно несколько дополнить. Некоторые дополнения, относящиеся к основанному на принципе максимума “непрямому” методу решения задач оптимального управления, содержатся в предлагаемом Дополнении I. Рассматривается случай, в котором краевая задача принципа максимума решается методом стрельбы. Следует напомнить, что восходящий к Ньютону *метод стрельбы решения краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений является в настоящее время одним из основных методов их численного решения*. Естественно, что при численном решении краевых задач принципа максимума этому методу уделяется особое внимание. В Дополнении I расширяется область решаемых в [1] на основе принципа максимума задач оптимального управления за счет включения в нее задач с терминальными, изопериметрическими и терминально–изопериметрическими ограничениями типа *неравенств, начальное и конечное времена* в которых могут быть заранее как фиксированными, так и не фиксированными. При этом вносятся дополнения в теоретические основы численного решения рассматриваемых задач, увеличивается число и расширяется круг решенных аналитически типичных задач оптимального управления (в том числе, задач классического вариационного исчисления и задач Лагранжа), развивается и совершенствуется методика численного решения краевых задач принципа максимума методом стрельбы. Зна-

читательное внимание уделяется понятию вычислительной схемы метода стрельбы. Проводится сравнение сложности решения задач при использовании различных вычислительных схем метода стрельбы, в том числе, скорости сходимости и различию областей хороших начальных приближений.

Глава 1.

Краткое введение в теорию

В этом параграфе рассматриваются теоретические основы решения задач оптимального управления динамическими системами с терминальными, изопериметрическими и терминально–изопериметрическими ограничениями типа равенств и неравенств: дается постановка задачи, формулируется Основная теорема (принцип максимума), подробно комментируются составляющие принцип максимума условия и формулируется Правило (алгоритм) решения задач на основе принципа максимума.

1.1. Постановка задачи

Задачей оптимального управления динамической системой (в понтрягинской форме) с терминально-изопериметрическими, и в частности, терминальными и изопериметрическими ограничениями (условиями) типа равенств и неравенств будем называть задачу [2, 3]:

$$B_0(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \rightarrow \inf; \quad (1.0)$$

$$\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 \subseteq [t_0, t_1] \subseteq \Delta; \quad (1.1)$$

$$u(t) \in U(t) \subseteq \mathbb{R}^r \quad \forall t \in \Delta; \quad (1.2)$$

$$B_i(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = 0, \quad 1 \leq i \leq m; \quad (1.3)$$

$$B_{m+j}(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \leq 0, \quad 1 \leq j \leq k; \quad (1.4)$$

где

$$B_\nu(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \equiv \int_{t_0}^{t_1} f_\nu(t, x(t), u(t)) dt + \psi_\nu(t_0, x(t_0); t_1, x(t_1)),$$

$$0 \leq \nu \leq m + k.$$

Функционалы B_ν , $0 \leq \nu \leq m + k$, содержащие как *интегральную*, так и *терминальную* части, называются *функционалами*

лами Больца. Частными случаями функционала Больца являются функционалы Лагранжа и Майера. Функционал Лагранжа содержит только интегральную часть:

$$I_\nu(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \equiv \int_{t_0}^{t_1} f_\nu(t, x(t), u(t)) dt,$$

а функционал Майера — только терминальную:

$$\mathcal{T}_\nu(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \equiv \psi_\nu(t_0, x(t_0); t_1, x(t_1)).$$

Условия (1.3) называются *терминально-изопериметрическими ограничениями типа равенств*, условия (1.4) — *терминально-изопериметрическими ограничениями типа неравенств*. Если среди условий (1.3) (или (1.4)) есть условия, у которых отсутствуют интегральные части, то есть условия имеют вид: $\psi_\nu(t_0, x(t_0); t_1, x(t_1)) = 0$ (или $\psi_\nu(t_0, x(t_0); t_1, x(t_1)) \leq 0$), то они называются *терминальными* (или *краевыми*, или *граничными*) условиями (ограничениями) типа равенств (или неравенств). Если среди условий (1.3) (или (1.4)) есть условия, у которых терминальные части — константы, то есть эти условия имеют вид: $\int_{t_0}^{t_1} f_\nu(t, x(t), u(t)) dt = \text{const} \equiv c_\nu$ (или $\int_{t_0}^{t_1} f_\nu(t, x(t), u(t)) dt \leq c_\nu$), или могут быть сведены к этому виду, то они называются *изопериметрическими* условиями (ограничениями) типа равенств (или неравенств).

В (1.1), (1.2) Δ — заданный *конечный* отрезок, t — независимая переменная, интерпретируемая как время, $-\infty < t_0 < t_1 < \infty$. Обозначения $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ в (1.0)–(1.4) подчеркивают, что x , u — отображения (элементы функциональных пространств — функции в целом, рассматриваемые во всей области своего определения (здесь на отрезке Δ)); обозначения $x(t)$, $u(t)$ соответствуют значениям функций x , u в момент времени t .

В (1.0)–(1.4) $x(\cdot) \in KC^1(\Delta, \mathbb{R}^n)$, $u(\cdot) \in KC(\Delta, \mathbb{R}^r)$, где $KC^1(\Delta, \mathbb{R}^n)$ — пространство заданных на отрезке Δ *кусочно-гладких* n -мерных вектор-функций с нормой:

$$\|x(\cdot)\|_{KC^1(\Delta, \mathbb{R}^n)} \equiv \|x(\cdot)\|_{C(\Delta, \mathbb{R}^n)} \equiv \max_{1 \leq i \leq n} (\max_{t \in \Delta} |x_i(t)|),$$

$KC(\Delta, \mathbb{R}^r)$ — пространство заданных на отрезке Δ кусочно-непрерывных r -мерных вектор-функций с нормой:

$$\|u(\cdot)\|_{KC(\Delta, \mathbb{R}^r)} \equiv \max_{1 \leq i \leq r} (\sup_{t \in \Delta} |u_i(t)|).$$

Напомним, что кусочно-гладкой n -мерной вектор-функцией на отрезке Δ называется непрерывная вектор-функция $x(\cdot) : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, производная каждой составляющей которой имеет на отрезке Δ не более *конечного числа точек разрыва первого рода*; кусочно-непрерывной r -мерной вектор-функцией на отрезке Δ называется вектор-функция $u(\cdot) : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^r$, каждая составляющая которой имеет на отрезке Δ не более *конечного числа точек разрыва первого рода*. (Точка разрыва функции будет *точкой разрыва первого рода*, если пределы слева и справа в ней существуют, являются конечными и не совпадают).

В (1.1) посредством Δ_0 обозначено множество точек отрезка Δ , в которых вектор-функция $u(\cdot)$ непрерывна. В (1.2) множество $U(t) \forall t \in \Delta$ — произвольное множество из \mathbb{R}^r (в частности, замкнутое). Входящие в B_ν функции f_ν , ψ_ν и входящая в (1.1) вектор-функция φ представляют собой отображения:

$$\begin{aligned} f_\nu &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}, \quad 0 \leq \nu \leq m+k, \\ &\quad (f_\nu — функция (функционал) 1+n+r переменных); \\ \psi_\nu &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad 0 \leq \nu \leq m+k, \\ &\quad (\psi_\nu — функция (функционал) 2n+2 переменных); \\ \varphi &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n \\ &\quad (\varphi — n-мерная вектор-функция столбец \\ &\quad 1+n+r переменных). \end{aligned}$$

Функции, составляющие вектор-функцию столбец $x(\cdot)$, называются *фазовыми переменными*, а функции, составляющие вектор-функцию столбец $u(\cdot)$, — *управляющими функциями*, или *управлениями*. Уравнение (1.1), называемое *дифференциальной связью*, описывает рассматриваемое управляемое движение в фазовом пространстве и выполняется во всех точках множества Δ_0 , где управление $u(\cdot)$ непрерывно.

Задача (1.0)–(1.4) представляет собой задачу минимизации функционала $B_0(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ (1.0) на множестве решений управляемой динамической системы (1.1) с ограничениями (1.2) на управление и терминально-изопериметрическими (в

частности, терминальными и/или изопериметрическими) ограничениями (1.3), (1.4). Отметим, что задача максимизации функционала: $B_0(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \rightarrow \sup$, сводится к рассматриваемой задаче заменой знака перед функционалом. Искусствами в задаче (1.0)–(1.4) являются аргументы функционала $B_0(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ — вектор-функции $x(\cdot)$, $u(\cdot)$, начальный t_0 и конечный t_1 моменты времени. Предполагается, что решение задачи (1.0)–(1.4) существует.

Задачу (1.0)–(1.4) с функционалами Больца можно свести к задаче с функционалами Майера, сделав замену переменных:

$$\int_{t_0}^t f_i(t, x(t), u(t)) dt \equiv x_{n+1+i}(t), \quad 0 \leq i \leq m+k.$$

С учетом следующих из этой замены переменных очевидных равенств: $x_{n+1+i}(t_0) = 0$, $x_{n+1+i}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), u(t)) dt$, задача (1.0)–(1.4) с функционалами Больца перейдет в задачу с функционалами Майера:

$$\mathcal{T}_0(\tilde{x}(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \rightarrow \inf; \quad (1.0')$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) - \tilde{\varphi}(t, \tilde{x}(t), u(t)) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0; \quad (1.1')$$

$$u(t) \in U(t) \subseteq \mathbb{R}^r \quad \forall t \in \Delta; \quad (1.2')$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_i(\tilde{x}(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) &= 0, \quad 1 \leq i \leq m; \\ x_{n+1+i}(t_0) &= 0, \quad 0 \leq i \leq m+k; \end{aligned} \quad (1.3')$$

$$\mathcal{T}_{m+j}(\tilde{x}(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \leq 0, \quad 1 \leq j \leq k; \quad (1.4')$$

где

$$\mathcal{T}_\nu(\tilde{x}(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \equiv x_{n+1+\nu}(t_1) + \psi_\nu(t_0, x(t_0); t_1, x(t_1)),$$

$$0 \leq \nu \leq m+k;$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\cdot) &\equiv (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot); 0, 0, \dots, 0)^T + \\ &\quad +(0, \dots, 0; x_{n+1}(\cdot), \dots, x_{n+1+m+k}(\cdot))^T; \\ \tilde{\varphi} &\equiv (\varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_n(\cdot); 0, 0, \dots, 0)^T + \\ &\quad +(0, \dots, 0; f_0, f_1, \dots, f_{m+k})^T. \end{aligned}$$

Заметим, что при переходе от задачи (1.0)–(1.4) к задаче (1.0')–(1.4') вектор-функция управлений $u(\cdot)$ остается неизменной, а вектор-функция фазовых переменных увеличивает размерность на $m + k + 1$. Задачи оптимального управления (1.0)–(1.4) и (1.0')–(1.4') эквивалентны. (Под эквивалентностью понимается совпадение для этих задач краевых задач принципа максимума (см. ниже)). Далее задача оптимального управления рассматривается в виде задачи (1.0)–(1.4).

Четверка $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \equiv \xi$ называется *управляемым процессом* в задаче оптимального управления (1.0)–(1.4), если $x(\cdot) \in KC^1(\Delta, \mathbb{R}^n)$, $u(\cdot) \in KC(\Delta, \mathbb{R}^r)$, выполняются дифференциальная связь (1.1) и ограничение (1.2) типа включения. Управляемый процесс называется *допустимым*, если, кроме того, выполняются ограничения (1.3), (1.4).

Если множество допустимых управляемых процессов не пусто, то возникает задача выделения из этого множества *оптимального управляемого процесса*, доставляющего минимальное значение функционалу B_0 .

Допустимый управляемый процесс $\hat{\xi} \equiv (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ называется *локально оптимальным в сильном смысле управляемым процессом*, доставляющим функционалу $B_0(\xi)$ сильный локальный минимум (или *локально оптимальным*, или *оптимальным процессом*), если существует $\delta > 0$ такое, что для всякого допустимого управляемого процесса $\xi \equiv (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$, для которого

$$\begin{aligned} & \| (x(\cdot), (t_0, t_1)) - (\hat{x}(\cdot), (\hat{t}_0, \hat{t}_1)) \|_{C(\Delta, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^2} \equiv \\ & \equiv \max\left(\max_{1 \leq i \leq n} \left(\max_{t \in \Delta} |x_i(t) - \hat{x}_i(t)|\right), \sqrt{(t_0 - \hat{t}_0)^2 + (t_1 - \hat{t}_1)^2}\right) < \delta, \end{aligned}$$

выполняется условие $B_0(\hat{\xi}) \leq B_0(\xi)$. Обратим внимание, что в определении локальной оптимальности управляемого процесса ξ рассматриваются допустимые управляемые процессы ξ , близкие по фазовой переменной $x(\cdot)$ и временам t_0, t_1 , но не по управлению $u(\cdot)$.

Функцией Лагранжа задачи (1.0)–(1.4) называется функция

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p(\cdot), \lambda, \lambda_0) \equiv \int_{t_0}^{t_1} L dt + l.$$

Функция L называется *лагранжианом*:

$$\begin{aligned} L &\equiv L(t, x, \dot{x}, u, p, \lambda, \lambda_0) \equiv \\ &\equiv \sum_{i=0}^{m+k} \lambda_i f_i(t, x, u) + \langle p, \dot{x} - \varphi(t, x, u) \rangle \equiv \langle p, \dot{x} \rangle - H; \end{aligned}$$

функция H называется *функцией Понtryгина*:

$$H \equiv H(t, x, u, p, \lambda, \lambda_0) \equiv \langle p, \varphi(t, x, u) \rangle - \sum_{i=0}^{m+k} \lambda_i f_i(t, x, u);$$

функция l называется *терминантой*:

$$l \equiv l(t_0, x(t_0); t_1, x(t_1)) \equiv \sum_{i=0}^{m+k} \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0); t_1, x(t_1)).$$

Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, числовой вектор $\lambda \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+k})$ и вектор-функция $p(\cdot) \in KC^1(\Delta, \mathbb{R}^{n*})$ называются *множителями Лагранжа*. Арифметическое n -мерное пространство \mathbb{R}^{n*} , сопряженное с \mathbb{R}^n , представляет собой пространство n -мерных векторов строк. Поэтому $p(\cdot) \in \mathbb{R}^{n*}$ — n -мерная вектор-функция строки ($x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ — n -мерная вектор-функция столбец), и $\langle p, x \rangle \equiv \sum_{i=1}^n p_i x_i$ для любых $p \in \mathbb{R}^{n*}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

В дальнейшем будут использоваться обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(t) &\equiv \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)); \\ \hat{\varphi}_x(t) &\equiv \left. \frac{\partial \varphi(t, x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x = \hat{x}(t) \\ u = \hat{u}(t)}} ; \\ \hat{L}_x(t) &\equiv \left. \frac{\partial L(t, x, \dot{x}, u, p, \lambda, \lambda_0)}{\partial x} \right|_{\substack{x = \hat{x}(t) \\ \dots \\ \lambda_0 = \hat{\lambda}_0}} ; \\ \hat{L}_{\dot{x}}(t) &\equiv \left. \frac{\partial L(t, x, \dot{x}, u, p, \lambda, \lambda_0)}{\partial \dot{x}} \right|_{\substack{x = \hat{x}(t) \\ \dots \\ \lambda_0 = \hat{\lambda}_0}} ; \\ \hat{H}(t) &\equiv H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0); \\ \frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} &\equiv \left. \frac{\partial H(t, x, u, p, \lambda, \lambda_0)}{\partial x} \right|_{\substack{x = \hat{x}(t) \\ \dots \\ \lambda_0 = \hat{\lambda}_0}} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\mathcal{L}}}{dt_k} &\equiv \frac{d\mathcal{L}(x, u, t_0, t_1, p, \lambda, \lambda_0)}{dt_k} \Bigg|_{\substack{x = \hat{x}(t) \\ \dots \\ \lambda_0 = \hat{\lambda}_0}} , \quad k = 0, 1; \\
\frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} &\equiv \frac{\partial l(t_0, x(t_0); t_1, x(t_1))}{\partial x(t_k)} \Bigg|_{\substack{t_0 = \hat{t}_0 \\ \dots \\ x(t_1) = \hat{x}(\hat{t}_1)}} , \quad k = 0, 1; \\
\frac{\partial \hat{l}}{\partial t_k} &\equiv \frac{\partial l(t_0, x(t_0); t_1, x(t_1))}{\partial t_k} \Bigg|_{\substack{t_0 = \hat{t}_0 \\ \dots \\ x(t_1) = \hat{x}(\hat{t}_1)}} , \quad k = 0, 1; \\
\hat{f}(t) &\equiv f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \equiv \sum_{i=0}^{m+k} \hat{\lambda}_i f_i(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t));
\end{aligned}$$

и т.д.

1.2. Необходимые условия первого порядка сильного локального минимума функционала (условия принципа максимума) в задаче оптимального управления (1.0)–(1.4)

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА (принцип максимума)

Пусть $\hat{\xi} \equiv (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ — локально оптимальный в сильном смысле управляемый процесс в задаче оптимального управления (1.0)–(1.4), доставляющий функционалу $B_0(\xi)$ сильный локальный минимум, функции $f_i(t, x, u)$ ($0 \leq i \leq m+k$), $\varphi(t, x, u)$ и их частные производные по x непрерывны по совокупности входящих в них переменных (по t, x, u) в некоторой окрестности оптимальной траектории (на множестве)

$$V(t) \equiv \left\{ (t, x) \mid |x - \hat{x}(t)| < \varepsilon, \varepsilon > 0, t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1] \right\}$$

при $\forall u(t) \in U(t)$, $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ (или по-другому, непрерывны на декартовом произведении множеств $V(t) \times U(t)$, $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$), а функции $\psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$ ($0 \leq i \leq m+k$) непрерывно дифференцируемы в окрестности точек $(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0))$, $(\hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))$.

Тогда найдутся множители Лагранжа $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda} \equiv \{\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_{m+k}\}$, $\hat{p}(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n*})$, **НЕ Равные Одновременно Нулю**, или, иначе, удовлетворяющие условию НЕРОН (аббревиатура, соответствующая выделенным буквам), для которых выполняются условия а)–е). При этом условия а)–е) могут быть записаны либо в *лагранжевой форме* — с использованием функций \mathcal{L} , L , l , либо в *понтрягинской форме* — с использованием функций H , l :

- a) *условие стационарности по фазовой переменной x* — система уравнений Эйлера–Лагранжа (сопряженная система) —

– в лагранжевой форме:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0;$$

– в понтрягинской форме:

$$\dot{\widehat{p}}(t) = -\frac{\partial \widehat{H}(t)}{\partial x};$$

б) *условия трансверсальности* –

– в лагранжевой форме:

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(\widehat{t}_k) = (-1)^k \frac{\partial \widehat{l}}{\partial x(t_k)}, \quad k = 0, 1;$$

– в понтрягинской форме:

$$\widehat{p}(\widehat{t}_k) = (-1)^k \frac{\partial \widehat{l}}{\partial x(t_k)}, \quad k = 0, 1;$$

в) *условие оптимальности по $u(t)$* –

– в лагранжевой форме:

$$\widehat{u}(t) = \arg \min_{u(t) \in U(t)} L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), u(t), \widehat{p}(t), \widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}_0)$$

$$\forall t \in \Delta_0;$$

– в понтрягинской форме:

$$\widehat{u}(t) = \arg \max_{u(t) \in U(t)} H(t, \widehat{x}(t), u(t), \widehat{p}(t), \widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}_0)$$

$$\forall t \in \Delta_0;$$

подробное пояснение смысла обозначения

$$\arg \min_{u(t) \in U(t)} L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), u(t), \widehat{p}(t), \widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}_0)$$

и обозначения

$$\arg \max_{u(t) \in U(t)} H(t, \widehat{x}(t), u(t), \widehat{p}(t), \widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}_0)$$

см. ниже в разделе “Комментарий к условиям а)-е)...”
п. в);

г) *условия стационарности по t_k* —

— в лагранжевой форме:

$$\frac{d \hat{\mathcal{L}}}{dt_k} = 0, \quad k = 0, 1;$$

— в понтрягинской форме:

$$\hat{H}(\hat{t}_k) = (-1)^{k+1} \frac{\partial \hat{l}}{\partial t_k}, \quad k = 0, 1;$$

д) *условия дополняющей нежесткости* —

— в лагранжевой и понтрягинской формах вид этих условий одинаков:

$$\hat{\lambda}_{m+j} \cdot B_{m+j}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) = 0, \quad 1 \leq j \leq k;$$

е) *условия неотрицательности* —

— в лагранжевой и понтрягинской формах вид этих условий одинаков:

$$\hat{\lambda}_0 \geq 0, \quad \hat{\lambda}_{m+j} \geq 0, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Утверждение Основной теоремы о существовании множеств Лагранжа, удовлетворяющих совокупности условий а)–е) и условию НЕРОН, кратко называется *принципом Лагранжа* для задачи оптимального управления (1.0)–(1.4), или *принципом максимума Понтрягина* для этой задачи, и находится в полном соответствии с общим принципом Лагранжа [3].

Комментарий к условиям а)–е) и разделу 1.2 в целом

а) Переменные $p(t)$ называются *сопряженными переменными*, а система уравнений $\dot{\hat{p}}(t) = -\partial \hat{H}(t)/\partial x$ — *сопряженной системой*. В развернутом виде эта система принимает форму линейной по $\hat{p}(t)$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\hat{p}}(t) + \langle \hat{p}(t), \hat{\varphi}_x(t) \rangle = \hat{f}_x(t) \quad \forall t \in \Delta_0,$$

где

$$\hat{f}_x(t) \equiv f_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \sum_{i=0}^{m+k} \hat{\lambda}_i f_{ix}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)).$$

В рассматриваемых в Практикуме задачах оптимального управления множество U , которому принадлежит управление u , в отличие от подавляющего большинства работ, посвященных принципу максимума, может зависеть от t : $u(t) \in U(t)$ $\forall t \in \Delta$ (см. условие (1.1)), и это находит отражение в формулировке Основной теоремы п. 1.2. Подробнее об этом см. [4].

б) При фиксированном $x(t_k)$ отвечающем индексу k краевое условие можно в терминант l не включать, поскольку соответствующее ему условие трансверсальности в этом случае служит для определения множителя Лагранжа при $x(t_k)$, который при решении задачи определять необязательно.

в) Условие оптимальности по $u(t)$ в общем (неособом) случае позволяет найти оптимальное управление $\hat{u}(t) \forall t \in [t_0, t_1]$ — аргумент $u(t)$ функции $L(u(t))$ (или функции $H(u(t))$), при котором достигается *абсолютный* минимум функции $L(u(t))$ (или *абсолютный* максимум функции $H(u(t))$). Если же управление $\hat{u}(t)$ из условия оптимальности в) или совсем не определяется, или определяется неоднозначно, то нахождение $\hat{u}(t)$ в таком *особом* случае может потребовать выходящих за рамки принципа максимума дополнительных исследований. Соответствующее особому случаю управление $\hat{u}(t)$ называется *особым*.

В лагранжевой форме условию в) соответствует условие абсолютного минимума функции $L(u(t))$:

$$\begin{aligned} \underset{u(t) \in U(t)}{\text{absmin}} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) &= \\ &= L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \end{aligned}$$

$\forall t \in \Delta_0$,

или

$$L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \leq L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0)$$

$\forall u(t) \in U(t) \quad \forall t \in \Delta_0$;

в понтрягинской форме — условие абсолютного максимума

функции $H(u(t))$:

$$\underset{u(t) \in U(t)}{\text{absmax}} H(t, \hat{x}(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) = H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0)$$

$\forall t \in \Delta_0$,

или

$$H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \geq H(t, \hat{x}(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0)$$

$\forall u(t) \in U(t) \quad \forall t \in \Delta_0$.

Условия минимума L по u и максимума H по u эквивалентны, поскольку лагранжиан L и функция Понtryгина H связаны соотношением:

$$L(t, x, \dot{x}, u, p, \lambda, \lambda_0) = \langle p, \dot{x} \rangle - H(t, x, u, p, \lambda, \lambda_0),$$

в котором первое слагаемое в правой части от u не зависит, и потому L и H как функции аргумента u отличаются лишь знаком. В связи с этим

$$\hat{u}(t) = \arg \underset{u(t) \in U(t)}{\text{abs min}} L(u(t)) \equiv \arg \underset{u(t) \in U(t)}{\text{abs max}} H(u(t)) \quad \forall t \in \Delta_0,$$

где

$$\begin{aligned} L(u(t)) &\equiv L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \quad \forall t \in \Delta_0, \\ H(u(t)) &\equiv H(t, \hat{x}(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \quad \forall t \in \Delta_0. \end{aligned}$$

В качестве $L(u(t))$, $H(u(t))$ можно брать функции, содержащие только те слагаемые функций

$$L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0), \quad H(t, \hat{x}(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0),$$

которые зависят от $u(t)$. Формулы в условиях оптимальности в), определяющие $\hat{u}(t) \quad \forall t \in \Delta_0$, дают значения аргументов функций $L(u(t))$, $H(u(t))$, при которых достигается их *абсолютный* минимум, соответственно, максимум по $u(t)$, то есть

$$\begin{aligned} \arg \underset{u(t) \in U(t)}{\text{abs min}} L(u(t)) &= \\ &= \{\hat{u}(t) \in U(t) | L(u(t)) \geq L(\hat{u}(t)) \quad \forall u(t) \in U(t) \quad \forall t \in \Delta_0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg \operatorname{abs} \max_{u(t) \in U(t)} H(u(t)) = \\ = \{\hat{u}(t) \in U(t) | H(u(t)) \leq H(\hat{u}(t)) \quad \forall u(t) \in U(t) \quad \forall t \in \Delta_0\}. \end{aligned}$$

Условие оптимальности в) определяет $\hat{u}(t)$ как функцию других переменных. Так, например, из условия

$$\hat{u}(t) = \arg \operatorname{abs} \max_{u(t) \in U(t)} H(t, \hat{x}(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \quad \forall t \in \Delta_0$$

функция $\hat{u}(t)$ в общем случае определяется как функция переменных t , $\hat{x}(t)$, $\hat{p}(t)$, $\hat{\lambda}$, $\hat{\lambda}_0$: $\hat{u}(t) = u(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0)$.

Задача определения $\hat{u}(t)$ — это, вообще говоря, задача нелинейного программирования:

$$H(t, \hat{x}(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \rightarrow \max, \quad u(t) \in U(t) \quad \forall t \in \Delta_0.$$

В результате ее решения при каждом значении переменных t , $\hat{x}(t)$, $\hat{p}(t)$, $\hat{\lambda}$, $\hat{\lambda}_0$ в неособом случае определяется функция

$$\hat{u}(t) = u(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0). \quad (1.5)$$

Определение $\hat{u}(t)$ в особом случае (см. выше) может потребовать специального рассмотрения (см. ниже п. 1.3 “Примеры ...”).

г) Переход от условия стационарности по t_k в лагранжевой форме: $d\hat{\mathcal{L}}/dt_k = 0$ ($k = 0, 1$), к условию стационарности по t_k в понтрягинской форме: $\hat{H}(\hat{t}_k) = (-1)^{k+1} \partial \hat{l} / \partial t_k$ ($k = 0, 1$), описывается цепочкой равенств:

$$\begin{aligned} d\hat{\mathcal{L}}/dt_k = 0 &\Leftrightarrow (-1)^{k+1} \hat{L}(\hat{t}_k) + d\hat{l}/dt_k = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-1)^{k+1} \left(\sum_{i=0}^{m+k} \hat{\lambda}_i \hat{f}_i(\hat{t}_k) + \langle \hat{p}(\hat{t}_k), \dot{\hat{x}}(\hat{t}_k) - \dot{\hat{\varphi}}(\hat{t}_k) \rangle \right) + \\ &+ \partial \hat{l} / \partial t_k + \partial \hat{l} / \partial x(t_k) \dot{\hat{x}}(\hat{t}_k) = 0 \stackrel{(1.1)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{m+k} \hat{\lambda}_i \hat{f}_i(\hat{t}_k) + \langle \hat{p}(t_k), 0 \rangle + \\ &+ \partial \hat{l} / \partial t_k + \partial \hat{l} / \partial x(t_k) \dot{\hat{\varphi}}(t_k) = 0 \stackrel{(1.1)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{m+k} \hat{\lambda}_i \hat{f}_i(\hat{t}_k) + \partial \hat{l} / \partial t_k + (-1)^k \hat{p}(\hat{t}_k) \dot{\hat{\varphi}}(\hat{t}_k) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \partial \hat{l} / \partial t_k = (-1)^{k+1} \hat{p}(\hat{t}_k) \dot{\hat{\varphi}}(\hat{t}_k) - (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{m+k} \hat{\lambda}_i \hat{f}_i(\hat{t}_k) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \hat{p}(\hat{t}_k) \dot{\hat{\varphi}}(\hat{t}_k) - \sum_{i=0}^{m+k} \hat{\lambda}_i \hat{f}_i(\hat{t}_k) = (-1)^{k+1} \partial \hat{l} / \partial t_k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \hat{H}(\hat{t}_k) = (-1)^{k+1} \partial \hat{l} / \partial t_k. \end{aligned}$$

Для фиксированных t_k условия стационарности по t_k ($k = 0, 1$) отсутствуют.

д) Условия дополняющей нежесткости соответствуют условиям (1.4) типа неравенств. Множители Лагранжа $\hat{\lambda}_{m+j}$, $1 \leq j \leq k$ в этих условиях неотрицательны: $\hat{\lambda}_{m+j} \geq 0$ (см. условие е)). При $\hat{\lambda}_{m+j} > 0$ из условия дополняющей нежесткости следует равенство $B_{m+j}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) = 0$ (условие дополняющей нежесткости в этом случае существенно, или по другой терминологии, активно). При $\hat{\lambda}_{m+j} = 0$ условие дополняющей нежесткости выполняется тождественно (несущественно, или неактивно). На решении $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{u}(\cdot)$, \hat{t}_0 , \hat{t}_1 краевой задачи при $\hat{\lambda}_{m+j} = 0$ необходима проверка условия $B_{m+j}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) \leq 0$, а при $B_{m+j}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) = 0$ — проверка условия $\hat{\lambda}_{m+j} \geq 0$. Заметим, что краевая задача принципа максимума при $\hat{\lambda}_{m+j} = 0$ может оказаться вырожденной и потребовать при решении дополнительных исследований.

е) В условия неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$, $\hat{\lambda}_{m+j} \geq 0$, входят лишь множитель Лагранжа $\hat{\lambda}_0$ при функционале и входящие в условия дополняющей нежесткости множители Лагранжа $\hat{\lambda}_{m+j}$ ($1 \leq j \leq k$) при ограничениях (1.4) типа неравенств.

Желая подчеркнуть особую значимость условия НЕРОН в системе условий принципа максимума, включим его в эту систему как условие ж).

Условия (1.1)–(1.3), а)–ж) представляют собой краевую задачу для системы 2n обыкновенных дифференциальных уравнений (краевую задачу принципа максимума) — исходной системы (1.1) и системы уравнений Эйлера–Лагранжа (сопряженной системы). В понтрягинской форме система дифференциальных уравнений краевой задачи имеет вид канонической гамильтоновой системы:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial p} \equiv \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)), \\ \dot{\hat{p}}(t) &= -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x},\end{aligned}$$

где $\hat{H}(t) \equiv H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0)$, а $\hat{u}(t)$ определяется условием оптимальности в) как функция переменных t , $\hat{x}(t)$, $\hat{p}(t)$,

$\hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0: \hat{u}(t) = u(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0)$ (1.5), что позволяет устраниить неопределенность, связанную с присутствием функции $\hat{u}(t)$ в системе дифференциальных уравнений краевой задачи.

Неизвестными в краевой задаче являются $2n$ произвольных постоянных интегрирования ее системы дифференциальных уравнений, времена t_0, t_1 , если они нефиксированы, и множители Лагранжа $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda} \equiv (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_{m+k})$ — всего $2n+m+k+3$ неизвестных. Так как функция Лагранжа \mathcal{L} — однородная (первой степени) функция множителей $p(\cdot)$, λ_0, λ , то эти множители можно задать с точностью до положительного сомножителя (пронормировать их). Если в результате анализа условий принципа максимума удается показать, что аномальный случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ невозможен, то в соответствии с условием е) нормировку множителей Лагранжа можно осуществить, положив $\hat{\lambda}_0$ равным какой-нибудь удобной при решении задачи положительной константе. Нормировку множителей Лагранжа можно осуществить и другими способами (см. ниже п. 1.3 “Примеры . . .”). После нормировки множителей Лагранжа в краевой задаче будет $2n+m+k+2$ неизвестных. Для их определения имеется $2n$ условий трансверсальности б), 2 условия стационарности г), k условий дополняющей нежесткости д) и m условий (1.3) — всего $2n+m+k+2$ условий. Таким образом, после нормировки множителей Лагранжа число неизвестных в краевой задаче совпадает с числом условий для их определения. Разумеется, что разрешимости имеющейся системы условий для определения неизвестных или единственности решения такая ее “полнота” не гарантирует. В случае $\hat{\lambda}_0 = 0$ (аномальный случай) функция Лагранжа будет однородной (первой степени) функцией множителей $p(\cdot)$, λ , и эти множители тоже можно задать с точностью до положительного сомножителя (пронормировать их). Поскольку после нормировки число неизвестных в краевой задаче будет меньше числа условий для их определения, то решение краевой задачи может существовать в этом случае лишь при наличии зависимости между этими условиями. Если такой зависимости нет, то решение краевой задачи при $\hat{\lambda}_0 = 0$ не существует.

Включим в систему условий принципа максимума условие нормировки множителей Лагранжа как условие з), и будем на-

зывать полной системой условий принципа максимума совокупность условий а)–з). После включения условия нормировки в систему условий принципа максимума условия (1.1)–(1.3), а)–з) будут представлять собой краевую задачу (краевую задачу принципа максимума) с полным набором необходимых для ее решения условий.

Если множество $U(t)$ не зависит от времени $U(t) = U$ и система дифференциальных уравнений краевой задачи *автономна*, то есть функция H (или функция L) не зависит от времени t явно, или, что то же самое, не зависят явно от t функции φ и f_i ($0 \leq i \leq m+k$): $\varphi \equiv \varphi(x(t), u(t))$, $f_i \equiv f_i(x(t), u(t))$, то система дифференциальных уравнений краевой задачи имеет *первый интеграл* [3, 17]:

$$\hat{H}(t) \equiv H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) = C,$$

означающий постоянство функции H на оптимальной траектории. При этом для нахождения постоянной C достаточно определить значение функции H в какой-нибудь одной точке оптимальной траектории. В частности, если хотя бы один из моментов времени t_k ($k = 0, 1$) нефиксирован и $\partial\hat{l}/\partial t_k = \text{const}$, постоянная C может быть определена из условия г) стационарности по t_k : $\hat{H}(\hat{t}_k) = (-1)^{k+1}\partial\hat{l}/\partial t_k$ (или $d\hat{\mathcal{L}}/dt_k = 0$), поскольку $C \equiv (-1)^{k+1}\partial\hat{l}/\partial t_k$ ($k = 0, 1$). Если в рассматриваемом случае функции ψ_i ($0 \leq i \leq m+k$) не зависят явно от t_0 , t_1 : $\psi_i \equiv \psi_i(x(t_0), x(t_1))$, и хотя бы одно t_k нефиксировано, то $\hat{H}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$, поскольку в таких задачах терминант l не зависит явно от t_k и потому $C \equiv (-1)^{k+1}\partial\hat{l}/\partial t_k = 0$. В задачах быстродействия с минимизируемым функционалом $B_0(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \equiv t_1 - t_0$ и функциями ψ_i ($1 \leq i \leq m+k$), не зависящими явно от t_0 , t_1 , терминант l имеет вид: $l \equiv \lambda_0(t_1 - t_0) + \sum_{i=1}^{m+k} \lambda_i \psi_i(x(t_0), x(t_1))$, и следовательно, $C \equiv (-1)^{k+1}\partial\hat{l}/\partial t_k = \hat{\lambda}_0$ ($k = 0, 1$), $\hat{H}(t) = \hat{\lambda}_0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$.

Наличие в системе дифференциальных уравнений краевой задачи первого интеграла позволяет заменить одно из дифференциальных уравнений системы первым интегралом (недифференциальным соотношением) и тем самым понизить на единицу порядок системы дифференциальных уравнений краевой

задачи. При численном решении краевой задачи первый интеграл можно использовать для контроля проводимых вычислений (контролируя на оптимальной траектории постоянство функции $\hat{H}(t)$), а при известной постоянной C — и для определения одной из неизвестных составляющих $\alpha_i \equiv p_i(t_0)$ вектора параметров пристрелки (см. ниже).

Если $U(t) \forall t \in [t_0, t_1]$ — открытое множество в \mathbb{R}^r , управляющая вектор-функция $u(\cdot)$ непрерывна: $u(\cdot) \in C(\Delta, \mathbb{R}^r)$, и непрерывны по u частные производные φ_u, f_{iu} ($0 \leq i \leq m+k$), то рассматриваемая задача (1.0)–(1.4) будет *задачей Лагранжа* (в понтрягинской форме) [3, 17]. Частным случаем задачи Лагранжа будет *задача классического вариационного исчисления* (в понтрягинской форме), в которой дифференциальная связь (1.1) имеет вид: $\dot{x}(t) = u(t)$. Заметим, что в задачах Лагранжа и, следовательно, в задачах классического вариационного исчисления $\Delta_0 = [t_0, t_1]$ (1.1). Так как в этих задачах $U(t) \forall t \in [t_0, t_1]$ — открытое множество в \mathbb{R}^r , функция $u(t)$ — непрерывна, и функции φ_u, f_{iu} — непрерывны по u , то функции $L(u)$ и $H(u)$ — непрерывно дифференцируемы по u . Если при этом функция $L(u)$ (или $H(u)$) дифференцируема при $u = \hat{u}$ *должное* число раз, то при нахождении оптимального управления $\hat{u}(t)$ могут быть использованы необходимые и достаточные условия высших порядков локального минимума (или максимума) для конечномерной дифференцируемой функции (дифференцируемой функции многих независимых переменных), в частности, условия второго порядка. В случае, если $L(u)$ (или $H(u)$) — дважды непрерывно дифференцируемая функция одной независимой переменной (u — не вектор), условия второго порядка для этой функции имеют вид: $\partial \hat{L}/\partial u = 0, \partial^2 \hat{L}/\partial u^2 \geq 0$ (или $\partial \hat{H}/\partial u = 0, \partial^2 \hat{H}/\partial u^2 \leq 0$) — *необходимые условия локального минимума (или максимума)*; $\partial \hat{L}/\partial u = 0, \partial^2 \hat{L}/\partial u^2 > 0$ (или $\partial \hat{H}/\partial u = 0, \partial^2 \hat{H}/\partial u^2 < 0$) — *достаточные условия локального минимума (или максимума)*.

Напомним, что исторически принцип максимума появился как ответ на требование практики сформулировать необходимые условия локального экстремума функционала для задач оптимального управления с *замкнутым* множеством управлений U в \mathbb{R}^r . До появления принципа максимума рассматривались

вались задачи оптимального управления — задачи Лагранжа и задачи классического вариационного исчисления, в которых U — *открытое* множество в R^r . В связи с этим задачи оптимального управления с *замкнутым* множеством управлений можно условно назвать задачами *собственно оптимального управления*. Поэтому, если в задаче (1.0)–(1.4) множество $U(t)$ $\forall t \in [t_0, t_1]$ (или U) — *замкнутое* в R^r , то задача (1.0)–(1.4) будет задачей *собственно оптимального управления*. Словом, *замкнутость* множества $U(t)$ $\forall t \in [t_0, t_1]$ (или U) есть *достаточное условие принадлежности задачи* (1.0)–(1.4) к задачам *собственно оптимального управления*. При решении задач в случае замкнутого множества $U(t)$ $\forall t \in [t_0, t_1]$ оптимальное управление $\hat{u}(t)$ необходимо находить как значение аргумента $u(t)$ функции $L(u(t))$ (или функции $H(u(t))$), при котором функция $L(u(t))$ принимает наименьшее (или функция $H(u(t))$ — наибольшее) значение по $u(t)$ на *замкнутом* множестве (см. ниже п. 1.3.3 “Задачи оптимального управления”).

Для задачи оптимального управления динамической системой (в данном Практикуме для задачи (1.0)–(1.4)) *принципом максимума называется вся совокупность необходимых условий локальной оптимальности* (в Практикуме — *совокупность условий а)-з)*), в то время как изначально [17] принципом максимума называлось лишь условие оптимальности по u в понтрягинской форме: $\hat{u} = \arg \min_{u \in U} H(u)$.

В постановке исходной задачи (1.0)–(1.4), а также в постановках всех задач, решенных в качестве примеров в разделах 1.3 и 2.2 Практикума, требуется определять точную нижнюю грань функционала $B_0(\xi(\cdot)) \rightarrow \inf$ на допустимых управляемых процессах $\xi(\cdot) \equiv (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$, хотя правильнее требовать определения абсолютного минимума функционала и писать: $B_0(\xi(\cdot)) \rightarrow \min$ (или, кратко, $B_0(\xi(\cdot)) \rightarrow \inf$). Это связано с тем, что запись $B_0(\xi(\cdot)) \rightarrow \inf$ не исключает возможность существования решения задачи в виде минимизирующей последовательности допустимых управляемых процессов $\{\xi_n(\cdot)\}$, на которой $\lim_{n \rightarrow \infty} B_0(\xi_n(\cdot)) = \inf B_0(\xi(\cdot))$. Следует, однако, заметить, что во всех рассматриваемых задачах Практикума решение задачи в виде минимизирующей последовательно-

сти $\xi_n(\cdot)$ отсутствует, а запись $B_0(\xi(\cdot)) \rightarrow \inf$ вместо записи $B_0(\xi(\cdot)) \rightarrow \min$, сохраняется как некая традиция записи постановок экстремальных задач.

При решении задач оптимального управления на основе принципа максимума нельзя упускать из вида, что *принцип максимума Понtryгина для нелинейных задач оптимального управления общего вида представляет собой лишь необходимые условия первого порядка локальной оптимальности функционала, и следовательно, полученные в результате его применения экстремальные управляемые процессы $\hat{\xi} \equiv (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ (экстремали Понtryгина $\hat{x}(\cdot)$, управления $\hat{u}(\cdot)$ и времена \hat{t}_0, \hat{t}_1) в общем случае подлежат испытанию на оптимальность с использованием необходимых условий локальной оптимальности высших порядков (в настоящее время для задач оптимального управления в полной мере не разработанных [14]) и/или достаточных условий локальной или абсолютной оптимальности [3, 10], либо, при возможности, должны подвергаться непосредственной или косвенной проверке на локальную или абсолютную оптимальность, в частности, посредством решения исходной задачи иными методами, например, прямыми, не использующими необходимые и/или достаточные условия оптимальности, и в их числе градиентными методами*. Заметим, что для задач оптимального управления, линейных по фазовым переменным [3], ляпуновских задач [3] и линейно-квадратичных задач [5, 11] решение задачи, полученное на основе принципа максимума, доставляет функционалу абсолютный минимум (или максимум).

Уместно отметить, что, несмотря на трудности проверки экстремалей Понtryгина на локальную и абсолютную оптимальность, а также на отсутствие для большинства нелинейных задач оптимального управления динамическими системами теорем существования и единственности решения, тем не менее, и в такой ситуации проводимые на основе принципа максимума исследования задач оптимального управления позволяют, как правило, получать содержательные результаты и делать полезные для практики выводы.

Поскольку все подлежащие численному решению в данном Практикуме задачи оптимального управления содержат пара-

метр и при нулевом значении этого параметра допускают аналитическое решение, которое при численном решении краевой задачи принципа максимума методом стрельбы используется в качестве исходного для получения решения задачи при ненулевом значении параметра *методом продолжения решения по параметру* (см., например, [8]), то возникает необходимость иметь образцы аналитического решения основных типов рассматриваемых в Практикуме задач. Сформулируем в связи с этим

Правило решения задач оптимального управления

- 0) Формализовать задачу, то есть привести ее к виду (1.0)–(1.4).
- 1) Составить функции \mathcal{L} , L , l , если задача решается в лагранжевой форме, или функции H , l , если задача решается в понtryagинской форме.
- 2) Записать необходимые условия а)–з) оптимальности процесса $\hat{\xi} \equiv (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ (полную систему условий принципа максимума для задачи оптимального управления (1.1)–(1.4)). Рассмотреть возможность аномального случая $\hat{\lambda}_0 = 0$, и, если $\hat{\lambda}_0 \neq 0$, положив $\hat{\lambda}_0$ равным единице или любой другой положительной константе (что будет соответствовать одной из разновидностей условия нормировки множителей Лагранжа), преобразовать условия (1.1)–(1.3), а)–з) в краевую задачу принципа максимума. Убедиться, что число неизвестных в краевой задаче совпадает с числом условий для их определения.
- 3) Проанализировав краевую задачу, найти допустимые управляемые процессы $\hat{\xi} \equiv (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$, являющиеся решениями краевой задачи. При наличии в краевой задаче условий дополняющей нежесткости д) для каждого из этих условий необходимо в соответствии с условиями е) рассмотреть подслучаи $\hat{\lambda}_{m+j} = 0$ и $\hat{\lambda}_{m+j} > 0$ ($1 \leq j \leq k$), причем на решении, полученном при $\hat{\lambda}_{m+j} = 0$, необходимо проверить выполнение условий

$B_{m+j}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) \leq 0$, а на решении, полученном при
 $B_{m+j}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) = 0$, — условий $\hat{\lambda}_{m+j} \geq 0$, $1 \leq j \leq k$.

- 4) Среди найденных допустимых управляемых процессов найти решение задачи (1.0)–(1.4) — оптимальный процесс, доставляющий локальный или глобальный минимум функционалу (1.0), или показать, что решения нет.

Рассмотрим примеры применения Правила к аналитическому решению задач оптимального управления (в том числе, задач классического вариационного исчисления и задач Лагранжа) для некоторых характерных функционалов, терминальных (краевых, или граничных), изопериметрических и терминально-изопериметрических ограничений типа равенств и неравенств. Отметим, что примеры подобраны так, чтобы сравнительно простой непосредственной проверкой можно было провести исследование абсолютной оптимальности полученных решений. В большинстве задач так просто это сделать не удается. Все рассматриваемые в Практикуме в качестве примеров задачи в соответствии с названием Практикума приводятся к виду задач оптимального управления (1.0)–(1.4) и решаются на основе принципа максимума по приведенному выше Правилу (алгоритму) решения задач оптимального управления, несмотря на то, что значительная часть этих задач может быть решена по более простому алгоритму. Отметим также, что, хотя каждая из задач Практикума может быть решена либо с использованием только функций \mathcal{L} , L , l (в лагранжевой форме), либо с использованием только функций H , l (в понтиягинской форме), в Практикуме, как правило, эти задачи по методическим соображениям решаются в обеих формах одновременно (параллельно) или, если это удобно, решаются в смешанной лагранжево–понтиягинской форме.

1.3. Примеры аналитического решения на основе принципа максимума характерных задач классического вариационного исчисления, задач Лагранжа и задач оптимального управления

1.3.1. Задачи классического вариационного исчисления

Пример 1. Простейшая задача классического вариационного исчисления — задача с фиксированными начальными и конечными значениями фазовой переменной и времени.

$$I(x(\cdot)) \equiv \int_0^1 (\dot{x}^2(t) - 12tx(t)) dt \rightarrow \inf, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Решение

0) Формализация: обозначим $\dot{x}(t) = u(t)$, тогда

$$B_0(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^1 (u^2(t) - 12tx(t)) dt \rightarrow \inf; \quad (1.6)$$

$$\dot{x}(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 = \Delta \equiv [0, 1]; \quad (1.7)$$

$$u(t) \in U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [0, 1]; \quad (1.8)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0. \quad (1.9)$$

Ограничения (1.4) типа неравенств в задаче отсутствуют.

1) Функция Лагранжа:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \equiv & \int_0^1 (\lambda_0(u^2(t) - 12tx(t)) + p(t)(\dot{x}(t) - u(t))) dt + \\ & + \lambda_1 x(0) + \lambda_2 x(1) \equiv \int_0^1 L(t) dt + l; \end{aligned}$$

лагранжиан:

$$L \equiv \lambda_0(u^2 - 12tx) + p(\dot{x} - u) \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv pu - \lambda_0(u^2 - 12tx);$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_1x(0) + \lambda_2x(1);$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

- 2) Система условий принципа максимума в задаче (1.6)–(1.9):

a) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0$$

$$\left(\Leftrightarrow \dot{p}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \right)$$

$$\Rightarrow \dot{p}(t) = -12\hat{\lambda}_0 t;$$

б) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 0; k = 1, t_1 = 1$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)}$$

$$\left(\Leftrightarrow \hat{p}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \right)$$

$$\Rightarrow \hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \hat{p}(1) = -\hat{\lambda}_2;$$

в) условие оптимальности по u :

Так как $L(u) = \hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\hat{u}(t) = \arg \min_{u \in U} L(u) \equiv \arg \min_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}(t)u),$$

или

$$\hat{u}(t) = \arg \underset{u \in U}{\operatorname{abs}} \max H(u) \equiv \arg \underset{u \in (-\infty, +\infty)}{\operatorname{abs}} \max (\hat{p}(t)u - \hat{\lambda}_0 u^2).$$

Так как $U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty)$, то при $\hat{\lambda}_0 = 0$ либо не существует оптимальное управление $\hat{u}(t)$, либо не выполняется условие НЕРОН (см. ниже), а при $\hat{\lambda}_0 \neq 0$ оптимальное управление $\hat{u}(t)$ может быть определено из условий $\partial \hat{L}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{L}/\partial u^2 > 0$ (или $\partial \hat{H}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{H}/\partial u^2 < 0$):

$$2\hat{\lambda}_0 \hat{u}(t) - \hat{p}(t) = 0, \quad \hat{\lambda}_0 > 0$$

(или $\hat{p}(t) - 2\hat{\lambda}_0 \hat{u}(t) = 0, \quad \hat{\lambda}_0 > 0$).

Если $\hat{\lambda}_0 = 0$, то

- 1) при $\hat{p}(t) \not\equiv 0, t \in [0, 1]$ функция $H(u) \equiv \hat{p}u$ линейна по u , и поскольку $u \in \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty)$, оптимальное управление $\hat{u}(t)$ не существует: $\hat{u}(t) = \pm\infty, t \in [0, 1]$;
 - 2) при $\hat{p}(t) \equiv 0, t \in [0, 1]$ не выполняется условие НЕРОН, поскольку в этом случае из условий б) следует $\hat{\lambda}_1 = 0, \hat{\lambda}_2 = 0$, и потому все множители Лагранжа обращаются в ноль: $\hat{\lambda}_0 = 0, \hat{p}(t) \equiv 0, t \in [0, 1], \hat{\lambda}_1 = 0, \hat{\lambda}_2 = 0$;
 - г) условия стационарности по t_0, t_1 в задаче отсутствуют, так как t_0, t_1 — фиксированы ($t_0 = 0, t_1 = 1$);
 - д) условия дополняющей нежесткости отсутствуют, так как в задаче нет условий (1.4) типа неравенств;
 - е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$;
 - ж) условие неравенства нулю всех множителей Лагранжа одновременно (условие НЕРОН);
 - з) условие нормировки множителей Лагранжа.
- 3) Так как аномальный случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ в рассматриваемой задаче невозможен (см. выше анализ условия в)), то по

условию е) $\hat{\lambda}_0 > 0$. В качестве $\hat{\lambda}_0$ можно взять любое положительное число, в частности, $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ (условие нормировки), вследствие чего в условии в) $\hat{u}(t) = \hat{p}(t)$. Подставив $\hat{u}(t) = \hat{p}(t)$ в уравнение (1.7) и $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ в уравнение а), преобразуем условия (1.7), а), (1.9) в краевую задачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = -6t; \end{cases} \quad \begin{aligned} \hat{x}(0) &= 0, & \hat{x}(1) &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений, и для их определения имеется два краевых условия. Условия б): $\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1$, $\hat{p}(1) = -\hat{\lambda}_2$, в краевую задачу не включаются, так как они служат для определения множителей $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$, которые привносятся в задачу методом ее решения, на решение краевой задачи не влияют, и потому их определять не требуется. В результате решения краевой задачи определится, удовлетворяющая необходимым условиям первого порядка локальной оптимальности (условиям принципа максимума), искомая в задаче (1.6)–(1.9), допустимая экстремаль (экстремаль Понtryгина). Решив эту краевую задачу:

$$\begin{aligned} \hat{p}(t) &= -3t^2 + c_1, & \hat{x}(t) &= -t^3 + c_1 t + c_2; \\ \hat{x}(0) &= 0 \Rightarrow c_2 = 0; & \hat{x}(1) &= 0 \Rightarrow c_1 = 1; \end{aligned}$$

получим допустимую экстремаль (экстремаль Понtryгина): $\hat{x}(t) = -t^3 + t \quad \forall t \in [0, 1]$.

- 4) Исследуем полученную экстремаль $\hat{x}(\cdot)$ на абсолютную оптимальность. Непосредственной проверкой покажем, что $\hat{x}(\cdot)$ доставляет функционалу абсолютный минимум. Для этого возьмем $\hat{x}(\cdot)$ посредством функции $x(\cdot)$, так чтобы функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ осталась допустимой. В рассматриваемой задаче функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ будет допустимой, если $x(\cdot) \in C^1([0, 1])$, $\hat{x}(0) + x(0) = 0$, $\hat{x}(1) + x(1) = 0$. А поскольку по условию (1.9) $\hat{x}(0) = 0$, $\hat{x}(1) = 0$, то $x(0) = 0$, $x(1) = 0$. Определим с помощью полученных

условий знак приращения функционала:

$$\begin{aligned}
 \Delta I &\equiv I(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)) - I(\hat{x}(\cdot)) \equiv \\
 &\equiv \int_0^1 [(\dot{\hat{x}} + \dot{x})^2 - 12t(\hat{x} + x)] dt - \int_0^1 (\dot{\hat{x}}^2 - 12t\hat{x}) dt \equiv \\
 &\equiv \int_0^1 (2\dot{\hat{x}}\dot{x} - 12tx) dt + \int_0^1 \dot{x}^2 dt \geq \\
 &\geq \int_0^1 2\dot{\hat{x}} dx - \int_0^1 12tx dt \equiv \\
 &\equiv 2\dot{\hat{x}}(t)x(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 2\ddot{\hat{x}}x dt - \int_0^1 12tx dt \equiv \\
 &\equiv 2\dot{\hat{x}}(1) \cdot 0 - 2\dot{\hat{x}}(0) \cdot 0 + \int_0^1 12tx dt - \int_0^1 12tx dt \equiv 0.
 \end{aligned}$$

Так как при любых допустимых возмущениях $x(\cdot)$ решения (экстремали) $\hat{x}(\cdot)$, полученного (-ой) на основе необходимых условий первого порядка локально-го экстремума функционала (условий принципа максимума Понтрягина), функционал $I(x(\cdot))$ не убывает: $\Delta I \geq 0$, то экстремаль $\hat{x}(t) = -t^3 + t$ $\forall t \in [0, 1]$ доставляет ему абсолютный минимум. При этом $\inf I(x(\cdot)) \equiv \text{abs min } I(x(\cdot)) \equiv I(\hat{x}(\cdot)) = -0,8$.

Пример 2. Задача классического вариационного исчисления с нефиксированными конечными значениями времени T и фазовой переменной $x(T)$.

$$I(x(\cdot), T) \equiv \int_0^T \dot{x}^2(t) dt \rightarrow \inf,$$

$$x(0) = 0, \quad T + x(T) + 1 = 0, \quad T > 0.$$

Решение

0) Формализация: обозначим $\dot{x}(t) = u(t)$, тогда

$$B_0(x(\cdot), u(\cdot), T) \equiv \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \inf; \quad (1.11)$$

$$\dot{x}(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 = \Delta \equiv [0, T]; \quad (1.12)$$

$$u(t) \in U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [0, T]; \quad (1.13)$$

$$x(0) = 0, \quad T + x(T) + 1 = 0; \quad (1.14)$$

$$-T < 0. \quad (1.15)$$

1) Функция Лагранжа:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\equiv \int_0^T (\lambda_0 u^2(t) + p(t)(\dot{x}(t) - u(t))) dt + \\ &+ \lambda_1 x(0) + \lambda(T + x(T) + 1) + \mu(-T) \equiv \int_0^T L(t) dt + l;\end{aligned}$$

лагранжиан:

$$L \equiv \lambda_0 u^2 + p(\dot{x} - u) \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv pu - \lambda_0 u^2;$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_1 x(0) + \lambda(T + x(T) + 1) + \mu(-T);$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda, \mu; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

2) Система условий принципа максимума в задаче (1.11)–(1.15):

a) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad (\Leftrightarrow \dot{p}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x}) \Rightarrow \dot{p}(t) = 0;$$

б) условия трансверсальности ($k = 0, \hat{t}_0 = 0; k = 1, \hat{t}_1 = \hat{T}$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(\hat{t}_k)}$$

$$\left(\Leftrightarrow \hat{p}(\hat{t}_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(\hat{t}_k)} \right) \Rightarrow \hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \hat{p}(\hat{T}) = -\hat{\lambda};$$

в) условие оптимальности по u :

Так как $L(u) = \hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\hat{u}(t) = \arg \min_{u \in U} L(u) \equiv \arg \min_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}(t)u),$$

или

$$\hat{u}(t) = \arg \max_{u \in U} H(u) \equiv \arg \max_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{p}(t)u - \hat{\lambda}_0 u^2).$$

Так как в рассматриваемой задаче случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ невозможен (см. анализ условия в) в Примере 1), и $U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty)$, то оптимальное управление $\hat{u}(t)$ может быть определено из условий $\partial \hat{L}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{L}/\partial u^2 > 0$ (или $\partial \hat{H}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{H}/\partial u^2 < 0$):

$$2\hat{\lambda}_0 \hat{u}(t) - \hat{p}(t) = 0, \quad \hat{\lambda}_0 > 0$$

(или $\hat{p}(t) - 2\hat{\lambda}_0 \hat{u}(t) = 0, \quad \hat{\lambda}_0 > 0$);

- г) условие стационарности по t_0 в задаче отсутствует, так как t_0 — фиксировано ($t_0 = 0$); условие стационарности по T (с учетом условий (1.12), б)):

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{L}}{dT} = 0 &\Leftrightarrow \hat{L}(\hat{T}) + \frac{d\hat{l}}{dT} = 0 \Leftrightarrow \\ \hat{\lambda}_0 \dot{\hat{x}}(\hat{T}) + \hat{p}(\hat{T}) \cdot 0 + \hat{\lambda}(1 + \dot{\hat{x}}(\hat{T})) - \hat{\mu} &= 0 \stackrel{(1.12)}{\Leftrightarrow} \\ \hat{\lambda}_0 \hat{u}^2(\hat{T}) + \hat{\lambda} + \hat{\lambda} \hat{u}(\hat{T}) - \hat{\mu} &= 0 \stackrel{6)}{\Leftrightarrow} \\ \hat{\lambda}_0 \hat{u}^2(\hat{T}) - \hat{p}(\hat{T}) \hat{u}(\hat{T}) + \hat{\lambda} - \hat{\mu} &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\hat{H}(\hat{T}) = \frac{\partial \hat{l}}{\partial T} \Leftrightarrow \hat{p}(\hat{T}) \hat{u}(\hat{T}) - \hat{\lambda}_0 \hat{u}^2(\hat{T}) = \hat{\lambda} - \hat{\mu};$$

- д) условие дополняющей нежесткости: $\hat{\mu} \cdot (-\hat{T}) = 0$;
- е) условия неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0, \hat{\mu} \geq 0$;
- ж) условие НЕРОН;
- з) условие нормировки множителей Лагранжа.
- 3) Так как по условию (1.15) $(-\hat{T}) < 0$, то из условия д) следует $\hat{\mu} = 0$. А поскольку аномальный случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ в рассматриваемой задаче невозможен (см. условие в)), то

по условию е) $\hat{\lambda}_0 > 0$ и в качестве $\hat{\lambda}_0$ можно взять любое положительное число, в частности, $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ (условие нормировки). Вследствие этого в условии в) $\hat{u}(t) = \hat{p}(t)$. Подставив $\hat{u}(t) = \hat{p}(t)$ в уравнение (1.12) и $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ в условие г), преобразуем условия (1.12), (1.14), а), б), г) в краевую задачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = 0; \quad \hat{x}(0) = 0, \quad \hat{T} + \hat{x}(\hat{T}) + 1 = 0, \\ \hat{p}(\hat{T}) = -\hat{\lambda}; \quad \hat{p}^2(\hat{T}) = 2\hat{\lambda}. \end{cases} \quad (1.16)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений, время \hat{T} и множитель $\hat{\lambda}$ (4 неизвестных), и для их определения имеется 4 краевых условия. Условие б): $\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1$, в краевую задачу не включается, так как оно служит для определения множителя $\hat{\lambda}_1$, который на решение краевой задачи не влияет, и поэтому его определять не требуется.

Решив эту краевую задачу:

$$\begin{aligned} \hat{p}(t) &= c, \quad \hat{x}(t) = ct + c_1; \quad \hat{x}(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0; \\ \hat{p}(\hat{T}) &= -\hat{\lambda} \Rightarrow c = -\hat{\lambda}, \quad \hat{x}(t) = -\hat{\lambda}t; \\ \hat{p}^2(\hat{T}) &= 2\hat{\lambda} \Rightarrow \hat{\lambda}^2 = 2\hat{\lambda}, \quad \hat{\lambda}(\hat{\lambda} - 2) = 0: \\ 1) \quad &\hat{\lambda} = 0, \quad \hat{x}(t) \equiv 0, \quad \hat{T} + 0 + 1 = 0, \quad \hat{T} = -1 \\ &\text{— противоречит условию } \hat{T} > 0; \\ 2) \quad &\hat{\lambda} = 2, \quad \hat{x}(t) = -2t, \quad \hat{T} - 2\hat{T} + 1 = 0 \Rightarrow \hat{T} = 1; \end{aligned}$$

получим время $\hat{T} = 1$ и допустимую экстремаль (экстремаль Понtryгина) $\hat{x}(t) = -2t \quad \forall t \in [0, 1]$.

- 4) Исследуем полученное решение $\hat{x}(\cdot)$, \hat{T} на абсолютную оптимальность. Непосредственной проверкой покажем, что $\hat{x}(\cdot)$, \hat{T} доставляют функционалу абсолютный минимум. Для этого возьмем $\hat{x}(\cdot)$ и \hat{T} посредством функции $x(\cdot)$ и ΔT , так чтобы функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ и время $T \equiv \hat{T} + \Delta T$ остались допустимыми. В рассматриваемой задаче функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ и время T будут допустимыми, если $x(\cdot) \in C^1([0, T])$, $\hat{x}(0) + x(0) = 0$, $T + \hat{x}(T) + x(T) + 1 = 0$,

$T > 0$. А поскольку $\hat{x}(0) = 0$ и $\hat{x}(T) = -2T$, то $x(0) = 0$, $x(T) = T - 1$. Определим с учетом полученных условий знак приращения функционала:

$$\begin{aligned}\Delta I &\equiv I(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot), T) - I(\hat{x}(\cdot), \hat{T}) \equiv \\ &\equiv \int_0^T (\dot{\hat{x}} + \dot{x})^2 dt - \int_0^{\hat{T}} \dot{\hat{x}}^2 dt \equiv \\ &\equiv \int_0^T \dot{x}^2 dt + \int_0^T 2\hat{x}\dot{x} dt + \int_0^T \dot{\hat{x}}^2 dt - \int_0^1 4 dt \geq \\ &\geq \int_0^T 4 dt + \int_0^T (-4)\dot{x} dt - 4 \equiv \\ &\equiv 4T - 4x(t) \Big|_0^T - 4 \equiv 4T - 4x(T) + 4x(0) - 4 \equiv \\ &\equiv 4T - 4(T - 1) + 0 - 4 \equiv 0.\end{aligned}$$

Так как при любых допустимых возмущениях решения (экстремали $\hat{x}(\cdot)$ и времени \hat{T}), полученного(-ых) на основе необходимых условий первого порядка локального экстремума функционала (условий принципа максимума Понтрягина), функционал $I(x(\cdot), T)$ не убывает: $\Delta I \geq 0$, то время $\hat{T} = 1$ и экстремаль $\hat{x}(t) = -2t$ доставляют ему абсолютный минимум. При этом $\inf I(x(\cdot), T) \equiv \text{abs min } I(x(\cdot), T) \equiv I(\hat{x}(\cdot), \hat{T}) = 4$.

Пример 3. Задача классического вариационного исчисления со старшими производными, фиксированными начальными и конечными значениями времени, фазовой переменной и ее производных.

$$I(x(\cdot)) \equiv \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt \rightarrow \inf, \\ x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad \dot{x}(1) = 4, \quad \ddot{x}(1) = 12.$$

Решение

0) Формализация: обозначим $x(t) = x_1(t)$, $\dot{x}(t) = x_2(t)$, $\ddot{x}(t) = x_3(t)$, $\dddot{x}(t) = u(t)$, тогда

$$B_0(x_1(\cdot), x_2(\cdot), x_3(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^1 u^2(t) dt \rightarrow \inf; \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) - x_2(t) &= 0, & \dot{x}_2(t) - x_3(t) &= 0, \\ \dot{x}_3(t) - u(t) &= 0 \quad \forall t \in \Delta_0 = \Delta \equiv [0, 1];\end{aligned} \quad (1.18)$$

$$u(t) \in U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [0, 1]; \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0, & x_2(0) &= 0, & x_3(0) &= 0, \\ x_1(1) - 1 &= 0, & x_2(1) - 4 &= 0, & x_3(1) - 12 &= 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Ограничения (1.4) типа неравенств в задаче отсутствуют.

1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^1 L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$\begin{aligned} L &\equiv \lambda_0 u^2 + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - x_3) + p_3(\dot{x}_3 - u) \equiv \\ &\equiv p_1 \dot{x}_1 + p_2 \dot{x}_2 + p_3 \dot{x}_3 - H; \end{aligned}$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv p_1 x_2 + p_2 x_3 + p_3 u - \lambda_0 u^2;$$

терминант:

$$\begin{aligned} l &\equiv \lambda_{10} x_1(0) + \lambda_{20} x_2(0) + \lambda_{30} x_3(0) + \\ &+ \lambda_{11}(x_1(1) - 1) + \lambda_{21}(x_2(1) - 4) + \lambda_{31}(x_3(1) - 12); \end{aligned}$$

$\lambda_0, \lambda_{i0}, \lambda_{i1}; p_i \equiv p_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) — числовые и функциональные множители Лагранжа.

2) Система условий принципа максимума в задаче (1.17)–(1.20):

a) уравнения Эйлера–Лагранжа ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}_i}(t) + \hat{L}_{x_i}(t) &= 0 \quad \left(\Leftrightarrow \dot{\hat{p}}_i(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x_i} \right) \Rightarrow \\ \dot{\hat{p}}_1(t) &= 0, \quad \dot{\hat{p}}_2(t) = -\hat{p}_1(t), \quad \dot{\hat{p}}_3(t) = -\hat{p}_2(t); \end{aligned}$$

б) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 0; k = 1, t_1 = 1; i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\dot{x}_i}(t_k) &= (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x_i(t_k)} \quad \left(\Leftrightarrow \hat{p}_i(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x_i(t_k)} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{p}_i(0) &= \hat{\lambda}_{i0}, \quad \hat{p}_i(1) = -\hat{\lambda}_{i1}; \end{aligned}$$

в) условие оптимальности по u :

Так как $L(u) = \hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}_3 u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\hat{u}(t) = \arg \min_{u \in U} L(u) \equiv \arg \min_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}_3(t)u),$$

или

$$\hat{u}(t) = \arg \max_{u \in U} H(u) \equiv \arg \max_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{p}_3(t)u - \hat{\lambda}_0 u^2).$$

Так как в рассматриваемой задаче случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ невозможен (см. анализ условия в) в Примере 1), и $U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty)$, то оптимальное управление $\hat{u}(t)$ может быть определено из условий $\partial \hat{L}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{L}/\partial u^2 > 0$ (или $\partial \hat{H}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{H}/\partial u^2 < 0$):

$$2\hat{\lambda}_0 \hat{u}(t) - \hat{p}_3(t) = 0, \quad \hat{\lambda}_0 > 0$$

$$(\text{или } \hat{p}_3(t) - 2\hat{\lambda}_0 \hat{u}(t) = 0, \quad \hat{\lambda}_0 > 0);$$

- г) условия стационарности по t_0, t_1 в задаче отсутствуют, так как t_0, t_1 — фиксированы ($t_0 = 0, t_1 = 1$);
 - д) условия дополняющей нежесткости отсутствуют, так как в задаче нет условий (1.4) типа неравенств;
 - е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$;
 - ж) условие НЕРОН;
 - з) условие нормировки множителей Лагранжа.
- 3) Так как аномальный случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ в рассматриваемой задаче невозможен (см. условие в)), то по условию е) $\hat{\lambda}_0 > 0$. Положив $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ (условие нормировки), получим: $\hat{u}(t) = \hat{p}_3(t)$. Подставив $\hat{u}(t) = \hat{p}_3(t)$ в уравнение (1.18), преобразуем условия (1.18), а), (1.20) в краевую за-

дачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t), \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t), \\ \dot{\hat{x}}_3(t) = \hat{p}_3(t); \\ \dot{\hat{p}}_1(t) = 0, \\ \dot{\hat{p}}_2(t) = -\hat{p}_1(t), \\ \dot{\hat{p}}_3(t) = -\hat{p}_2(t); \\ \hat{x}_1(0) = 0, \quad \hat{x}_2(0) = 0, \quad \hat{x}_3(0) = 0; \\ \hat{x}_1(1) = 1, \quad \hat{x}_2(1) = 4, \quad \hat{x}_3(1) = 12. \end{array} \right. \quad (1.21)$$

В этой краевой задаче неизвестны шесть постоянных интегрирования ее системы дифференциальных уравнений, и для их определения имеется шесть краевых условий. Условия б): $\hat{p}_i(0) = \hat{\lambda}_{i0}$, $\hat{p}_i(1) = -\hat{\lambda}_i$ ($i = 1, 2, 3$), в краевую задачу не включаются, так как они служат для определения множителей $\hat{\lambda}_{i0}$, $\hat{\lambda}_{i1}$, которые на решение краевой задачи не влияют, и потому их определять не требуется. Решим эту краевую задачу.

Так как $\hat{p}_1(t) = c_1$, то

$$\begin{aligned} \hat{p}_2(t) &= -c_1 t + c_2, \\ \hat{p}_3(t) &= c_1 t^2 / 2 - c_2 t + c_3, \\ \hat{x}_3(t) &= c_1 t^3 / 6 - c_2 t^2 / 2 + c_3 t + c_4, \\ \hat{x}_2(t) &= c_1 t^4 / 24 - c_2 t^3 / 6 + c_3 t^2 / 2 + c_4 t + c_5, \\ \hat{x}_1(t) &= c_1 t^5 / 120 - c_2 t^4 / 24 + c_3 t^3 / 6 + c_4 t^2 / 2 + c_5 t + c_6. \end{aligned}$$

Краевые условия (1.20) позволяют определить постоянные c_i ($i = \overline{1, 6}$): $c_1 = 0$, $c_2 = -24$, $c_j = 0$ ($j = 3, 4, 5, 6$). А поскольку $\hat{x}(t) = \hat{x}_1(t)$, то искомая экстремаль (экстремаль Понtryгина) имеет вид: $\hat{x}(t) = t^4 \quad \forall t \in [0, 1]$.

- 4) Исследуем полученную экстремаль $\hat{x}(\cdot)$ на абсолютную оптимальность. Непосредственной проверкой покажем, что $\hat{x}(\cdot)$ доставляет функционалу абсолютный минимум. Для этого возьмем $\hat{x}(\cdot)$ посредством функции $x(\cdot)$, так чтобы функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ осталась допустимой. В рассматриваемой задаче функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ будет допустимой, если $x(\cdot) \in C^3([0, 1])$, $\hat{x}(0) + x(0) = 0$, $\dot{\hat{x}}(0) + \dot{x}(0) = 0$, $\ddot{\hat{x}}(0) + \ddot{x}(0) = 0$; $\hat{x}(1) + x(1) = 1$, $\dot{\hat{x}}(1) + \dot{x}(1) = 4$,

$\ddot{\hat{x}}(1) + \ddot{x}(1) = 12$. А поскольку по условию задачи концы фиксированы:

$$\hat{x}(0) = \dot{\hat{x}}(0) = \ddot{\hat{x}}(0) = 0, \hat{x}(1) = 1, \dot{\hat{x}}(1) = 4, \ddot{\hat{x}}(1) = 12,$$

то $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$, $x(1) = \dot{x}(1) = \ddot{x}(1) = 0$. Определим с учетом полученных условий знак приращения функционала:

$$\begin{aligned} \Delta I &\equiv I(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)) - I(\hat{x}(\cdot)) \equiv \\ &\equiv \int_0^1 (\ddot{\hat{x}} + \ddot{x})^2 dt - \int_0^1 \dot{\hat{x}}^2 dt \equiv \\ &\equiv \int_0^1 2\ddot{\hat{x}}\ddot{x} dt + \int_0^1 \dot{\hat{x}}^2 dt \geq \int_0^1 2\ddot{\hat{x}}\ddot{x} dt \equiv \\ &\equiv \int_0^1 2 \cdot 24t\ddot{x} dt \equiv \int_0^1 48t d(\ddot{x}) \equiv \\ &\equiv 48t\ddot{x}(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 48\ddot{x} dt \equiv \\ &\equiv 48 \cdot 1 \cdot 0 - 48 \cdot 0 \cdot 0 - \int_0^1 48 d(\dot{x}) \equiv \\ &\equiv -48\dot{x}(t) \Big|_0^1 + \int_0^1 48\dot{x} dt = 0 + 48x(t) \Big|_0^1 = 0. \end{aligned}$$

Так как при любых допустимых возмущениях $x(\cdot)$ полученной экстремали $\hat{x}(\cdot)$ функционал I не убывает: $\Delta I \geq 0$, то функция $\hat{x}(t) = t^4 \forall t \in [0, 1]$ доставляет ему абсолютный минимум. При этом

$$\inf I(x(\cdot)) \equiv \text{abs min } I(x(\cdot)) \equiv I(\hat{x}(\cdot)) = 192.$$

Пример 4. Задача классического вариационного исчисления с фиксированными начальными и конечными значениями фазовой переменной и времени и изопериметрическим условием типа равенства.

$$I(x(\cdot)) \equiv \int_0^1 (\dot{x}^2(t) + 24t^2x(t)) dt \rightarrow \inf,$$

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 5, \quad \int_0^1 tx(t) dt = 1.$$

Решение

0) Формализация: обозначим $\dot{x}(t) = u(t)$, тогда

$$B_0(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^1 (u^2(t) + 24t^2x(t)) dt \rightarrow \inf; \quad (1.22)$$

$$\dot{x}(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 = \Delta \equiv [0, 1]; \quad (1.23)$$

$$u(t) \in U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [0, 1]; \quad (1.24)$$

$$x(0) - 1 = 0, \quad x(1) - 5 = 0, \quad \int_0^1 tx(t) dt - 1 = 0. \quad (1.25)$$

Ограничения (1.4) типа неравенств в задаче отсутствуют.

1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^1 L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$L \equiv \lambda_0(u^2 + 24t^2x) + p(\dot{x} - u) + \lambda t x \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv pu - \lambda_0(u^2 + 24t^2x) - \lambda t x;$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_1(x(0) - 1) + \lambda_2(x(1) - 5) - \lambda;$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

2) Система условий принципа максимума в задаче (1.0)–(1.3):

а) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \dot{p}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \right) \Rightarrow$$

$$\dot{p}(t) = 24\hat{\lambda}_0 t^2 + \hat{\lambda} t;$$

- 6) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 0; k = 1, t_1 = 1$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \left(\Leftrightarrow \hat{p}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \right)$$

$$\Rightarrow \hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}(1) = -\hat{\lambda}_2;$$

- в) условие оптимальности по u :

Так как $L(u) = \hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\hat{u}(t) = \arg \underset{u \in U}{\text{abs min}} L(u) \equiv \arg \underset{u \in (-\infty, +\infty)}{\text{abs min}} (\hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}(t)u),$$

или

$$\hat{u}(t) = \arg \underset{u \in U}{\text{abs max}} H(u) \equiv \arg \underset{u \in (-\infty, +\infty)}{\text{abs max}} (\hat{p}(t)u - \hat{\lambda}_0 u^2).$$

Так как в рассматриваемой задаче случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ невозможен (см. анализ условия в) в Примере 1) и $U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty)$, то оптимальное управление $\hat{u}(t)$ может быть определено из условий $\partial \hat{L}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{L}/\partial u^2 > 0$ (или $\partial \hat{H}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{H}/\partial u^2 < 0$):

$$2\hat{\lambda}_0 \hat{u}(t) - \hat{p}(t) = 0, \quad \hat{\lambda}_0 > 0$$

$$(\text{или } \hat{p}(t) - 2\hat{\lambda}_0 \hat{u}(t) = 0, \quad \hat{\lambda}_0 > 0);$$

- г) условия стационарности по t_0, t_1 в задаче отсутствуют, так как t_0, t_1 — фиксированы ($t_0 = 0, t_1 = 1$);
 д) условия дополняющей нежесткости отсутствуют, так как в задаче нет условий (1.4) типа неравенств;
 е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$;
 ж) условие НЕРОН;
 з) условие нормировки множителей Лагранжа.
 3) Так как аномальный случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ в рассматриваемой задаче невозможен (см. выше условие в)), то по условию е) $\hat{\lambda}_0 > 0$ и в качестве $\hat{\lambda}_0$ можно взять любое положительное

число, в частности, $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ (условие нормировки), вследствие чего в условии в) $\hat{u}(t) = \hat{p}(t)$. Подставив $\hat{u}(t) = \hat{p}(t)$ в уравнение (1.1) и $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ в уравнение а), преобразуем условия (1.1), а), (1.3) в краевую задачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = 12t^2 + \hat{\lambda}t; \quad \hat{x}(0) = 1, \quad \hat{x}(1) = 5; \quad \int_0^1 t\hat{x}(t) dt = 1. \end{cases} \quad (1.26)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений и множитель λ , и для их определения имеется два краевых и изопериметрическое условия. Условия б): $\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1$, $\hat{p}(1) = -\hat{\lambda}_2$, в краевую задачу не включаются, так как они служат для определения множителей $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$, которые привносятся в задачу методом ее решения, на решение краевой задачи не влияют, и потому их определять не требуется. Решив эту краевую задачу:

$$\hat{p}(t) = 4t^3 + \hat{\lambda}t^2/2 + c_1, \quad \hat{x}(t) = t^4 + \hat{\lambda}t^3/6 + c_1t + c_2;$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(0) = 1 &\Rightarrow c_2 = 1; \quad \hat{x}(1) = 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \hat{\lambda}/6 + c_1 = 3 (*); \end{aligned}$$

$$\int_0^1 t\hat{x}(t) dt = 1 \Rightarrow \hat{\lambda} + 10c_1 = 10 (**);$$

$$(*)(**) \Rightarrow \hat{\lambda} = 30, \quad c_1 = -2,$$

получим допустимую экстремаль (экстремаль Понtryагина): $\hat{x}(t) = t^4 + 5t^3 - 2t + 1 \quad \forall t \in [0, 1]$.

- 4) Исследуем полученную экстремаль $\hat{x}(\cdot)$ на абсолютную оптимальность. Непосредственной проверкой покажем, что $\hat{x}(\cdot)$ доставляет функционалу абсолютный минимум. Для этого возмутим $\hat{x}(\cdot)$ посредством функции $x(\cdot)$, так чтобы функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ осталась допустимой. В рассматриваемой задаче функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ будет допустимой, если $x(\cdot) \in C^1([0, 1])$, $\hat{x}(0) + x(0) = 1$,

$\hat{x}(1) + x(1) = 5$, $\int_0^1 t(\hat{x}(t) + x(t)) dt = 1$. А поскольку по условию (1.3) $\hat{x}(0) = 1$, $\hat{x}(1) = 5$, $\int_0^1 t\hat{x}(t) dt = 1$, то $x(0) = 0$, $x(1) = 0$, $\int_0^1 tx(t) dt = 0$. Определим с учетом полученных условий знак приращения функционала:

$$\begin{aligned}
 \Delta I &\equiv I(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)) - I(\hat{x}(\cdot)) \equiv \\
 &\equiv \int_0^1 [(\dot{\hat{x}} + \dot{x})^2 + 24t^2(\hat{x} + x)] dt - \int_0^1 (\dot{\hat{x}}^2 + 24t^2\hat{x}) dt \equiv \\
 &\equiv \int_0^1 2\dot{\hat{x}}\dot{x} dt + \int_0^1 \dot{x}^2 dt + \int_0^1 24t^2x dt \geq \\
 &\geq \int_0^1 2\dot{\hat{x}}\dot{x} dt + \int_0^1 24t^2x dt \equiv \\
 &\equiv \int_0^1 2\dot{\hat{x}} dx + \int_0^1 24t^2x dt \equiv \\
 &\equiv 2\dot{\hat{x}}(t)x(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 2\ddot{\hat{x}}x dt + \int_0^1 24t^2x dt \equiv \\
 &\equiv 2\dot{\hat{x}}(1) \cdot 0 - 2\dot{\hat{x}}(0) \cdot 0 - - \int_0^1 (2\ddot{\hat{x}} - 24t^2)x dt \equiv \\
 &\equiv -60 \cdot \int_0^1 tx dt \equiv 0.
 \end{aligned}$$

Так как при любых допустимых возмущениях $x(\cdot)$ решения (экстремали) $\hat{x}(\cdot)$ функционал I не убывает: $\Delta I \geq 0$, то функция $\hat{x}(t) = t^4 + 5t^3 - 2t + 1$ $\forall t \in [0, 1]$ доставляет ему абсолютный минимум. При этом $\inf I(x(\cdot)) \equiv \text{abs min } I(x(\cdot)) \equiv I(\hat{x}(\cdot)) = 66\frac{5}{7}$.

Замечание.

Изопериметрическое условие $\int_0^1 tx(t) dt = 1$ при решении задачи можно учесть и иным, отличным от рассмотренного выше, способом, сделав замену переменных: $y(t) = \int_0^t tx(t) dt$. В результате такой замены задача с изопериметрическим условием преобразуется в задачу с эквивалентными ей условиями:

$\dot{y}(t) = tx(t)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. В этой задаче:

$$\begin{aligned} L &\equiv \lambda_0(u^2 + 24t^2x) + p(\dot{x} - u) + q(\dot{y} - tx) \equiv p\dot{x} + q\dot{y} - H; \\ H &\equiv pu + qtx - \lambda_0(u^2 + 24t^2x); \\ l &\equiv \lambda_1(x(0) - 1) + \lambda_2(x(1) - 5) + \mu_1y(0) + \mu_2(y(1) - 1); \end{aligned}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$; $p \equiv p(t)$, $q \equiv q(t)$ — числовые и функциональные множители Лагранжа.

Совокупность условий а)–е) принципа максимума в преобразованной задаче имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad &\dot{\hat{p}}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \equiv 24\hat{\lambda}_0 t^2 - \hat{q}(t)t, \quad \dot{\hat{q}}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial y} \equiv 0; \\ \text{б)} \quad &\hat{p}(0) = \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(0)} \equiv \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}(1) = -\frac{\partial \hat{l}}{\partial x(1)} \equiv -\hat{\lambda}_2; \\ &\hat{q}(0) = \frac{\partial \hat{l}}{\partial y(0)} \equiv \hat{\mu}_1, \quad \hat{q}(1) = -\frac{\partial \hat{l}}{\partial y(1)} \equiv \hat{\mu}_2; \\ \text{в)} \quad &\hat{p}(t) - 2\hat{\lambda}_0 \hat{u}(t) = 0; \\ \text{г)} \quad &\text{отсутствует}; \quad \text{д)} \text{отсутствует}; \quad \text{е)} \quad \hat{\lambda}_0 \geq 0. \end{aligned}$$

Так же, как и в задаче с изопериметрическим условием, показывается, что в преобразованной задаче $\hat{\lambda}_0 \neq 0$. Положив $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ (условие нормировки), получим $\hat{u}(t) = \hat{p}(t)$, и краевая задача примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{y}}(t) = t\hat{x}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = 12t^2 - \hat{q}(t)t, \\ \dot{\hat{q}}(t) = 0; \quad \hat{x}(0) = 1, \quad \hat{x}(1) = 5, \quad \hat{y}(0) = 0, \quad \hat{y}(1) = 1. \end{cases}$$

Решением этой краевой задачи будет система функций:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= t^4 + 5t^3 - 2t + 1, \quad \hat{y}(t) = \frac{1}{6}t^6 + t^5 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2; \\ \hat{p}(t) &= 4t^3 + 15t^2 - 2, \quad \hat{q}(t) = -30. \end{aligned}$$

Первая функция этой системы совпадает с экстремалю Понтрягина $\hat{x}(t)$, полученной выше в результате решения исходной задачи с изопериметрическим условием.

Пример 5. Задача классического вариационного исчисления — задача быстродействия с изопериметрическим условием типа равенства и фиксированными начальными и конечными значениями фазовой переменной.

$$\mathcal{T}(x(\cdot), T) \equiv T \rightarrow \inf,$$

$$\int_0^T \dot{x}^2(t) dt = 1, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = 1, \quad T > 0.$$

Решение

0) Формализация: обозначим $\dot{x}(t) = u(t)$, тогда

$$B_0(x(\cdot), u(\cdot), T) \equiv T \rightarrow \inf, \quad T > 0; \quad (1.27)$$

$$\dot{x}(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 = \Delta \equiv [0, T]; \quad (1.28)$$

$$u(t) \in U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [0, T]; \quad (1.29)$$

$$\int_0^T u^2(t) dt - 1 = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = 1. \quad (1.30)$$

Ограничения (1.4) типа неравенств в задаче отсутствуют: условие $T > 0$ в форме строгого неравенства следует считать проверочным, так как его включение в ограничения (1.4) в силу соответствующего ему условия дополняющей нежесткости на решение задачи не повлияет (см. выше Пример 2 и ниже Пример 6).

1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^T p(t)(\dot{x}(t) - u(t)) dt + \lambda u^2 \equiv \int_0^T L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$L \equiv p(\dot{x} - u) + \lambda u^2 \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv pu - \lambda u^2;$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_0 T + \lambda_1 x(0) + \lambda_2 (x(T) - 1);$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

- 2) Система условий принципа максимума в задаче (1.27)–(1.30):

a) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \right) \Rightarrow \\ \dot{\hat{p}}(t) = 0;$$

б) условия трансверсальности ($k = 0, \hat{t}_0 = 0; k = 1, \hat{t}_1 = \hat{T}$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(\hat{t}_k)} \quad \left(\Leftrightarrow \hat{p}(\hat{t}_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(\hat{t}_k)} \right) \Rightarrow \\ \hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}(\hat{T}) = -\hat{\lambda}_2;$$

в) условие оптимальности по u :

так как $L(u) = \hat{\lambda}u^2 - \hat{p}u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\hat{u}(t) = \arg \min_{u \in U} L(u) \equiv \arg \min_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{\lambda}u^2 - \hat{p}(t)u),$$

или

$$\hat{u}(t) = \arg \max_{u \in U} H(u) \equiv \arg \max_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{p}(t)u - \hat{\lambda}u^2).$$

Поскольку в рассматриваемой задаче

$$U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty),$$

то при $\hat{\lambda} \neq 0$ оптимальное управление $\hat{u}(t)$ может быть определено из условий

$$\begin{aligned} \partial \hat{L} / \partial u &= 0, & \partial^2 \hat{L} / \partial u^2 &> 0 \\ \text{(или)} \quad \partial \hat{H} / \partial u &= 0, & \partial^2 \hat{H} / \partial u^2 &< 0 \end{aligned} :$$

$$2\hat{\lambda}\hat{u}(t) - \hat{p}(t) = 0, \quad \hat{\lambda} > 0 \quad (1.31)$$

(или $\hat{p}(t) - 2\hat{\lambda}\hat{u}(t) = 0$, $\hat{\lambda} > 0$),

а при $\hat{\lambda} = 0$ оптимальное управление $\hat{u}(t)$ будет зависеть от поведения функции $\hat{p}(t)$, и его определение требует специального анализа (см. ниже);

- г) условие стационарности по t_0 отсутствуют, так как t_0 — фиксировано ($t_0 = 0$); условие стационарности по T :

$$\frac{d\hat{\mathcal{L}}}{dT} = 0 \quad (\Leftrightarrow \hat{H}(\hat{T}) = \frac{\partial \hat{l}}{\partial T}) \Rightarrow$$

$$\hat{p}(\hat{T})\hat{u}(\hat{T}) - \hat{\lambda}\hat{u}^2(\hat{T}) = \hat{\lambda}_0;$$

- д) условия дополняющей нежесткости отсутствуют, так как в задаче нет условий типа неравенств, а условие $\hat{T} > 0$ из системы условий (1.4) исключено и считается проверочным;
- е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$;
- ж) условие НЕРОН;
- з) условие нормировки множителей Лагранжа.
- 3) Условия (1.28), (1.30), а)–г), е) представляют собой краевую задачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t), \quad \hat{u}(t) = \arg \max_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{p}(t)u - \hat{\lambda}u^2), \\ \dot{\hat{p}}(t) = 0; \\ \hat{x}(0) = 0, \quad \hat{x}(\hat{T}) = 1; \quad \hat{p}(\hat{T})\hat{u}(\hat{T}) - \hat{\lambda}\hat{u}^2(\hat{T}) = \hat{\lambda}_0; \\ \int_0^{\hat{T}} \hat{u}^2(t) dt = 1; \quad \hat{T} > 0; \\ \text{условие НЕРОН; условие нормировки.} \end{cases} \quad (1.32)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений, время \hat{T} и множители Лагранжа $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda}$ (5 неизвестных), и для их определения имеется 3 условия (1.30), следствие условия стационарности г) и условие нормировки (5 условий). Условия б): $\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1$, $\hat{p}(\hat{T}) = -\hat{\lambda}_2$, в краевую задачу не включаются, так как они служат для определения

множителей $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$, которые на решение краевой задачи не влияют, и потому их определять не требуется. Решим краевую задачу.

Так как $\dot{p}(t) = 0$, то $\hat{p}(t) = c$ и возможны два подслучаи: $c = 0$ и $c \neq 0$.

Если $c = 0$, то $\hat{p}(t) \equiv 0$, $t \in [0, T]$, и из условия б) следует: $\hat{\lambda}_1 = 0$, $\hat{\lambda}_2 = 0$. Если при этом $\hat{\lambda} = 0$, то из условия г) следует $\hat{\lambda}_0 = 0$. В результате все множители Лагранжа оказываются равными нулю. А это противоречит условию НЕРОН, и потому при $c = 0$, $\hat{\lambda} = 0$ краевая задача принципа максимума решения не имеет. Если $c = 0$, $\hat{\lambda} \neq 0$, то по условию оптимальности (1.31) $\hat{\lambda} > 0$, $\hat{u}(t) \equiv 0$, $t \in [0, T]$. Но при этом не имеет решения краевая задача для $\hat{x}(t)$: $\dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t) \equiv 0$, $\hat{x}(0) = 0$, $\hat{x}(\hat{T}) = 1$, а потому при $c = 0$, $\hat{\lambda} \neq 0$ не имеет решения и краевая задача принципа максимума. Если $c \neq 0$, $\hat{\lambda} = 0$, то оптимальное управление не существует: $\hat{u}(t) = \pm\infty \forall t \in [0, \hat{T}]$. Если $c \neq 0$, $\hat{\lambda} \neq 0$, то из условия (1.31) оптимальности по u следует: $\hat{\lambda} > 0$, $2\hat{\lambda}\hat{u}(t) = c$. Положив $\hat{\lambda} = 1/2$ (условие нормировки), получим: $\hat{u}(t) = c$. Подставив $\hat{u}(\hat{T}) = c$ в условие стационарности, получим: $c^2 = 2\hat{\lambda}_0 > 0$. А это означает, что выполняется условие неотрицательности е) и аномальный случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ в задаче невозможен. Решив далее уравнение $\dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t) \equiv c$, получим: $\hat{x}(t) = ct + B$, и цепочку следствий: $\hat{x}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$; $\hat{x}(\hat{T}) = 1 \Rightarrow c\hat{T} = 1$, $c = 1/\hat{T}$; $\int_0^{\hat{T}} \hat{u}^2(t) dt = 1 \Rightarrow c^2\hat{T} = 1$, $\hat{T} = 1$, $c = 1$, $\hat{u}(t) = 1$, $\hat{x}(t) = t$. В итоге решения краевой задачи принципа максимума получаем время $\hat{T} = 1$ и экстремаль Понtryгина: $\hat{x}(t) = t \forall t \in [0, 1]$.

- 4) Исследуем полученное решение $\hat{x}(\cdot)$, \hat{T} на абсолютную оптимальность. Непосредственной проверкой покажем, что $\hat{x}(\cdot)$, \hat{T} доставляют функционалу абсолютный минимум. Для этого возьмутим $\hat{x}(\cdot)$ и \hat{T} посредством функции $x(\cdot)$ и ΔT , так чтобы функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ и время $T = \hat{T} + \Delta T$ остались допустимыми. В рассматриваемой задаче функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ и время T будут допустимыми, если

$x(\cdot) \in C^1([0, T])$, $\hat{x}(0) + x(0) = 0$, $\hat{x}(T) + x(T) = 1$, $\int_0^T (\dot{\hat{x}}(t) + \dot{x}(t))^2 dt = 1$, $T > 0$. А поскольку $\dot{\hat{x}}(t) = 1$, $\hat{x}(T) = T$ и по условию (1.30) $\hat{x}(0) = 0$, то $x(0) = 0$, $x(T) = 1 - T$, $\int_0^T (1 + \dot{x})^2 dt = 1$. Преобразовав последнее равенство, получим:

$$\begin{aligned} T + 2x(t) \Big|_0^T + \int_0^T \dot{x}^2(t) dt &= 1 \Rightarrow \\ T + 2(x(T) - x(0)) + \int_0^T \dot{x}^2(t) dt &= 1 \Rightarrow \quad (1.33) \\ T + 2(1 - T - 0) + \int_0^T \dot{x}^2(t) dt &= 1 \Rightarrow \\ 1 - T + \int_0^T \dot{x}^2(t) dt &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку $T > 0$ и $\int_0^T \dot{x}^2(t) dt \geq 0$, то равенство (1.33) возможно лишь при $1 - T \leq 0$, то есть при $T \geq 1$. А это означает, что при любых допустимых возмущениях решения (экстремали $\hat{x}(\cdot)$ и времени \hat{T}) функционал $\mathcal{T}(x(\cdot), T)$ не убывает:

$$\Delta\mathcal{T} \equiv \mathcal{T}(x(\cdot), T) - \mathcal{T}(\hat{x}(\cdot), \hat{T}) \equiv T - \hat{T} \equiv T - 1 \geq 0.$$

Поэтому время $\hat{T} = 1$ и экстремаль $\hat{x}(t) = t \quad \forall t \in [0, 1]$ доставляют ему абсолютный минимум. При этом

$$\inf \mathcal{T}(x(\cdot), T) \equiv \text{abs min } \mathcal{T}(x(\cdot), T) \equiv \mathcal{T}(\hat{x}(\cdot), \hat{T}) \equiv \hat{T} = 1.$$

Пример 6. Задача классического вариационного исчисления с функционалом Больца, нефиксированным конечным временем и краевым условием типа неравенства.

$$B(x(\cdot), T) \equiv \int_0^T \dot{x}^2(t) dt + x^2(0) \rightarrow \inf, \quad x(T) + T + 3 \leq 0, \quad T > 0.$$

Решение

0) Формализация: обозначим $\dot{x}(t) = u(t)$, тогда

$$B_0(x(\cdot), u(\cdot), T) \equiv \int_0^T u^2(t) dt + x^2(0) \rightarrow \inf; \quad (1.34)$$

$$\dot{x}(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 = \Delta \equiv [0, T]; \quad (1.35)$$

$$u(t) \in U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [0, T]; \quad (1.36)$$

$$x(T) + T + 3 \leq 0, \quad -T < 0. \quad (1.37)$$

Ограничения (1.3) типа равенств в задаче отсутствуют.

1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^T L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$L \equiv \lambda_0 u^2 + p(\dot{x} - u) \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv pu - \lambda_0 u^2;$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_0 x^2(0) + \lambda(x(T) + T + 3) + \mu(-T);$$

$\lambda_0, \lambda, \mu; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

2) Система условий принципа максимума в задаче (1.34)–(1.37):

a) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \right) \Rightarrow$$

$$\dot{\hat{p}}(t) = 0;$$

б) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 0; k = 1, t_1 = T$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \quad \left(\Leftrightarrow \hat{p}(\hat{t}_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{H}}{\partial x(t_k)} \right) \Rightarrow$$

$$\hat{p}(0) = 2\hat{\lambda}_0 \hat{x}(0), \quad \hat{p}(\hat{T}) = -\hat{\lambda};$$

в) условие оптимальности по u :

Так как $L(u) = \hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\hat{u}(t) = \arg \min_{u \in U} L(u) \equiv \arg \min_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}(t)u),$$

или

$$\hat{u}(t) = \arg \max_{u \in U} H(u) \equiv \arg \max_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{p}(t)u - \hat{\lambda}_0 u^2).$$

Так как в рассматриваемой задаче случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ невозможен (см. анализ условия в) в Примере 1) и $U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty)$, то оптимальное управление $\hat{u}(t)$ может быть определено из условий $\partial \hat{L}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{L}/\partial u^2 > 0$ (или $\partial \hat{H}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{H}/\partial u^2 < 0$):

$$2\hat{\lambda}_0 \hat{u}(t) - \hat{p}(t) = 0, \quad \hat{\lambda}_0 > 0$$

$$(\text{или } \hat{p}(t) - 2\hat{\lambda}_0 \hat{u}(t) = 0, \quad \hat{\lambda}_0 > 0);$$

г) условие стационарности по t_0 в задаче отсутствует, так как t_0 — фиксировано ($t_0 = 0$); условие стационарности по T :

$$\frac{d\hat{\mathcal{L}}}{dT} = 0 \quad (\Leftrightarrow \hat{H}(\hat{T}) = \frac{\partial \hat{l}}{\partial T}) \Rightarrow$$

$$\hat{p}(\hat{T})\hat{u}(\hat{T}) - \hat{\lambda}_0 \hat{u}^2(\hat{T}) = \hat{\lambda} - \hat{\mu};$$

д) условия дополняющей нежесткости:

$$\hat{\lambda} \cdot (\hat{x}(\hat{T}) + \hat{T} + 3) = 0, \quad \hat{\mu} \cdot (-\hat{T}) = 0;$$

е) условия неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$, $\hat{\lambda} \geq 0$, $\hat{\mu} \geq 0$;

ж) условие НЕРОН;

з) условие нормировки множителей Лагранжа.

- 3) Так как по условию (1.37) $(-\hat{T}) < 0$, то из условия д) следует: $\hat{\mu} = 0$. А поскольку аномальный случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ в рассматриваемой задаче невозможен и по условию е)

$\hat{\lambda}_0 > 0$, то в качестве $\hat{\lambda}_0$ можно взять любое положительное число, в частности, $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ (условие нормировки). Вследствие этого в условии в) $\hat{u}(t) = \hat{p}(t)$. Подставив $\hat{u}(t) = \hat{p}(t)$ в уравнение (1.35), а $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ в условия б) и г), преобразуем условия (1.35), а), б), г)-е) в краевую задачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = 0; \\ \hat{p}(0) = \hat{x}(0), \quad \hat{p}(\hat{T}) = -\hat{\lambda}; \\ \hat{p}^2(\hat{T}) = 2\hat{\lambda}; \quad \hat{\lambda} \cdot (\hat{x}(\hat{T}) + \hat{T} + 3) = 0; \\ \hat{\lambda} \geq 0; \quad \hat{T} > 0. \end{cases} \quad (1.38)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений, время \hat{T} и множитель $\hat{\lambda}$ (4 неизвестных), и для их определения имеется 2 краевых условия, следствие условия стационарности и условие дополняющей нежесткости (4 условия).

Так как краевая задача содержит условие дополняющей нежесткости, то в соответствии с Правилом решения задач с такими условиями (см. п.3 Правил) необходимо рассмотреть два подслучаи: $\hat{\lambda} = 0$ и $\hat{\lambda} > 0$.

При $\hat{\lambda} = 0$ краевая задача примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = 0; \quad \hat{p}(0) = \hat{x}(0), \quad \hat{p}(\hat{T}) = 0, \quad \hat{T} > 0. \end{cases} \quad (1.39)$$

В этой краевой задаче 3 неизвестных: две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений и время \hat{T} , и лишь два условия для их определения (краевая задача оказалась вырожденной). Решим эту краевую задачу: $\hat{p}(t) = c_1$, $\hat{x}(t) = c_1 t + c_2$; $\hat{p}(0) = \hat{x}(0) \Rightarrow c_1 = c_2$; $\hat{p}(\hat{T}) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow \hat{x}(t) \equiv 0$, $t \in [0, \hat{T}]$. Далее в соответствии с Правилом решения задач с ограничением типа неравенств в случае $\hat{\lambda}_0 = 0$ необходимо проверить выполнение исходного неравенства $\hat{x}(\hat{T}) + \hat{T} + 3 \leq 0$. Подставив

$\hat{x}(t) \equiv 0$ в это неравенство, получим: $\hat{T} + 3 \leq 0$. Но это противоречит требованию $\hat{T} > 0$, и потому при $\hat{\lambda} = 0$ краевая задача решения не имеет.

При $\hat{\lambda} > 0$ из первого условия д) дополняющей нежесткости следует: $\hat{x}(\hat{T}) + \hat{T} + 3 = 0$, и краевая задача примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = 0; \\ \hat{p}(0) = \hat{x}(0), \quad \hat{p}(\hat{T}) = -\hat{\lambda}; \\ \hat{p}^2(\hat{T}) = 2\hat{\lambda}; \quad \hat{x}(\hat{T}) + \hat{T} + 3 = 0; \quad \hat{T} > 0. \end{cases} \quad (1.40)$$

В этой краевой задаче четыре неизвестных: две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений, время \hat{T} и множитель $\hat{\lambda}$, и имеется четыре краевых условия для их определения. Решим эту краевую задачу: $\hat{p}(t) = A_1$, $\hat{x}(t) = A_1 t + A_2$; $\hat{p}(0) = \hat{x}(0) \Rightarrow A_1 = A_2$; исключив множитель $\hat{\lambda}$ из второго и третьего краевых условий, получим $\hat{p}^2(\hat{T}) = -2\hat{p}(\hat{T}) \Leftrightarrow \hat{p}(\hat{T})(\hat{p}(\hat{T}) + 2) = 0$; если $\hat{p}(\hat{T}) = 0$, то $A_1 = 0 = A_2$, $\hat{x}(t) \equiv 0$, $t \in [0, \hat{T}]$, что противоречит двум последним краевым условиям задачи: $0 + \hat{T} + 3 = 0$, $\hat{T} > 0$; если $\hat{p}(\hat{T}) = -2$, то $A_1 = A_2 = -2$, $\hat{x}(t) = -2t - 2$; $\hat{x}(\hat{T}) + \hat{T} + 3 = 0 \Rightarrow -2\hat{T} - 2 + \hat{T} + 3 = 0 \Rightarrow \hat{T} = 1$. В итоге получаем время $\hat{T} = 1$ и допустимую экстремаль (экстремаль Понtryгина) $\hat{x}(t) = -2t - 2 \quad \forall t \in [0, 1]$.

- 4) Исследуем полученное решение $\hat{x}(\cdot)$ на абсолютную оптимальность. Непосредственной проверкой покажем, что $\hat{x}(\cdot)$, \hat{T} доставляют функционалу абсолютный минимум. Для этого возьмем $\hat{x}(\cdot)$ и \hat{T} посредством функции $x(\cdot)$ и ΔT , так чтобы функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ и время $T \equiv \hat{T} + \Delta T$ остались допустимыми. В рассматриваемой задаче функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ и время T будут допустимыми, если $x(\cdot) \in C^1([0, 1])$, $\hat{x}(T) + x(T) + T + 3 \leq 0$, $T > 0$. А поскольку $\hat{x}(T) = -2T - 2$, то $-2T - 2 + x(T) + T + 3 \leq 0$, и потому $x(T) - T + 1 \leq 0$. Определим с учетом этого неравенства

знак приращения функционала:

$$\begin{aligned}
\Delta I &\equiv I(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot), T) - I(\hat{x}(\cdot), \hat{T}) \equiv \\
&\equiv \int_0^T (\dot{\hat{x}} + \dot{x})^2 dt - \int_0^{\hat{T}} \dot{\hat{x}}^2 dt + \\
&+ (\hat{x}(0) + x(0))^2 - \hat{x}^2(0) \equiv \\
&\equiv \int_0^T \dot{\hat{x}}^2 dt + \int_0^T 2\dot{\hat{x}}\dot{x} dt + \int_0^T \dot{x}^2 dt - \int_0^1 4 dt + \\
&+ 2\hat{x}(0)x(0) + x^2(0) \equiv \\
&\equiv \int_0^T 4 dt + \int_0^T (-4)\dot{x} dt - \int_0^1 4 dt + 2 \cdot (-2)x(0) + \\
&+ \left(\int_0^T \dot{x}^2 dt + x^2(0) \right) \geq \\
&\geq 4T - 4x(t) \Big|_0^T - 4 - 4x(0) \equiv \\
&\equiv 4T - 4x(T) + 4x(0) - 4 - 4x(0) \equiv \\
&\equiv -4 \cdot (x(T) - T + 1) \geq 0.
\end{aligned}$$

Так как при любых допустимых возмущениях решения (экстремали $\hat{x}(\cdot)$ и времени \hat{T}) функционал $I(x(\cdot), T)$ не убывает: $\Delta I \geq 0$, то время $\hat{T}=1$ и экстремаль $\hat{x}(t)=-2t-2$ $\forall t \in [0, 1]$ доставляют ему абсолютный минимум. При этом $\inf I(x(\cdot), T) \equiv \text{abs min } I(x(\cdot), T) \equiv I(\hat{x}(\cdot), \hat{T}) = 8$.

Пример 7. Задача классического вариационного исчисления, в которой решение существует лишь в аномальном случае — при $\lambda_0 = 0$.

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^1 (u(t) + x^2(t)) dt \rightarrow \inf; \quad (1.41)$$

$$\dot{x}(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 = \Delta \equiv [0, 1]; \quad (1.42)$$

$$u(t) \in U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [0, 1]; \quad (1.43)$$

$$\int_0^1 (u^2(t) - 2u(t)) dt + 1 = 0, \quad x(0) - 1 = 0. \quad (1.44)$$

Ограничения (1.4) типа неравенств в задаче отсутствуют.

Решение

- 0) Формализация: формализации задачи не требуется, так как задача уже formalизована.

1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^1 L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$L \equiv \lambda_0(u + x^2) + p(\dot{x} - u) + \lambda(u^2 - 2u) \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv pu - \lambda_0(u + x^2) - \lambda(u^2 - 2u);$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_1(x(0) - 1);$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

2) Система условий принципа максимума в задаче (1.41)–(1.44):

a) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \right) \Rightarrow$$

$$\dot{\hat{p}}(t) = 2\hat{\lambda}_0\hat{x};$$

б) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 0; k = 1, t_1 = 1$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \quad \left(\Leftrightarrow \hat{p}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \right) \Rightarrow$$

$$\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}(1) = 0;$$

в) условие оптимальности по u :

Так как $L(u) = \hat{\lambda}_0 u - \hat{p}u + \lambda(u^2 - 2u)$ и $H(u) = -L(u)$,
то

$$\hat{u}(t) = \arg \min_{u \in U} L(u) \equiv$$

$$\equiv \arg \min_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{\lambda} u^2 + (\hat{\lambda}_0 - \hat{p}(t) - 2\hat{\lambda})u),$$

или

$$\begin{aligned}\hat{u}(t) &= \arg \max_{u \in U} H(u) \equiv \\ &\equiv \arg \max_{u \in (-\infty, +\infty)} (-\hat{\lambda} u^2 - (\hat{\lambda}_0 - \hat{p}(t) - 2\hat{\lambda})u);\end{aligned}$$

- г) условия стационарности по t_0, t_1 в задаче отсутствуют, так как t_0, t_1 – фиксированы ($t_0=0, t_1=1$);
 - д) условия дополняющей нежесткости отсутствуют, так как в задаче нет условий (1.4) типа неравенств;
 - е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$;
 - ж) условие НЕРОН;
 - з) условие нормировки множителей Лагранжа.
- 3) Преобразуем условия (1.42), (1.44), а)–в), е)–з) в краевую задачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t), \\ \hat{u}(t) = \arg \min_{u \in U} L(u) \equiv \arg \max_{u \in U} H(u), \\ \dot{\hat{p}}(t) = 2\hat{\lambda}_0 \hat{x}; \\ \hat{x}(0) = 1, \quad \hat{p}(1) = 0; \\ \int_0^1 (\hat{u}^2(t) - 2\hat{u}(t)) dt + 1 = 0; \quad \hat{\lambda}_0 \geq 0; \\ \text{условие НЕРОН, условие нормировки.} \end{array} \right. \quad (1.45)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений и множители $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}$ (4 неизвестных), и для их определения имеется два краевых условия, изопериметрическое условие и условие нормировки (4 условия). Первое условие б): $\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1$, в краевую задачу не включается, так как оно служит для определения множителя $\hat{\lambda}_1$, который на решение краевой задачи не влияет, и потому его определять не требуется. Решим эту краевую задачу.

Если $\hat{\lambda} = 0$, то $L(u) = (\hat{\lambda}_0 - \hat{p}(t))u \equiv -H(u)$ и

$$\hat{u} = \arg \min_{u \in U} [(\hat{\lambda}_0 - \hat{p})u].$$

При $\hat{\lambda}_0 - \hat{p}(t) \neq 0$ оптимальное управление не существует: функция $L(u)$ в этом случае линейна по u , множество $U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty)$ — неограничено, и потому $\hat{u}(t) = \pm\infty \forall t \in [0, 1]$. Подслучай $\hat{\lambda}_0 - \hat{p}(t) = 0$ невозможен, так как $\hat{p}(1) = 0$ и из равенства $\hat{p}(t) = \hat{\lambda}_0 \forall t \in [0, 1]$ следует: $\hat{\lambda}_0 = 0$, $\hat{p}(t) = 0 \forall t \in [0, 1]$, что противоречит условию НЕРОН (поскольку все множители Лагранжа обращаются в ноль: $\hat{\lambda} = 0$, $\hat{\lambda}_0 = 0$, $\hat{\lambda}_1 = 0$, $\hat{p}(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$). В итоге получаем, что случай $\hat{\lambda} = 0$ невозможен.

Если $\hat{\lambda} \neq 0$, то оптимальное управление $\hat{u}(t)$ может быть определено из условий $\partial \hat{L}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{L}/\partial u^2 > 0$ (или $\partial \hat{H}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{H}/\partial u^2 < 0$):

$$2\hat{\lambda}\hat{u}(t) + \hat{\lambda}_0 - \hat{p}(t) - 2\hat{\lambda} = 0, \quad \hat{\lambda} > 0$$

$$(или -2\hat{\lambda}\hat{u}(t) - \hat{\lambda}_0 + \hat{p}(t) + 2\hat{\lambda} = 0, \quad \hat{\lambda} > 0).$$

Из этих уравнений следует:

$$\hat{u}(t) = 1 + \frac{\hat{p}(t) - \hat{\lambda}_0}{2\hat{\lambda}}, \quad \hat{\lambda} > 0.$$

Подставив $\hat{u}(t)$ в изопериметрическое условие и преобразовав его с учетом равенства $1 = \int_0^1 4t^3 dt$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (\hat{u}^2(t) - 2\hat{u}(t) + 4t^3) dt \equiv \\ &\equiv \int_0^1 ((1 + \frac{\hat{p}(t) - \hat{\lambda}_0}{2\hat{\lambda}})^2 - 2 - 2\frac{\hat{p}(t) - \hat{\lambda}_0}{2\hat{\lambda}} + 4t^3) dt \equiv \\ &\equiv \int_0^1 (\frac{\hat{p}(t) - \hat{\lambda}_0}{2\hat{\lambda}})^2 dt, \end{aligned}$$

получим: $\hat{p}(t) = \hat{\lambda}_0 \forall t \in [0, 1]$.

Если $\hat{\lambda}_0 \neq 0$, то $\hat{p}(t) = \hat{\lambda}_0 \neq 0 \forall t \in [0, 1]$. Но это противоречит условию $\hat{p}(1) = 0$, и потому $\hat{\lambda}_0 = 0$. При $\hat{\lambda}_0 = 0$ из

уравнения $\dot{\hat{p}}(t) = 2\hat{\lambda}_0 \hat{x}(t) = 0$ и условия $\hat{p}(1) = 0$ получим: $\hat{p}(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$, вследствие чего: $\hat{u}(t) = 1 \quad \forall t \in [0, 1]$. А тогда $\hat{x}(t) = t + 1 \quad \forall t \in [0, 1]$ (поскольку $\dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t) \equiv 1$ и $\hat{x}(0) = 1$). Условие НЕРОН при этом автоматически выполняется: $\hat{\lambda}_0 = 0$, $\hat{p}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$, $\hat{\lambda} \neq 0$. В итоге получаем, что единственным решением краевой задачи принципа максимума и, следовательно, исходной задачи классического вариационного исчисления будет *анормальное решение*: $\hat{\lambda}_0 = 0$, $\hat{x}(t) = t + 1$, $\hat{u}(t) = 1$, $\hat{p}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$, $\hat{\lambda} \neq 0$. Поскольку $\hat{\lambda}_0 = 0$, функционал на это решение не влияет.

- 4) Исследуем полученную экстремаль Понтрягина

$$\hat{x}(t) = t + 1, \quad t \in [0, 1]$$

на абсолютную оптимальность. Для этого возмутим $\hat{x}(\cdot)$ посредством функции $x(\cdot)$, так чтобы функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ осталась допустимой, и определим знак приращения функционала $\Delta I \equiv I(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)) - I(\hat{x}(\cdot))$.

В рассматриваемой задаче функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ будет допустимой, если $x(\cdot) \in C^1([0, 1])$, $\hat{x}(0) + x(0) = 1$ и, поскольку $u(t) = \dot{x}(t)$, $\int_0^1[(\dot{\hat{x}}(t) + \dot{x}(t))^2 - 2(\dot{\hat{x}}(t) + \dot{x}(t)) + 4t^3] dt = 0$. Так как $\hat{x}(t) = t + 1$, $\hat{x}(0) = 1$, $\dot{\hat{x}}(t) = 1$, то $x(0) = 0$, $\int_0^1[(1 + \dot{x}(t))^2 - 2(1 + \dot{x}(t)) + 4t^3] dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^1(1 - 2 + 4t^3) dt + \int_0^1(2\dot{x}(t) - 2\dot{x}(t)) dt + \int_0^1\dot{x}^2(t) dt = 0 \Leftrightarrow 0 + 0 + \int_0^1\dot{x}^2(t) dt = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$. Из этого тождества с учетом условия $x(0) = 0$ следует тождество $x(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$. А это означает, что в задаче есть только одна допустимая экстремаль: $\hat{x}(t) = t + 1 \quad \forall t \in [0, 1]$, и ее допустимые вариации и, следовательно, допустимые вариации функционала невозможны ($\Delta I = 0$). Задача имеет единственное решение, и это — *анормальное решение*: $\hat{\lambda}_0 = 0$, $\hat{x}(t) = t + 1 \quad \forall t \in [0, 1]$. При этом

$$\begin{aligned} \inf I(x(\cdot)) &\equiv \text{abs min } I(x(\cdot)) \equiv I(\hat{x}(\cdot)) \equiv \\ &\equiv \int_0^1(\dot{\hat{x}}(t) + \hat{x}^2(t)) dt \equiv \int_0^1(1 + (t+1)^2) dt \equiv 3\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Пример 8. Задача классического вариационного исчисления, в которой на всей оптимальной траектории управление особое.

$$I(x(\cdot)) \equiv \int_0^1 (x(t) - 1)^2 dt \rightarrow \inf; \quad (1.46)$$

$$\dot{x}(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 = \Delta \equiv [0, 1]; \quad (1.47)$$

$$u(t) \in U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [0, 1]; \quad (1.48)$$

$$x(0) - 1 = 0, \quad x(1) - 1 = 0. \quad (1.49)$$

Ограничения (1.4) типа неравенств в задаче отсутствуют.

Решение

Эта задача относится к вырожденным задачам классического вариационного исчисления. Она имеет очевидное решение: $\hat{x}(t) \equiv 1$, $\hat{u}(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$. Покажем, как это решение получается на основе принципа максимума.

0) Формализация: задача уже формализована.

1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^1 L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$L \equiv \lambda_0(x - 1)^2 + p(\dot{x} - u) \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv pu - \lambda_0(x - 1)^2;$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_1(x(0) - 1) + \lambda_2(x(1) - 1);$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

2) Система условий принципа максимума в задаче (1.46)–(1.49):

a) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad (\Leftrightarrow \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x}) \Rightarrow$$

$$\dot{\hat{p}}(t) = 2\hat{\lambda}_0(\hat{x}(t) - 1);$$

б) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 0; k = 1, t_1 = 1$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \quad (\Leftrightarrow \hat{p}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)}) \Rightarrow$$

$$\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}(1) = -\hat{\lambda}_2;$$

в) условие оптимальности по u :

Так как $L(u) = -\hat{p}u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\hat{u}(t) = \arg \underset{u \in U}{\operatorname{abs min}} L(u) \equiv$$

$$\equiv \arg \underset{u \in U}{\operatorname{abs max}} H(u) \equiv \arg \underset{u \in (-\infty, +\infty)}{\operatorname{abs max}} (\hat{p}(t)u);$$

г) условия стационарности по t_0, t_1 в задаче отсутствуют, так как t_0, t_1 — фиксированы ($t_0 = 0, t_1 = 1$);

д) условия дополняющей нежесткости отсутствуют, так как в задаче нет условий (1.4) типа неравенств;

е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$;

ж) условие НЕРОН;

з) условие нормировки множителей Лагранжа.

3) Аномальный случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ в задаче невозможен, так как при $\hat{\lambda}_0 = 0$ из условия а) следует $\hat{p}(t) = \text{const } \forall t \in [0, 1]$ и возможны три подслучаи:

α) $\hat{p}(t) = \text{const} < 0 \quad \forall t \in [0, 1] \xrightarrow{\text{б)}}$ оптимальное управление \hat{u} не существует: $\hat{u} = -\infty \quad \forall t \in [0, 1]$;

β) $\hat{p}(t) = \text{const} > 0 \quad \forall t \in [0, 1] \xrightarrow{\text{б)}$ оптимальное управление \hat{u} не существует: $\hat{u} = +\infty \quad \forall t \in [0, 1]$;

$\gamma)$ $\hat{p}(t) = \text{const} \equiv 0, t \in [0, 1] \stackrel{6)}{\Rightarrow} \hat{\lambda}_1 = 0, \hat{\lambda}_2 = 0$ (все множители Лагранжа обращаются в ноль) \Rightarrow не выполняется условие НЕРОН.

Так как $\hat{\lambda}_0 \neq 0$, то по условию е) $\hat{\lambda}_0 > 0$. Приняв $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ (условие нормировки), преобразуем условия (1.47), а), в), (1.49) в краевую задачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t), & \hat{u}(t) = \arg \max_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{p}(t)u), \\ \dot{\hat{p}}(t) = \hat{x}(t) - 1; & \hat{x}(0) = 1, \quad \hat{x}(1) = 1. \end{cases} \quad (1.50)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений, и для их определения имеется два краевых условия. Условия б): $\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \hat{p}(1) = -\hat{\lambda}_2$ в краевую задачу не включаются, так как они служат для определения множителей $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$, которые на решение краевой задачи не влияют, и потому их определять не требуется. Решим эту краевую задачу.

Так как $u \in (-\infty, +\infty)$, то при $\hat{p}(t) \neq 0$ оптимальное управление $\hat{u}(t)$ не существует: $\hat{u}(t) = \pm\infty \forall t \in [0, 1]$. При $\hat{p}(t) \equiv 0, t \in [0, 1]$, оптимальное управление $\hat{u}(t)$ из условия оптимальности по u определить нельзя, и управление \hat{u} в этом случае на всем отрезке $[0, 1]$ по определению будет *особым*. Это управление и одновременно решение задачи в целом найдем: 1) подставив $\hat{p}(t) \equiv 0, \dot{\hat{p}}(t) \equiv 0, t \in [0, 1]$ во второе дифференциальное уравнение краевой задачи и определив $\hat{x}(t) \equiv 1, t \in [0, 1]$; 2) подставив $\hat{x}(t) \equiv 1, t \in [0, 1]$ в первое дифференциальное уравнение краевой задачи и определив $\hat{u}(t) \equiv 0, t \in [0, 1]$. Краевые условия $\hat{x}(0) = 1, \hat{x}(1) = 1$ на полученном решении выполняются.

В итоге решением краевой задачи будут функции: $\hat{x}(t) \equiv 1, \hat{u}(t) \equiv 0, \hat{p}(t) \equiv 0, t \in [0, 1]$. При этом числовые множители Лагранжа принимают значения: $\hat{\lambda}_1 = 1, \hat{\lambda}_2 = 0$. Еще раз подчеркнем, что оптимальное управление $\hat{u}(t)$ на всей оптимальной траектории $\hat{x}(t)$ — особое.

- 4) Очевидно, что экстремаль $\hat{x}(t) \equiv 1$, $t \in [0, 1]$ доставляет функционалу $I(x(\cdot))$ абсолютный минимум. При этом

$$\inf I(x(\cdot)) \equiv \text{abs min } I(x(\cdot)) \equiv I(\hat{x}(\cdot)) = 0.$$

Пример 9. Задача классического вариационного исчисления — задача быстродействия с изопериметрическим условием типа неравенства, фиксированными начальным и конечным значениями фазовой переменной.

$$T(x(\cdot), T) \equiv T \rightarrow \inf, \quad T > 0;$$

$$x(0) = x(T) = 0; \quad \int_0^T (\dot{x}^2(t) - 4x(t)) dt \leq -\frac{1}{3}.$$

Решение

- 0) Формализация: обозначим $\dot{x}(t) = u(t)$, тогда

$$B_0(x(\cdot), u(\cdot), T) \equiv T \rightarrow \inf, \quad T > 0; \quad (1.51)$$

$$\dot{x}(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 = \Delta \equiv [0, T]; \quad (1.52)$$

$$u(t) \in U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [0, T]; \quad (1.53)$$

$$x(0) = 0, \quad x(T) = 0; \quad (1.54)$$

$$\int_0^T (u^2(t) - 4x(t)) dt + \frac{1}{3} \leq 0. \quad (1.55)$$

Неравенство $T > 0$ считается проверочным, так как (поскольку оно строгое) его включение в ограничения (1.55) в силу соответствующего ему условия дополняющей нежесткости на решение задачи не повлияет (см. выше Примеры 1.3.1, 1.3.1).

- 1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^T L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$L \equiv p(\dot{x} - u) + \lambda(u^2 - 4x) \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понтрягина:

$$H \equiv pu - \lambda(u^2 - 4x);$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_0 T + \lambda_1 x(0) + \lambda_2 x(T);$$

$\lambda, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

- 2) Система условий принципа максимума в задаче (1.51)–(1.55):

a) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \right) \Rightarrow \\ \dot{\hat{p}}(t) = -4\hat{\lambda};$$

б) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 0; k = 1, t_1 = T$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(\hat{t}_k)} \quad \left(\Leftrightarrow \hat{p}(\hat{t}_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(\hat{t}_k)} \right) \Rightarrow \\ \hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}(\hat{T}) = -\hat{\lambda}_2;$$

в) условие оптимальности по u :

Так как $L(u) = \hat{\lambda}u^2 - \hat{p}u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\hat{u}(t) = \arg \min_{u \in U} L(u) \equiv \arg \min_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{\lambda}u^2 - \hat{p}(t)u),$$

или, что то же самое,

$$\hat{u}(t) = \arg \max_{u \in U} H(u) \equiv \arg \max_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{p}(t)u - \hat{\lambda}u^2);$$

г) условие стационарности по t_0 в задаче отсутствует, так как t_0 — фиксировано ($t_0 = 0$); условие стационарности по T (с учетом условия $\hat{x}(\hat{T}) = 0$):

$$\frac{d\hat{L}}{dT} = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \hat{H}(\hat{T}) = \frac{\partial \hat{l}}{\partial T} \right) \Rightarrow \\ \hat{p}(\hat{T})\hat{u}(\hat{T}) - \hat{\lambda}(\hat{u}^2(\hat{T}) - 4 \cdot 0) = \hat{\lambda}_0;$$

д) условие дополняющей нежесткости:

$$\hat{\lambda} \cdot \left(\int_0^{\hat{T}} (\hat{u}^2(t) - 4\hat{x}(t)) dt + \frac{1}{3} \right) = 0;$$

- е) условия неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0, \hat{\lambda} \geq 0$;
- ж) условие НЕРОН;
- з) условие нормировки множителей Лагранжа.

3) Условия (1.52)–(1.54), а)–з) представляют собой краевую задачу (исходную краевую задачу принципа максимума):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = -4\hat{\lambda}; \\ \hat{u}(t) = \arg \underset{u \in (-\infty, +\infty)}{\operatorname{abs max}} (\hat{p}(t)u - \hat{\lambda}u^2), \\ \hat{x}(0) = 0, \quad \hat{x}(\hat{T}) = 0; \\ \hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}(\hat{T}) = -\hat{\lambda}_2; \\ \hat{p}(\hat{T})\hat{u}(\hat{T}) - \hat{\lambda}\hat{u}^2(\hat{T}) = \hat{\lambda}_0; \\ \hat{\lambda} \cdot \left(\int_0^{\hat{T}} (\hat{u}^2(t) - 4\hat{x}(t)) dt + \frac{1}{3} \right) = 0; \\ \hat{T} > 0; \quad \hat{\lambda}_0 \geq 0, \quad \hat{\lambda} \geq 0; \\ \text{условие НЕРОН; условие нормировки.} \end{cases} \quad (1.56)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений, время \hat{T} и множители Лагранжа $\hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ (7 неизвестных), и для их определения имеется два краевых условия исходной задачи, два следствия условия трансверсальности, следствие условия стационарности по T , условие дополняющей нежесткости и условие нормировки множителей Лагранжа (7 условий). Условия $\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \hat{p}(\hat{T}) = -\hat{\lambda}_2$ из краевой задачи можно исключить, так как они служат для определения множителей $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$, которые привносятся в задачу методом ее решения, на решение краевой задачи не влияют, и потому их определять не требуется. После исключения из краевой задачи этих условий в ней будет 5 неизвестных и 5 условий для их определения.

При $\hat{\lambda} = 0$ либо $\hat{p}(t) \equiv 0$, и тогда все множители Лагранжа равны нулю, что невозможно, либо $\hat{p}(t) \equiv c \neq 0$, и тогда оптимальное управление не существует: $\hat{u}(t) = \pm\infty \forall t \in [0, \hat{T}]$. Поэтому случай $\hat{\lambda} = 0$ невозможен.

При $\hat{\lambda} \neq 0$, учитывая $\hat{\lambda} \geq 0$ и возможность выбора множителей Лагранжа с точностью до положительного сомножителя, положим $\hat{\lambda} = 1/2$ (выбрали условие нормировки). В этом случае $\hat{u}(t) = p(t)$, $\dot{p}(t) = -2$, $\hat{\lambda}_0 = p^2(\hat{T})/2$, и потому условие $\hat{\lambda} \geq 0$ выполняется автоматически. Введение дополнительной переменной $y(t)$ позволяет избавиться от интеграла и свести исходную краевую задачу к следующей:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = -2, \\ \dot{\hat{y}}(t) = \hat{p}^2(t) - 4\hat{x}(t), \\ \hat{x}(0) = 0, \quad \hat{x}(\hat{T}) = 0, \\ \hat{y}(0) = 0, \quad \hat{y}(\hat{T}) = -1/3; \\ \hat{T} > 0. \end{cases} \quad (1.57)$$

Решим краевую задачу: $\hat{p}(t) = -2t + c$, $\hat{x}(t) = -t^2 + ct$ (так как $x(0) = 0$). Из $\hat{x}(\hat{T}) = 0$, $\hat{T} > 0$ следует $c = \hat{T}$. Из $\hat{y}(t) = (-2t + c)^2 - 4(-t^2 + ct) = 8t^2 - 8ct + c^2$, $y(0) = 0$ следует $\hat{y}(t) = 8t^3/3 - 4ct^2 + c^2t$. Условие $\hat{y}(\hat{T}) = -1/3$ замыкает решение краевой задачи, позволяя определить оставшиеся неизвестные: $8c^3/3 - 4c^3 + c^3 = -1/3$, $c^3 = 1$, $c = \hat{T} = 1$.

Таким образом определены все неизвестные краевой задачи принципа максимума: $\hat{T} = 1$, $\hat{x}(t) = -t^2 + t$, $\hat{p}(t) = -2t + 1 \forall t \in [0, 1]$, $\hat{\lambda}_1 = 1$, $\hat{\lambda}_2 = 1$, $\hat{\lambda}_0 = 1/2$.

- 4) Исследуем полученное решение $\hat{x}(\cdot)$, \hat{T} на абсолютную оптимальность. Непосредственной проверкой покажем, что $\hat{x}(\cdot)$, \hat{T} доставляют функционалу абсолютный минимум. Для этого возмутим $\hat{x}(\cdot)$ и \hat{T} посредством функции $x(\cdot)$ и ΔT , так чтобы функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ и время $T = \hat{T} + \Delta T$ остались допустимыми. В рассматриваемой задаче функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ и время T будут допустимыми, если

$$x(\cdot) \in C^1([0, T]), \quad \dot{x}(0) + x(0) = 0, \quad \dot{x}(T) + x(T) = 0, \\ \int_0^T ((\dot{x}(t) + \dot{x}(t))^2 - 4(\dot{x}(t) + x(t))) dt \leq -1/3, \quad T > 0.$$

1.3.2. Задачи Лагранжа

Пример 1. Задача Лагранжа с дифференциальной связью первого порядка и фиксированными начальными и конечными значениями времени и фазовой переменной.

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^1 (u^2(t) - 2x(t)) dt \rightarrow \inf,$$

$$\dot{x}(t) + x(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^1 \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$x(0) = 1, \quad x(1) + 1/e = 1 + e.$$

Решение

0) Формализация:

$$B_0(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^1 (u^2(t) - 2x(t)) dt \rightarrow \inf; \quad (1.58)$$

$$\dot{x}(t) + x(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 = \Delta \equiv [0, 1]; \quad (1.59)$$

$$u(t) \in U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [0, 1]; \quad (1.60)$$

$$x(0) - 1 = 0, \quad x(1) + 1/e - 1 - e = 0. \quad (1.61)$$

Ограничения (1.4) типа неравенств в задаче отсутствуют.

1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^1 L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$L \equiv \lambda_0(u^2 - 2x) + p(\dot{x} + x - u) \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv p(-x + u) - \lambda_0(u^2 - 2x);$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_1(x(0) - 1) + \lambda_2(x(1) + 1/e - 1 - e);$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

- 2) Система условий принципа максимума в задаче (1.58)–(1.61):

a) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \right) \Rightarrow \\ \dot{\hat{p}}(t) = \hat{p}(t) - 2\hat{\lambda}_0;$$

б) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 0; k = 1, t_1 = 1$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \quad \left(\Leftrightarrow \hat{p}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \right) \Rightarrow \\ \hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}(1) = -\hat{\lambda}_2;$$

в) условие оптимальности по u :

так как $L(u) = \hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\hat{u}(t) = \arg \min_{u \in U} L(u) \equiv \arg \min_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}(t)u),$$

или

$$\hat{u}(t) = \arg \max_{u \in U} H(u) \equiv \arg \max_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{p}(t)u - \hat{\lambda}_0 u^2).$$

Так как в рассматриваемой задаче случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ невозможен (см. анализ условия в) в Примере 1 для задач классического вариационного исчисления), и $U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty)$, то оптимальное управление $\hat{u}(t)$ может быть определено из условий $\partial \hat{L}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{L}/\partial u^2 > 0$ (или $\partial \hat{H}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{H}/\partial u^2 < 0$):

$$2\hat{\lambda}_0 \hat{u}(t) - \hat{p}(t) = 0, \quad \hat{\lambda}_0 > 0 \\ (\text{или } \hat{p}(t) - 2\hat{\lambda}_0 \hat{u}(t) = 0, \quad \hat{\lambda}_0 > 0);$$

- г) условия стационарности по t_0, t_1 в задаче отсутствуют, так как t_0, t_1 — фиксированы ($t_0 = 0, t_1 = 1$);
- д) условия дополняющей нежесткости отсутствуют, так как в задаче нет условий (1.4) типа неравенств;
- е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$;
- ж) условие НЕРОН;
- з) условие нормировки множителей Лагранжа.
- 3) Так как аномальный случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ в рассматриваемой задаче невозможен (см. условие в)) и по условию е) $\hat{\lambda}_0 > 0$, то в качестве $\hat{\lambda}_0$ можно взять любое положительное число, в частности, $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ (условие нормировки). Вследствие этого в условии в) $\hat{u}(t) = \hat{p}(t)$. Подставив $\hat{u}(t) = \hat{p}(t)$ в уравнение (1.59) и $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ в уравнение а), преобразуем условия (1.59), а), (1.61) в краевую задачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) + \hat{x}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) - \hat{p}(t) = -1; \\ \hat{x}(0) = 1, \quad \hat{x}(1) = 1 + e - 1/e. \end{cases} \quad (1.62)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений, и для их определения имеется два краевых условия. Условия б): $\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \hat{p}(1) = -\hat{\lambda}_2$, в краевую задачу не включаются, так как они служат для определения множителей $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$, которые привносятся в задачу методом ее решения, на решение краевой задачи не влияют, и поэтому их определять не требуется.

Решив эту краевую задачу:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{p}}(t) &= \hat{p}(t) - 1, \quad d\hat{p}(t)/(\hat{p}(t) - 1) = dt, \\ \ln |\hat{p}(t) - 1| &= t + A, \quad \hat{p}(t) = 1 + c_1 e^t \quad (c_1 = e^A); \\ \dot{\hat{x}}(t) + \hat{x}(t) &= 1 + c_1 e^t, \quad \hat{x}(t) = 1 + \frac{1}{2} c_1 e^t + c_2 e^{-t}; \\ \hat{x}(0) &= 1, \quad \hat{x}(1) = 1 + e - 1/e \Rightarrow \\ \Rightarrow c_1 &= 2, \quad c_2 = -1, \end{aligned}$$

получим допустимую экстремаль (экстремаль Понtryги-на): $\hat{x}(t) = 1 + e^t - e^{-t} \forall t \in [0, 1]$ и оптимальное управление: $\hat{u}(t) = 1 + 2e^t \forall t \in [0, 1]$.

- 4) Исследуем полученное решение $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{u}(\cdot)$ на абсолютную оптимальность. Непосредственной проверкой покажем, что $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{u}(\cdot)$ доставляют функционалу абсолютный минимум. Для этого возмущим $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{u}(\cdot)$ посредством функций $x(\cdot)$, $u(\cdot)$, так чтобы функции $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$, $\hat{u}(\cdot) + u(\cdot)$ остались допустимыми. В рассматриваемой задаче функции $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$, $\hat{u}(\cdot) + u(\cdot)$ будут допустимыми, если $x(\cdot) \in C^1([0, 1])$, $u(\cdot) \in C([0, 1])$, $\hat{x}(0) + x(0) = 1$, $\hat{x}(1) + x(1) = 1 + e - 1/e$, $\dot{\hat{x}}(t) + \dot{x}(t) + (\hat{x}(t) + x(t)) = \hat{u}(t) + u(t)$. А поскольку по условию (1.61) $\hat{x}(0) = 1$, $\hat{x}(1) = 1 + e - 1/e$ и $\dot{\hat{x}}(t) + \hat{x}(t) = \hat{u}(t)$, то $x(0) = 0$, $x(1) = 0$, $\dot{x}(t) + x(t) = u(t)$. Определим с учетом полученных условий знак приращения функционала:

$$\begin{aligned}\Delta I &\equiv I(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot), \hat{u}(\cdot) + u(\cdot)) - I(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) \equiv \\ &\equiv \int_0^1 [\hat{u}(t) + u(t)] dt - \int_0^1 [\hat{x}(t) + x(t)] dt \equiv \\ &\equiv \int_0^1 2\hat{u}u dt + \int_0^1 u^2 dt - \int_0^1 2x dt = \\ &= \int_0^1 2\hat{u}(\dot{x} + x) dt - \int_0^1 2x dt + \int_0^1 u^2 dt \geq \\ &\geq \int_0^1 2\hat{u}\dot{x} dt + \int_0^1 2\hat{u}x dt - \int_0^1 2x dt \equiv \\ &\equiv \int_0^1 2\hat{u} dx + \int_0^1 2(\hat{u} - 1)x dt \equiv \\ &\equiv 2\hat{u}(t)x(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 2\dot{\hat{u}}x dt + \int_0^1 2(\hat{u} - 1)x dt \equiv \\ &\equiv 2\hat{u}(1) \cdot 0 - 2\hat{u}(0) \cdot 0 + \int_0^1 2(\hat{u} - \dot{\hat{u}} - 1)x dt \equiv \\ &\equiv \int_0^1 2 \cdot 0 \cdot x dt \equiv 0.\end{aligned}$$

Так как при любых допустимых возмущениях $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ полученного решения $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{u}(\cdot)$ функционал I не убывает: $\Delta I \geq 0$, то функции $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{u}(\cdot)$ доставляют ему абсолютный минимум. При этом

$$\begin{aligned}\inf I(x(\cdot), u(\cdot)) &\equiv \text{abs min } I(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv I(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) = \\ &= 2e^2 + 2e - 2/e - 3.\end{aligned}$$

Пример 2. Задача Лагранжа с дифференциальной связью второго порядка и фиксированными начальными и конечными значениями времени и фазовой переменной.

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^1 (u^2(t) + 2x(t)) dt \rightarrow \inf,$$

$$\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

Решение

0) Формализация: обозначим $x(t) = x_1(t)$, $\dot{x}(t) = x_2(t)$, тогда

$$B_0(x_1(\cdot), x_2(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^1 (u^2(t) + 2x_1(t)) dt \rightarrow \inf; \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) - x_2(t) &= 0, \\ \dot{x}_2(t) - u(t) &= 0 \quad \forall t \in \Delta_0 = \Delta \equiv [0, 1]; \end{aligned} \quad (1.64)$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^1 \equiv U \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [0, 1]; \quad (1.65)$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_1(1) = 0. \quad (1.66)$$

Ограничения (1.4) типа неравенств в задаче отсутствуют.

1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^1 L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$\begin{aligned} L &\equiv \lambda_0(u^2 + 2x_1) + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u) \\ &\equiv p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{x}_2 - H; \end{aligned}$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv p_1x_2 + p_2(x_2 + u) - \lambda_0(u^2 + 2x_1);$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_1x_1(0) + \lambda_2x_1(1);$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2; p_1 \equiv p_1(t), p_2 \equiv p_2(t)$ — числовые и функциональные множители Лагранжа.

2) Система условий принципа максимума в задаче (1.63)–(1.66):

a) уравнения Эйлера–Лагранжа ($i = 1, 2$):

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}_i}(t) + \hat{L}_{x_i}(t) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x_i}\right) \Rightarrow$$

$$\dot{p}_1(t) = 2\hat{\lambda}_0; \quad \dot{p}_2(t) = -\hat{p}_1(t) - \hat{p}_2(t);$$

б) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 0; k = 1, t_1 = 1; i = 1, 2$):

$$\hat{L}_{\dot{x}_i}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x_i(t_k)} \quad \left(\Leftrightarrow \hat{p}_i(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x_i(t_k)}\right) \Rightarrow$$

$$\hat{p}_1(0) = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}_1(1) = -\hat{\lambda}_2; \quad \hat{p}_2(0) = 0, \quad \hat{p}_2(1) = 0;$$

в) условие оптимальности по u :

так как $L(u) = \hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}_2 u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\hat{u}(t) = \arg \min_{u \in U} L(u) \equiv \arg \min_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}_2(t)u),$$

или

$$\hat{u}(t) = \arg \max_{u \in U} H(u) \equiv \arg \max_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{p}_2(t)u - \hat{\lambda}_0 u^2).$$

Так как в рассматриваемой задаче случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ невозможен (см. выше в Примере 1 для задач классического вариационного исчисления анализ условия в)), и $U \equiv \mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty)$, то оптимальное управление $\hat{u}(t)$ может быть определено из условий $\partial \hat{L}/\partial u = 0, \partial^2 \hat{L}/\partial u^2 > 0$ (или $\partial \hat{H}/\partial u = 0, \partial^2 \hat{H}/\partial u^2 < 0$):

$$2\hat{\lambda}_0 \hat{u}(t) - \hat{p}_2(t) = 0, \quad \hat{\lambda}_0 > 0$$

$$(\text{или } \hat{p}_2(t) - 2\hat{\lambda}_0 \hat{u}(t) = 0, \quad \hat{\lambda}_0 > 0);$$

- г) условия стационарности по t_0, t_1 в задаче отсутствуют, так как t_0, t_1 — фиксированы ($t_0 = 0, t_1 = 1$);
- д) условия дополняющей нежесткости отсутствуют, так как в задаче нет условий (1.4) типа неравенств;
- е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$;
- ж) условие НЕРОН;
- з) условие нормировки множителей Лагранжа.
- 3) Так как аномальный случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ в рассматриваемой задаче невозможен (см. условие в)) и по условию е) $\hat{\lambda}_0 > 0$, то в качестве $\hat{\lambda}_0$ можно взять любое положительное число, в частности, $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ (условие нормировки). Вследствие этого в условии в) $\hat{u}(t) = \hat{p}_2(t)$. Подставив $\hat{u}(t) = \hat{p}_2(t)$ в уравнения (1.64) и $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ в уравнения а), преобразуем условия (1.64), (1.66), а), б) в краевую задачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t), \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_2(t) + \hat{p}_2(t), \\ \dot{\hat{p}}_1(t) = 1, \\ \dot{\hat{p}}_2(t) = -\hat{p}_1(t) - \hat{p}_2(t); \\ \hat{x}_1(0) = 0, \hat{x}_1(1) = 0; \quad \hat{p}_2(0) = 0, \hat{p}_2(1) = 0. \end{cases} \quad (1.67)$$

В этой краевой задаче неизвестны четыре постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений, и для их определения имеется четыре краевых условия. Условия б): $\hat{p}_1(0) = \hat{\lambda}_1, \hat{p}_1(1) = -\hat{\lambda}_2$, в краевую задачу не включаются, так как они служат для определения множителей $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$, которые на решение краевой задачи не влияют, и потому их определять не требуется. Решим эту краевую задачу.

Так как $\dot{\hat{p}}_1(t) = 1$, то $\hat{p}_1(t) = t + c_1, \dot{\hat{p}}_2(t) + \hat{p}_2(t) = -t - c_1$. Общим решением однородного уравнения $\dot{\hat{p}}_2(t) + \hat{p}_2(t) = 0$ будет функция $\hat{p}_{20}(t) = ce^{-t}$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде: $\hat{p}_{2\text{ч}}(t) = At + B$. Подставив $\hat{p}_{2\text{ч}}(t)$ в неоднородное уравнение, получим: $A = -1, B = 1 - c_1$. А тогда $\hat{p}_2(t) = ce^{-t} - t + 1 - c_1$

— общее решение неоднородного уравнения. Определив c, c_1 из условий $\hat{p}_2(0) = 0, \hat{p}_2(1) = 0$: $c = -e/(e-1)$, $c_1 = -1/(e-1)$, найдем функции $\hat{p}_2(t), \hat{u}(t)$:

$$\hat{p}_2(t) = \hat{u}(t) = -t + \frac{e}{e-1}(1 - e^{-t}).$$

Подставив $\hat{u}(t)$ в исходное дифференциальное уравнение для $\hat{x}(t)$, получим:

$$\ddot{\hat{x}}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = -t + \frac{e}{e-1}(1 - e^{-t}). \quad (1.68)$$

Общим решением уравнения (1.68) будет сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Общим решением однородного уравнения $\ddot{\hat{x}}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = 0$ будет функция $\hat{x}_{\text{оо}}(t) = M + Ne^t$ ($k^2 - k = 0$ — характеристический многочлен уравнения; $k_1 = 0, k_2 = 1$ — корни многочлена). Поскольку $k_1 = 0$, то частное решение неоднородного уравнения $\hat{x}_{\text{чн}}(t)$ следует искать в виде: $\hat{x}_{\text{чн}}(t) = Pe^{-t} + t(Lt + Q)$. Коэффициенты P, L, Q определим, подставив $\hat{x}_{\text{чн}}(t)$ в уравнение (1.68):

$$P = -\frac{e}{2(e-1)}, \quad L = \frac{1}{2}, \quad Q = -\frac{1}{e-1}.$$

А тогда

$$\hat{x}(t) = M + Ne^t - \frac{e}{2(e-1)}e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{e-1}t$$

— общее решение неоднородного уравнения (1.68). Определив M и N из краевых условий $\hat{x}(0) = 0, \hat{x}(1) = 0$, получим искомую экстремаль (экстремаль Понtryгина):

$$\hat{x}(t) = \frac{e^2 + e - 4}{2(e-1)^2} - \frac{e-2}{(e-1)^2}e^t - \frac{e}{2(e-1)}e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{e-1}t.$$

- 4) Исследуем полученное решение $\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)$ на абсолютную оптимальность. Непосредственной проверкой покажем, что $\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)$ доставляют функционалу абсолютный минимум. Для этого возьмутим $\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)$ посредством функций $x(\cdot), u(\cdot)$, так чтобы функции $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$,

$\hat{u}(\cdot) + u(\cdot)$ остались допустимыми. В рассматриваемой задаче функции $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$, $\hat{u}(\cdot) + u(\cdot)$ будут допустимыми, если $x(\cdot) \in C^2([0, 1])$, $u(\cdot) \in C([0, 1])$, $\ddot{\hat{x}} + \ddot{x} - (\dot{\hat{x}} + \dot{x}) = \hat{u} + u$, $\hat{x}(0) + x(0) = 0$, $\hat{x}(1) + x(1) = 0$. А поскольку по условию задачи $\hat{x}(0) = 0$, $\hat{x}(1) = 0$, $\ddot{\hat{x}} - \dot{\hat{x}} = \hat{u}$, то $x(0) = 0$, $x(1) = 0$, $\ddot{x} - \dot{x} = u$. Определим с учетом полученных условий знак приращения функционала:

$$\begin{aligned}
\Delta I &\equiv I(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot), \hat{u}(\cdot) + u(\cdot)) - I(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) \equiv \\
&\equiv \int_0^1 [(\hat{u} + u)^2 + 2(\hat{x} + x)] dt - \int_0^1 (\hat{u}^2 + 2\hat{x}) dt \equiv \\
&\equiv \int_0^1 2\hat{u}u dt + \int_0^1 u^2 dt + \int_0^1 2x dt \geq \\
&\geq \int_0^1 2\hat{u}(\ddot{x} - \dot{x}) dt + \int_0^1 2x dt \equiv \\
&\equiv \int_0^1 2\hat{u} d\dot{x} - \int_0^1 2\hat{u} dx + \int_0^1 2x dt \equiv \\
&\equiv 2\hat{u}(t)\dot{x}(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 2\dot{x} \cdot \dot{\hat{u}} dt - \\
&- 2\hat{u}(t)x(t) \Big|_0^1 + \int_0^1 2x \dot{\hat{u}} dt + \int_0^1 2x dt \equiv \\
&\equiv 0 - \int_0^1 2\dot{\hat{u}} dx - 0 + \int_0^1 2\dot{\hat{u}} x dt + \int_0^1 2x dt \equiv \\
&\equiv -2\dot{\hat{u}}(t)x(t) \Big|_0^1 + \int_0^1 2\ddot{\hat{u}}x dt + \int_0^1 2\dot{\hat{u}}x dt + \int_0^1 2x dt \equiv \\
&\equiv 0 + \int_0^1 2(\ddot{\hat{u}} + \dot{\hat{u}} + 1)x dt \equiv \\
&\equiv \int_0^1 2 \cdot 0 \cdot x dt \equiv 0.
\end{aligned}$$

Так как при любых допустимых возмущениях $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ полученного решения $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{u}(\cdot)$ функционал I не убывает: $\Delta I \geq 0$, то функции $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{u}(\cdot)$ доставляют ему абсолютный минимум. При этом

$$\begin{aligned}
\inf I(x(\cdot), u(\cdot)) &\equiv \text{abs min } I(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv I(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) = \\
&= 3(2e - 3)/(e - 1)^2 - 7.
\end{aligned}$$

Пример 3. Задача Лагранжа с функционалом Больца, фиксированными начальными и конечными значениями времени и краевым условием типа неравенства.

$$\begin{aligned}
B_0(x(\cdot), u(\cdot)) &\equiv \int_1^2 u^2(t) dt + x^2(1) \rightarrow \inf, \\
\dot{x}(t) &= \frac{1}{t}x(t) + u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [1, 2], \\
x(2) &\leq 3.
\end{aligned}$$

Решение

В этой задаче абсолютный минимум функционала достигается, очевидно, при $\hat{x}(t) \equiv 0$, $\hat{u}(t) \equiv 0$, $t \in [1, 2]$. Покажем, как это решение получается на основе принципа максимума.

0) Формализация:

$$B_0(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_1^2 u^2(t) dt + x^2(1) \rightarrow \inf; \quad (1.69)$$

$$\dot{x}(t) - \frac{1}{t}x(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 = \Delta \equiv [1, 2]; \quad (1.70)$$

$$u(t) \in U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [1, 2]; \quad (1.71)$$

$$x(2) - 3 \leq 0. \quad (1.72)$$

Ограничения (1.3) типа равенств в задаче отсутствуют.

1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_1^2 L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$L \equiv \lambda_0 u^2 + p(\dot{x} - \frac{1}{t}x - u) \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv pu - \lambda_0 u^2 + p\frac{x}{t};$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_0 x^2(1) + \lambda(x(2) - 3);$$

$\lambda_0, \lambda; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

2) Система условий принципа максимума в задаче (1.69)–(1.72):

а) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x}\right) \Rightarrow \\ \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{1}{t}\hat{p}(t);$$

б) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 1; k = 1, t_1 = 2$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \quad \left(\Leftrightarrow \hat{p}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)}\right) \Rightarrow \\ \hat{p}(1) = 2\hat{\lambda}_0 \hat{x}(1), \quad \hat{p}(2) = -\hat{\lambda};$$

в) условие оптимальности по u :

так как $L(u) = \hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\hat{u}(t) = \arg \operatorname{abs} \min_{u \in U} L(u) \equiv \arg \operatorname{abs} \min_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}(t)u),$$

или

$$\hat{u}(t) = \arg \operatorname{abs} \max_{u \in U} H(u) \equiv \arg \operatorname{abs} \max_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{p}(t)u - \hat{\lambda}_0 u^2).$$

Так как случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ невозможен (см. анализ условия в) в Примере 1 для задач классического вариационного исчисления) и $U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty)$, то оптимальное управление $\hat{u}(t)$ может быть определено из условий $\partial \hat{L}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{L}/\partial u^2 > 0$ (или $\partial \hat{H}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{H}/\partial u^2 < 0$):

$$2\hat{\lambda}_0 \hat{u}(t) - \hat{p}(t) = 0, \quad \hat{\lambda}_0 > 0 \\ (\text{или } \hat{p}(t) - 2\hat{\lambda}_0 \hat{u}(t) = 0, \quad \hat{\lambda}_0 > 0);$$

г) условия стационарности по t_0, t_1 в задаче отсутствуют, так как t_0, t_1 – фиксированы ($t_0 = 1, t_1 = 2$);

д) условие дополняющей нежесткости:

$$\hat{\lambda} \cdot (\hat{x}(2) - 3) = 0;$$

- е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$, $\hat{\lambda} \geq 0$;
- ж) условие НЕРОН;
- з) условие нормировки множителей Лагранжа.
- 3) Так как по условию в) аномальный случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ в рассматриваемой задаче невозможен, то по условию е) $\hat{\lambda}_0 > 0$ и в качестве $\hat{\lambda}_0$ можно взять любое положительное число, в частности, $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ (условие нормировки). Вследствие этого в условии в) $\hat{u}(t) = \hat{p}(t)$. Подставив $\hat{u}(t) = \hat{p}(t)$ в уравнение (1.70), а $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ в первое из условий б), преобразуем условия (1.70), а), б), д) в краевую задачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \frac{1}{t}\hat{x}(t) + \hat{p}(t), & \hat{u}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{1}{t}\hat{p}(t); & \\ \hat{p}(1) = \hat{x}(1), & \hat{p}(2) = -\hat{\lambda}; \quad \hat{\lambda} \cdot (\hat{x}(2) - 3) = 0. \end{cases} \quad (1.73)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений и множитель $\hat{\lambda}$, и для их определения имеется два краевых условия и условие дополняющей нежесткости.

Проинтегрировав систему дифференциальных уравнений краевой задачи с учетом условия $\hat{p}(1) = \hat{x}(1)$, получим:

$$\begin{aligned} \hat{p}(t) &= \frac{c}{t}; \quad \dot{\hat{x}}(t) = \frac{\hat{x}(t)+c}{t} \Rightarrow \hat{x}(t) = c_1 t - c; \\ \hat{p}(1) &= \hat{x}(1) \Rightarrow c_1 = 2c \Rightarrow \hat{x}(t) = 2ct - c. \end{aligned}$$

Далее, следуя Правилу решения краевых задач с условием дополняющей нежесткости (см. п. 3 Правил), необходимо с учетом второго условия е) рассмотреть два подслучаия: $\hat{\lambda} = 0$ и $\hat{\lambda} > 0$.

При $\hat{\lambda} = 0$ из второго краевого условия получим: $\hat{p}(2) = 0$. А тогда $c = 0$, $\hat{x}(t) \equiv 0$, $\hat{u}(t) \equiv 0$, $t \in [1, 2]$. При этом подлежащее проверке неравенство $\hat{x}(2) \leq 3$ очевидно выполняется.

При $\hat{\lambda} > 0$ из условия дополняющей нежесткости следует равенство $\hat{x}(2) - 3 = 0$, позволяющее определить константу c : $c = 1$. В итоге получаем решение:

$$\hat{x}(t) = 2t - 1, \quad \hat{u}(t) = \frac{1}{t} = \hat{p}(t) \quad \forall t \in [1, 2].$$

Ограничение $1/2 = \hat{p}(2) = -\lambda \leq 0$ на этом решении не выполняется, и оно не является решением краевой задачи принципа максимума.

- 4) Очевидно, что экстремаль $\hat{x}(t) \equiv 0$, $t \in [1, 2]$ и управление $\hat{u}(t) \equiv 0$, $t \in [1, 2]$ доставляют функционалу абсолютный минимум. При этом

$$\inf I(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \text{abs min } I(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv I(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) = 0.$$

Пример 4. Задача Лагранжа — задача быстродействия с изопериметрическим условием типа равенства, фиксированным начальным и нефиксированным конечным значениями фазовой переменной.

$$T(x(\cdot), u(\cdot), T) \equiv T \rightarrow \inf, \quad T > 0; \quad (1.74)$$

$$\dot{x}(t) - x(t) + tu(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 \equiv \Delta \equiv [0, T]; \quad (1.75)$$

$$u(t) \in U \equiv \{u(t) \mid 0 < u(t) < 2\} \quad \forall t \in [0, T]; \quad (1.76)$$

$$\int_0^T \sin^2 u(t) dt - 1 = 0, \quad x(0) - 1 = 0. \quad (1.77)$$

Ограничения (1.4) типа неравенств в задаче отсутствуют.

Решение

- 0) Формализация: задача уже formalизована.
1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^T L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$L \equiv p(\dot{x} - x + tu) + \lambda \cdot \sin^2 u \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv p(x - tu) - \lambda \cdot \sin^2 u;$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_0 T + \lambda_1 (x(0) - 1);$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

2) Система условий принципа максимума в задаче (1.74)–(1.77):

a) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \right) \Rightarrow \\ \dot{\hat{p}}(t) = -\hat{p}(t);$$

б) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 0; k = 1, t_1 = T$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \quad \left(\Leftrightarrow \hat{p}(\hat{t}_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \right) \Rightarrow \\ \hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}(\hat{T}) = 0;$$

в) условие оптимальности по u :

Так как $L(u) = \hat{p}tu + \hat{\lambda} \sin^2 u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \arg \min_{u \in (0,2)} (\hat{\lambda} \sin^2 u + \hat{p}(t)tu) \\ \text{или} \\ \hat{u}(t) &= \arg \max_{u \in (0,2)} (-\hat{\lambda} \sin^2 u - \hat{p}(t)tu); \end{aligned} \tag{1.78}$$

- г) условие стационарности по t_0 отсутствует, так как t_0 — фиксировано ($t_0 = 1$); условие стационарности по T :

$$\frac{d\hat{\mathcal{L}}}{dT} = 0 \quad (\Leftrightarrow \hat{H}(\hat{T}) = \frac{\partial \hat{I}}{\partial T}) \Rightarrow \\ \hat{p}(\hat{T})(\hat{x}(\hat{T}) - \hat{T}\hat{u}(\hat{T})) - \hat{\lambda} \sin^2 \hat{u}(\hat{T}) = \hat{\lambda}_0;$$

- д) условия дополняющей нежесткости отсутствуют, так как в задаче нет условий (1.4) типа неравенств, а условие $\hat{T} > 0$ в систему условий (1.4) не включается и считается проверочным;
- е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$;
- ж) условие НЕРОН;
- з) условие нормировки множителей Лагранжа.
- 3) Условия (1.75), (1.77), а)–г), е)–з) представляют собой краевую задачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{x}(t) - t\hat{u}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = -\hat{p}(t), \\ \hat{u}(t) = \arg \min_{u \in (0,2)} (\hat{\lambda} \sin^2 u + \hat{p}(t)t u); \\ \hat{x}(0) = 1; \quad \hat{p}(\hat{T}) = 0; \\ \hat{p}(\hat{T})(\hat{x}(\hat{T}) - \hat{T}\hat{u}(\hat{T})) - \hat{\lambda} \sin^2 \hat{u}(\hat{T}) = \hat{\lambda}_0; \\ \int_0^{\hat{T}} \sin^2 \hat{u}(t) dt = 1; \\ \hat{T} > 0; \quad \hat{\lambda}_0 \geq 0; \\ \text{условие НЕРОН; условие нормировки.} \end{array} \right. \quad (1.79)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений, время \hat{T} и множители $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda}$ (5 неизвестных), и для их определения имеется следствие условия стационарности по T , изопериметрическое условие, исходное краевое условие, следствие условий трансверсальности и условие нормировки (5 условий). Первое условие б): $\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1$, в краевую задачу не включается, так как оно служит для определения множителя $\hat{\lambda}_1$, который в краевую задачу не входит, на решение краевой задачи не влияет, и потому его определять не требуется. Решим краевую задачу.

Так как $\dot{\hat{p}}(t) = -\hat{p}(t)$, $\hat{p}(\hat{T}) = 0$, то $\hat{p}(t) \equiv 0$, $t \in [0, \hat{T}]$;
 $\hat{u}(t) = \arg \min_{u \in (0,2)} (\hat{\lambda} \sin^2 u)$, $-\hat{\lambda} \sin^2 \hat{u}(\hat{T}) = \hat{\lambda}_0$. Так как в

последнем равенстве $\hat{\lambda}_0 \geq 0$, $\sin^2 \hat{u}(\hat{T}) \geq 0$, то $\hat{\lambda} \leq 0$.

Если $\hat{\lambda} = 0$, то $\hat{\lambda}_0 = 0$. А поскольку $\hat{p}(t) \equiv 0$, $t \in [0, \hat{T}]$, то $\hat{\lambda}_1 = 0$, и не выполняется условие НЕРОН.

Если $\hat{\lambda} < 0$, то $\hat{u}(t) = \pi/2 \quad \forall t \in [0, \hat{T}]$, $-\hat{\lambda} \cdot 1 = \hat{\lambda}_0$, вследствие чего $\hat{\lambda}_0 > 0$. Положив $\hat{\lambda}_0 = 1$ (условие нормировки), получим: $\int_0^{\hat{T}} 1 dt = 1$, $\hat{T} = 1$. Решив далее задачу Коши: $\dot{\hat{x}}(t) = \hat{x}(t) - t\pi/2$, $\hat{x}(0) = 1$, получим: $\hat{x}(t) = e^t - \pi t^2/4 \quad \forall t \in [0, \hat{T}]$.

В результате решения краевой задачи принципа максимума получаем: время $\hat{T}=1$, управление $\hat{u}(t) = \pi/2 \quad \forall t \in [0, \hat{T}]$ и экстремаль Понtryгина $\hat{x}(t) = e^t - \pi t^2/4 \quad \forall t \in [0, \hat{T}]$.

- 4) Исследуем полученное решение на абсолютную оптимальность. Предположим, что существует T (значение функционала), для которого $T \leq \hat{T} = 1$. Очевидна оценка: $T \equiv \int_0^T 1 dt \geq \int_0^T \sin^2 u(t) dt = 1$, из которой следует: $T \geq 1$. А поскольку по предположению $T \leq \hat{T} = 1$, то $T = 1 = \hat{T}$, и следовательно, в рассматриваемой задаче $\hat{T} = 1$ — абсолютно минимальное значение T .

В итоге получаем:

$$\begin{aligned} \inf \mathcal{T}(x(\cdot), u(\cdot), T) &\equiv \operatorname{abs min} \mathcal{T}(x(\cdot), u(\cdot), T) \equiv \\ &\equiv \mathcal{T}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{T}) \equiv \hat{T} = 1, \\ \hat{x}(t) &= e^t - \pi t^2/4, \quad \hat{u}(t) = \pi/2 \quad \forall t \in [0, \hat{T}]. \end{aligned}$$

Пример 5. Задача Лагранжа, в которой решение существует лишь в аномальном случае — при $\hat{\lambda}_0 = 0$.

$$B_0(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^1 (u^2(t) + u(t)) dt \rightarrow \inf; \quad (1.80)$$

$$\dot{x}(t) - x(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 = \Delta \equiv [0, 1]; \quad (1.81)$$

$$u(t) \in U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [0, 1]; \quad (1.82)$$

$$\int_0^1 (x^2(t) + 2tx(t)) dt + \frac{1}{3} = 0, \quad x(1) + 1 = 0. \quad (1.83)$$

Ограничения (1.4) типа неравенств в задаче отсутствуют.

Решение

0) Формализация: задача уже formalизована.

1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^1 L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$L \equiv \lambda_0(u^2 + u) + p(\dot{x} - x - u) + \lambda(x^2 + 2tx) \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv p(x + u) - \lambda_0(u^2 + u) - \lambda(x^2 + 2tx);$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_1(x(1) + 1);$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

2) Система условий принципа максимума в задаче (1.80)–(1.83):

a) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \right) \Rightarrow$$

$$\dot{\hat{p}}(t) = -\hat{p}(t) + 2\hat{\lambda}(\hat{x}(t) + t);$$

б) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 0; k = 1, t_1 = 1$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \quad \left(\Leftrightarrow \hat{p}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \right) \Rightarrow$$

$$\hat{p}(0) = 0, \quad \hat{p}(1) = -\hat{\lambda}_1;$$

в) условие оптимальности по u :
так как $L(u) = \hat{\lambda}_0(u^2 + u) - \hat{p}u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\hat{u}(t) = \arg \operatorname{abs} \min_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{\lambda}_0(u^2 + u) - \hat{p}(t)u),$$

или

$$\hat{u}(t) = \arg \operatorname{abs} \max_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{p}(t)u - \hat{\lambda}_0(u^2 + u));$$

- г) условия стационарности по t_0, t_1 в задаче отсутствуют, так как t_0, t_1 — фиксированы ($t_0 = 0, t_1 = 1$);
- д) условие дополняющей нежесткости отсутствуют, так как в задаче нет условий (1.4) типа неравенств;
- е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$;
- ж) условие НЕРОН;
- з) условие нормировки множителей Лагранжа.

3) Запишем изопериметрическое условие в виде:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (\hat{x}^2(t) + 2t\hat{x}(t)) dt + \frac{1}{3} \equiv \\ &\equiv \int_0^1 (\hat{x}^2(t) + 2t\hat{x}(t) + t^2) dt \equiv \int_0^1 (\hat{x}(t) + t)^2 dt, \end{aligned}$$

и преобразуем условия (1.81), а)–в), е)–з), (1.83) в краевую задачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{x}(t) + \hat{u}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = -\hat{p}(t) + 2\hat{\lambda}(\hat{x}(t) + t), \\ \hat{u}(t) = \arg \operatorname{abs} \max_{u \in U} (\hat{p}(t)u - \hat{\lambda}_0(u^2 + u)); \\ \hat{x}(1) = -1; \quad \hat{p}(0) = 0; \quad \int_0^1 (\hat{x}(t) + t)^2 dt = 0; \\ \hat{\lambda}_0 \geq 0; \\ \text{условие НЕРОН; условие нормировки.} \end{array} \right. \quad (1.84)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений и

множители $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}$ (4 неизвестных), и для их определения имеется два краевых условия, изопериметрическое условие и условие нормировки (4 условия). Второе условие б): $\hat{p}(1) = -\hat{\lambda}_1$ в краевую задачу не включается, так как оно служит для определения множителя $\hat{\lambda}_1$, который на решение краевой задачи не влияет, и потому его определять не требуется. Решим эту краевую задачу.

Из входящего в краевую задачу изопериметрического условия следует: $\hat{x}(t) = -t \quad \forall t \in [0, 1]$. При этом краевое условие $\hat{x}(1) = -1$ автоматически выполняется. Так как при $\hat{x}(t) = -t \quad \forall t \in [0, 1]$ имеем: $\dot{\hat{x}}(t) = -1$, и $\hat{p}(0) = 0$, то $\hat{p}(t) \equiv 0, t \in [0, 1]$. А тогда $\hat{u}(t) = \arg \max_{u \in (-\infty, +\infty)} (-\hat{\lambda}_0(u^2 + u))$,

$$\hat{\lambda}_0 \geq 0.$$

Если $\hat{\lambda}_0 > 0$, то, приняв $\hat{\lambda}_0 = 1$ (условие нормировки), получим: $\hat{u}(t) = -1/2 \quad \forall t \in [0, 1]$, $\dot{\hat{x}}(t) = \hat{x}(t) - 1/2$. А поскольку $\hat{x}(1) = -1$, то $\hat{x}(t) = (1 - 3e^{t-1})/2 \quad \forall t \in [0, 1]$. Но эта функция не удовлетворяет изопериметрическому условию. Поэтому в случае $\hat{\lambda}_0 > 0$ решение краевой задачи и, следовательно, исходной задачи Лагранжа не существует.

Если $\hat{\lambda}_0 = 0$, то, поскольку $\hat{p}(t) \equiv 0, t \in [0, 1]$, управление $\hat{u}(t)$ из условия оптимальности по u определить нельзя, и потому при $\hat{\lambda}_0 = 0$ это управление будет *особым*. Его можно определить из уравнения $\dot{\hat{x}}(t) = \hat{x}(t) + \hat{u}(t), t \in [0, 1]$, подставив в него $\hat{x}(t) = -t$. После подстановки получим: $\hat{u}(t) = t - 1 \quad \forall t \in [0, 1]$. Заметим, что условие НЕРОН при этом выполняется: $\hat{\lambda}_0 = 0, \hat{p}(t) = 0, \forall t \in [0, 1], \hat{\lambda}_1 = 0$, $\hat{\lambda}$ — любое, в частности, $\hat{\lambda} \neq 0$, что следует из дифференциального уравнения для $\hat{p}(t)$: $0 = 0 + 2\hat{\lambda} \cdot 0$. В итоге получаем, что решением краевой задачи принципа максимума и, следовательно, исходной задачи Лагранжа будет *анормальное решение*: $\hat{\lambda}_0 = 0, \hat{x}(t) = -t \quad \forall t \in [0, 1]$ с *особым управлением* $\hat{u}(t) = t - 1 \quad \forall t \in [0, 1]$, причем $\hat{p}(t) \equiv 0, t \in [0, 1], \hat{\lambda}_1 = 0, \hat{\lambda}$ — любое, не равное нулю. Поскольку $\hat{\lambda}_0 = 0$, функционал на это решение не влияет.

4) Исследуем полученную экстремаль (экстремаль Понтря-

гина) $\hat{x}(t) = -t \quad \forall t \in [0, 1]$ на абсолютную оптимальность. Для этого возьмем $\hat{x}(\cdot)$ посредством функции $x(\cdot)$, так чтобы функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ осталась допустимой. В рассматриваемой задаче функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ будет допустимой, если $x(\cdot) \in C^1([0, 1])$, $\hat{x}(1) + x(1) = -1$,

$$\int_0^1 [(\hat{x}(t) + x(t))^2 + 2t(\hat{x}(t) + x(t))] dt + 1/3 = 0.$$

Так как $\hat{x}(t) = -t$, $\hat{x}(1) = -1$, то $x(1) = 0$,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\hat{x}^2(t) + 2t\hat{x}(t)) dt + \int_0^1 (2\hat{x}(t)x(t) + 2tx(t)) dt + \\ & \quad + \int_0^1 x^2(t) dt + 1/3 = 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow -1/3 + 0 + \int_0^1 x^2(t) dt + 1/3 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 x^2(t) dt = 0 \Leftrightarrow x(t) \equiv 0, t \in [0, 1]$. Из этого тождества следует, что в задаче есть только одна допустимая экстремаль: $\hat{x}(t) = -t \quad \forall t \in [0, 1]$, и ее допустимые вариации и, следовательно, допустимые вариации функционала невозможны. Так как $\hat{x}(t) + \dot{x}(t) - \hat{x}(t) - x(t) = \hat{u}(t) + u(t)$, то $u(t) = \dot{x}(t) - x(t) \equiv 0, t \in [0, 1]$, и потому $\hat{u}(t) = t - 1 \quad \forall t \in [0, 1]$ — единственная допустимая управляющая функция. В итоге получаем, что задача имеет единственное решение, на этом решении достигается абсолютный минимум функционала, и это — *анормальное* решение с особым управлением $\hat{\lambda}_0 = 0$, $\hat{x}(t) = -t$, $\hat{u}(t) = t - 1 \quad \forall t \in [0, 1]$. При этом

$$\begin{aligned} \inf B_0(x(\cdot), u(\cdot)) & \equiv \text{abs min } B_0(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \\ & \equiv B_0(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) = -1/6. \end{aligned}$$

Пример 6. Задача Лагранжа, в которой оптимальная траектория содержит участок с особым управлением.

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^2 (tu(t) - 1)^2 (2x(t) - t^2 + 1)^2 dt \rightarrow \inf; \quad (1.85)$$

$$\dot{x}(t) - tu(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 \equiv \Delta \equiv [0, 2]; \quad (1.86)$$

$$u(t) \in U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [0, 2]; \quad (1.87)$$

$$x(0) + \frac{1}{2} = 0, \quad x(2) - 1 = 0. \quad (1.88)$$

Ограничения (1.4) типа неравенств в задаче отсутствуют.

Решение

0) Формализация: задача уже формализована.

1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^T L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$L \equiv \lambda_0(tu - 1)^2(2x - t^2 + 1)^2 + p(\dot{x} - tu) \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv ptu - \lambda_0(tu - 1)^2(2x - t^2 + 1)^2;$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_1(x(0) + \frac{1}{2}) + \lambda_2(x(2) - 1);$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

2) Система условий принципа максимума в задаче (1.85)–(1.88):

a) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \dot{p}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \right) \Rightarrow \\ \dot{p}(t) = 4\hat{\lambda}_0(tu - 1)^2(2\hat{x}(t) - t^2 + 1);$$

6) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 0; k = 1, t_1 = 2$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \left(\Leftrightarrow \hat{p}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \right) \Rightarrow$$

$$\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \hat{p}(2) = -\hat{\lambda}_2;$$

в) условие оптимальности по u :

так как $H(u) = \hat{p}tu - \hat{\lambda}_0(tu-1)^2(2\hat{x}-t^2+1)^2 = -L(u)$,
то

$$\hat{u}(t) = \arg \underset{u \in U}{\text{abs max}} [\hat{p}(t)tu - \hat{\lambda}_0(tu-1)^2(2\hat{x}(t)-t^2+1)^2];$$

г) условия стационарности по t_0, t_1 в задаче отсутствуют, так как t_0, t_1 — фиксированы ($t_0 = 1, t_1 = 2$);

д) условия дополняющей нежесткости отсутствуют, так как в задаче нет условий (1.4) типа неравенств;

е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$;

ж) условие НЕРОН;

з) условие нормировки множителей Лагранжа.

3) Условия (1.86), (1.88), а)–в), е)–з) представляют собой краевую задачу (исходную краевую задачу принципа максимума) с полным набором необходимых для ее решения условий:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = t\hat{u}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = 4\hat{\lambda}_0(t\hat{u}-1)^2(2\hat{x}(t)-t^2+1), \\ \hat{u}(t) = \arg \underset{u \in U}{\text{abs max}} [\hat{p}(t)tu - \hat{\lambda}_0(tu-1)^2(2\hat{x}(t)-t^2+1)^2]; \\ \hat{x}(0) = -1/2, \quad x(2) = 1; \quad \hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}(2) = -\hat{\lambda}_2; \\ \hat{\lambda}_0 \geq 0; \\ \text{условие НЕРОН; условие нормировки.} \end{cases} \quad (1.89)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений и

множители Лагранжа $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ (5 неизвестных), и для их определения имеется два краевых условия исходной задачи, два следствия условий трансверсальности и условие нормировки множителей Лагранжа (5 условий). Условия $\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \hat{p}(2) = -\hat{\lambda}_2$ можно в краевую задачу не включать, так как они служат для определения множителей Лагранжа $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$, которые на решение краевой задачи не влияют, и потому их определять не требуется. После исключения из краевой задачи этих условий в задаче остается три неизвестных и три условия для их определения. Решим краевую задачу.

При $\hat{\lambda}_0 = 0$ краевая задача решения не имеет, так как в этом случае либо не выполняется условие НЕРОН (при $\dot{\hat{p}}(t) = \text{const} \equiv 0, t \in [0, 2]$), либо не существует оптимальное управление $(\hat{u}(t) = \pm\infty \forall t \in [0, 2]$ при $\dot{\hat{p}}(t) = \text{const} \neq 0, t \in [0, 2]$). При $\hat{\lambda}_0 > 0$, положив $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ (условие нормировки), запишем необходимое условие экстремума функции $H(u)$:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial u} = 0 \Rightarrow \hat{p}(t) - (t\hat{u}(t) - 1)(2\hat{x}(t) - t^2 + 1)^2 = 0 \quad \forall t \in [0, 2]. \quad (1.90)$$

Далее будем рассуждать не вполне стандартно.

Вид функционала $I(x(\cdot), u(\cdot))$ показывает, что его абсолютный минимум равен нулю и достигается при равенстве нулю хотя бы одной скобки под интегралом, то есть либо при $t\hat{u}(t) = 1$, либо при $2\hat{x}(t) = t^2 - 1$. При этом из условия (1.90) следует: $\hat{p}(t) \equiv 0, t \in [0, 2]$.

Если $2\hat{x}(t) = t^2 - 1$, то оптимальное управление $\hat{u}(t)$ из условия оптимальности (1.90) принципа максимума определить нельзя. Управление $\hat{u}(t)$ в этом случае по определению будет *особым*. Определим его, подставив $\hat{x}(t) = (t^2 - 1)/2$ в уравнение (1.86). Получим: $\hat{u}(t) = 1$. Так как $\hat{x}(0) = -1/2$ и $\hat{x}(2) \neq 1$, то оптимальная траектория $\hat{x}(t)$ начнется с особого участка: $\hat{x}(t) = (t^2 - 1)/2$.

Если $t\hat{u}(t) = 1$, то из уравнения (1.86) при управлении $\hat{u}(t) = 1/t$ и краевом условии $\hat{x}(2) = 1$, получим: $\hat{x}(t) = t - 1$.

Определим момент t^* стыковки этих решений:

$$(t^{*2} - 1)/2 = t^* - 1 \Rightarrow t^* = 1.$$

В итоге получим:

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1], \\ \frac{1}{t}, & t \in [1, 2]; \end{cases} \quad \hat{x}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}, & t \in [0, 1], \\ t - 1, & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Еще раз подчеркнем, что управление $\hat{u}(t)$ при $t \in [0, 1]$ будет *особым*.

4) Из алгоритма построения решения следует:

$$\inf I(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \text{abs min } I(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv I(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) = 0.$$

1.3.3. Задачи оптимального управления

Пример 1. Задача оптимального управления с зависящим от времени ограничением на первую производную и нефиксированным конечным значением фазовой переменной.

$$I(x(\cdot)) \equiv \int_0^1 (\dot{x}^2(t) - 4x(t)) dt \rightarrow \inf,$$

$$t \leq \dot{x}(t) \leq 2t \quad \forall t \in [0, 1], \quad x(0) = 0.$$

Решение

0) Формализация: обозначим $\dot{x}(t) = u(t)$, тогда

$$B_0(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^1 (u^2(t) - 4x(t)) dt \rightarrow \inf; \quad (1.91)$$

$$\dot{x}(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 \subseteq \Delta \equiv [0, 1]; \quad (1.92)$$

$$u(t) \in U(t) \equiv \{u(t) | t \leq u(t) \leq 2t\} \quad \forall t \in [0, 1]; \quad (1.93)$$

$$x(0) = 0. \quad (1.94)$$

Ограничения (1.4) типа неравенств в задаче отсутствуют.

1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^1 L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$L \equiv \lambda_0(u^2 - 4x) + p(\dot{x} - u) \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv pu - \lambda_0(u^2 - 4x);$$

терминант:

$$l \equiv \lambda x(0);$$

$\lambda_0, \lambda; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

2) Система условий принципа максимума в задаче (1.91)–(1.94):

а) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \right) \Rightarrow \\ \dot{\hat{p}}(t) = -4\hat{\lambda}_0;$$

б) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 0; k = 1, t_1 = 1$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \quad \left(\Leftrightarrow \hat{p}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \right) \Rightarrow \\ \hat{p}(0) = \hat{\lambda}, \quad \hat{p}(1) = 0;$$

в) условие оптимальности по u :

так как $L(u) = \hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \arg \min_{u \in U} L(u) \equiv \arg \max_{u \in U} H(u) \equiv \\ &\equiv \arg \min_{t \leq u \leq 2t} (\hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}(t)u) \equiv \\ &\equiv \arg \max_{t \leq u \leq 2t} (\hat{p}(t)u - \hat{\lambda}_0 u^2). \end{aligned}$$

Обратим внимание, что оптимальное управление $\hat{u}(t)$ в рассматриваемой задаче нельзя определять из условий $\partial \hat{L}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{L}/\partial u^2 > 0$ (или $\partial \hat{H}/\partial u = 0$, $\partial^2 \hat{H}/\partial u^2 < 0$), так как множество $U(t) \forall t \in [0, 1]$ — замкнутое, а необходимо находить его как значение аргумента u , при котором функция $L(u) \equiv \hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}u$ принимает наименьшее (или функция $H(u) \equiv \hat{p}u - \hat{\lambda}_0 u^2$ — наибольшее) значение на замкнутом множестве (отрезке $t \leq u \leq 2t$).

- г) условия стационарности по t_0 , t_1 отсутствуют, так как t_0 , t_1 — фиксированы ($t_0 = 0$, $t_1 = 1$);
 - д) условия дополняющей нежесткости отсутствуют, так как в задаче нет условий (1.4) типа неравенств;
 - е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$;
 - ж) условие НЕРОН;
 - з) условие нормировки множителей Лагранжа.
- 3) Аномальный случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ в задаче невозможен, так как при $\hat{\lambda}_0 = 0$ из условия а) следует: $\hat{p}(t) = \text{const}$;
 $\hat{p}(1) = 0 \Rightarrow \hat{p}(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$, $\stackrel{6)}{\Rightarrow} \hat{\lambda} = 0 \not\Rightarrow \text{НЕРОН}$.
При $\hat{\lambda}_0 > 0$ (см. условие е)), положив $\hat{\lambda}_0 = 1$ (условие нормировки), преобразуем условия (1.92), (1.94), а)–в) в краевую задачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t), & \hat{u}(t) = \arg \max_{t \leq u \leq 2t} (\hat{p}(t)u - u^2), \\ \dot{\hat{p}}(t) = -4; & \hat{x}(0) = 0; \quad \hat{p}(1) = 0. \end{cases} \quad (1.95)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений, и для их определения имеется два краевых условия. Условие б): $\hat{p}(0) = \hat{\lambda}$, в краевую задачу не включается, так как оно служит для определения множителя $\hat{\lambda}$, который на решение краевой задачи не влияет, и потому его определять не требуется. Решим эту краевую задачу.

Так как $\dot{\hat{p}}(t) = -4$, $\hat{p}(1) = 0$, то $\hat{p}(t) = 4 - 4t \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$. При этом, нарисовав для наглядности график функции

$H(u) \equiv \hat{p}u - u^2$ при $u \in [t, 2t]$, получим:

$$\begin{aligned}\hat{u}(t) &= \begin{cases} 2t, & \dot{\hat{p}}(t)/2 \geq 2t \\ \hat{p}(t)/2, & t \leq \dot{\hat{p}}(t)/2 \leq 2t \\ t, & \dot{\hat{p}}(t)/2 \leq t \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} 2t, & 2 - 2t \geq 2t \\ 2 - 2t, & t \leq 2 - 2t \leq 2t \\ t, & 2 - 2t \leq t \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 2 - 2t, & 1/2 \leq t \leq 2/3 \\ t, & 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}.\end{aligned}$$

Подставив $\hat{u}(t)$ в уравнение (1.92), получим:

$$\hat{x}(t) = \int_0^t \hat{u}(t) dt \equiv \begin{cases} t^2 + C_1, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 2t - t^2 + C_2, & 1/2 \leq t \leq 2/3 \\ t^2/2 + C_3, & 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Так как $\hat{x}(0) = 0$, то $C_1 = 0$, а поскольку функция $\hat{x}(t)$ непрерывна ($\hat{x}(\cdot) \in KC^1([0, 1])$), то из условий непрерывности при $t = 1/2$ ($1/4 + 0 = 1 - 1/4 + C_2$) и при $t = 2/3$ ($4/9 - 4/9 + C_2 = 2/9 + C_3$) следует: $C_2 = -1/2$, $C_3 = 1/6$. В результате получим оптимальное управление $\hat{u}(t)$ и экстремаль Понтрягина $\hat{x}(t)$:

$$\begin{aligned}\hat{u}(t) &= \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 2 - 2t, & 1/2 \leq t \leq 2/3 \\ t, & 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}, \\ \hat{x}(t) &= \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 2t - t^2 - 1/2, & 1/2 \leq t \leq 2/3 \\ t^2/2 + 1/6, & 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}.\end{aligned}$$

- 4) Исследуем полученную экстремаль $\hat{x}(\cdot)$ на абсолютную оптимальность. Непосредственной проверкой покажем, что $\hat{x}(\cdot)$ доставляет функционалу абсолютный минимум. Для этого возмутим $\hat{x}(\cdot)$ посредством функции $x(\cdot)$, так чтобы функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ осталась допустимой. В рассматриваемой задаче функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ будет допустимой, если $x(\cdot) \in KC^1([0, 1])$, $\hat{x}(0) + x(0) = 0$,

$t \leq \dot{\hat{x}}(t) + \dot{x}(t) \leq 2t \quad \forall t \in [0, 1]$. А поскольку по условию задачи $\hat{x}(0) = 0$, то $x(0) = 0$. При этом ограничение на производную распадается на три условия:

$$\begin{aligned} t \leq 2t + \dot{x}(t) \leq 2t \quad \forall t \in [0, 1/2] &\Leftrightarrow \\ -t \leq \dot{x}(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, 1/2]; \\ t \leq 2 - 2t + \dot{x}(t) \leq 2t \quad \forall t \in [1/2, 2/3] &\Leftrightarrow \\ 3t - 2 \leq \dot{x}(t) \leq 4t - 2 \quad \forall t \in [1/2, 2/3]; \\ t \leq t + \dot{x}(t) \leq 2t \quad \forall t \in [2/3, 1] &\Leftrightarrow \\ 0 \leq \dot{x}(t) \leq t \quad \forall t \in [2/3, 1]. \end{aligned}$$

Определим с учетом полученных условий знак приращения функционала:

$$\begin{aligned} \Delta I &\equiv I(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)) - I(\hat{x}(\cdot)) \equiv \\ &\equiv \int_0^1 [(\dot{\hat{x}} + \dot{x})^2 - 4(\hat{x} + x)] dt - \int_0^1 (\dot{\hat{x}}^2 - 4\hat{x}) dt \equiv \\ &\equiv 2 \int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{x} dt + \int_0^1 \dot{x}^2 dt - 4 \int_0^1 x dt \geq \\ &\geq 2 \int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{x} dt - 4 \int_0^1 x dt \equiv \\ &\equiv 2 \int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{x} dt - 4 \int_0^1 x d(t-1) \equiv \\ &\equiv 2 \int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{x} dt - 4x(t)(t-1) \Big|_0^1 + 4 \int_0^1 (t-1)\dot{x} dt = \\ &= \int_0^1 (2\dot{\hat{x}} + 4t - 4)\dot{x} dt - 0 \equiv \\ &\equiv \int_0^{1/2} (8t - 4)\dot{x} dt + \int_{1/2}^{2/3} 0 \cdot \dot{x} dt + \int_{2/3}^1 (6t - 4)\dot{x} dt. \end{aligned}$$

Так как $8t - 4 \leq 0$, $-t \leq \dot{x}(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, 1/2]$, то $(8t - 4)\dot{x} \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1/2]$ и $\int_0^{1/2} (8t - 4)\dot{x} dt \geq 0$.

Так как $6t - 4 \geq 0$, $0 \leq \dot{x}(t) \quad \forall t \in [2/3, 1]$, то $(6t - 4)\dot{x} \geq 0 \quad \forall t \in [2/3, 1]$ и $\int_{2/3}^1 (6t - 4)\dot{x} dt \geq 0$.

В итоге $\Delta I \geq 0$. А это означает, что при любых допустимых возмущениях $x(\cdot)$ полученного решения $\hat{x}(\cdot)$ функционал I не убывает, и следовательно, на экстремали $\hat{x}(\cdot)$ достигается его абсолютный минимум. При этом $\inf I(x(\cdot)) \equiv \text{abs min } I(x(\cdot)) \equiv I(\hat{x}(\cdot)) = -2\frac{2}{9}$.

Пример 2. Задача оптимального управления с зависящим от времени ограничением на вторую производную (задача о максимальной площади между графиком кривой и осью OX при ограниченной второй производной).

$$I(x(\cdot)) \equiv \int_0^1 x(t) dt \rightarrow \sup,$$

$$-6t \leq \ddot{x}(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1], \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Решение

- 0) Формализация: обозначим $x(t) = x_1(t)$, $\dot{x}(t) = x_2(t)$, $\ddot{x}(t) = u(t)$, тогда

$$B_0(x_1(\cdot), x_2(\cdot), u(\cdot)) \equiv - \int_0^1 x_1(t) dt \rightarrow \inf; \quad (1.96)$$

$$\dot{x}_1(t) - x_2(t) = 0, \quad \dot{x}_2(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 \subseteq \Delta \equiv [0, 1]; \quad (1.97)$$

$$u(t) \in U(t) \equiv \{u(t) | -6t \leq u(t) \leq 1\} \quad \forall t \in [0, 1]; \quad (1.98)$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_1(1) = 0. \quad (1.99)$$

Ограничения (1.4) типа неравенств в задаче отсутствуют.

- 1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^1 L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$L \equiv -\lambda_0 x_1 + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u) \equiv p_1 \dot{x}_1 + p_2 \dot{x}_2 - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv p_1 x_2 + p_2 u + \lambda_0 x_1;$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_1(1);$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$; $p_1 \equiv p_1(t)$, $p_2 \equiv p_2(t)$ — числовые и функциональные множители Лагранжа.

2) Система условий принципа максимума в задаче (1.96)–(1.99):

a) система уравнений Эйлера–Лагранжа ($i = 1, 2$):

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}_i}(t) + \hat{L}_{x_i}(t) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \dot{\hat{p}}_i(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x_i} \right) \Rightarrow$$

$$\dot{\hat{p}}_1(t) = -\hat{\lambda}_0, \quad \dot{\hat{p}}_2(t) = -\hat{p}_1(t);$$

б) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 0; k = 1, t_1 = 1; i = 1, 2$):

$$\hat{L}_{\dot{x}_i}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \quad \left(\Leftrightarrow \hat{p}_i(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \right) \Rightarrow$$

$$\hat{p}_1(0) = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}_1(1) = -\hat{\lambda}_2, \quad \hat{p}_2(0) = 0, \quad \hat{p}_2(1) = 0;$$

в) условие оптимальности по u :

так как $L(u) = -\hat{p}_2 u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \arg \min_{u \in U} L(u) \equiv \arg \max_{u \in U} H(u) = \\ &= \begin{cases} -6t, & \hat{p}_2(t) < 0, \\ 1, & \hat{p}_2(t) > 0, \\ \forall u \in U, & \hat{p}_2(t) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

При $\hat{p}_2(t) = 0$ оптимальное управление $\hat{u}(t)$ не определено. Если при этом $\hat{p}_2(t) = 0$ лишь в одной точке, то управление $\hat{u}(t)$ может быть продолжено в эту точку по непрерывности — слева или справа. Если же $\hat{p}_2(t) \equiv 0$ на целом отрезке, то такое особое управление $\hat{u}(t)$ может потребовать для своего определения выходящих за рамки принципа максимума дополнительных исследований. Функция $\hat{p}_2(t)$ определяет точки переключения управления $\hat{u}(t)$ и является в этой задаче функцией переключения управления $\hat{u}(t)$.

г) условия стационарности по t_0, t_1 отсутствуют, так как t_0, t_1 — фиксированы ($t_0 = 0, t_1 = 1$);

- д) условия дополняющей нежесткости отсутствуют, так как в задаче нет условий (1.4) типа неравенств;
- е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$;
- ж) условие НЕРОН;
- з) условие нормировки множителей Лагранжа.
- 3) Аномальный случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ в задаче невозможен, так как при $\hat{\lambda}_0 = 0$ из условия а) следует: $\hat{p}_2(t) = -Ct + C_1$; $\hat{p}_2(0) = 0$, $\hat{p}_2(1) = 0 \Rightarrow C_1 = C = 0 \Rightarrow \hat{p}_2(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$, $\xrightarrow{\text{a)}} \hat{p}_1(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$, $\xrightarrow{\text{б)}} \hat{\lambda}_1 = 0$, $\hat{\lambda}_2 = 0 \Rightarrow \text{НЕРОН}$. При $\hat{\lambda}_0 > 0$ (см. условие е)), положив $\hat{\lambda}_0 = 2$ (условие нормировки), преобразуем условия (1.97), (1.99), а)–в) в краевую задачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t), \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{u}(t), \\ \hat{u}(t) = \begin{cases} -6t, & \hat{p}_2(t) < 0, \\ 1, & \hat{p}_2(t) > 0, \\ \forall u \in U, & \hat{p}_2(t) = 0, \end{cases} \\ \dot{\hat{p}}_1(t) = -2, \\ \dot{\hat{p}}_2(t) = -\hat{p}_1(t); \\ \hat{x}_1(0) = 0, \quad \hat{x}_1(1) = 0; \quad \hat{p}_2(0) = 0, \quad \hat{p}_2(1) = 0. \end{cases} \quad (1.100)$$

В этой краевой задаче неизвестны четыре постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений, и для их определения имеется четыре краевых условия. Условия б): $\hat{p}_1(0) = \hat{\lambda}_1$, $\hat{p}_1(1) = -\hat{\lambda}_2$, в краевую задачу не включаются, так как они служат для определения множителей $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$, которые на решение краевой задачи не влияют, и потому их определять не требуется. Решим краевую задачу.

Так как $\hat{p}_1(t) = -2t + \alpha$, то $\hat{p}_2(t) = t^2 - \alpha t + \beta$. При этом из условий $\hat{p}_2(0) = 0$, $\hat{p}_2(1) = 0$ следует: $\alpha = 1$, $\beta = 0$. А тогда $\hat{p}_2(t) = t^2 - t < 0 \quad \forall t \in (0, 1)$, и из условия оптимальности получим: $\hat{u}(t) = -6t \quad \forall t \in [0, 1]$. А так как $\ddot{\hat{x}}(t) = -6t$, $\hat{x}(0) = 0$, $\hat{x}(1) = 0$, то $\hat{x}(t) = -t^3 + t \quad \forall t \in [0, 1]$.

- 4) Исследуем полученную экстремаль Понtryгина $\hat{x}(\cdot)$ на абсолютную оптимальность. Непосредственной проверкой покажем, что $\hat{x}(\cdot)$ доставляет функционалу абсолютный максимум. Возмутим функцию $\hat{x}(\cdot)$ посредством функции $x(\cdot)$, так чтобы функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ осталась допустимой. В рассматриваемой задаче функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ будет допустимой, если $x(\cdot) \in KC^2([0, 1])$, $\dot{x}(0) + x(0) = 0$, $\dot{x}(1) + x(1) = 0$, $-6t \leq \ddot{x}(t) + \ddot{x}(t) \leq 1 \forall t \in [0, 1]$. Так как по условию задачи $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{x}(1) = 0$ и $\ddot{x}(t) = -6t \forall t \in [0, 1]$, то $x(0) = 0$, $x(1) = 0$, $0 \leq \ddot{x}(t) \leq 1 + 6t \forall t \in [0, 1]$. Определим с учетом полученных условий знак приращения функционала:

$$\begin{aligned}\Delta I &\equiv I(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)) - I(\hat{x}(\cdot)) \equiv \\ &\equiv \int_0^1 x(t) dt \equiv \int_0^1 x(t) d(t - \frac{1}{2}) \equiv \\ &\equiv x(t)(t - \frac{1}{2}) \Big|_0^1 - \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) \dot{x}(t) dt \equiv \\ &\equiv 0 - \int_0^1 \dot{x}(t) d(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}) \equiv \\ &\equiv -\dot{x}(t) \frac{1}{2}(t^2 - t) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 (t^2 - t) \ddot{x}(t) dt \equiv \\ &\equiv 0 + \frac{1}{2} \int_0^1 (t^2 - t) \ddot{x}(t) dt.\end{aligned}$$

Так как $t^2 - t \leq 0$, $\ddot{x}(t) \geq 0 \forall t \in [0, 1]$, то $(t^2 - t)\ddot{x}(t) \leq 0 \forall t \in [0, 1]$ и $\Delta I \leq 0$. А это означает, что при любых допустимых возмущениях $x(\cdot)$ полученного решения $\hat{x}(\cdot)$ функционал I не убывает, и следовательно, на экстремали $\hat{x}(t) = -t^3 + t$ достигается его абсолютный максимум. При этом $\sup I(x(\cdot)) \equiv \text{abs max } I(x(\cdot)) \equiv I(\hat{x}(\cdot)) = 0, 25$.

Пример 3. Задача оптимального управления с краевым условием типа неравенства.

$$I(x(\cdot)) \equiv \int_0^1 (\dot{x}^2(t) + 4x(t)) dt \rightarrow \inf,$$

$$-1 \leq \dot{x}(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, 1], \quad x(0) = 0, \quad x(1) + 3/4 \leq 0.$$

Решение

0) Формализация: обозначим $\dot{x}(t) = u(t)$, тогда

$$B_0(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^1 (u^2(t) + 4x(t)) dt \rightarrow \inf; \quad (1.101)$$

$$\dot{x}(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 \subseteq \Delta \equiv [0, 1]; \quad (1.102)$$

$$u(t) \in U(t) \equiv \{u(t) | -1 \leq u(t) \leq 0\} \quad \forall t \in [0, 1]; \quad (1.103)$$

$$x(0) = 0; \quad (1.104)$$

$$x(1) + 3/4 \leq 0. \quad (1.105)$$

1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^1 L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$L \equiv \lambda_0(u^2 + 4x) + p(\dot{x} - u) \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv pu - \lambda_0(u^2 + 4x);$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_1 x(0) + \lambda(x(1) + 3/4);$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

2) Система условий принципа максимума в задаче (1.101)–(1.105):

a) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \dot{p}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \right) \Rightarrow$$

$$\dot{p}(t) = 4\hat{\lambda}_0;$$

- 6) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 0; k = 1, t_1 = 1$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \quad \left(\Leftrightarrow \hat{p}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \right) \Rightarrow$$

$$\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}(1) = -\hat{\lambda};$$

- в) условие оптимальности по u :

так как $L(u) = \hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \arg \operatorname{abs} \min_{u \in U} L(u) \equiv \arg \operatorname{abs} \max_{u \in U} H(u) \equiv \\ &\equiv \arg \operatorname{abs} \max_{-1 \leq u \leq 0} (\hat{p}(t)u - \hat{\lambda}_0 u^2). \end{aligned}$$

Так как множество $U(t) \quad \forall t \in [0, 1]$ — замкнутое, то оптимальное управление необходимо находить как значение аргумента u , при котором функция $H(u) \equiv \hat{p}u - \hat{\lambda}_0 u^2$ принимает наибольшее значение на замкнутом множестве — отрезке $-1 \leq u \leq 0$.

- г) условия стационарности по t_0, t_1 отсутствуют, так как t_0, t_1 — фиксированы ($t_0=0, t_1=1$);
 д) условие дополняющей нежесткости:
 $\hat{\lambda} \cdot (\hat{x}(1) + 15/16) = 0$;
- е) условия неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0, \hat{\lambda} \geq 0$;
 ж) условие НЕРОН;
 з) условие нормировки множителей Лагранжа.

- 3) Рассмотрим возможность в задаче аномального случая $\hat{\lambda}_0 = 0$. При $\hat{\lambda}_0 = 0$ из условий а), б): $\dot{\hat{p}}(t) = 0, \hat{p}(1) = -\hat{\lambda}$, следует $\hat{p}(t) = -\hat{\lambda} \quad \forall t \in [0, 1]$, и по второму условию е) возможны 2 случая: $\hat{\lambda} = 0$ и $\hat{\lambda} > 0$.

Если $\hat{\lambda} = 0$, то $\hat{p}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$ и по первому условию б) $\hat{\lambda}_1 = 0$ — все множители Лагранжа обратились в ноль. Но это противоречит условию НЕРОН, и поэтому при $\hat{\lambda} = 0$ задача решения не имеет.

Если $\hat{\lambda} > 0$, то $\hat{p}(t) = -\hat{\lambda}$ $\forall t \in [0, 1]$, $H(u) = \hat{p}u \equiv -\hat{\lambda}u$, и по условию в):

$$\hat{u}(t) = \arg \max_{-1 \leq u \leq 0} (-\hat{\lambda}u) \equiv -1.$$

А тогда из условий (1.102), (1.104): $\dot{\hat{x}}(t) = -1$, $\hat{x}(0) = 0$, получим: $\hat{x}(t) = -t$ $\forall t \in [0, 1]$. Но эта функция не удовлетворяет следующему при $\hat{\lambda} > 0$ из условия дополняющей нежесткости условию $\hat{x}(1) + 3/4 = 0$. В итоге получаем, что случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ в рассматриваемой задаче невозможен.

При $\hat{\lambda}_0 > 0$ (см. условие е)), положив $\hat{\lambda}_0 = 1$ (условие нормировки), преобразуем условия (1.102), (1.104), а)–в), д) в краевую задачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = \hat{u}, \\ \dot{\hat{p}} = 4, \\ \hat{u} = \arg \max_{-1 \leq u \leq 0} (\hat{p}u - u^2); \\ \hat{x}(0) = 0, \quad \hat{p}(1) = -\hat{\lambda}; \quad \hat{\lambda} \cdot (\hat{x}(1) + 3/4) = 0; \\ \hat{\lambda} \geq 0. \end{array} \right. \quad (1.106)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений и множитель $\hat{\lambda}$, и для их определения имеется два краевых условия и условие дополняющей нежесткости. Условие б): $\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1$, в краевую задачу не включается, так как оно служит для определения множителя $\hat{\lambda}_1$, который на решение краевой задачи не влияет, и потому его определять не требуется. Решим эту краевую задачу.

Так как $\dot{\hat{p}}(t) = 4$, $\hat{p}(1) = -\hat{\lambda}$, то $\hat{p}(t) = 4t - 4 - \hat{\lambda}$ $\forall t \in [0, 1]$. В соответствии с Правилом решения задач оптимального управления с условием дополняющей нежесткости необходимо рассмотреть два подслучаи: $\hat{\lambda} = 0$ и $\hat{\lambda} > 0$.

При $\hat{\lambda} = 0$ условие дополняющей нежесткости выполняется автоматически. Однако в этом случае после определения $\hat{x}(\cdot)$ в соответствии с Правилом требуется проверка исходного неравенства $\hat{x}(1) + 3/4 \leq 0$. С учетом

$\hat{p}(t) = 4t - 4 \leq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$, из условия оптимальности по u определим $\hat{u}(t)$:

$$\begin{aligned}\hat{u}(t) &= \begin{cases} -1, & \hat{p}(t)/2 \leq -1 \\ \hat{p}(t)/2, & -1 \leq \hat{p}(t)/2 \leq 0 \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} -1, & 2t - 2 \leq -1 \\ 2t - 2, & -1 \leq 2t - 2 \leq 0 \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ 2t - 2, & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}\end{aligned}$$

А тогда

$$\hat{x}(t) = \int_0^t \hat{u}(t) dt \equiv \begin{cases} -t + C_1, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ t^2 - 2t + C_2, & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Так как $\hat{x}(0) = 0$, то $C_1 = 0$, а поскольку функция $\hat{x}(t)$ непрерывна ($\hat{x}(\cdot) \in KC^1([0, 1])$) (см. выше § 1. п.1)), то из условия непрерывности этой функции при $t = 1/2$: $-1/2 = 1/4 - 1 + C_2$, следует: $C_2 = 1/4$. В результате при $\hat{\lambda} = 0$ экстремалю Понtryгина будет функция

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} -t, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ t^2 - 2t + 1/4, & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.107)$$

Проверка на полученной экстремали исходного неравенства $\hat{x}(1) + 3/4 \leq 0$ показывает, что оно выполняется.

При $\hat{\lambda} > 0$ из условия дополняющей нежесткости следует: $\hat{x}(1) + 3/4 = 0$. Так как $\hat{p}(t) = 4t - 4 - \hat{\lambda} \leq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$, то по аналогии со случаем $\hat{\lambda} = 0$ из условия оптимальности по u получим:

$$\begin{aligned}\hat{u}(t) &= \begin{cases} -1, & \hat{p}(t)/2 \leq -1 \\ \hat{p}(t)/2, & -1 \leq \hat{p}(t)/2 \leq 0 \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} -1, & 2t - 2 - \hat{\lambda}/2 \leq -1 \\ 2t - 2 - \hat{\lambda}/2, & -1 \leq 2t - 2 - \hat{\lambda}/2 \leq 0 \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq 1/2 + \hat{\lambda}/4, \\ 2t - 2 - \hat{\lambda}/2, & 1/2 + \hat{\lambda}/4 \leq t \leq 1 + \hat{\lambda}/4. \end{cases}\end{aligned}$$

А тогда

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} -t + A_1, & 0 \leq t \leq 1/2 + \hat{\lambda}/4, \\ t^2 - 2t - \hat{\lambda}t/2 + A_2, & 1/2 + \hat{\lambda}/4 \leq t \leq 1 + \hat{\lambda}/4. \end{cases}$$

Так как $\hat{x}(0) = 0$, то $A_1 = 0$. А так как $\hat{x}(1) = -3/4$, то $1 - 2 - \hat{\lambda}/2 + A_2 = -3/4$, $A_2 = \hat{\lambda}/2 + 1/4$. Из условия непрерывности функции $\hat{x}(t)$ при $t = 1/2 + \hat{\lambda}/4$ следует:

$$\begin{aligned} -1/2 - \hat{\lambda}/4 &= \\ &= (1/2 + \hat{\lambda}/4)^2 - 2(1/2 + \hat{\lambda}/4) - (\hat{\lambda}/2) \cdot (1/2 + \hat{\lambda}/4) + \hat{\lambda}/2 + 1/4, \\ \hat{\lambda}(\hat{\lambda} - 4) &= 0. \end{aligned}$$

Случай $\hat{\lambda} = 0$ рассмотрен выше. Если $\hat{\lambda} = 4$, то $1/2 + \hat{\lambda}/4 \equiv 3/2 > 1$ и $\hat{x}(t) = -t$, $0 \leq t \leq 1$. Так как условие $\hat{x}(1) = -3/4$ при этом не выполняется, то случай $\hat{\lambda} = 4$ невозможен.

- 4) Исследуем полученную экстремаль $\hat{x}(\cdot)$ (1.107) на абсолютную оптимальность. Непосредственной проверкой покажем, что $\hat{x}(\cdot)$ доставляет функционалу абсолютный минимум. Для этого возьмутим $\hat{x}(\cdot)$ посредством функции $x(\cdot)$, так чтобы функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ осталась допустимой. В рассматриваемой задаче функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ будет допустимой, если $x(\cdot) \in KC^1([0, 1])$, $\dot{x}(0) + x(0) = 0$, $\dot{x}(1) + x(1) + 3/4 \leq 0$, $-1 \leq \dot{x}(t) + x(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$. Так как $\hat{x}(0) = 0$, $\hat{x}(1) = -3/4$, то $x(0) = 0$, $x(1) \leq 0$. При этом ограничение на производную распадается на два условия:

$$\begin{aligned} -1 \leq -1 + \dot{x}(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, 1/2] &\Leftrightarrow \\ 0 \leq \dot{x}(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1/2]; & \\ -1 \leq 2t - 2 + \dot{x}(t) \leq 0 \quad \forall t \in [1/2, 1] &\Leftrightarrow \\ 1 - 2t \leq \dot{x}(t) \leq 2 - 2t \quad \forall t \in [1/2, 1]. & \end{aligned}$$

Определим с учетом полученных условий знак прираще-

ния функционала:

$$\begin{aligned}
\Delta I &\equiv I(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)) - I(\hat{x}(\cdot)) \equiv \\
&\equiv \int_0^1 [(\dot{\hat{x}} + \dot{x})^2 + 4(\hat{x} + x)] dt - \int_0^1 (\dot{\hat{x}}^2 + 4\hat{x}) dt \equiv \\
&\equiv 2 \int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{x} dt + \int_0^1 \dot{x}^2 dt + 4 \int_0^1 x dt \geq \\
&\geq 2 \int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{x} dt + 4 \int_0^1 x(t) dt \equiv \\
&\equiv 2 \int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{x} dt + 4 \int_0^1 x(t) d(t-1) \equiv \\
&\equiv 2 \int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{x} dt + 4x(t) \cdot (t-1) \Big|_0^1 - 4 \int_0^1 (t-1)\dot{x} dt \equiv \\
&\equiv \int_0^1 2\dot{\hat{x}}\dot{x} dt + 0 - \int_0^1 4(t-1)\dot{x} dt \equiv \\
&\equiv \int_0^1 (2\dot{\hat{x}} - 4t + 4)\dot{x} dt \equiv \\
&\equiv \int_0^{1/2} (2-4t)\dot{x} dt + \int_{1/2}^1 0 \cdot \dot{x} dt \equiv \\
&\equiv \int_0^{1/2} (2-4t)\dot{x} dt.
\end{aligned}$$

Так как $2-4t \geq 0$, $0 \leq \dot{x}(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1/2]$, то $(2-4t)\dot{x}(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1/2]$, $\int_0^{1/2} (2-4t)\dot{x} dt \geq 0$, и потому $\Delta I \geq 0$. А это означает, что при любых допустимых возмущениях $x(\cdot)$ полученного решения $\hat{x}(\cdot)$ функционал I не убывает, и следовательно, на экстремали $\hat{x}(\cdot)$ достигается его абсолютный минимум. При этом $\inf I(x(\cdot)) \equiv \text{abs min } I(x(\cdot)) \equiv I(\hat{x}(\cdot)) = -7/6$.

Пример 4. Задача оптимального управления — задача быстродействия с изопериметрическим условием типа равенства, с фиксированным начальным и нефиксированным конечным значениями фазовой переменной.

$$\mathcal{T}(x(\cdot), u(\cdot), T) \equiv T \rightarrow \inf, \quad T > 0; \quad (1.108)$$

$$\dot{x}(t) + x(t) - tu(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 \subseteq \Delta \equiv [0, T]; \quad (1.109)$$

$$u(t) \in U \equiv \{u(t) \mid -1 \leq u(t) \leq 2\} \quad \forall t \in [0, T]; \quad (1.110)$$

$$\int_0^T \cos^2 u(t) dt - 1 = 0, \quad x(0) - 1 = 0. \quad (1.111)$$

Ограничение (1.4) типа неравенств в задаче отсутствует.

Решение

0) Формализация: задача уже formalизована.

1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^T L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$L \equiv p(\dot{x} + x - tu) + \lambda \cdot \cos^2 u \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv p(-x + tu) - \lambda \cdot \cos^2 u;$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_0 T + \lambda_1(x(0) - 1);$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

2) Система условий принципа максимума в задаче (1.108)–(1.111):

a) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad (\Leftrightarrow \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x}) \Rightarrow \\ \dot{\hat{p}}(t) = \hat{p}(t);$$

б) условия трансверсальности ($k = 0, \hat{t}_0 = 0; k = 1, \hat{t}_1 = \hat{T}$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \quad (\Leftrightarrow \hat{p}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)}) \Rightarrow \\ \hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}(\hat{T}) = 0;$$

в) условие оптимальности по u :

так как $L(u) = -\hat{p}tu + \hat{\lambda} \cos^2 u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \arg \min_{u \in U} H(u) = \arg \min_{u \in U} L(u) = \\ &= \arg \min_{u \in [-1, 2]} (\hat{\lambda} \cos^2 u - \hat{p}(t)tu), \\ &= \arg \max_{u \in [-1, 2]} (\hat{p}(t)tu - \hat{\lambda} \cos^2 u), \end{aligned}$$

г) условие стационарности по t_0 отсутствуют, так как t_0 — фиксировано ($t_0 = 1$); условие стационарности по T :

$$\frac{d\hat{\mathcal{L}}}{dt} = 0 \quad (\Leftrightarrow \hat{H}(\hat{T}) = \frac{\partial \hat{l}}{\partial T}) \Rightarrow \\ \hat{p}(\hat{T})(-\hat{x}(\hat{T}) + \hat{T}\hat{u}(\hat{T}) - \hat{\lambda} \cos^2 \hat{u}(\hat{T})) = \hat{\lambda}_0;$$

- д) условия дополняющей нежесткости отсутствуют, так как в задаче нет условий (1.4) типа неравенств, а условие $\hat{T} > 0$ из системы условий (1.4) исключено и считается проверочным;
 - е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$;
 - ж) условие НЕРОН;
 - з) условие нормировки множителей Лагранжа.
- 3) Условия (1.109), (1.111), а)-г), е)-з) представляют собой краевую задачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = -\hat{x}(t) + t\hat{u}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = \hat{p}(t), \\ \hat{u}(t) = \arg \min_{u \in [-1,2]} (\hat{\lambda} \cos^2 u - \hat{p}(t)t u); \\ \hat{p}(\hat{T})(-\hat{x}(\hat{T}) + \hat{T}\hat{u}(\hat{T}) - \hat{\lambda} \cos^2 \hat{u}(\hat{T})) = \hat{\lambda}_0, \\ \int_0^{\hat{T}} \cos^2 \hat{u}(t) dt = 1, \\ \hat{x}(0) = 1, \quad \hat{p}(\hat{T}) = 0; \\ \hat{T} > 0; \quad \hat{\lambda}_0 \geq 0, \\ \text{условие НЕРОН, условие нормировки.} \end{array} \right. \quad (1.112)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений, время \hat{T} и множители Лагранжа $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda}$ (5 неизвестных), и для их определения имеется следствие условия стационарности по T , изопериметрическое условие, два краевых условия и условие нормировки (5 условий). Первое условие б): $\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1$ в краевую задачу не включается, так как оно служит для определения множителя $\hat{\lambda}_1$, который на решение краевой задачи не влияет, и потому его определять не требуется. Решим краевую задачу.

Так как $\dot{\hat{p}} = \hat{p}$, $\hat{p}(\hat{T}) = 0$, то $\hat{p}(t) \equiv 0$, $t \in [0, \hat{T}]$. А тогда $\hat{u}(t) = \arg \min_{u \in [-1, 2]} (\hat{\lambda} \cos^2 u)$, $-\hat{\lambda} \cos^2 \hat{u}(\hat{T}) = \hat{\lambda}_0$. Так как в

последнем равенстве $\hat{\lambda}_0 \geq 0$, $\cos^2 \hat{u}(\hat{T}) \geq 0$, то $\hat{\lambda} \leq 0$.

Если $\hat{\lambda} = 0$, то $\hat{\lambda}_0 = 0$. А поскольку $\hat{p}(t) \equiv 0$, $t \in [0, \hat{T}]$, $\hat{\lambda}_1 = 0$, то не выполняется условие НЕРОН.

Если $\hat{\lambda} < 0$, то $\hat{u}(t) = \arg \min_{u \in [-1, 2]} (\hat{\lambda} \cos^2 u) = 0 \Rightarrow$

$\hat{u}(t) \equiv 0$, $t \in [0, \hat{T}]$; $-\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_0 > 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_0 = 1$ (условие нормировки); $\int_0^{\hat{T}} 1 \cdot dt = 1 \Rightarrow \hat{T} = 1$; $\dot{\hat{x}}(t) = -\hat{x}(t)$, $\hat{x}(0) = 1 \Rightarrow \hat{x}(t) = e^{-t} \forall t \in [0, 1]$.

В результате решения краевой задачи принципа максимума получаем: время $\hat{T} = 1$; управление $\hat{u}(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$; экстремаль Понtryгина $\hat{x}(t) = e^{-t} \forall t \in [0, 1]$.

- 4) Исследуем полученное решение на абсолютную оптимальность. Предположим, что существует T (значение функционала), для которого $T \leq \hat{T} = 1$. Очевидна оценка: $T \equiv \int_0^T 1 \cdot dt \geq \int_0^T \cos^2 u(t) dt = 1$. Поскольку по предположению $T \leq 1 = \hat{T}$, а по оценке $T \geq 1$, то $T = 1 = \hat{T}$. А это означает, что в рассматриваемой задаче $\hat{T} = 1$ – абсолютно минимальное значение T .

В итоге получаем:

$$\begin{aligned} \inf \mathcal{T}(x(\cdot), u(\cdot), T) &\equiv \arg \min \mathcal{T}(x(\cdot), u(\cdot), T) \equiv \\ &\equiv \mathcal{T}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{T}) \equiv \hat{T} = 1, \\ \hat{u}(t) &\equiv 0, \quad t \in [0, 1], \\ \hat{x}(t) &= e^{-t} \quad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Пример 5. Задача оптимального управления, в которой решение существует лишь в аномальном случае — при $\hat{\lambda}_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(x(\cdot)) &\equiv x(1) \rightarrow \inf, \\ t - 1 \leq \dot{x}(t) &\leq t + 1 \quad \forall t \in [0, 1], \quad x(0) = 0, \\ \int_0^1 (x^2(t) - 2tx(t)) dt &= -1/3. \end{aligned}$$

Решение

- 0) Формализация: обозначим $\dot{x}(t) - t = u(t)$, тогда $-1 \leq u(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1]$, и исходная задача преобразуется в задачу оптимального управления:

$$T(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv x(1) \rightarrow \inf; \quad (1.113)$$

$$\dot{x}(t) - u(t) - t = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 \subseteq \Delta \equiv [0, 1]; \quad (1.114)$$

$$u(t) \in U(t) \equiv \{u(t) | -1 \leq u(t) \leq 1\} \quad \forall t \in [0, 1]; \quad (1.115)$$

$$x(0) = 0, \quad \int_0^1 (x^2(t) - 2tx(t)) dt + 1/3 = 0. \quad (1.116)$$

Ограничения (1.4) типа неравенств в задаче отсутствуют.

- 1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^1 L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$L \equiv p(\dot{x} - u - t) + \lambda(x^2 - 2tx) \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv p(u + t) - \lambda(x^2 - 2tx);$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_0 x(1) + \lambda_1 x(0);$$

$\lambda_0, \lambda, \lambda_1; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

- 2) Система условий принципа максимума в задаче (1.113)–(1.116):

- a) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \dot{p}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \right) \Rightarrow \\ \dot{p} = 2\hat{\lambda}(\dot{x}(t) - t);$$

- 6) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 0; k = 1, t_1 = 1$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \quad (\Leftrightarrow \hat{p}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)}) \Rightarrow \\ \hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}(1) = -\hat{\lambda}_0;$$

- в) условие оптимальности по u :

так как $L(u) = -\hat{p}u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \arg \operatorname{abs} \min_{u \in U} L(u) \equiv \arg \operatorname{abs} \max_{u \in U} H(u) \equiv \\ &\equiv \arg \operatorname{abs} \max_{-1 \leq u \leq 1} (\hat{p}(t)u) \equiv \begin{cases} -1, & \hat{p}(t) < 0, \\ +1, & \hat{p}(t) > 0, \\ \forall u \in U, & \hat{p}(t) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Если $\hat{p}(t) = 0, t \in [0, 1]$ в изолированных точках, в частности, в одной точке, то управление $\hat{u}(t)$ может быть продолжено в эти точки (точку) по непрерывности — слева или справа. Если же $\hat{p}(t) = 0, t \in [0, 1]$, на целых отрезках (отрезке): $\hat{p}(t) \equiv 0, t \in [\tau_{1i}, \tau_{2i}], \tau_{1i} < \tau_{2i}, 1 \leq i \leq k, 1 < k < \infty$, то оптимальное управление из условия оптимальности определить нельзя, и для определения такого *особого* управления могут потребоваться выходящие за рамки принципа максимума дополнительные исследования.

- г) условия стационарности по t_0, t_1 отсутствуют, так как t_0, t_1 — фиксированы ($t_0 = 0, t_1 = 1$);
- д) условия дополняющей нежесткости отсутствуют, так как в задаче нет условий (1.4) типа неравенств;
- е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$;
- ж) условие НЕРОН;
- з) условие нормировки множителей Лагранжа.

- 3) Запишем изопериметрическое условие в виде:

$$0 = \int_0^1 (\hat{x}^2(t) - 2t\hat{x}(t)) dt + \frac{1}{3} \equiv \int_0^1 (\hat{x}(t) - t)^2 dt,$$

и преобразуем условия (1.114), (1.116), а)–в), е)–з) в краевую задачу (краевую задачу принципа максимума):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t) + t, \\ \dot{\hat{p}}(t) = 2\hat{\lambda}(\hat{x}(t) - t), \\ \hat{u}(t) = \begin{cases} -1, & \hat{p}(t) < 0, \\ +1, & \hat{p}(t) > 0, \\ \forall u \in U, & \hat{p}(t) = 0; \end{cases} \\ \hat{x}(0) = 0; \quad \hat{p}(1) = -\hat{\lambda}_0; \quad \int_0^1 (\hat{x}(t) - t)^2 dt = 0; \\ \hat{\lambda}_0 \geq 0; \text{ условие НЕРОН; условие нормировки.} \end{cases} \quad (1.117)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные интегрирования ее системы дифференциальных уравнений и множители $\hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0$ (4 неизвестных), и для их определения имеется два краевых условия, изопериметрическое условие и условие нормировки (4 условия). Условие $\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1$ в краевую задачу не включается, так как оно служит для определения множителя $\hat{\lambda}_1$, который на решение краевой задачи не влияет, и потому его определять не требуется. Решим эту краевую задачу.

Из входящего в краевую задачу изопериметрического условия следует: $\hat{x}(t) - t = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$. При этом краевое условие $\hat{x}(0) = 0$ автоматически выполняется. Так как при $\hat{x}(t) - t = 0$ имеем: $\dot{\hat{x}}(t) = 1 \quad \forall t \in [0, 1]$, то с учетом краевого условия $\hat{p}(1) = -\hat{\lambda}_0$ получаем: $\hat{p}(t) = -\hat{\lambda}_0 \quad \forall t \in [0, 1]$.

Если $\hat{\lambda}_0 > 0$, то, приняв $\hat{\lambda}_0 = 1$ (условие нормировки), получим: $\hat{p}(t) = -1 < 0 \quad \forall t \in [0, 1]$. При этом из условия оптимальности следует: $\hat{u}(t) = -1 \quad \forall t \in [0, 1]$, и потому $\hat{x}(t) = -1 + t$. А так как $\hat{x}(0) = 0$, то $\hat{x}(t) = t^2/2 - t \quad \forall t \in [0, 1]$. Но это решение не удовлетворяет изопериметрическому условию $\int_0^1 (x(t) - t)^2 dt = 0$. Поэтому в случае $\hat{\lambda}_0 > 0$ решение краевой задачи и, следовательно, исходной задачи оптимального управления не существует.

Если $\hat{\lambda}_0 = 0$, то $\hat{p}(t) \equiv 0, t \in [0, 1]$, и управление $\hat{u}(t)$ из условия оптимальности по u определить нельзя. Это

управление при $\hat{\lambda}_0 = 0$, $\hat{p}(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$, будет *особым*. Его можно определить из условия $\dot{x}(t) = \hat{u}(t) + t$, подставив в него $\hat{x}(t) = t$. После подстановки получим: $\hat{u}(t) = 1 - t \quad \forall t \in [0, 1]$. Заметим, что условие НЕРОН при этом выполняется, так как $\hat{\lambda}_0 = 0$, $\hat{p}(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$, $\hat{\lambda}_1 = 0$, а $\hat{\lambda}$ — любое, в частности, $\hat{\lambda} \neq 0$, что следует из дифференциального уравнения для $\hat{p}(t)$: $0 = 2\hat{\lambda} \cdot 0$. В итоге получаем, что решением краевой задачи принципа максимума и, следовательно, исходной задачи оптимального управления будет *анормальное* решение: $\hat{\lambda}_0 = 0$, $\hat{x}(t) = t \quad \forall t \in [0, 1]$ с *особым управлением* $\hat{u}(t) = 1 - t \quad \forall t \in [0, 1]$, причем $\hat{p}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$, $\hat{\lambda}_1 = 0$, λ — любое, не равное нулю. Поскольку $\hat{\lambda}_0 = 0$, функционал на это решение не влияет.

- 4) Исследуем полученную экстремаль (экстремаль Понтрягина) $\hat{x}(t) = t \quad \forall t \in [0, 1]$ на абсолютную оптимальность. Для этого возьмем $\hat{x}(\cdot)$ посредством функции $x(\cdot)$, так чтобы функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ осталась допустимой. В рассматриваемой задаче функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ будет допустимой, если $x(\cdot) \in KC^1([0, 1])$, $\hat{x}(0) + x(0) = 0$, $t - 3 \leq \dot{x}(t) + \dot{x}(t) \leq t + 3 \quad \forall t \in [0, 1]$, $\int_0^1 [(\hat{x}(t) + x(t))^2 - 2t(\hat{x}(t) + x(t))] dt = -1/3$. А так как $\hat{x}(t) = t$, $\hat{x}(0) = 0$, то $x(0) = 0$, $t - 4 \leq \dot{x}(t) \leq t + 2$,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\dot{x}^2(t) - 2t\dot{x}(t)) dt + \int_0^1 (2\hat{x}(t)x(t) - 2tx(t)) dt + \\ & \quad + \int_0^1 x^2(t) dt = -1/3 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow -1/3 + 0 + \int_0^1 x^2(t) dt = -1/3 \Leftrightarrow \int_0^1 x^2(t) dt = 0$
 $\Leftrightarrow x(t) \equiv 0, t \in [0, 1]$. Последнее тождество означает, что в задаче есть только одна допустимая экстремаль: $\hat{x}(t) = t \quad \forall t \in [0, 1]$, и ее допустимые вариации, как и допустимые вариации функционала, невозможны. Так как $\dot{\hat{x}}(t) + \dot{x}(t) - \hat{u}(t) - u(t) - t = 0$, то $u(t) = \hat{x}(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$, и потому $\hat{u}(t) = 1 - t \quad \forall t \in [0, 1]$ — единственная допустимая управляющая функция. В итоге получаем, что задача имеет единственное решение, на котором достигается абсолютный минимум функционала, и это

— аномальное решение с особым управлением: $\hat{\lambda}_0 = 0$, $\hat{x}(t) = t \quad \forall t \in [0, 1]$, $\hat{u}(t) = 1 - t \quad \forall t \in [0, 1]$. При этом $\inf \mathcal{T}(x(\cdot)) \equiv \text{abs min } \mathcal{T}(x(\cdot)) \equiv \mathcal{T}(\hat{x}(\cdot)) = 1$.

Пример 6. Задача оптимального управления, в которой оптимальная траектория содержит участок с особым управлением.

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^2 x^2(t) dt \rightarrow \inf; \quad (1.118)$$

$$\dot{x}(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 \subseteq \Delta \equiv [0, 2]; \quad (1.119)$$

$$u(t) \in U(t) \equiv \{u(t) | -1 \leq u(t) \leq 1\} \quad \forall t \in [0, 2]; \quad (1.120)$$

$$x(0) - 1 = 0, \quad x(2) = 0. \quad (1.121)$$

Ограничения (1.4) типа неравенств в задаче отсутствуют.

Решение

0) Формализация: задача уже формализована.

1) Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^2 L(t) dt + l;$$

лагранжиан:

$$L \equiv \lambda_0 x^2 + p(\dot{x} - u) \equiv p\dot{x} - H;$$

функция Понtryгина:

$$H \equiv pu - \lambda_0 x^2;$$

терминант:

$$l \equiv \lambda_1(x(1) - 1) + \lambda_2 x(2);$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2; p \equiv p(t)$ — числовые и функциональный множители Лагранжа.

2) Система условий принципа максимума в задаче (1.118)–(1.121):

a) уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad (\Leftrightarrow \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x}) \Rightarrow$$

$$\dot{\hat{p}}(t) = 2\hat{\lambda}_0\hat{x}(t);$$

б) условия трансверсальности ($k = 0, t_0 = 0; k = 1, t_1 = 2$):

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \quad (\Leftrightarrow \hat{p}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)}) \Rightarrow$$

$$\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}(2) = -\hat{\lambda}_2;$$

в) условие оптимальности по u :

так как $L(u) = -\hat{p}u$ и $H(u) = -L(u)$, то

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \arg \operatorname{abs} \min_{u \in U} L(u) \equiv \arg \operatorname{abs} \max_{u \in U} H(u) \equiv \\ &\equiv \arg \operatorname{abs} \max_{-1 \leq u \leq 1} (\hat{p}(t)u) \equiv \\ &\equiv \begin{cases} -1, & \hat{p}(t) < 0, \\ +1, & \hat{p}(t) > 0, \\ \forall u \in [-1, 1], & \hat{p}(t) = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

г) условия стационарности по t_0, t_1 в задаче отсутствуют, так как t_0, t_1 – фиксированы ($t_0=0, t_1 = 2$);

д) условия дополняющей нежесткости отсутствуют, так как в задаче нет условий (1.4) типа неравенств;

е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$;

ж) условие НЕРОН;

з) условие нормировки множителей Лагранжа.

3) Аномальный случай $\hat{\lambda}_0 = 0$ в задаче невозможен, так как при $\hat{\lambda}_0 = 0$ из условия а) следует $\hat{p}(t) = \text{const } \forall t \in [0, 2]$ и возможны три подслучаи:

- $\alpha)$ $\hat{p}(t) = \text{const} < 0 \quad \forall t \in [0, 2] \xrightarrow{\text{B}} \hat{u}(t) = -1 \quad \forall t \in [0, 2]$
 $\xrightarrow{(1.119)} \hat{x}(t) = -t + A \quad \forall t \in [0, 2];$ так как $\hat{x}(0) = 1,$
 $\hat{x}(2) = 0,$ то A не существует;
- $\beta)$ $\hat{p}(t) = \text{const} > 0 \quad \forall t \in [0, 2] \xrightarrow{\text{B}} \hat{u}(t) = 1 \quad \forall t \in [0, 2]$
 $\xrightarrow{(1.119)} \hat{x}(t) = t + B \quad \forall t \in [0, 2];$ так как $\hat{x}(0) = 1,$
 $\hat{x}(2) = 0,$ то B не существует;
- $\gamma)$ $\hat{p}(t) = \text{const} \equiv 0, \quad t \in [0, 2] \xrightarrow{\text{б)} \hat{\lambda}_1 = 0, \hat{\lambda}_2 = 0$ — все
множители Лагранжа обращаются в ноль (не выполняется условие НЕРОН).

Так как $\hat{\lambda}_0 \neq 0,$ то по условию е) $\hat{\lambda}_0 > 0.$ Приняв
 $\hat{\lambda}_0 = 1/2$ (условие нормировки), преобразуем условия
(1.119), (1.121), а), в), ж) в краевую задачу (краевую за-
дачу принципа максимума):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t) \equiv \begin{cases} -1, & \hat{p}(t) < 0 \\ +1, & \hat{p}(t) > 0 \\ \forall u \in [-1, +1], & \hat{p}(t) = 0 \end{cases}, \\ \dot{\hat{p}}(t) = \hat{x}(t); \\ \hat{x}(0) = 1, \quad \hat{x}(2) = 0. \end{cases} \quad (1.122)$$

В этой краевой задаче неизвестны две постоянные инте-
грирования ее системы дифференциальных уравнений, и
для их определения имеется два краевых условия. Усло-
вия б): $\hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \hat{p}(2) = -\hat{\lambda}_2,$ в краевую задачу не вклю-
чаются, так как они служат для определения множителей
 $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2,$ которые на решение краевой задачи не влияют, и
потому их определять не требуется. Решим эту краевую
задачу.

Чтобы избежать анализа возможных вариантов реше-
ния краевой задачи, “угадаем” решение исходной за-
дачи (1.118)–(1.121) оптимального управления, на ко-
тором достигается абсолютный минимум функционала
 $I(x(\cdot), u(\cdot)),$ покажем, что оно является решением крае-
вой задачи, и непосредственной проверкой убедимся, что
на “угаданном” решении достигается абсолютный мини-
мум функционала. Сделаем это.

Структура функционала (1.118) показывает, что его абсолютный минимум достигается при $x(t) \equiv 0$, $t \in [0, 2]$. Но при этом не выполняется краевое условие $x(0) = 1$. Чтобы выполнить это краевое условие, “поправим” функцию $\hat{x}(t) \equiv 0$, $t \in [0, 2]$, и в качестве решения возьмем функцию:

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \in [0, 1]; \\ 0, & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Задание. Постройте график этой функции и, обратившись к исходной постановке (1.118)–(1.121) задачи, приведите аргументы, почему именно эта функция с учетом дифференциального уравнения, краевых условий и условий на управление будет доставлять функционалу абсолютный минимум.

Функция $\hat{x}(t)$ позволяет определить удовлетворяющие условиям краевой задачи функции $\hat{u}(t)$, $\hat{p}(t)$.

Проинтегрировав уравнение $\dot{\hat{p}}(t) = \hat{x}(t)$, получим:

$$\hat{p}(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{2}t^2 + a_1, & t \in [0, 1], \\ a_2, & t \in [1, 2], \end{cases}$$

где a_1 , a_2 — постоянные интегрирования. Так как функция $\hat{p}(t)$ непрерывна при $t \in [0, 2]$ (поскольку $\hat{p}(\cdot) \in KC^1([0, 2])$), то из условия непрерывности этой функции при $t = 1$ получим связь между a_1 и a_2 : $a_2 = a_1 + 1/2$.

Первое уравнение краевой задачи позволяет определить управление $\hat{u}(t)$:

$$\hat{u}(t) = \dot{\hat{x}}(t) \equiv \begin{cases} -1, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Поскольку из условия оптимальности по управлению u следует, что $\hat{u}(t) = 0$ возможно лишь при $\hat{p}(t) = 0$, а в рассматриваемом случае $\hat{u}(t) \equiv 0$, $t \in [1, 2]$, то $\hat{p}(t) \equiv 0$, $t \in [1, 2]$. А поскольку управление $\hat{u}(t) \equiv 0$, $t \in [1, 2]$, нельзя определить из условия оптимальности по u (так как $\hat{p}(t) \equiv 0$, $t \in [1, 2]$) (см. условие в)), то управление

$\hat{u}(t) \equiv 0$, $t \in [1, 2]$ — особое управление. Так как $\hat{p}(t) \equiv 0$, $t \in [1, 2]$, то $a_2 = 0$, а так как функция $\hat{p}(t)$ непрерывна при $t = 1$, то $a_1 = -1/2$ и

$$\hat{p}(t) = \begin{cases} t - t^2/2 - 1/2, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Заметим, что сопряжение ветвей графика функции $\hat{p}(t)$ при $t = 1$ — гладкое.

Задание. Нарисуйте график функции $\hat{p}(t)$ и покажите, что сопряжение ветвей графика при $t = 1$ происходит с сохранением производной (гладко): $\dot{\hat{p}}|_{t=1} = -(t-1)|_{t=1} = 0$.

В итоге получаем, что решением краевой задачи принципа максимума (экстремалью Понтрягина) будет функция:

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} 1-t, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \in [1, 2], \end{cases}$$

с участком особого управления при $t \in [1, 2]$.

- 4) Исследуем полученную экстремаль $\hat{x}(\cdot)$ на абсолютную оптимальность. Непосредственной проверкой покажем, что $\hat{x}(\cdot)$ доставляет функционалу абсолютный минимум. Для этого возмутим $\hat{x}(\cdot)$ посредством функции $x(\cdot)$, так чтобы функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ осталась допустимой. В рассматриваемой задаче функция $\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)$ будет допустимой, если $x(\cdot) \in KC^1([0, 2])$, $\hat{x}(0) + x(0) = 1$, $\hat{x}(2) + x(2) = 0$, $-1 \leq \dot{\hat{x}}(t) + \dot{x}(t) \leq 1 \forall t \in [0, 2]$. Поскольку по условию задачи $\hat{x}(0) = 1$, $\hat{x}(2) = 0$, то $x(0) = 0$, $x(2) = 0$. При этом ограничение на производную распадается на два условия: $0 \leq \dot{x}(t) \leq 2 \forall t \in [0, 1]$ и $-1 \leq \dot{x}(t) \leq 1 \forall t \in [1, 2]$.

Определим с учетом полученных условий знак приращения функционала:

$$\begin{aligned} \Delta I &\equiv I(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)) - I(\hat{x}(\cdot)) \equiv \\ &\equiv \int_0^2 (\hat{x} + x)^2 dt - \int_0^2 \hat{x}^2 dt \equiv \\ &\equiv 2 \int_0^2 \hat{x}x dt + \int_0^1 x^2 dt \geq 2 \int_0^2 \hat{x}x dt \equiv \\ &\equiv 2 \int_0^1 (1-t)x dt + 2 \int_1^2 0 \cdot x dt \equiv 2 \int_0^1 (1-t)x dt. \end{aligned}$$

Так как $x(0) = 0$ и $0 \leq \dot{x}(t) \leq 2 \quad \forall t \in [0, 1]$, то $x(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$. А поскольку $1 - t \geq 0$, то $2 \int_0^1 (1-t)x(t) dt \geq 0$, и потому $\Delta I \geq 0$. А это означает, что при любых допустимых возмущениях $x(\cdot)$ полученного решения $\hat{x}(\cdot)$ функционал I не убывает, и следовательно, на экстремали $\hat{x}(\cdot)$ достигается его абсолютный минимум. При этом $\inf I(x(\cdot)) \equiv \text{abs min } I(x(\cdot)) \equiv I(\hat{x}(\cdot)) = 1/3$.

Комментарий к разделу 1.3

В разделе 1.3 на примерах показано *как* в задачах классического вариационного исчисления, задачах Лагранжа и задачах оптимального управления принцип максимума позволяет получать экстремальные решения (экстремали Понtryгина), сводя каждую из этих задач к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены задачи с основными типами функционалов (функционалами Лагранжа, Майера и Больца), задачи со значительной частью возможных вариантов дифференциальных связей, ограничений на управление, краевых условий типа равенств и неравенств, изопериметрических условий типа равенств и неравенств, а также задачи, в которых решение существует лишь в аномальном случае ($\hat{\lambda}_0 = 0$), и задачи, в которых решение содержит участок с особым управлением.

Дополнение к главе 1 (В. М. Тихомиров)

1. О принципе Лагранжа

Представляется полезным ознакомить читателя практикума с концепцией принципа Лагранжа выписывания необходимых условий экстремума в задачах на экстремум, в частности, в задачах оптимального управления.

В практикуме рассматривается следующая задача минимизации (это та же задача, что и (1.0)–(1.4)):

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(\xi) &\rightarrow \min, \\ \mathcal{B}_i(\xi) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m', \\ \mathcal{B}_i(\xi) &= 0, \quad i = m' + 1, \dots, m, \\ \dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) &= 0, \quad u(t) \in U(t). \end{aligned} \tag{1.123}$$

Здесь $\Xi = \{\xi = (x(\cdot), u(\cdot), (t_0, t_1))\}$ — пространство

$$KC^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times KC(\Delta, \mathbb{R}^r) \times \mathbb{R}^2,$$

состоящее из кусочно-непрерывно дифференцируемых n -мерных функций $x(\cdot)$, кусочно-непрерывных r -мерных функций $u(\cdot)$ и пар (t_0, t_1) , $t_i \in \mathbb{R}$, Δ — заданный конечный отрезок, $t_0, t_1 \in \text{int } \Delta$, $\{U(t)\}$ — семейство подмножеств из \mathbb{R}^r ,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i(\xi) &= \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), u(t)) dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \\ f_i &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}, \\ \psi_i &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ \varphi &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ i &= 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Если $U(t) \equiv \mathbb{R}^n$, то (1.123) называют *задачей Лагранжа* и рассматривают ее в (банаховом) пространстве $\Xi_1 = C^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times C(\Delta, \mathbb{R}^r) \times \mathbb{R}^2$ (непрерывно дифференцируемых n -мерных функций $x(\cdot)$, непрерывных r -мерных функций $u(\cdot)$ и пар (t_0, t_1) , $t_i \in \mathbb{R}$ с нормой $\|\xi\|_{\Xi_1} = \max \|x(\cdot)|_{C^1} + \|x(\cdot)\|_C + |t_0| + |t_1|$). Задачу (1.123) называют *задачей оптимального управления (в понтиягинской форме)*. Элемент ξ называется допустимым (в задаче Лагранжа или задаче оптимального управления), если он лежит в пространстве Ξ_1 или, соответственно, в Ξ и удовлетворяет всем

ограничениям. Говорят, что элемент $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ доставляет *сильный минимум* в задаче (1.123), если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого допустимого элемента $\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$, удовлетворяющего неравенству $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C([t_0, t_1])} + |t_0 - \hat{t}_0| + |t_1 - \hat{t}_1| < \varepsilon$, выполнено неравенство $B_0(\xi) - B_0(\hat{\xi}) \geq 0$. Задачу Лагранжа исследуют и на *слабый минимум*, т. е. локальный минимум в пространстве Ξ_1 .

Идею Лагранжа, высказанную им для конечномерной гладкой задачи с равенствами в 1797 году, можно применять для весьма широкого класса задач типа

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad f_i(x) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad F(x) = 0, \quad (1.124)$$

где имеется минимизируемый функционал, конечное число неравенств и, вообще говоря, бесконечное число равенств (F отображает при этом исходное линейное пространство X в другое линейное пространство Y). В частности, задача Лагранжа относится к рассматриваемому классу задач. Задача оптимального управления не относится к нему, но окончательный результат соответствует идеологии Лагранжа.

Эвристически, без точного формулирования условий, при которых идея Лагранжа осуществима, ее можно выразить так: *если вы хотите найти локальный минимум в задаче (1.124), составьте функцию Лагранжа*

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x) + \langle y', F(x) \rangle$$

(где набор множителей Лагранжа λ состоит из чисел λ_i , $0 \leq i \leq m$ и линейного функционала y' на Y) и примените необходимое условие минимума к задаче $\mathcal{L}(x, \lambda) \rightarrow \min$, **как будто переменные независимы**. При этом надо учесть еще два обстоятельства, связанных с неравенствами: числовые множители должны быть неотрицательны и выполнены равенства $\lambda_i f_i(x) = 0$, $1 \leq i \leq m$ (называемые *условиями дополняющей нежесткости*). Найдя все элементы, удовлетворяющие полученным уравнениям, следует отобрать тот, значение функционала на котором минимально, и тогда задача будет исследована до конца (если, впрочем, известно, что задача имеет

решение). Покажем, как это применять для исследования задачи (1.123).

Функция Лагранжа задачи (1.123) имеет вид (это, разумеется, та же функция, что выписана на стр. 13 практикума):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\xi, \lambda) &= \sum_{i=0}^m \lambda_i \mathcal{B}_i(\xi) + \int_{t_0}^{t_1} p(t) \cdot (\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t))) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda) dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1), \lambda), \\ L(t, x, \dot{x}, u, \lambda) &= \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, x, u) + p(t) \cdot (\dot{x} - \varphi(t, x, u)), \\ l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1), \lambda) &= \sum_{i=0}^m \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)).\end{aligned}$$

Элемент ξ состоит из трех составляющих: $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ и (t_0, t_1) , и идея Лагранжа предписывает рассмотреть три задачи (фиксируя две компоненты из трех):

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \hat{u}(\cdot), (\hat{t}_0, \hat{t}_1)) \rightarrow \min \text{ (по } x(\cdot)); \quad (1.125)$$

$$\mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), u(\cdot), (\hat{t}_0, \hat{t}_1)) \rightarrow \min \text{ (по } u(\cdot)); \quad (1.126)$$

$$\mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)), (t_0, t_1)) \rightarrow \min \text{ (по } (t_0, t_1)). \quad (1.127)$$

Задача (1.125) и задача (1.126) в случае, если на u нет ограничений, относятся к числу задач вариационного исчисления без ограничений (их называют *задачами Больца*); задачи типа (1.126) (с ограничением $u(t) \in U(t)$) мы называем *простейшими задачами оптимального управления*; задачи (1.127) — *гладкие задачи без ограничений* в \mathbb{R}^2 . Теперь осталось лишь выписать необходимые условия экстремума для перечисленных трех задач.

1) Необходимые условия минимума функции $\hat{x}(\cdot)$ в задаче Больца

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt + l(x(t_0), x(t_1)) \rightarrow \min$$

состоит из *уравнения Эйлера* $-\frac{d}{dt} \widehat{L}_{\dot{x}}(t) - \widehat{L}_x(t) = 0$ и *условий трансверсальности* $\widehat{L}_{\dot{x}}(t_i) = (-1)^i \widehat{l}_{x(t_i)}$, $i = 0, 1$ (где, как обычно, $\widehat{L}_{\dot{x}}(t) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) dt$, $\widehat{l}_{x(t_i)} = l_{x(t_i)}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$ и т. п.).

2) Необходимые условия минимума функции $\hat{u}(\cdot)$ в простейшей задаче оптимального управления

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi(t, u(t)) dt \rightarrow \min, \quad u(t) \in U(t)$$

состоит из следующего *условия минимума*:

$$\min_{u \in U(t)} \psi(t, u(t)) = \psi(t, \hat{u}(t))$$

(в точках непрерывности кусочно непрерывной функции $\hat{u}(t)$.

3) Необходимые условия минимума пары (\hat{t}_0, \hat{t}_1) в гладкой задаче без ограничений $h(t_0, t_1) \rightarrow \min$ состоят из условий стационарности: $\frac{\partial h}{\partial t_0}(\hat{t}_0, \hat{t}_1) = 0$, $\frac{\partial h}{\partial t_1}(\hat{t}_0, \hat{t}_1) = 0$.

Если теперь приложить эти формулы к задачам (1.125)–(1.127), то получим, что необходимые условия в задаче (1.123) состоят из

a) уравнения Эйлера (по $x(\cdot)$):

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) - \hat{L}_x(t) = 0, \quad (1.128)$$

b) условий трансверсальности по $x(\cdot)$:

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_i) = (-1)^i \hat{l}_{x(t_i)}, \quad i = 0, 1, \quad (1.129)$$

c) условий минимума (по $u(\cdot)$):

$$\min_{u \in U(t)} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = \hat{L}(t), \quad (1.130)$$

d) условий трансверсальности по t :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_i}(\hat{\xi}, \lambda) = 0, \quad i = 0, 1. \quad (1.131)$$

Если исследуется задача Лагранжа на слабый минимум, то вместо (1.130) выписывается

c') уравнение Эйлера (по $u(\cdot)$):

$$\widehat{L}_u(t) = 0. \quad (1.132)$$

Теперь можно сформулировать точный результат.

Теорема (о принципе Лагранжа для задачи (1.123)).

a) Пусть $\widehat{\xi}$ допустимый элемент в задаче Лагранжа (1.123) и $f, f_x, f_u, \varphi, \varphi_x, \varphi_u$ непрерывны в окрестности графика $\{(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)), t \in [\widehat{t}_0, \widehat{t}_1]\}$. Тогда, если $\widehat{\xi}$ доставляет слабый минимум задаче Лагранжа, то выполнены соотношения (1.128), (1.129), (1.132) и (1.131).

b) Пусть $\widehat{\xi}$ — допустимый элемент в задаче (1.123) оптимального управления, и $f, f_x, \varphi, \varphi_x$, непрерывны в окрестности множества $\{(t, \widehat{x}(t), U(t)), t \in [\widehat{t}_0, \widehat{t}_1]\}$. Тогда, если $\widehat{\xi}$ доставляет сильный минимум задаче (1.123), то выполнены соотношения (1.128), (1.129), (1.130) и (1.131).

Решения задач

Далее мы следуем единому плану: во-первых, составляем функцию Лагранжа ($\Phi\mathcal{L}$), при составлении $\Phi\mathcal{L}$ не включаем слагаемые по фиксированным граничным условиям, ибо соответствующие множители Лагранжа неинформативны. Во-вторых, записываем уравнения Эйлера (УЭ), условия трансверсальности (УТ), условия минимума (УМ) и решаем полученные соотношения. В-третьих, обсуждаем, что найдено — в выпуклом случае, когда функционал выпуклый, а ограничения линейны, сразу получается, что найден абсолютный минимум. И, наконец, записываем ответ. Ввиду того, что мы поступаем эвристически, а в заключительной части обсуждаем полученные решения, всегда полагаем в $\Phi\mathcal{L}$ $\lambda_0 = 1$. Переходим к решениям.

1. $J(x(\cdot)) = \int_0^1 (\dot{x}^2 - 12tx) dt \rightarrow \min, x(0) = x(1) = 0$.

$\Phi\mathcal{L}$ совпадает с J . УЭ: $\ddot{x} = -6t$. Общее решение $x(t, C_1, C_2) = t^3 + C_1 t + C_2$. В силу выпуклости задачи, функция, удовлетворяющая краевым условиям, — абсолютный минимум. Ответ: $\widehat{x}(t) = -t^3 + t \in \text{absmin}$.

2. $J(x(\cdot), T) = \int_0^T \dot{x}^2 dt \rightarrow \min, x(0) = 0, T + x(T) + 1 = 0$ ($T > 0$).

ФЛ: $\int_0^T \dot{x}^2 dt + \lambda(T + x(T))$. УЭ: $\ddot{x} = 0$, общее решение его (с учетом краевого условия на левом конце): $x(t, C) = Ct$. УТ по x : $2\dot{x}(T) = \lambda$, УТ по T : $\dot{x}^2(T) + \lambda + \dot{x}(T) = 0$. Из этих двух уравнений получаем два решения: $x_1(t) = -2t$ и $x_2(t) = 0$. Второе решение отпадает, ибо тогда $T = -1$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что ответ: $\hat{x}(t) = -2t$.

3. $J(x(\cdot)) = \int_0^1 (\dot{x}^2 dt) \rightarrow \min$, $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$, $x(1) = 1$, $\dot{x}(1) = 4$, $\ddot{x}(1) = 12$. $\Leftrightarrow \int_0^1 x_3^2 dt \rightarrow \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$, $x_1(1) = 1$, $x_2(1) = 4$, $x_3(1) = 12$.

ФЛ: $\int_0^1 (x_3^2 + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - x_3)) dt$. УЭ: $-\dot{p}_1 = 0$, $-\dot{p}_2 - p_1 = 0$, $2\ddot{x}_3 = p_2$. Отсюда получаем: $x^{(6)} = 0$. С учетом краевых условий на левом конце общее решение: $x(t, C_1, C_2, C_3) = C_1 t^3 + C_2 t^4 + C_3 t^5$. В силу выпуклости задачи функция, удовлетворяющая краевым условиям, — абсолютный минимум. Ответ: $\hat{x}(t) = t^4 \in \text{absmin}$.

4. $J_1(x(\cdot)) = \int_0^1 (\dot{x}^2 + 24t^2 x) dt \rightarrow \min$, $J_2(x(\cdot)) = \int_0^1 t x dt = 1$, $x(0) = 1$, $x(1) = 5$.

ФЛ: $\int (\dot{x}^2 + 24t^2 x + \lambda t x) dt$. УЭ: $2\ddot{x} + 24t + \lambda = 0$. Общее решение: $x(t, C_1, C_2, C_3) = t^4 + C_1 t^3 + C_2 t + C_3$. Из граничных и изопериметрического условия приходим к равенствам: $C_3 = 1$, $C_1 + C_2 = 3$, $C_1/5 + C_2/3 = 1/3 \Rightarrow C_1 = 5$, $C_2 = -2$. Ввиду выпуклости задачи функция, удовлетворяющая краевым условиям, — абсолютный минимум. Ответ: $\hat{x}(t) = t^4 + 5t^3 - 2t + 1 \in \text{absmin}$.

5. $T \rightarrow \min$, $J(x(\cdot)) = \int_0^T \dot{x}^2 dt = 1$, $x(0) = 0$, $x(T) = 1$, ($T > 0$).

ФЛ: $\int_0^T \dot{x}^2 dt + T + \lambda x(T)$. УЭ: $\ddot{x} = 0$. С учетом краевого условия на левом конце общее решение: $x(t) = Ct$. УТ по $x(\cdot)$: $2\dot{x}(T) = -\lambda$, УТ по T : $\dot{x}^2(T) + 1 + \lambda \dot{x}(T) = 0$, откуда $\dot{x}(T) = 1$. Получаем единственное решение $x(t) = t$ и из $x(T) = 1$ следует, что $T = 1$. Непосредственная проверка показывает, что это абсолютный минимум. Ответ: $\hat{x}(t) = t$, $\hat{T} = 1 \in \text{absmin}$.

Б. М. Тихомиров

Глава 2.

Метод стрельбы численного решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления

Рассмотрим существование *метода стрельбы (пристрелки)* на примере задачи оптимального управления:

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf; \quad (2.0)$$

$$\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 \subseteq [t_0, t_1]; \quad (2.1)$$

$$u(t) \in U(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1]; \quad (2.2)$$

$$x(t_0) - x_0 = 0, \quad x(t_1) - x_1 = 0. \quad (2.3)$$

Задача (2.0)–(2.3) — частный случай исходной задачи (1.0)–(1.4): в ней величины t_0 , $x(t_0)$, t_1 , $x(t_1)$ — фиксированы; отсутствуют ограничения (1.4) типа неравенств; отсутствует терминальная составляющая в функционале:

$$\psi_0(t_0, x(t_0); t_1, x(t_1)) = 0,$$

отсутствуют интегральные составляющие в условиях (1.3):

$$f_\nu(t, x(t), u(t)) = 0, \quad 1 \leq \nu \leq m + k,$$

а терминальные составляющие в (1.3) соответствуют краевым условиям (2.3):

$$\psi_1(t_0, x(t_0); t_1, x(t_1)) \equiv x(t_0) - x_0 = 0,$$

$$\psi_2(t_0, x(t_0); t_1, x(t_1)) \equiv x(t_1) - x_1 = 0;$$

то есть в (1.3) $i = 1, 2, \dots, m = 2n$.

Решение задачи (2.0)–(2.3) заключается в определении управляющей вектор-функции $\hat{u}(t) \equiv (\hat{u}^1(t), \dots, \hat{u}^r(t))^T$ и соответствующей ей траектории $\hat{x}(t) \equiv (x^1(t), \dots, \hat{x}^n(t))^T$ точки x фазового пространства, движение которой описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1), и которая за время $t_1 - t_0$, где t_0, t_1 — заданы, должна перейти из фиксированного начального положения $x(t_0) = x_0$ в фиксированное конечное положение $x(t_1) = x_1$ при условии, что функционал (2.0) принимает при этом минимальное значение. Индекс “ T ” здесь и далее означает транспонирование.

Будем решать задачу в понтрягинской форме (с использованием функций H, l). Следуя правилу решения задач оптимального управления (см. п. 1.2), запишем функцию Понтрягина:

$$H \equiv \langle p, \varphi(t, x, u) \rangle - \lambda_0 f_0(t, x, u),$$

терминант:

$$l \equiv \langle \lambda_1, x(t_0) - x_0 \rangle + \langle \lambda_2, x(t_1) - x_1 \rangle,$$

и полную систему условий принципа максимума (условия а–з):

- а) система уравнений Эйлера–Лагранжа (сопряженная система):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{p}}(t) &= -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \equiv \\ &\equiv -\langle \hat{p}(t), \varphi_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \rangle + \hat{\lambda}_0 f_{0x}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)); \end{aligned}$$

- б) условия трансверсальности:

$$\hat{p}(t_0) = \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_0)} = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}(t_1) = -\frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_1)} = -\hat{\lambda}_2;$$

- в) условие оптимальности по u :

$$\hat{u}(t) = \arg \max_{u(t) \in U(t)} H(t, \hat{x}(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}_0) \equiv \hat{u}(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}_0)$$

$$\forall t \in \Delta_0;$$

- г) условия стационарности по t_0 , t_1 отсутствуют, так как t_0 , t_1 фиксированы;
- д) условия дополняющей нежесткости отсутствуют, так как в задаче нет условий типа неравенств;
- е) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$;
- ж) условие НЕРОН;
- з) условие нормировки множителей Лагранжа.

После подстановки управления $\hat{u}(t) = u(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}_0)$ из условия в) в уравнения (2.1) и а) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\hat{x}(t)$, $\hat{p}(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial p} \equiv \varphi(t, \hat{x}(t), u(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}_0)), \\ \dot{\hat{p}}(t) &= -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \equiv -\langle \hat{p}(t), \varphi_x(t, \hat{x}(t), u(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}_0)) \rangle + \\ &\quad + \hat{\lambda}_0 f_{0x}(t, \hat{x}(t), u(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}_0)).\end{aligned}\quad (2.4)$$

Решение системы (2.4) должно удовлетворять краевым условиям (2.3), условиям трансверсальности б) и условиям е)-з). Так осуществляется переход от исходной задачи оптимального управления (2.0)-(2.3) к краевой задаче (краевой задаче принципа максимума) для системы $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (2.4) с $4n$ краевыми условиями (2.3) и условиями трансверсальности б) при дополнительных условиях е)-з). В полученной краевой задаче неизвестны $2n$ постоянных интегрирования системы (2.4) и $2n+1$ множителей Лагранжа $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ (всего $4n+1$ неизвестных). Для их определения имеется $2n$ краевых условий (2.3), $2n$ условий трансверсальности б) и условие нормировки множителей Лагранжа (всего $4n+1$ условие), то есть число неизвестных в краевой задаче равно числу условий для их определения.

Заметим, что:

1) условия трансверсальности б) из данной краевой задачи можно исключить, поскольку они служат для определения множителей Лагранжа $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$, которые в систему (2.4) не входят, на

решение краевой задачи не влияют, и поэтому их определять не требуется;

2) множитель Лагранжа $\hat{\lambda}_0$ в силу условия неотрицательности е) либо равен нулю (анормальный случай, возможность которого требует отдельного анализа), либо больше нуля и с учетом условия нормировки 3) может быть конкретизирован (можно, например, принять $\hat{\lambda}_0 = 1$) (см. выше примеры аналитического решения задач).

В итоге после исключения условий трансверсальности б) в краевой задаче при $\hat{\lambda}_0 > 0$ (в частности, при $\hat{\lambda}_0 = 1$) остается $2n$ неизвестных постоянных интегрирования системы (2.4), и имеется $2n$ условий (2.3) для их определения; при $\hat{\lambda}_0 = 0$ (анормальный случай) краевая задача требует дополнительных исследований (см. выше обсуждение этого случая в разделе “Комментарий к условиям а)-е)...” и примеры аналитического решения задач при $\hat{\lambda}_0 = 0$ в п. 1.3).

Итерационный процесс численного решения *любой* краевой задачи принципа максимума методом стрельбы, в частности, полученной краевой задачи, заключается в последовательном решении серии задач Коши. Для решения задачи Коши с начальными условиями при $t = t_0$ необходимо знать начальные условия $\hat{x}(t_0)$, $\hat{p}(t_0)$ и входящие в правые части системы дифференциальных уравнений краевой задачи множители Лагранжа. Неизвестная часть начальных условий и множителей Лагранжа, которая подлежит определению в процессе решения краевой задачи, объединяется в вектор $\alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_p)$, называемый *вектором параметров пристрелки* (α_i , $1 \leq i \leq p$, — *параметры пристрелки*). Итерационный процесс численного решения задачи Коши продолжается до обращения в ноль вектор-функции, называемой *вектор-функцией невязок* (см. ниже). Обсудим это подробнее на примере рассматриваемой задачи.

Для решения задачи Коши с начальными условиями при $t = t_0$ в рассматриваемой задаче необходимо определить начальные условия $\hat{p}(t_0)$ (начальные условия $\hat{x}(t_0) = x_0$ — известны (2.3)). Задав *как-то* эти начальные условия — n чисел, представляющих в рассматриваемой задаче вектор параметров пристрелки $\tilde{p}(t_0) \equiv \alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, и решив численно на отрезке

$[t_0, t_1]$ с начальными условиями $\tilde{x}(t_0) = x_0$, $\tilde{p}(t_0) = \alpha$ задачу Коши для системы (2.4) (предполагается, что решение задачи Коши существует), найдем для заданного α функции $\tilde{x}(t)$, $\tilde{p}(t)$, $\tilde{u}(t) \forall t \in [t_0, t_1]$ и, следовательно, значение $\tilde{x}(t_1) \equiv \tilde{x}_1$. Если при этом краевые условия $\tilde{x}(t_1) = x_1$ удовлетворяются (что маловероятно, поскольку вектор α задан “как-то”), то задача будет решена. Если же краевые условия не удовлетворяются ($\tilde{x}_1 \neq x_1$), то рассматривается вектор:

$$X \equiv \tilde{x}_1 - x_1 \Leftrightarrow X \equiv (X^1, \dots, X^n)^T \equiv (\tilde{x}_{11} - x_{11}, \dots, \tilde{x}_{n1} - x_{n1})^T,$$

называемый *вектором невязок*. Поскольку вектор \tilde{x}_1 зависит от начальных значений α : $\tilde{x}_1 \equiv \tilde{x}_1(\alpha)$, то от α будет зависеть и вектор невязок X , то есть этот вектор будет вектор-функцией:

$$X \equiv X(\alpha) \equiv (X^1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, X^n(\alpha_1, \dots, \alpha_n))^T. \quad (2.5)$$

Эта вектор-функция называется *вектор-функцией невязок* [1, 5, 7, 8, 15, 16].

Для решения краевой задачи необходимо найти такой вектор α , для которого $X(\alpha) = 0$, что эквивалентно решению системы n алгебраических уравнений для n неизвестных α_i , $1 \leq i \leq n$:

$$X^i(\alpha) \equiv X^i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.6)$$

Значения вектор-функции $X(\alpha)$ для каждого фиксированного α определяются в результате численного решения на отрезке $[t_0, t_1]$ задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.4) порядка $2n$ с $2n$ начальными условиями $x(t_0) = x_0$, $p(t_0) = p_0 \equiv \alpha$. Изменяя α и тем самым начальные условия $p(t_0) = \alpha$, необходимо “стrelять” (“пристреливаться”), решая задачу Коши до тех пор, пока не произойдет попадание с заданной точностью в конечное значение $x(t_1) = x_1$ (полная аналогия со стрельбой из орудия: пристреливаясь, подбирая угол вылета снаряда из ствола орудия (угол вылета — параметр пристрелки), необходимо добиться попадания снаряда в заданную цель; эта аналогия поясняет происхождение используемого термина “*метод стрельбы*” (“*пристрелки*”)).

Для каждого момента t при численном интегрировании системы (2.4) управляющая вектор-функция

$$\hat{u}(t) \equiv (\hat{u}^1(t), \dots, \hat{u}^r(t))^T$$

определяется из условия в) максимума по u функции $H(u)$: $u \rightarrow H(\dots, u, \dots)$, то есть в результате решения, вообще говоря, некоторой задачи нелинейного программирования. Заметим, что в рассматриваемых в практикуме задачах, как, впрочем, и в большинстве прикладных задач оптимального управления, решаемых на основе принципа максимума, структура функции $H(u)$ и множества $U(t)$ позволяют, как правило, определить функцию $u(t) = u(t, x(t), p(t), \lambda_0)$ в результате предваряющего численное решение задачи несложного анализа.

Поскольку, что следует из вышесказанного, метод стрельбы представляет собой итерационный процесс, результатом которого должно быть выполнение с заданной точностью ε на некотором k -ом шаге этого процесса (при $\alpha = \alpha^k = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$) системы условий (2.6), необходимо иметь (ввести) функцию отличия на каждом k -ом шаге итерационного процесса приближенного решения системы уравнений (2.6) от ее точного решения. В качестве такой функции может быть взята, например, скалярная функция

$$S(\alpha^k) = \sum_{i=1}^n (\chi^i X^i(\alpha^k))^2 \quad (2.7)$$

— сумма квадратов нормированных невязок, или иная неотрицательно определенная, обращающаяся в ноль только при $X(\alpha) = 0$ функция. В качестве нормировочных множителей χ^i можно взять, например, величины, предложенные Р.П. Федоренко [18, 19]. Функция $S(\alpha^k)$ позволяет записать условие сходимости итерационного процесса:

$$S(\alpha^{k+1}) < S(\alpha^k), \quad (2.8)$$

и условие окончания итерационного процесса (условие окончания счета):

$$S(\alpha^k) < \varepsilon. \quad (2.9)$$

При решении конкретных задач условие окончания счета может быть записано и в ином, отличном от (2.9), но эквивалентном ему виде, учитывающем специфику решаемых задач.

Для численного решения задачи Коши могут быть использованы известные методы, например, метод рядов Тейлора,

какой-либо из многозначных методов или методов Рунге-Кутты [6, 9, 20].

Для определения корней системы алгебраических уравнений (2.6) имеется много разнообразных методов [6, 7, 8, 9, 12, 13]. Опишем один из них — *модифицированный метод Ньютона* (первого порядка) решения системы алгебраических уравнений $X(\alpha) = 0$ ($\Leftrightarrow X^i(\alpha) = 0, 1 \leq i \leq n$), — в предположении, что $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывно-дифференцируемая (гладкая) функция.

Возьмем в качестве α^0 в начальном условии $p(t_0) = \alpha^0$ некоторый вектор $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0)^T$. Решив задачу Коши для системы (2.4) с начальными условиями $x(t_0) = x_0, p(t_0) = \alpha^0$, получим вектор-функцию невязок

$$X(\alpha^0) = (X^1(\alpha^0), \dots, X^n(\alpha^0))^T,$$

где $X^i(\alpha^0) \equiv X^i(\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0)$, $1 \leq i \leq n$. Возьмем затем вектор $\alpha^1 \equiv \alpha^0 + \Delta\alpha^1$, где $\alpha^1 \equiv (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1)^T$, $\Delta\alpha^1 \equiv (\Delta\alpha_1^1, \dots, \Delta\alpha_n^1)^T$ и потому $\alpha_j^1 = \alpha_j^0 + \Delta\alpha_j^1$, $1 \leq j \leq n$. Считая, что приращения $\Delta\alpha_j^1$ малы и возможно представление вектор-функции $X(\alpha)$ в виде:

$$X(\alpha) \equiv X(\alpha^0 + \Delta\alpha^1) \approx X(\alpha^0) + \frac{\partial X}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha^0} \cdot \Delta\alpha^1,$$

определим вектор приращений $\Delta\alpha^1$ из условия $X(\alpha) = 0$, то есть из условия:

$$X(\alpha^0) + \frac{\partial X}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha^0} \cdot \Delta\alpha^1 = 0.$$

Это условие представляет собой матричную запись системы n линейных неоднородных алгебраических уравнений для определения n составляющих вектора $\Delta\alpha^1$:

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha^0} \cdot \Delta\alpha^1 = -X(\alpha^0). \quad (2.10)$$

В развернутом виде запись системы (2.10) такова:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial X^i(\alpha^0)}{\partial \alpha_j} \right) \cdot \Delta\alpha_j^1 = -X^i(\alpha^0), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.11)$$

Обозначив матрицу $\frac{\partial X}{\partial \alpha}|_{\alpha=\alpha^0} \equiv \left\| \frac{\partial X^i(\alpha^0)}{\partial \alpha_j} \right\|$ (*матрицу Якоби*) посредством $X'(\alpha^0)$, запишем системы (2.10), (2.11) в виде:

$$X'(\alpha^0) \cdot \Delta \alpha^1 = -X(\alpha^0). \quad (2.12)$$

В результате решения системы линейных алгебраических уравнений (2.10) (или (2.11), или (2.12)) определится вектор $\Delta \alpha^1$ неизвестных $\Delta \alpha_j^1$, $1 \leq j \leq n$. Система линейных алгебраических уравнений может быть решена известными методами (методом Гаусса, методом отражений, методом поворотов и т.п.) [6, 13]. Формально решение системы (2.12) можно записать в виде:

$$\Delta \alpha^1 = -(X'(\alpha^0))^{-1} \cdot X(\alpha^0),$$

где $(X'(\alpha^0))^{-1}$ — матрица, обратная матрице $X'(\alpha^0)$.

Определив вектор $\Delta \alpha^1 \equiv (\dots, \Delta \alpha_j^1, \dots)$, $1 \leq j \leq n$, найдем вектор $\alpha^1 \equiv (\dots, \alpha_j^1, \dots)$, где $\alpha_j^1 \equiv \alpha_j^0 + \Delta \alpha_j^1$, $1 \leq j \leq n$. Решив далее задачу Коши для системы (2.4) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$, $p(t_0) = \alpha^1$, получим вектор невязок $X(\alpha^1) \equiv (X^1(\alpha^1), \dots, X^n(\alpha^1))^T$ и проверим условие окончания счета (условие (2.9) или эквивалентное ему условие). Если оно выполнится, то величины α_j^1 , $1 \leq j \leq n$, будут искомыми приближенными значениями корней системы уравнений $X(\alpha) = 0$, а если не выполнится, то образуем вектор $\alpha^2 = \alpha^1 + \Delta \alpha^2$ и повторим вычисления. В результате получим *итерационную формулу классического метода Ньютона*:

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + \Delta \alpha^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Дополнив формулу (2.13) числовым множителем γ_k , получим *итерационную формулу модифицированного метода Ньютона* [1, 6, 7]:

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + \gamma_k \cdot \Delta \alpha^{k+1}, \quad 0 < \gamma_k \leq 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \nu. \quad (2.14)$$

Вектор $\Delta \alpha^{k+1}$ в (2.13), (2.14) формально может быть представлен в виде:

$$\Delta \alpha^{k+1} = -(X'(\alpha^k))^{-1} \cdot X(\alpha^k). \quad (2.15)$$

В (2.13)–(2.15)

$$\alpha^k \equiv (\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)^T, \quad X(\alpha^k) \equiv (X^1(\alpha^k), \dots, X^n(\alpha^k))^T,$$

$X'(\alpha^k)$ — матрица, i -ая строка которой равна

$$(X^i(\alpha^k))' = (\partial X^i(\alpha^k)/\partial \alpha_1^k, \dots, \partial X^i(\alpha^k)/\partial \alpha_n^k),$$

$(X'(\alpha^k))^{-1}$ — обратная матрица.

Число γ_k в формуле (2.14) регулирует выбор шага при переходе от k -ой к $k+1$ -ой итерации с использованием условия (2.8) сходимости итерационного процесса. Имеется несколько различных способов выбора величин γ_k . В классическом методе Ньютона $\gamma_k = 1$. В методе Ньютона–Рафсона величина γ_k определяется как минимум функции сравнения (2.7):

$$\gamma_k = \min_{\gamma} S(\alpha^{k-1} + \gamma \cdot \Delta\alpha^k).$$

Определение минимума осуществляется в результате применения какого-либо метода одномерного поиска. При использовании *модификации Исаева–Сонина* на каждой итерации γ_k выбирается из числа элементов конечной последовательности $\{1, 2^{-1}, 2^{-2}, \dots, 2^{-N}\}$, причем $\gamma_0 = 1$, $\gamma_k = \min\{1, 2\gamma_{k-1}\}$. Если условие (2.8) выполняется, то делается следующая итерация, если не выполняется, то множитель γ_k последовательно уменьшается вдвое до выполнения условия (2.8), и затем делается переход к следующей $k+1$ -ой итерации. Если выбрать подходящее γ_k не удается, то считается что метод не сошелся и итерационный процесс заканчивается.

Признаком удачного окончания итерационного процесса вычислений является выполнение на ν -ой итерации условия (2.9) или другого, эквивалентного ему, условия окончания счета. Величина $\varepsilon > 0$ в условии окончания счета — заданная точность выполнения этого условия.

Метод Ньютона называют также *методом касательных*, имея в виду его известную геометрическую интерпретацию [6]. Если начальное приближение α^0 достаточно близко к значению корня, то для многих задач в этом случае метод Ньютона сходится очень быстро. В противном случае метод Ньютона может расходиться. В связи с этим выбор (задание) хорошего начального приближения α^0 является одним из определяющих обстоятельств успешного применения метода Ньютона.

В большинстве предлагаемых для решения задач Практикума начальное приближение α^0 определяется в результате

аналитического решения рассматриваемой задачи оптимального управления при нулевом значении входящего в задачу параметра (параметра задачи β).

Элементы входящей в итерационный процесс матрицы производных $X'(\alpha)$ (матрицы Якоби) могут вычисляться по приближенным конечно-разностным формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^i(\alpha^k)}{\partial \alpha_j} &\approx [X^i(\alpha_1^k, \dots, \alpha_{j-1}^k, \alpha_j^k + \delta\alpha_j^k, \alpha_{j+1}^k, \dots, \alpha_n^k) - \\ &- X^i(\alpha_1^k, \dots, \alpha_{j-1}^k, \alpha_j^k, \alpha_{j+1}^k, \dots, \alpha_n^k)] \cdot \frac{1}{\delta\alpha_j^k}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $\delta\alpha_j^k$ — малое приращение составляющей α_j^k ; $1 \leq j, k \leq n$.

Для вычисления $\partial X^i(\alpha^k)/\partial \alpha_j$, $1 \leq i, j \leq n$, требуется $n+1$ раз решить задачу Коши для системы (2.4): сначала решить ее для вектора $\alpha^k \equiv (\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)^T$, а затем еще n раз, давая поочередно всем компонентам вектора α^k приращения $\delta\alpha_j^k$, $1 \leq j \leq n$. Числа $\delta\alpha_j^k$ при этом должны быть достаточно малыми, чтобы точность формулы (2.16) была высокой, но не должны быть меньше, чем порядок величины погрешности вычисления компонент вектор-функции невязок (2.5) [6, гл. 2, § 16].

Так решаемая на основе принципа максимума исходная задача оптимального управления (в рассматриваемом случае задача (2.0)–(2.3)) сводится к краевой задаче (краевой задаче принципа максимума), а решение краевой задачи методом стрельбы сводится, в свою очередь, к решению системы алгебраических уравнений для составляющих вектор-функции невязок.

2.1. Алгоритм численного решения методом стрельбы краевой задачи принципа максимума для задачи (2.0)–(2.3)

1. Задаются вектор начального приближения $\alpha^0 \equiv (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0)$ и точность ε выполнения условия окончания итерационного процесса (условия окончания счета), эквивалентного условию (2.9) или совпадающего с ним.
2. По начальным условиям $x(t_0) = x_0$, $p(t_0) = \alpha^0$ запускается описанный выше итерационный процесс численного решения методом стрельбы на отрезке $[t_0, t_1]$ краевой задачи принципа максимума. Итерационный процесс продолжается до выполнения условия окончания счета. В результате решения определяются: управление $\hat{u}(\cdot)$ и фазовая траектория $\hat{x}(\cdot)$.

Входящее в систему (2.4) управление $\hat{u}(t) \equiv \hat{u}(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}_0)$ либо определяется аналитически из условия в), либо вычисляется на основе этого условия на каждом шаге решения задачи Коши. Возможность аномального случая ($\hat{\lambda}_0 = 0$) исследуется заранее. При $\hat{\lambda}_0 \neq 0$ множитель $\hat{\lambda}_0$ может быть использован для нормировки множителей Лагранжа. Например, $\hat{\lambda}_0$ полагается равным единице или какой-нибудь другой положительной константе. Если невозможность аномального случая $\hat{\lambda}_0 = 0$ в результате теоретического анализа доказать не удается, то краевая задача решается в двух вариантах: при $\hat{\lambda}_0 = 0$ и при $\hat{\lambda}_0 > 0$, задаваемом с учетом условия нормировки. Если краевые задачи в этих двух вариантах удается решить, то соответствующие этим вариантам решения сравниваются по значениям функционала и то из этих решений, для которого значение функционала больше, отсеивается. Иными словами, проводится сепарация решений. В противном случае (без анализа варианта $\hat{\lambda}_0 = 0$) решение краевой задачи и, следовательно, решение исходной задачи оптимального управления будут неполными.

Рассмотренный выше для частного случая задачи оптимального управления (2.0)–(2.3) метод стрельбы численного решения краевой задачи принципа максимума после некоторых до-

полнений может быть применен при численном решении краевой задачи принципа максимума для общего случая задачи оптимального управления (1.0)–(1.4). Существо метода стрельбы при переходе от частного случая к общему, разумеется, сохранится: необходимо формировать вектор параметров пристрелки и вектор-функцию невязок; численно строить матрицу Якоби, решая для этого серию задач Коши; решать итерационным методом систему алгебраических уравнений для составляющих вектор-функции невязок и т.д. Дополнения при переходе от частного случая к общему будут связаны, в первую очередь, с изменением структуры вектора параметров пристрелки и вектор-функции невязок, а также с формированием в задачах с нефиксированными t_0 , t_1 условий начала и останова счета. В общем случае задачи (1.0)–(1.4) в вектор параметров пристрелки α помимо неизвестных компонент векторов $x(t_0)$, $\alpha \equiv p(t_0)$, могут войти неизвестные множители Лагранжа λ_0 , $\lambda \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_{m+k})$, присутствующие в дифференциальных уравнениях краевой задачи. Особое внимание при этом следует обратить на задачи с ограничениями типа неравенств (см. ниже). Следует подчеркнуть, что определяющим фактором успешного применения метода стрельбы при решении краевой задачи является выбор (задание) начального приближения для вектора параметров пристрелки α (от удачного выбора начального приближения для вектора α , в первую очередь, зависит сходимость метода Ньютона). Поскольку подлежащие численному решению в данном Практикуме задачи оптимального управления содержат параметр и при нулевом значении этого параметра могут быть решены аналитически, это аналитическое решение может быть использовано при получении начального приближения для вектора параметров пристрелки при решении краевой задачи с ненулевыми значениями параметра. После определения вектора α при нулевом значении параметра задачи для решения краевой задачи при ненулевых значениях параметра в Практикуме применяется метод *продолжения решения по параметру* [8].

Рассмотрим примеры получения начального приближения для вектора α при решении конкретных задач и попутно решим некоторые типы задач, не рассматривавшиеся ранее.

2.2. Примеры применения метода стрельбы при решении на основе принципа максимума задач п. 1.3

2.2.1. Задачи классического вариационного исчисления

Пример 1. Простейшая задача классического вариационного исчисления — задача с фиксированными начальными и конечными значениями фазовой переменной и времени.

$$I(x(\cdot)) \equiv \int_0^1 (\dot{x}^2(t) - 12tx(t)) dt \rightarrow \inf, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Краевая задача принципа максимума имеет вид (1.10):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = -6t; \end{cases} \quad \hat{x}(0) = 0, \quad \hat{x}(1) = 0.$$

Для решения краевой задачи воспользуемся классической вычислительной схемой метода стрельбы. Вектор параметров пристрелки состоит из одной компоненты $\alpha \equiv (p(0))$. Вектор-функция невязок имеет вид:

$$X(\alpha) \equiv (x(1)(\alpha)).$$

Решение задачи Коши для начальных условий $x(0) = 0$, $p(0) = \alpha$ имеет вид:

$$x(t) = -t^3 + \alpha t, \quad p(t) = -3t^2 + \alpha.$$

Функция невязок

$$X(\alpha) = -1 + \alpha$$

линейна по α , и алгебраическое уравнение $X(\alpha) = 0$ решается методом Ньютона за одну итерацию при любом начальном приближении α^0 : $\alpha = 1$.

$$x(t) = -t^3 + t, \quad p(t) = -3t^2 + 1.$$

Пример 2. Задача классического вариационного исчисления с нефиксированными конечными значениями времени T и фазовой переменной $x(T)$.

$$I(x(\cdot), T) \equiv \int_0^T \dot{x}^2(t) dt \rightarrow \inf,$$

$$x(0) = 0, \quad T + x(T) + 1 = 0, \quad T > 0.$$

Краевая задача принципа максимума имеет вид (1.16):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = 0; \quad \hat{x}(0) = 0, \quad \hat{T} + \hat{x}(\hat{T}) + 1 = 0, \\ \hat{p}(\hat{T}) = -\hat{\lambda}; \quad \hat{H}(\hat{T}) = \hat{\lambda}. \end{cases}$$

Для решения краевой задачи воспользуемся классической вычислительной схемой метода стрельбы. Вектор параметров пристрелки состоит из двух компонент $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \equiv (p(0), T)$. Вектор-функция невязок имеет вид:

$$X(\alpha) \equiv (H(T)[\alpha] + p(T)[\alpha], \alpha_2 + x(T)[\alpha] + 1).$$

Решение задачи Коши для начальных условий $x(0) = 0$, $p(0) = \alpha$ имеет вид:

$$x(t) = \alpha_1 t, \quad p(t) = \alpha_1.$$

Решение краевой задачи методом стрельбы эквивалентно решению системы уравнений:

$$\begin{aligned} X_1(\alpha) &= (\alpha_1)^2/2 + \alpha_1, \\ X_2(\alpha) &= \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 + 1. \end{aligned}$$

При решении системы уравнений методом Ньютона итерационный процесс

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_1^{i+1} \\ \alpha_2^{i+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \alpha_1^i \\ \Delta \alpha_2^i \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Delta \alpha_1^i \\ \Delta \alpha_2^i \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \alpha_1^i + 1 & 0 \\ \alpha_2^i & \alpha_1^i + 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha_1^i/2 + 1)\alpha_1^i \\ \alpha_2^i + \alpha_1^i \alpha_2^i + 1 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= - \begin{pmatrix} (\alpha_1^i/2 + 1)\alpha_1^i/(\alpha_1^i + 1) \\ (\alpha_2^i((\alpha_1^i)^2/2 + \alpha_1^i + 1) + \alpha_1^i + 1)/(\alpha_1^i + 1)^2 \end{pmatrix}$$

может сойтись к одному из двух существующих корней и сходимость метода к одному из этих корней зависит от выбора начального приближения: при $\alpha_1^0 > -1$ процесс сходится к недопустимому в силу условия $T > 0$ корню $p(0) = \alpha_1 = 0$, $T = \alpha_2 = -1$, при $\alpha_1^0 < -1$ — к корню $p(0) = \alpha_1 = -2$, $T = \alpha_2 = 1$, являющемуся решением задачи, при $\alpha_1^0 = -1$ матрица Якоби вырождена, и метод Ньютона оказывается неприменимым.

Как отмечалось ранее, выбор другой вычислительной схемы может улучшить сходимость метода стрельбы. Например, если в результате анализа краевой задачи принципа максимума обосновать, что $\hat{p}(\hat{T}) \neq 0$, то замена первой компоненты вектор-функции невязок на

$$H(T)/p(T) + 1 \equiv \alpha_1^i/2 + 1$$

приводит к системе уравнений, единственное решение которой определяется методом Ньютона не более чем за две итерации для любого начального приближения.

Пример 3. Задача классического вариационного исчисления со старшими производными, фиксированными начальными и конечными значениями времени, фазовой переменной и ее производных.

$$I(x(\cdot)) \equiv \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt \rightarrow \inf,$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad \dot{x}(1) = 4, \quad \ddot{x}(1) = 12.$$

Краевая задача принципа максимума имеет вид (1.21):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t), \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t), \\ \dot{\hat{x}}_3(t) = \hat{p}_3(t); \\ \dot{\hat{p}}_1(t) = 0, \\ \dot{\hat{p}}_2(t) = -\hat{p}_1(t), \\ \dot{\hat{p}}_3(t) = -\hat{p}_2(t); \\ \hat{x}_1(0) = 0, \quad \hat{x}_2(0) = 0, \quad \hat{x}_3(0) = 0; \\ \hat{x}_1(1) = 1, \quad \hat{x}_2(1) = 4, \quad \hat{x}_3(1) = 12. \end{cases}$$

Для решения краевой задачи воспользуемся классической вычислительной схемой метода стрельбы. В качестве вектора параметров пристрелки выберем три компоненты $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \equiv (p_1(0), p_2(0), p_3(0))$. Задав эти значения каким–либо образом и решив задачу Коши от $t = 0$ до $t = 1$, получим соответствующие им функции

$$\begin{aligned} x_1(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], \quad x_2(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], \quad x_3(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], \\ p_1(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], \quad p_2(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], \quad p_3(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]. \end{aligned}$$

Вектор–функция невязок имеет вид:

$$X(\alpha) \equiv (x_1(1)[\alpha] - 1, x_2(1)[\alpha] - 4, x_3(1)[\alpha] - 12).$$

Решение задачи Коши для начальных условий $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$, $p_1(0) = \alpha_1$, $p_2(0) = \alpha_2$, $p_3(0) = \alpha_3$ имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1(\cdot)[\alpha] &= \alpha_1 t^5 / 120 - \alpha_2 t^4 / 24 + \alpha_3 t^3 / 6, \\ x_2(\cdot)[\alpha] &= \alpha_1 t^4 / 24 - \alpha_2 t^3 / 6 + \alpha_3 t^2 / 2, \\ x_3(\cdot)[\alpha] &= \alpha_1 t^3 / 6 - \alpha_2 t^2 / 2 + \alpha_3 t, \\ p_1(\cdot)[\alpha] &= \alpha_1, \\ p_2(\cdot)[\alpha] &= -\alpha_1 t + \alpha_2, \\ p_3(\cdot)[\alpha] &= \alpha_1 t^2 / 2 - \alpha_2 t + \alpha_3. \end{aligned}$$

Решение краевой задачи методом стрельбы эквивалентно решению системы уравнений для вектор–функции невязок

$$\begin{aligned} X_1(\alpha) &= \alpha_1 / 120 - \alpha_2 / 24 + \alpha_3 / 6 - 1, \\ X_2(\alpha) &= \alpha_1 / 24 - \alpha_2 / 6 + \alpha_3 / 2 - 4, \\ X_3(\alpha) &= \alpha_1 / 6 - \alpha_2 / 2 + \alpha_3 - 12. \end{aligned}$$

Так как система уравнений линейна по α и невырождена, то она решается методом Ньютона за одну итерацию при любом начальном приближении α^0 : $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -24$, $\alpha_3 = 0$.

Пример 4. Задача классического вариационного исчисления с фиксированными начальным и конечным значениями фазовой переменной и времени и изопериметрическим условием типа равенства.

$$I(x(\cdot)) \equiv \int_0^1 (\dot{x}^2(t) + 24t^2 x(t)) dt \rightarrow \inf,$$

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 5, \quad \int_0^1 tx(t) dt = 1.$$

Краевая задача принципа максимума имеет вид (1.26):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{y}}(t) = t\hat{x}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = 12t^2 - \hat{\lambda}t, \\ \hat{x}(0) = 1, \quad \hat{x}(1) = 5, \quad \hat{y}(0) = 0, \quad \hat{y}(1) = 1. \end{cases}$$

Для решения краевой задачи воспользуемся классической вычислительной схемой метода стрельбы. В качестве вектора параметров пристрелки выберем две компоненты $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \equiv (p(0), \lambda)$. Задав эти значения каким-либо образом и решив задачу Коши от $t = 0$ до $t = 1$, получим соответствующие им функции

$$x(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2], \quad y(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2], \quad p(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2].$$

Вектор-функция невязок имеет вид:

$$X(\alpha) \equiv (x(1)[\alpha] - 5, y(1)[\alpha] - 1).$$

Решение задачи Коши для начальных условий $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $p(0) = \alpha_1$ и $\lambda = \alpha_2$ имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t)[\alpha] &= t^4 - \alpha_2 t^3 / 6 + \alpha_1 t + 1, \\ y(t)[\alpha] &= t^6 / 6 - \alpha_2 t^5 / 30 + \alpha_1 t^3 / 3 + t^2 / 2, \\ p(t)[\alpha] &= 4t^3 - \alpha_2 t^2 / 2 + \alpha_1. \end{aligned}$$

Решение краевой задачи методом стрельбы эквивалентно решению системы уравнений для вектор-функции невязок

$$\begin{aligned} X_1(\alpha) &= (1 - \alpha_2 / 6 + \alpha_1 + 1) - 5, \\ X_2(\alpha) &= (1 / 6 - \alpha_2 / 30 + \alpha_1 / 3 + 1 / 2) - 1. \end{aligned}$$

Так как система уравнений линейна по α и невырождена, то она решается методом Ньютона за одну итерацию при любом начальном приближении α^0 : $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = -30$.

Пример 5. Задача классического вариационного исчисления — задача быстродействия с изопериметрическим условием типа равенства и фиксированными начальным и конечным

значениями фазовой переменной.

$$\mathcal{T}(x(\cdot), T) \equiv T \rightarrow \inf,$$

$$\int_0^T \dot{x}^2(t) dt = 1, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = 1, \quad T > 0.$$

Краевая задача принципа максимума (1.32), с учетом условия нормировки $\lambda = 1/2$ и замены интеграла дифференциальной связью, сводится к виду:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{y}}(t) = \hat{p}^2(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = 0; \\ \hat{x}(0) = 0, \quad \hat{x}(\hat{T}) = 1, \quad \hat{y}(0) = 0, \quad \hat{y}(\hat{T}) = 1; \\ \hat{T} > 0. \end{cases}$$

Для решения краевой задачи воспользуемся классической вычислительной схемой метода стрельбы. В качестве вектора параметров пристрелки выберем две величины $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \equiv (p(0), T)$. Задав эти значения каким-либо образом и решив задачу Коши от $t = 0$ до $t = T \equiv \alpha_2$, получим соответствующие им функции

$$x(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2], \quad y(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2], \quad p(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2].$$

Вектор-функция невязок имеет вид:

$$X(\alpha) \equiv (x(T)[\alpha] - 1, y(T)[\alpha] - 1).$$

Решение задачи Коши для начальных условий $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $p(0) = \alpha_1$ имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t)[\alpha] &= \alpha_1 t, \\ y(t)[\alpha] &= \alpha_1^2 t, \\ p(t)[\alpha] &= \alpha_1. \end{aligned}$$

Решение краевой задачи методом стрельбы эквивалентно решению системы уравнений для вектор-функции невязок

$$\begin{aligned} X_1(\alpha) &= \alpha_1 \alpha_2 - 1 = 0, \\ X_2(\alpha) &= \alpha_1^2 \alpha_2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

При решении системы уравнений методом Ньютона итерационный процесс имеет вид:

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + \Delta\alpha^k,$$

$$\Delta\alpha_1^k = \frac{1}{\alpha_2^k} \left(\frac{1}{\alpha_1^k} - 1 \right), \quad \Delta\alpha_2^k = -\alpha_2^k + \frac{2}{\alpha_1^k} - \frac{1}{(\alpha_1^k)^2}.$$

Замена первой компоненты вектор–функции невязок на

$$x^2(\alpha_2)[\alpha]/y(\alpha_2)[\alpha] - 1 = 0,$$

а второй на

$$y(\alpha_2)[\alpha]/x(\alpha_2)[\alpha] - 1 = 0$$

значительно улучшает сходимость метода Ньютона. При $\alpha_1^0 \neq 0, \alpha_2^0 \neq 0$, метод Ньютона в этом случае сходится к решению $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$ за одну итерацию.

Пример 6. Задача классического вариационного исчисления с функционалом Больца, нефиксированным конечным временем и краевым условием типа неравенства.

$$B(x(\cdot), T) \equiv \int_0^T \dot{x}^2(t) dt + x^2(0) \rightarrow \inf, \quad x(T) + T + 3 \leq 0, \quad T > 0.$$

Краевая задача принципа максимума (1.38) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = 0; \\ \hat{p}(0) = \hat{x}(0), \quad \hat{p}(\hat{T}) = -\hat{\lambda}; \\ \hat{p}^2(\hat{T}) = 2\hat{\lambda}; \quad \hat{\lambda} \cdot (\hat{x}(\hat{T}) + \hat{T} + 3) = 0; \\ \hat{\lambda} \geq 0; \quad \hat{T} > 0. \end{cases}$$

В соответствии с алгоритмом решения задачи необходимо рассмотреть два случая: $\hat{\lambda} = 0$ и $\hat{\lambda} > 0$.

В случае $\lambda = 0$ краевая задача имеет вид (1.39):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = 0; \quad \hat{p}(0) = \hat{x}(0), \quad \hat{p}(\hat{T}) = 0, \quad \hat{T} > 0. \end{cases}$$

Как всегда в подобных случаях, число неизвестных в такой краевой задаче больше числа условий для их определения. В общем случае для решения краевой задачи можно воспользоваться каким-либо способом регуляризации задачи — уравнять число неизвестных и число условий для их определения. Например, в рассматриваемой задаче неизвестную величину T можно выделить в число параметров задачи. При решении краевой задачи при фиксированном T методом стрельбы в качестве параметра пристрелки выберем величину α , определяющую начальные условия по формулам: $x(0) = \alpha$, $p(0) = \alpha$. Решение задачи Коши при таких начальных условиях имеет вид:

$$x(t) = \alpha(t + 1), \quad p(t) = \alpha.$$

Функция невязок определяется условием на правом конце:

$$X(\alpha) \equiv p(T)[\alpha] = 0.$$

Метод Ньютона определяет корень этого линейного уравнения $\alpha = 0$ за одну итерацию. Анализ параметрической зависимости $f(T) = x(T) + T + 3 = T + 3$ показывает, что она линейна по T и при положительных T условие $T + 3 \leq 0$ не выполняется. Поэтому допустимого решения краевая задача при $\lambda = 0$ не имеет.

В случае $\lambda > 0$ краевая задача имеет вид (1.40):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = 0; \\ \hat{p}(0) = \hat{x}(0), \quad \hat{p}(\hat{T}) = -\hat{\lambda}; \\ \hat{p}^2(\hat{T}) = 2\hat{\lambda}; \quad \hat{x}(\hat{T}) + \hat{T} + 3 = 0; \quad \hat{T} > 0, \quad \hat{\lambda} > 0. \end{cases}$$

Исключим из этой краевой задачи множитель λ и воспользуемся для ее решения классической вычислительной схемой метода стрельбы. В качестве вектора параметров пристрелки выберем две величины $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \equiv (p(0), T)$. Задав эти значения каким-либо образом и решив задачу Коши от $t = 0$ до $t = T \equiv \alpha_2$, получим соответствующие им функции

$$x(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2], \quad p(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2].$$

Решение задачи Коши для начальных условий $x(0) = p(0) = \alpha_1$ имеет вид:

$$x(t)[\alpha] = \alpha_1(t+1), \quad p(t)[\alpha] = \alpha_1.$$

Вектор-функция невязок может иметь вид:

$$X(\alpha) \equiv (x(T)[\alpha] + T[\alpha] + 3, p^2(T) + 2p(T)).$$

Решение краевой задачи методом стрельбы с такой вычислительной схемой эквивалентно решению системы уравнений для вектор-функции невязок:

$$\begin{aligned} X_1(\alpha) &= \alpha_1(\alpha_2 + 1) + \alpha_2 + 3 = 0, \\ X_2(\alpha) &= \alpha_1(\alpha_1 + 2) = 0. \end{aligned}$$

При решении полученной системы уравнений методом Ньютона итерационный процесс может сойтись к одному из двух имеющихся корней: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = T = -3$ (недопустимый корень в силу нарушения проверочного условия $T > 0$) или $\alpha_1 = -2$, $\alpha_1 = T = 1$ (верное решение задачи).

Заметим, что другое исключение из задачи множителя $\lambda > 0$, эквивалентное замене второй компоненты вектор-функции невязок на

$$p(T) + 2 = 0,$$

значительно улучшает сходимость метода Ньютона и позволяет для почти всех начальных приближений (при $\alpha_1^0 \neq -1$) определить единственное допустимое решение задачи не более чем за две итерации.

Пример 7. Задача классического вариационного исчисления, в которой решение существует лишь в аномальном случае — при $\hat{\lambda}_0 = 0$.

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^1 (u(t) + x^2(t)) dt \rightarrow \inf;$$

$$\dot{x}(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 = \Delta \equiv [0, 1];$$

$$u(t) \in U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [0, 1];$$

$$\int_0^1 (u^2(t) - 2u(t)) dt + 1 = 0, \quad x(0) - 1 = 0.$$

Краевая задача принципа максимума (1.45), с учетом замены интеграла дифференциальной связью, имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t), \\ \dot{\hat{y}}(t) = \hat{u}^2(t) - 2\hat{u}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = 2\hat{\lambda}_0 \hat{x}, \\ \hat{u}(t) = 1 + \frac{\hat{p}(t) - \hat{\lambda}_0}{2\hat{\lambda}}; \\ \hat{x}(0) = 1, \quad \hat{y}(0) = 0, \quad \hat{p}(1) = 0, \quad \hat{y}(1) + 1 = 0; \\ \hat{\lambda} > 0; \quad \hat{\lambda}_0 \geq 0; \\ \text{условие НЕРОН, условие нормировки.} \end{cases}$$

Для решения краевой задачи необходимо выбрать условие нормировки. Проведенный анализ показал, что $\hat{\lambda} > 0$, и потому в качестве условия нормировки выбирается условие $\hat{\lambda} = 1$.

Для решения краевой задачи воспользуемся классической вычислительной схемой метода стрельбы. В качестве вектора параметров пристрелки выберем две величины $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \equiv (p(0), \lambda_0)$. Задав эти значения каким-либо образом и решив задачу Коши от $t = 0$ до $t = 1$ для начальных условий $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $p(0) = \alpha_1$, получим при $\alpha_2 = 0$:

$$x(t)[\alpha] = (\alpha_1/2 + 1)t + 1, \quad p(t)[\alpha] = \alpha_1, \quad y(t)[\alpha] = (\alpha_1^2/4 - 1)t;$$

при $\alpha_2 > 0$:

$$\begin{aligned} x(t)[\alpha] &= C \operatorname{sh}(\sqrt{\alpha_2}t) + \operatorname{ch}(\sqrt{\alpha_2}t), \\ p(t)[\alpha] &= 2C\sqrt{\alpha_2} \operatorname{ch}(\sqrt{\alpha_2}t) + 2\sqrt{\alpha_2} \operatorname{sh}(\sqrt{\alpha_2}t) + \alpha_2 - 2, \\ y(t)[\alpha] &= \frac{\sqrt{\alpha_2}}{4}(C^2 + 1) \operatorname{sh}(2\sqrt{\alpha_2}t) + \frac{\sqrt{\alpha_2}}{2}C \operatorname{ch}(2\sqrt{\alpha_2}t) + \\ &+ \frac{\alpha_2}{2}(C^2 - 1)t - 2C \operatorname{sh}(\sqrt{\alpha_2}t) - 2 \operatorname{ch}(\sqrt{\alpha_2}t) + \\ &+ 2 - \frac{\sqrt{\alpha_2}}{2}C; \end{aligned}$$

при $\alpha_2 < 0$:

$$\begin{aligned} x(t)[\alpha] &= C \sin(\sqrt{-\alpha_2}t) + \cos(\sqrt{-\alpha_2}t), \\ p(t)[\alpha] &= 2C\sqrt{-\alpha_2} \cos(\sqrt{-\alpha_2}t) - 2\sqrt{-\alpha_2} \sin(\sqrt{-\alpha_2}t) + \\ &+ \alpha_2 - 2, \\ y(t)[\alpha] &= \frac{\sqrt{-\alpha_2}}{4}(C^2 - 1) \sin(2\sqrt{-\alpha_2}t) + \\ &+ \frac{\sqrt{-\alpha_2}}{2}C \cos(2\sqrt{-\alpha_2}t) - \frac{\alpha_2}{2}(C^2 + 1)t - \\ &- 2C \sin(\sqrt{-\alpha_2}t) - 2 \cos(\sqrt{-\alpha_2}t) + 2 - \frac{\sqrt{-\alpha_2}}{2}C, \end{aligned}$$

где $C = (2 + \alpha_1 - \alpha_2)/(2\sqrt{|\alpha_2|})$.

В вектор-функцию невязок включим две составляющие:

$$X(\alpha) \equiv (y(1)[\alpha] + 1; p(1)[\alpha]) = (0; 0),$$

или

$$X_1(\alpha) = \begin{cases} \alpha_1^2/4, & \text{при } \alpha_2 = 0, \\ \frac{\sqrt{\alpha_2}}{4}(C^2 + 1) \operatorname{sh}(2\sqrt{\alpha_2}) + \\ + \frac{\sqrt{\alpha_2}}{2}C \operatorname{ch}(2\sqrt{\alpha_2}) + \frac{\alpha_2}{2}(C^2 - 1) - \\ - 2C \operatorname{sh}(\sqrt{\alpha_2}) - 2 \operatorname{ch}(\sqrt{\alpha_2}) + 3 - \\ - \frac{\sqrt{\alpha_2}}{2}C, & \text{при } \alpha_2 > 0, \\ \frac{\sqrt{-\alpha_2}}{4}(C^2 - 1) \sin(2\sqrt{-\alpha_2}) + \\ + \frac{\sqrt{-\alpha_2}}{2}C \cos(2\sqrt{-\alpha_2}) - \frac{\alpha_2}{2}(C^2 + 1) - \\ - 2C \sin(\sqrt{-\alpha_2}) - 2 \cos(\sqrt{-\alpha_2}) + 3 - \\ - \frac{\sqrt{-\alpha_2}}{2}C, & \text{при } \alpha_2 < 0, \end{cases}$$

$$X_2(\alpha) = \begin{cases} \alpha_1, & \text{при } \alpha_2 = 0, \\ 2C\sqrt{\alpha_2} \operatorname{ch}(\sqrt{\alpha_2}) + 2\sqrt{\alpha_2} \operatorname{sh}(\sqrt{\alpha_2}) + \\ + \alpha_2 - 2, & \text{при } \alpha_2 > 0, \\ 2C\sqrt{-\alpha_2} \cos(\sqrt{-\alpha_2}) - \\ - 2\sqrt{-\alpha_2} \sin(\sqrt{-\alpha_2}) + \alpha_2 - 2, & \text{при } \alpha_2 < 0. \end{cases}$$

При решении полученной системы нелинейных алгебраических уравнений модифицированным методом Ньютона итерационный процесс сходится к единственному существующему корню $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, определяющему решение исходной задачи.

Пример 8. Задача классического вариационного исчисления, в которой на всей оптимальной траектории управление особое.

$$I(x(\cdot)) \equiv \int_0^1 (x(t) - 1)^2 dt \rightarrow \inf;$$

$$\dot{x}(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 = \Delta \equiv [0, 1];$$

$$u(t) \in U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [0, 1];$$

$$x(0) - 1 = 0, \quad x(1) - 1 = 0.$$

Краевая задача принципа максимума (1.50) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t), & \hat{u}(t) = \arg \max_{u \in (-\infty, +\infty)} (\hat{p}(t)u), \\ \dot{\hat{p}}(t) = \hat{x}(t) - 1; & \hat{x}(0) = 1, \quad \hat{x}(1) = 1. \end{cases}$$

При наличии на экстремали участков особого управления использование классической вычислительной схемы метода стрельбы привести к успеху не может (схема принципиально неприменима). В рассматриваемом случае выбор различных начальных условий без учета нахождения на участке особого управления приводит к невозможности для почти всех начальных условий решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений краевой задачи (так как при $p(t) \neq 0$ $u = \pm\infty$). Попытка учесть условия нахождения на участке особого управления приводит к решению задачи без использования метода стрельбы (поверхность особого управления состоит из единственной возможной экстремали), что и проделано в п. 1.3.1.

Численное построение экстремалей с участками особого управления первого порядка возможно с использованием специально подобранных вычислительных схем (неклассических вычислительных схем метода стрельбы). Примеры таких решений приводятся, например, в [8, 18].

Пример 9. Задача классического вариационного исчисления – задача быстродействия с изопериметрическим условием типа неравенства, фиксированными начальным и конечным значениями фазовой переменной.

$$T(x(\cdot), T) \equiv T \rightarrow \inf, \quad T > 0;$$

$$x(0) = x(T) = 0; \quad \int_0^T (\dot{x}^2(t) - 4x(t)) dt \leq -\frac{1}{3}.$$

В соответствии с алгоритмом решения задачи необходимо рассмотреть два случая: $\hat{\lambda} = 0$ и $\hat{\lambda} > 0$. Аналитическое исследование показывает, что при $\hat{\lambda} = 0$ решения задачи нет.

Краевая задача принципа максимума, с учетом условия нормировки $\hat{\lambda} = 1/2$ (1.57), имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{y}}(t) = \hat{p}^2(t) - 4\hat{x}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = -2, \\ \hat{x}(0) = 0, \quad \hat{x}(\hat{T}) = 0, \\ \hat{y}(0) = 0, \quad \hat{y}(\hat{T}) + 1/3 = 0; \\ \hat{T} > 0. \end{cases}$$

Условие $\hat{T} > 0$ в краевой задаче является проверочным.

Для решения краевой задачи воспользуемся классической вычислительной схемой метода стрельбы. В качестве вектора параметров пристрелки выберем две величины $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \equiv (p(0), T)$. Задав эти значения каким-либо образом и решив задачу Коши от $t = 0$ до $t = \alpha_2$, получим соответствующие им функции

$$x(\cdot)[\alpha], \quad p(\cdot)[\alpha], \quad y(\cdot)[\alpha].$$

Решение задачи Коши для начальных условий $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $p(0) = \alpha_1$ имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t)[\alpha] &= -t^2 + \alpha_1 t, \\ p(t)[\alpha] &= -2t + \alpha_1, \\ y(t)[\alpha] &= \frac{8}{3}t^3 - 4\alpha_1 t^2 + \alpha_1^2 t. \end{aligned}$$

Вектор-функция невязок имеет вид:

$$X(\alpha) \equiv (x(T)[\alpha], y(T)[\alpha] + 1/3) = (0; 0).$$

Решение краевой задачи методом стрельбы с такой вычислительной схемой эквивалентно решению системы уравнений для вектор-функции невязок:

$$\begin{aligned} X_1(\alpha) &= -\alpha_2^2 + \alpha_1 \alpha_2, \\ X_2(\alpha) &= \frac{8}{3}\alpha_2^3 - 4\alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_2 + 1/3. \end{aligned}$$

При решении полученной системы уравнений модифицированным методом Ньютона итерационный процесс сходится к единственному корню $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = T = 1$.

Обратим внимание, что замена невязки $X_1(\alpha) = x(T)[\alpha] = 0$ на эквивалентную ей в силу условия $T > 0$ $x(T)[\alpha]/T[\alpha] = 0$ значительно улучшает сходимость метода Ньютона (первое уравнение становится линейным).

2.2.2. Задачи Лагранжа

Пример 1. Задача Лагранжа с дифференциальной связью первого порядка и фиксированными начальными и конечными значениями времени и фазовой переменной.

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^1 (u^2(t) - 2x(t)) dt \rightarrow \inf,$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + x(t) &= u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^1 \quad \forall t \in [0, 1], \\ x(0) &= 1, \quad x(1) + 1/e = 1 + e. \end{aligned}$$

Краевая задача принципа максимума имеет вид (1.62):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = -\hat{x}(t) + \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = \hat{p}(t) - 1; \\ \hat{x}(0) = 1, \quad \hat{x}(1) = 1 + e - 1/e. \end{cases}$$

Для решения краевой задачи воспользуемся классической вычислительной схемой метода стрельбы. В качестве параметра пристрелки выберем величину $\alpha = p(0)$. Задав это значение каким–либо образом и решив задачу Коши от $t = 0$ до $t = 1$, получим соответствующие функции:

$$x(\cdot)[\alpha], \quad p(\cdot)[\alpha].$$

Решение задачи Коши для начальных условий $x(0) = 0$, $p(0) = \alpha$ имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t)[\alpha] &= 1 + \frac{\alpha - 1}{2}e^t - \frac{\alpha - 1}{2}e^{-t}, \\ p(t)[\alpha] &= 1 + (\alpha - 1)e^t. \end{aligned}$$

Функция невязок имеет вид:

$$X(\alpha) \equiv x(1)[\alpha] - (1 + e - 1/e) = 0.$$

Решение краевой задачи методом стрельбы с такой вычислительной схемой эквивалентно решению уравнения для функции невязки:

$$X_1(\alpha) = \left(1 + \frac{\alpha - 1}{2}e - \frac{\alpha - 1}{2}e^{-1}\right) - (1 + e - 1/e) = 0.$$

Так как это уравнение линейное, метод Ньютона (эквивалентный в этом случае входящему в него составной частью методу решения линейных уравнений) определяет решение краевой задачи за одну итерацию:

$$\begin{aligned}\alpha &= 3, \\ x(t)[\alpha] &= 1 + e^t - e^{-t}, \\ p(t)[\alpha] &= 1 + 2e^t.\end{aligned}$$

Пример 2. Задача Лагранжа с дифференциальной связью второго порядка и фиксированными начальными и конечными значениями времени и фазовой переменной.

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^1 (u^2(t) + 2x(t)) dt \rightarrow \inf,$$

$$\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

Краевая задача принципа максимума имеет вид (1.67):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t), \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_2(t) + \hat{p}_2(t), \\ \dot{\hat{p}}_1(t) = 1, \\ \dot{\hat{p}}_2(t) = -\hat{p}_1(t) - \hat{p}_2(t); \\ \hat{x}_1(0) = 0, \quad \hat{x}_1(1) = 0; \quad \hat{p}_2(0) = 0, \quad \hat{p}_2(1) = 0. \end{cases}$$

Для решения краевой задачи воспользуемся классической вычислительной схемой метода стрельбы. В качестве вектора параметров пристрелки выберем величины $\alpha \equiv (\alpha_1; \alpha_2) = (x_2(0); p_1(0))$. Задав эти значения каким-либо

образом и решив задачу Коши от $t = 0$ до $t = 1$, получим соответствующие им функции:

$$x_1(\cdot)[\alpha], \quad x_2(\cdot)[\alpha], \quad p_1(\cdot)[\alpha], \quad p_2(\cdot)[\alpha].$$

Решение задачи Коши для начальных условий $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = \alpha_1$, $p_1(0) = \alpha_2$, $p_2(0) = 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1(t)[\alpha] &= \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 + 1}{2} \right) e^t + \frac{\alpha_2 - 1}{2} e^{-t} + \frac{t^2}{2} + \alpha_2 t - \alpha_1 + 1, \\ x_2(t)[\alpha] &= \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 + 1}{2} \right) e^t - \frac{\alpha_2 - 1}{2} e^{-t} + t + \alpha_2, \\ p_1(t)[\alpha] &= t + \alpha_2, \\ p_2(t)[\alpha] &= (\alpha_2 - 1)e^{-t} - t + 1 - \alpha_2. \end{aligned}$$

Вектор-функция невязок имеет вид:

$$X(\alpha) \equiv (x_1(1)[\alpha], p_2(1)[\alpha]) = (0, 0).$$

Решение краевой задачи методом стрельбы с такой вычислительной схемой эквивалентно решению системы уравнений для компонент вектор-функции невязок:

$$\begin{aligned} X_1(\alpha) &= \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 + 1}{2} \right) e + \frac{\alpha_2 - 1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} + \alpha_2 - \alpha_1 + 1 = 0, \\ X_2(\alpha) &= (\alpha_2 - 1)e^{-1} - \alpha_2 = 0. \end{aligned}$$

Так как система уравнений линейна, то метод Ньютона (эквивалентный в этом случае входящему в него составной частью методу решения системы линейных алгебраических уравнений) определяет решение краевой задачи за одну итерацию:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{e^2 - 5e + 6}{2(e - 1)^2}, \\ \alpha_2 &= -1/(e - 1), \\ \hat{x}_1(t) &= \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 + 1}{2} \right) e^t + \frac{\alpha_2 - 1}{2} e^{-t} + \frac{t^2}{2} + \alpha_2 t - \alpha_1 + 1, \\ \hat{x}_2(t) &= \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 + 1}{2} \right) e^t - \frac{\alpha_2 - 1}{2} e^{-t} + t + \alpha_2, \\ \hat{p}_1(t) &= t + \alpha_2, \\ \hat{p}_2(t) &= (\alpha_2 - 1)e^{-t} - t + 1 - \alpha_2. \end{aligned}$$

Пример 3. Задача Лагранжа с функционалом Больца, фиксированными начальными и конечными значениями времени и краевым условием типа неравенства.

$$B_0(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_1^2 u^2(t) dt + x^2(1) \rightarrow \inf,$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{t}x(t) + u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [1, 2],$$

$$x(2) \leq 3.$$

Краевая задача принципа максимума имеет вид (1.73):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \frac{1}{t}\hat{x}(t) + \hat{p}(t), & \hat{u}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{1}{t}\hat{p}(t); \\ \hat{p}(1) = \hat{x}(1), & \hat{p}(2) = -\hat{\lambda}; \quad \hat{\lambda} \cdot (\hat{x}(2) - 3) = 0. \end{cases}$$

При решении краевой задачи, следуя Правилу решения краевых задач с условием дополняющей нежесткости (см. п. 3 Правил), необходимо рассмотреть два случая: $\hat{\lambda} = 0$ и $\hat{\lambda} > 0$.

При $\hat{\lambda} = 0$ краевая задача принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \frac{1}{t}\hat{x}(t) + \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{1}{t}\hat{p}(t); \\ \hat{p}(1) = \hat{x}(1), & \hat{p}(2) = 0; \\ \hat{x}(2) - 3 \leq 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Условие $\hat{x}(2) - 3 \leq 0$ в краевой задаче (2.17) является проверочным.

При $\hat{\lambda} > 0$ краевая задача принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \frac{1}{t}\hat{x}(t) + \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{1}{t}\hat{p}(t); \\ \hat{p}(1) = \hat{x}(1), & \hat{x}(2) - 3 = 0; \quad \hat{p}(2) = -\hat{\lambda} \leq 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Условие $\hat{p}(2) \leq 0$ в краевой задаче (2.18) является проверочным.

Для решения краевых задач (2.17), (2.18) воспользуемся классической вычислительной схемой метода стрельбы. В качестве параметра пристрелки в обеих краевых задачах выберем величину α : $x(1) = \alpha$, $p(1) = \alpha$. Задав это значение каким-либо образом и решив задачу Коши от $t = 1$ до $t = 2$, получим соответствующие функции:

$$x(\cdot)[\alpha], \quad p(\cdot)[\alpha].$$

Решение задачи Коши для таких начальных условий имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t)[\alpha] &= \alpha(2t - 1), \\ p(t)[\alpha] &= \alpha/t. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Функции невязок в этих двух случаях имеют вид:

$$X(\alpha) \equiv p(2)[\alpha] = 0,$$

$$X(\alpha) \equiv x(2)[\alpha] - 3 = 0.$$

Решение краевых задач методом стрельбы эквивалентно решению уравнения:

$$X(\alpha) = \alpha/2 = 0$$

для краевой задачи (2.17),

$$X(\alpha) = \alpha(2 \cdot 2 - 1) - 3 = 0$$

для краевой задачи (2.18).

Эти уравнения линейны и метод Ньютона (эквивалентный в этом случае входящему в него составной частью методу решения линейных алгебраических уравнений) определяет их решения за одну итерацию:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, \\ x(t) &= 0, \\ p(t) &= 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \\ x(t) &= 2t - 1, \\ p(t) &= 1/t. \end{aligned}$$

Проверка условий $x(2) \leq 3$, $p(2) \leq 0$ на полученных решениях оставляет только одну экстремаль, очевидно, доставляющую абсолютный минимум функционалу задачи.

Обратим внимание, что для данного примера возможно и непосредственное решение краевой задачи (1.73) без разделения на случаи $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$. При выборе функции невязки

$$X(\alpha) \equiv p(2)[\alpha](x(2)[\alpha] - 3) = 0$$

с учетом решения задачи Коши (2.19) использование метода стрельбы приводит к квадратному уравнению:

$$\frac{c}{2}(3c - 3) = 0.$$

При решении этого уравнения методом Ньютона, в зависимости от выбора начального приближения, определяется один из двух возможных корней: $\alpha = 0$ (при $\alpha^0 < 1/2$) или $\alpha = 1$ (при $\alpha^0 > 1/2$). При $\alpha^0 = 1/2$ производная функции невязки равна нулю и метод Ньютона неприменим. Аналогично, проверка условий $x(2) \leq 3$, $p(2) \leq 0$ на полученных решениях оставляет только одну экстремаль, очевидно, доставляющую абсолютный минимум функционалу задачи.

Пример 4. Задача Лагранжа — задача быстродействия с изопериметрическим условием типа равенства, фиксированным начальным и нефиксированным конечным значениями фазовой переменной.

$$T(x(\cdot), u(\cdot), T) \equiv T \rightarrow \inf, \quad T > 0;$$

$$\dot{x}(t) - x(t) + tu(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 \equiv \Delta \equiv [0, T];$$

$$u(t) \in U \equiv \{u(t) \mid 0 < u(t) < 2\} \quad \forall t \in [0, T];$$

$$\int_0^T \sin^2 u(t) dt - 1 = 0, \quad x(0) - 1 = 0.$$

Проведем анализ условия оптимальности (1.78). При анализе задачи в п. 1.3.2 отмечалось, что $\hat{\lambda} \neq 0$, $\hat{\lambda}_0 > 0$. Из условий стационарности $-\hat{\lambda} \sin^2 u(T) = \hat{\lambda}_0$ следует, что $-\hat{\lambda} > 0$. Выбрав в качестве условия нормировки $-\hat{\lambda} = 1$, получим:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0 \quad (\Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial u} = 0) \Rightarrow \sin 2\hat{u}(t) = p(t)t,$$

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} (\pi - \arcsin(\hat{p}(t)t))/2, & \text{при } \sin(\pi - 4) < p(t)t \leq \sin \beta, \\ \text{не существует}, & \text{при } \sin \beta < \hat{p}(t)t \text{ или } \hat{p}(t)t \leq \sin(\pi - 4), \end{cases}$$

где $\beta \approx 1,16556$ — минимальный положительный корень уравнения $\operatorname{tg}(\beta/2) = \beta$.

Общий вид зависимости функции Понtryгина от управления при различных значениях $p(t)t$ представлен на рис. 2.1. На рисунке жирным выделены зависимости, соответствующие граничным случаям: $p(t)t = \sin \beta$ (нижняя) и $p(t)t = \sin(\pi - 4)$ (верхняя), штрих-пунктиром — зависимость при $p(t)t = 0$, пунктиром — зависимость при $p(t)t = 1 > \sin \beta$.

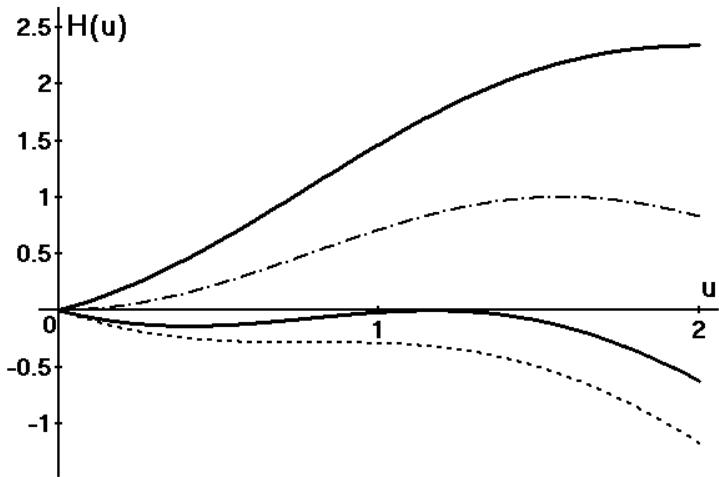


Рис. 2.1 Зависимость функции Понtryгина от управления при различных значениях $p(t)t$

Основной недостаток такого условия при численном решении задачи состоит в его неполной определенности. Доопределим оптимальное управление по следующему закону:

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } p(t)t > \sin \beta, \\ (\pi - \arcsin(\hat{p}(t)t))/2, & \text{при } \sin(\pi - 4) < p(t)t \leq \sin \beta, \\ 2, & \text{при } p(t)t \leq \sin(\pi - 4). \end{cases} \quad (2.20)$$

Такое доопределение эквивалентно замене исходной открытой области допустимого управления на замкнутую область $U(t) \equiv [0; 2]$.

Краевая задача принципа максимума (1.79), с учетом усло-

вия нормировки $\hat{\lambda} = -1$ и доопределения оптимального управления (2.20), имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \hat{x}(t) - t\hat{u}(t), \\ \dot{\hat{y}}(t) &= \sin^2 \hat{u}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) &= -\hat{p}(t); \\ \hat{u}(t) &= \begin{cases} 0, & \text{при } p(t)t > \sin \beta, \\ (\pi - \arcsin(\hat{p}(t)t))/2, & \text{при } \sin(\pi - 4) < p(t)t \leq \sin \beta, \\ 2, & \text{при } p(t)t \leq \sin(\pi - 4); \end{cases} \\ \hat{x}(0) &= 1, \quad \hat{y}(0) = 0, \quad \hat{y}(\hat{T}) = 1, \quad \hat{p}(\hat{T}) = 0.\end{aligned}$$

Условия $T > 0$ и $\sin(\pi - 4) < p(t)t \leq \sin \beta$ являются проверочными.

Для решения полученной краевой задачи воспользуемся классической вычислительной схемой метода стрельбы. В качестве вектора параметров пристрелки выберем величины $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2) = (p(0), T)$. В качестве двух компонент вектор-функции невязок:

$$X(\alpha) \equiv (y(T)[\alpha] - 1, p(T)[\alpha]) = (0, 0).$$

Задав значения параметров пристрелки каким-либо образом и решив задачу Коши от $t = 0$ до $t = \alpha_2$, получим соответствующие функции:

$$x(\cdot)[\alpha], \quad y(\cdot)[\alpha], \quad p(\cdot)[\alpha], \quad u(\cdot)[\alpha].$$

Решение задачи Коши для функции $p(t)$ не зависит от других функций и имеет вид $p(t)[\alpha] = \alpha_1 e^{-t}$. Зависимость te^{-t} , линейно связанная с функцией переключения $p(t)t$, представлена на рис. 2.2. Отметим следующие свойства функции переключения $p(t)t$:

- 1) она равна нулю при $\alpha_1 = 0$, неотрицательна при $\alpha_1 > 0$ и неположительна при $\alpha_1 < 0$;
- 2) при $\alpha_1 \neq 0$ функция переключения достигает экстремума $\alpha_1 e^{-1}$ при $t = 1$;
- 3) $t \in [0; 1]$ и $t \in [1; \infty]$ — участки монотонности функции переключения.

Таким образом, на экстремали может быть не более двух моментов переключения τ_1, τ_2 , являющихся корнями уравнения $p(t)t = \sin \beta$ при $\alpha_1 > 0$ и $p(t)t = \sin(\pi - 4)$ при $\alpha_1 < 0$.

Проведенный анализ условия оптимальности (2.20) позволяет определить:

$$y(t)[\alpha] = \int_{\Delta} \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha_1 s^2 e^{-2s}}}{2} ds + A,$$

где $\Delta = [0; T] \setminus [\tau_1; \tau_2]$,

$$A = -\min(0, \operatorname{sign} \alpha_1) \cdot (\max(\tau_1, \min(\tau_2, T)) - \tau_1) \cdot \sin^2 2.$$

Решение системы нелинейных уравнений метода стрельбы

$$\begin{aligned} X_1(\alpha) &\equiv \int_{\Delta} \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha_1 s^2 e^{-2s}}}{2} ds + A - 1 = 0, \\ X_2(\alpha) &\equiv \alpha_1 \exp(-\alpha_2) = 0 \end{aligned}$$

с использованием модифицированного метода Ньютона позволяет определить единственный существующий корень $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, определяющий решение исходной задачи.

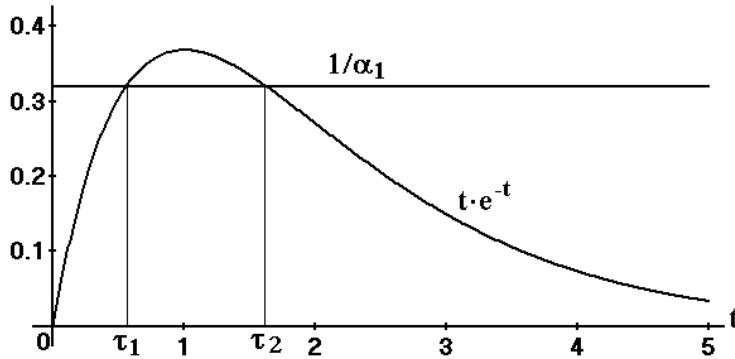


Рис. 2.2 Определение корней уравнения $p(t)t = 1$ при $\alpha_1 > 0$.

Пример 5. Задача Лагранжа, в которой решение существует лишь в аномальном случае — при $\hat{\lambda}_0 = 0$.

$$B_0(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^1 (u^2(t) + u(t)) dt \rightarrow \inf;$$

$$\dot{x}(t) - x(t) - u(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 = \Delta \equiv [0, 1];$$

$$u(t) \in U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [0, 1];$$

$$\int_0^1 (x^2(t) + 2tx(t)) dt + \frac{1}{3} = 0, \quad x(1) + 1 = 0.$$

Краевая задача принципа максимума (1.84) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{x}(t) + \hat{u}(t), \\ \dot{\hat{y}}(t) = \hat{x}(t)^2 + 2t\hat{x}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = -\hat{p}(t) + 2\hat{\lambda}(\hat{x}(t) + t), \\ \hat{u}(t) = \arg \underset{u \in U}{\operatorname{abs max}} (\hat{p}(t)u - \hat{\lambda}_0(u^2 + u)); \\ \hat{y}(0) = 0, \quad \hat{p}(0) = 0, \quad \hat{x}(1) = -1, \quad \hat{y}(1) = -1/3; \quad \hat{\lambda}_0 \geq 0; \\ \text{условие НЕРОН; условие нормировки.} \end{cases}$$

Экстремаль при $\lambda_0 = 0$ получается в результате аналитического решения задачи. Если при $\lambda_0 = 0$ $p(t) \not\equiv 0$ (то есть $\exists t \in [0, 1], p(t) \neq 0$ и, следовательно, $\exists(\tau_0, \tau_1) \subset [0, 1], p(t) \neq 0$), то оптимальное управление на отрезке $[0, 1]$ (или на его части) не существует, и потому не существует решение краевой задачи. Если же $p(t) \equiv 0$, то $\dot{p}(t) = 0 + 2\lambda(x(t) + t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$. Тогда, если $\lambda = 0$, то все множители Лагранжа равны нулю, что невозможно, а если $\lambda \neq 0$, то $x(t) + t \equiv 0 \quad \forall t \in [0, 1]$, и все условия краевой задачи выполнены.

При $\lambda_0 \neq 0$ из условия оптимальности получается:

$$\hat{u}(t) = \frac{\hat{p}(t)}{2\hat{\lambda}_0} - \frac{1}{2}.$$

Выбрав в качестве условия нормировки $\hat{\lambda}_0 = 1/2$, преобразуем краевую задачу к виду:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{x}(t) + \hat{p}(t) - 1/2, \\ \dot{\hat{y}}(t) = \hat{x}(t)^2 + 2t\hat{x}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = -\hat{p}(t) + 2\hat{\lambda}(\hat{x}(t) + t), \\ \hat{y}(0) = 0, \quad \hat{p}(0) = 0, \quad \hat{x}(1) = -1, \quad \hat{y}(1) = -1/3. \end{cases}$$

Для решения полученной краевой задачи воспользуемся классической вычислительной схемой метода стрельбы. В качестве вектора параметров пристрелки выберем величины

$\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2) = (x(0), \lambda)$. Задав эти значения каким–либо образом и решив задачу Коши от $t = 0$ до $t = 1$, получим соответствующие функции:

$$x(\cdot)[\alpha], \quad y(\cdot)[\alpha], \quad p(\cdot)[\alpha].$$

Решение задачи Коши для начальных условий $x(0) = \alpha_1$, $y(0) = 0$, $p(0) = 0$ и $\lambda = \alpha_2$ имеет следующий вид.

При $\alpha_2 < -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} x(t)[\alpha] &= -\frac{1}{2\alpha_2 + 1} \left[\left(\alpha_1 \beta + \frac{1 - 2\alpha_2}{2\beta} \right) \sin \beta t + \right. \\ &\quad \left. \left(\alpha_1 \beta^2 + \frac{1}{2} \right) \cos \beta t + 2\alpha_2 t - \frac{1}{2} \right], \\ p(t)[\alpha] &= \frac{1}{\beta} \left(2\alpha_1 \alpha_2 + \frac{2\alpha_2}{\beta^2} \right) \sin \beta t - \frac{\alpha_2}{\beta^2} \cos \beta t - 2 \frac{\alpha_2}{\beta^2} t + \frac{\alpha_2}{\beta^2}. \end{aligned}$$

При $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$:

$$x(t)[\alpha] = -\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + \alpha_1(t+1), \quad p(t)[\alpha] = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} - \alpha_1 t.$$

При $\alpha_2 > -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} x(t)[\alpha] &= \frac{1}{2\alpha_2 + 1} \left[\left(\alpha_1 \beta + \frac{\beta^2 - 2}{2\beta} \right) \operatorname{sh} \beta t + \right. \\ &\quad \left. \left(\alpha_1 \beta^2 - \frac{1}{2} \right) \operatorname{ch} \beta t - 2\alpha_2 t + \frac{1}{2} \right], \\ p(t)[\alpha] &= \frac{\alpha_2}{2\alpha_2 + 1} \left[2 \left(\alpha_1 \beta - \frac{1}{\beta} \right) \operatorname{sh} \beta t + \operatorname{ch} \beta t + 2t - 1 \right]. \end{aligned}$$

И

$$y(t)[\alpha] = \int_0^t (x^2(s)[\alpha] + 2tx(s)[\alpha]) ds.$$

В приведенных формулах $\beta = \sqrt{|2\alpha_2 + 1|}$.

Вектор–функция невязок имеет вид:

$$X(\alpha) \equiv (x(1)[\alpha] + 1, y(1)[\alpha] + 1/3) = (0, 0).$$

Ни при каких начальных условиях вторая компонента функции невязок в ноль не обращается. Так как система уравнений решения не имеет, то метод Ньютона не может его определить, и попытки решения задачи методом стрельбы к успеху не приводят.

Пример 6. Задача Лагранжа, в которой оптимальная траектория содержит участок с особым управлением.

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^2 (tu(t) - 1)^2 (2x(t) - t^2 + 1)^2 dt \rightarrow \inf;$$

$$\dot{x}(t) - tu(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta_0 \equiv \Delta \equiv [0, 2];$$

$$u(t) \in U \equiv \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty, +\infty) \quad \forall t \in [0, 2];$$

$$x(0) + \frac{1}{2} = 0, \quad x(2) - 1 = 0.$$

Краевая задача принципа максимума (1.89), с учетом условия нормировки $\hat{\lambda}_0 = 1/2$, имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = t\hat{u}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = 2(t\hat{u} - 1)^2(2\hat{x}(t) - t^2 + 1), \\ \dot{\hat{p}}(t) - (t\hat{u}(t) - 1)(2\hat{x}(t) - t^2 + 1)^2 = 0; \\ \hat{x}(0) = -1/2, \quad \hat{x}(2) = 1. \end{cases}$$

Отметим особенность задачи: при $t = 0$ управление $u(0)$ может быть выбрано любым. На аналитическое решение задачи значение управления в одной точке не влияет, а при численном решении управление выбирается по непрерывности справа.

Полный анализ задачи достаточно сложен. Классическая вычислительная схема метода стрельбы при построении экстремалей с участками особого управления к успеху принципиально привести не может. Поэтому при решении задачи рассмотрим только случай выбора вычислительной схемы метода стрельбы для построения экстремали, содержащей режим особого управления (см. п. 1.3.2). При выборе вычислительной схемы предполагается, что экстремаль состоит из двух участков. Первый участок соответствует режиму особого управления:

$$x(t) \equiv (t^2 - 1)/2, \quad p(t) \equiv 0, \quad u(t) \equiv 1.$$

Момент τ окончания участка особого управления является неизвестным параметром пристрелки:

$$\tau = \alpha.$$

На втором участке управление определяется из условия максимума функции Понтрягина и решение задачи Коши от $t = \tau$ до $t = 2$ имеет вид:

$$p(t) \equiv 0, \quad u(t) = 1/t, \quad \dot{x}(t) = t \cdot \frac{1}{t} = 1, \quad x(t) \equiv (t - \tau) + (\tau^2 - 1)/2.$$

Управление $u(t)$ в точке τ может иметь разрыв. Поэтому вместо одной задачи Коши от $t = 0$ до $t = 2$ решаются две задачи Коши: от $t = 0$ до $t = \tau$ и от $t = \tau$ до $t = 2$.

Для определения искомой экстремали используется функция невязки

$$X(\alpha) \equiv x(2)[\alpha] - 1 = (2 - \alpha) + (\alpha^2 - 1)/2 - 1 = (\alpha - 1)^2/2.$$

Обращение в ноль функции невязки задает квадратное уравнение с единственным корнем. Отметим, что полученное в результате решения задачи управление $\hat{u}(t)$ оказывается непрерывным.

Решение уравнения методом Ньютона возможно, но так как корень кратный, то скорость сходимости метода Ньютона оказывается невысокой [13].

2.2.3. Задачи оптимального управления

Пример 1. Задача оптимального управления с зависящим от времени ограничением на первую производную и нефиксированным конечным значением фазовой переменной.

$$I(x(\cdot)) \equiv \int_0^1 (\dot{x}^2(t) - 4x(t)) dt \rightarrow \inf,$$

$$t \leq \dot{x}(t) \leq 2t \quad \forall t \in [0, 1], \quad x(0) = 0.$$

Краевая задача принципа максимума имеет вид (1.95):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = -4; \\ \hat{u}(t) = \begin{cases} 2t, & \hat{p}(t) \geq 4t \\ \hat{p}(t)/2, & 2t \leq \hat{p}(t) \leq 4t \\ t, & \hat{p}(t) \leq 2t \end{cases}; \\ \hat{x}(0) = 0, \quad \hat{p}(1) = 0. \end{cases}$$

Для решения краевой задачи воспользуемся классической вычислительной схемой метода стрельбы. В качестве параметра пристрелки выберем величину $\alpha = p(0)$. Задав это значение каким–либо образом и решив задачу Коши от $t = 0$ до $t = 1$, получим соответствующие ему функции:

$$x(\cdot)[\alpha], \quad p(\cdot)[\alpha].$$

При решении задачи Коши необходимо учесть особенность этой задачи: на экстремали могут быть точки переключения (и на самом деле есть, см. п. 1.3.3), так как правая часть системы дифференциальных уравнений является непрерывной, но не непрерывно–дифференцируемой функцией времени. Точки переключения при численном решении задачи необходимо определить с максимально возможной точностью (подробнее об этом см. [8]).

Функция невязок имеет вид:

$$X(\alpha) \equiv p(1)[\alpha] = 0.$$

Решение задачи Коши для начальных условий $x(0) = 0$, $p(0) = \alpha$ при $\alpha \in (0, 6)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} p(t)[\alpha] &= \alpha - 4t, \\ \hat{u}(t)[\alpha] &= \begin{cases} 2t, & t \leq \alpha/8, \\ \hat{p}(t)/2, & \alpha/8 \leq t \leq \alpha/6, \\ t, & \alpha/6 \leq t; \end{cases} \\ x(t)[\alpha] &= \int_0^t u(s)ds = \begin{cases} t^2, & t \leq \alpha/8, \\ \frac{\alpha}{2}t - t^2 - \frac{\alpha^2}{32}, & \alpha/8 \leq t \leq \alpha/6, \\ \frac{t^2}{2} + \frac{\alpha^2}{96}, & \alpha/6 \leq t \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Решение краевой задачи методом стрельбы с такой вычислительной схемой эквивалентно решению уравнения для функции невязки:

$$X_1(\alpha) = (\alpha - 4) = 0.$$

Так как это уравнение линейное, метод Ньютона (эквивалентный в этом случае входящему в него составной частью методу решения линейных уравнений) определяет решение краевой задачи за одну итерацию:

$$\begin{aligned} \alpha &= 4, \\ \hat{p}(t) &= 4 - 4t, \\ \hat{u}(t) &= \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ 2 - 2t, & 1/2 \leq t \leq 2/3, \\ t, & 2/3 \leq t \leq 1; \end{cases} \\ \hat{x}(t) &= \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ 2t - t^2 - 1/2, & 1/2 \leq t \leq 2/3, \\ t^2/2 + 1/6, & 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Пример 2. Задача оптимального управления с зависящим от времени ограничением на вторую производную (задача о максимальной площади между графиком кривой и осью OX при ограниченной второй производной).

$$I(x(\cdot)) \equiv \int_0^1 x(t) dt \rightarrow \sup,$$

$$-6t \leq \ddot{x}(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1], \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Краевая задача принципа максимума имеет вид (1.100):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t), \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{u}(t), \\ \hat{u}(t) = \begin{cases} -6t, & \hat{p}_2(t) < 0, \\ 1, & \hat{p}_2(t) > 0, \\ \forall u \in U, & \hat{p}_2(t) = 0, \end{cases} \\ \dot{\hat{p}}_1(t) = -2, \\ \dot{\hat{p}}_2(t) = -\hat{p}_1(t); \\ \hat{x}_1(0) = 0, \quad \hat{x}_1(1) = 0; \quad \hat{p}_2(0) = 0, \quad \hat{p}_2(1) = 0. \end{cases}$$

Режим особого управления в рассматриваемой задаче оптимального управления невозможен. В самом деле, если существует $[\tau_1, \tau_2] \subseteq [0, 1]$ такой, что $\hat{p}_2(t) = 0 \forall t \in [\tau_1, \tau_2]$, то и $\hat{p}_1(t) = 0 \forall t \in [\tau_1, \tau_2]$, что противоречит уравнению $\dot{\hat{p}}_1(t) = -2$. Функция переключения $\hat{p}_2(t)$ является многочленом и потому может обращаться в ноль только в конечном числе точек, точнее, не более чем в двух точках отрезка $[0; 1]$.

Для решения краевой задачи воспользуемся классической вычислительной схемой метода стрельбы. В качестве вектора параметров пристрелки выберем величины $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \equiv (x_2(0), p_1(0))$. Задав эти значения каким-либо образом и решив задачу Коши от $t = 0$ до $t = 1$, получим соответствующие им функции:

$$x_1(\cdot)[\alpha], \quad x_2(\cdot)[\alpha], \quad p_1(\cdot)[\alpha], \quad p_2(\cdot)[\alpha].$$

При решении задачи Коши необходимо учесть особенность этой задачи: на экстремали могут быть точки переключения (на самом деле их не будет, см. п. 1.3.3), так как правая часть системы дифференциальных уравнений не является непрерывной функцией времени. Точки переключения при численном решении задачи необходимо определить с максимально возможной точностью (подробнее об этом см. [8]).

Функция невязок имеет вид:

$$X(\alpha) \equiv (x_1(1)[\alpha], p_2(1)[\alpha]).$$

Решение задачи Коши для начальных условий $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = \alpha_1$, $p_1(0) = \alpha_2$, $p_2(0) = 0$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} p_1(t)[\alpha] &= \alpha_2 - 2t, \\ p_2(t)[\alpha] &= t^2 - \alpha_2 t. \end{aligned}$$

При $\alpha_2 \leq 0$:

$$\hat{u}(t)[\alpha] = 1, \quad \hat{x}_2(t)[\alpha] = t + \alpha_1, \quad \hat{x}_1(t)[\alpha] = t^2/2 + \alpha_1 t.$$

При $0 < \alpha_2 < 1$:

$$\hat{u}(t)[\alpha] = \begin{cases} -6t, & t \in [0, \alpha_2), \\ 1, & t \in (\alpha_2, 1], \end{cases}$$

$$\hat{x}_2(t)[\alpha] = \begin{cases} -3t^2 + \alpha_1, & t \in [0, \alpha_2), \\ t - 3\alpha_2^2 - \alpha_2 + \alpha_1, & t \in (\alpha_2, 1], \end{cases}$$

$$\hat{x}_1(t)[\alpha] = \begin{cases} -t^3 + \alpha_1 t, & t \in [0, \alpha_2), \\ t^2/2 + (\alpha_1 - 3\alpha_2^2 - \alpha_2)t + (2\alpha_2^3 + \alpha_2^2/2), & t \in (\alpha_2, 1]. \end{cases}$$

При $\alpha_2 \geq 1$:

$$\hat{u}(t)[\alpha] = -6t, \quad \hat{x}_2(t)[\alpha] = -3t^2 + \alpha_1, \quad \hat{x}_1(t)[\alpha] = -t^3 + \alpha_1 t.$$

Решение краевой задачи методом стрельбы с такой вычислительной схемой эквивалентно решению системы уравнений для вектор-функции невязок:

$$X_1(\alpha) = \begin{cases} 1/2 + \alpha_1, & \text{при } \alpha_2 \leq 0, \\ 1/2 + 2\alpha_2^3 - \frac{5}{2}\alpha_2^2 - \alpha_2 + \alpha_1, & \text{при } 0 < \alpha_2 < 1, \\ -1 + \alpha_1, & \text{при } \alpha_2 \geq 1; \end{cases}$$

$$X_2(\alpha) = 1 - \alpha_2.$$

Определение единственного существующего корня методом Ньютона требует не более двух итераций.

Пример 3. Задача оптимального управления с краевым условием типа неравенства.

$$I(x(\cdot)) \equiv \int_0^1 (\dot{x}^2(t) + 4x(t)) dt \rightarrow \inf,$$

$$-1 \leq \dot{x}(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, 1], \quad x(0) = 0, \quad x(1) + 3/4 \leq 0.$$

Краевая задача принципа максимума имеет вид (1.106):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{u}, \\ \dot{\hat{p}} = 4, \\ \hat{u}(t) = \begin{cases} -1, & \hat{p}(t) \leq -2, \\ \hat{p}(t)/2, & -2 \leq \hat{p}(t) \leq 0, \\ 0, & \hat{p}(t) \geq 0, \end{cases} \\ \hat{x}(0) = 0, \quad \hat{p}(1) = -\hat{\lambda}; \quad \hat{\lambda} \cdot (\hat{x}(1) + 3/4) = 0; \\ \hat{\lambda} \geq 0. \end{cases}$$

В соответствии с алгоритмом решения задачи необходимо рассмотреть два случая: $\hat{\lambda} = 0$ и $\hat{\lambda} > 0$.

Для решения краевой задачи воспользуемся классической вычислительной схемой метода стрельбы. В качестве параметра пристрелки выберем величину $\alpha = p(0)$. Задав это значение каким–либо образом и решив задачу Коши от $t = 0$ до $t = 1$, получим соответствующие ему функции:

$$x(\cdot)[\alpha], \quad p(\cdot)[\alpha].$$

При решении задачи Коши необходимо учесть особенность этой задачи: на экстремали могут быть точки переключения (см. п. 1.3.3), так как правая часть системы дифференциальных уравнений является непрерывной, но не непрерывно–дифференцируемой функцией времени. Точки переключения при численном решении задачи необходимо определить с максимально возможной точностью (подробнее об этом см. [8]).

Функции невязок имеют вид:

$$X(\alpha) \equiv x(1)[\alpha] + 3/4$$

в краевой задаче, соответствующей условиям $\hat{x}(1) + 3/4 = 0$, $\lambda \geq 0$;

$$X(\alpha) \equiv p(1)[\alpha]$$

в краевой задаче, соответствующей условиям $\hat{x}(1) + 3/4 \leq 0$, $\lambda = 0$.

Решение задачи Коши для начальных условий $x(0) = 0$, $p(0) = \alpha$ имеет вид:

$$\hat{p}(t)[\alpha] = 4t + \alpha.$$

При $\alpha \leq -6$: $\hat{u}(t)[\alpha] = -1$, $\hat{x}(t)[\alpha] = -t$.

При $-6 < \alpha \leq -4$:

$$\begin{aligned} \hat{u}(t)[\alpha] &= \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq -(\alpha+2)/4, \\ 2t + \alpha/2, & -(\alpha+2)/4 \leq t \leq 1, \end{cases} \\ \hat{x}(t)[\alpha] &= \begin{cases} -t, & 0 \leq t \leq -(\alpha+2)/4, \\ t^2 + \frac{\alpha}{2}t + \left(\frac{\alpha+2}{4}\right)^2, & -(\alpha+2)/4 \leq t \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

При $-4 < \alpha \leq -2$:

$$\hat{u}(t)[\alpha] = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq -(\alpha+2)/4, \\ 2t + \alpha/2, & -(\alpha+2)/4 \leq t \leq -\alpha/4, \\ 0, & -\alpha/4 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$\hat{x}(t)[\alpha] = \begin{cases} -t, & 0 \leq t \leq -(\alpha+2)/4, \\ t^2 + \frac{\alpha}{2}t + \left(\frac{\alpha+2}{4}\right)^2, & -(\alpha+2)/4 \leq t \leq -\alpha/4, \\ (\alpha+1)/4, & -\alpha/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

При $-2 < \alpha \leq 0$:

$$\hat{u}(t)[\alpha] = \begin{cases} 2t + \alpha/2, & 0 \leq t \leq -\alpha/4, \\ 0, & -\alpha/4 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$\hat{x}(t)[\alpha] = \begin{cases} t^2 + \alpha t/2, & 0 \leq t \leq -\alpha/4, \\ -\alpha^2/16, & -\alpha/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

При $\alpha > 0$: $\hat{u}(t)[\alpha] = 0$, $\hat{x}(t)[\alpha] = 0$.

Решение краевых задач методом стрельбы с такими вычислительными схемами эквивалентно решению уравнений для функции невязок:

$$X(\alpha) = \begin{cases} -1, & \text{при } \alpha \leq -6, \\ 1 + \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\alpha+2}{4}\right)^2, & \text{при } -6 < \alpha \leq -4, \\ (\alpha+1)/4, & \text{при } -4 < \alpha \leq -2, \\ -\alpha^2/16, & \text{при } -2 < \alpha \leq 0, \\ 0, & \text{при } 0 < \alpha \end{cases} \quad (2.21)$$

в краевой задаче, соответствующей условиям $\hat{x}(1) + 3/4 = 0$, $\lambda \geq 0$;

$$X(\alpha) = 4 + \alpha = 0 \quad (2.22)$$

в краевой задаче, соответствующей условиям $\hat{x}(1) + 3/4 \leq 0$, $\lambda = 0$.

Так как первая функция невязок (2.21) непрерывно-дифференцируема и монотонна, то модифицированный метод Ньютона определяет единственный существующий корень этого уравнения при $-6 < \alpha^0 < 0$. Так как вторая функция невязок (2.22)

линейна, то корень второго уравнения $\alpha = -4$ определяется за одну итерацию метода Ньютона.

После определения искомых корней в обеих краевых задачах проверяются требуемые неравенства. В случае их выполнения найденное решение будет решением исходной задачи, иначе найденное решение вспомогательной краевой задачи решением исходной задачи не будет.

Пример 4. Задача оптимального управления — задача быстродействия с изопериметрическим условием типа равенства, с фиксированным начальным и нефиксированным конечным значениями фазовой переменной.

$$\begin{aligned} T(x(\cdot), u(\cdot), T) &\equiv T \rightarrow \inf, \quad T > 0; \\ \dot{x}(t) + x(t) - tu(t) &= 0 \quad \forall t \in \Delta_0 \subseteq \Delta \equiv [0, T]; \\ u(t) &\in U \equiv \{u(t) \mid -1 \leq u(t) \leq 2\} \quad \forall t \in [0, T]; \\ \int_0^T \cos^2 u(t) dt - 1 &= 0, \quad x(0) - 1 = 0. \end{aligned}$$

В качестве условия нормировки выберем величину $\hat{\lambda} = -1$. В этом случае краевая задача принципа максимума имеет вид (1.112):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = -\hat{x}(t) + t\hat{u}(t), \\ \dot{\hat{p}}(t) = \hat{p}(t), \\ \dot{\hat{y}}(t) = \cos^2 \hat{u}(t), \\ \hat{u}(t) = \arg \underset{u \in [-1, 2]}{\operatorname{abs max}} (\cos^2 u + \hat{p}(t)tu); \\ \hat{x}(0) = 1, \quad \hat{y}(0) = 0, \quad \hat{y}(\hat{T}) = 1, \quad \hat{p}(\hat{T}) = 0; \\ \hat{T} > 0. \end{array} \right.$$

Из следствия условия стационарности определяется величина $\hat{\lambda}_0 = \cos^2 \hat{u}(\hat{T})$, условие неотрицательности $\hat{\lambda}_0 \geq 0$ при этом выполняется автоматически.

Для решения краевой задачи воспользуемся классической вычислительной схемой метода стрельбы. В качестве вектора параметров пристрелки выберем величины $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (p(0), T)$. Задав эти значения каким-либо об-

разом и решив задачу Коши от $t = 0$ до $t = \alpha_2$, получим соответствующие им функции:

$$x(\cdot)[\alpha], \quad y(\cdot)[\alpha], \quad p(\cdot)[\alpha].$$

При решении задачи Коши необходимо учесть особенность этой задачи: на экстремали могут быть точки переключения. Точки переключения при численном решении задачи необходимо определить с максимально возможной точностью (подробнее об этом см. [8]).

Вектор-функция невязок имеет вид:

$$X(\alpha) \equiv (X_1(\alpha), X_2(\alpha)) \equiv (p(T)[\alpha], y(T)[\alpha] - 1).$$

При решении краевой задачи методом стрельбы определяется решение задачи Коши для начальных условий $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $p(0) = \alpha_1$. При этом

$$\hat{p}(t)[\alpha] = \alpha_1 e^t.$$

Компоненты вектор-функции невязок имеют вид:

$$\begin{aligned} X_1(\alpha) &= \alpha_1 e^{\alpha_2} = 0, \\ X_2(\alpha) &= y(T)[\alpha] - 1 = 0. \end{aligned}$$

Аналитическая запись второй компоненты вектор-функции невязок достаточно громоздка и потому не приводится.

Использование модифицированного метода Ньютона позволяет определить единственный существующий корень $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, являющийся решением исходной задачи.

Пример 5. Задача оптимального управления, в которой решение существует лишь в аномальном случае — при $\hat{\lambda}_0 = 0$.

$$\begin{aligned} T(x(\cdot)) &\equiv x(1) \rightarrow \inf, \\ t - 1 \leq \dot{x}(t) &\leq t + 1 \quad \forall t \in [0, 1], \quad x(0) = 0, \\ \int_0^1 (x^2(t) - 2tx(t)) dt &= -1/3. \end{aligned}$$

Краевая задача принципа максимума (1.117) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t), \\ \dot{\hat{y}}(t) = \hat{x}^2(t) - 2t\hat{x}(t), \\ \hat{p}(t) = 2\hat{\lambda}(\hat{x}(t) - t), \\ \hat{u}(t) = \begin{cases} t-1, & \hat{p}(t) < 0, \\ t+1, & \hat{p}(t) > 0, \\ \forall u \in [t-1; t+1], & \hat{p}(t) = 0; \end{cases} \\ \hat{x}(0) = 0, \quad \hat{y}(0) = 0, \quad \hat{p}(1) = -\hat{\lambda}_0, \quad \hat{y}(1) = -1/3; \\ \hat{\lambda}_0 \geq 0; \quad \text{условие НЕРОН}; \quad \text{условие нормировки}. \end{cases}$$

Аналитическое решение задачи при $\lambda_0 = 0$ соответствует режиму особого управления $\hat{p}(t) \equiv 0$. Учет возможности режима особого управления, собственно, и приводит к аналитическому решению задачи.

Покажем, что попытки построения другой вычислительной схемы к успеху не приводят. Во-первых, исключим из краевой задачи множитель λ_0 . Условие $p(1) = -\lambda_0 \leq 0$ при этом учитывается как проверочное (проверяется только на построенной экстремали). Множитель λ может принимать одно из трех значений: -1, 1 и 0. Выбор первых двух значений соответствует заданию двух различных возможных нормировок множителей Лагранжа. В качестве параметра пристрелки при этом выбирается величина $\alpha = p(0)$. Функция невязки определяется условием:

$$X(\alpha) \equiv y(1)[\alpha] + \frac{1}{3} = 0.$$

Если $p(t)[\alpha] \leq 0 \quad \forall t \in [0; 1]$, то функции

$$\begin{aligned} u(t)[\alpha] &= t-1, \\ x(t)[\alpha] &= \frac{t^2}{2} - t, \\ y(t)[\alpha] &= \frac{t^5}{20} - \frac{t^4}{2} + t^3 \end{aligned}$$

и значение $X(\alpha) = 53/60$ не зависят от величины α . Это выполняется при $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ и $\alpha < 0$ или при $\lambda = -1$ и $\alpha \leq -5/3$:

$$p(t)[\alpha] = \lambda \left(\frac{t^3}{3} - 2t^2 \right) + \alpha.$$

Если $p(t)[\alpha] \geq 0 \ \forall t \in [0; 1]$, то функции

$$\begin{aligned} u(t)[\alpha] &= t + 1, \\ x(t)[\alpha] &= \frac{t^2}{2} + t, \\ y(t)[\alpha] &= \frac{t^5}{20} - \frac{t^3}{3} \end{aligned}$$

и значение $X(\alpha) = 1/20$ также не зависят от величины α . Это выполняется при $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ и $\alpha > 0$ или при $\lambda = -1$ и $\alpha \geq 1/3$:

$$p(t)[\alpha] = \lambda \frac{t^3}{3} + \alpha.$$

Случай $\lambda = 0$, $\alpha = 0$ невозможен в силу условия НЕРОН, а случай $\lambda = 1$, $\alpha = 0$ сводится к одному из двух предыдущих, в зависимости от выбора величины управления в начальный момент времени.

При $\lambda = -1$, $0 < \alpha < 1/3$ на экстремали имеется одна точка переключения $\tau = \sqrt[3]{3\alpha}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t)[\alpha] = t + 1, \\ x(t)[\alpha] = \frac{t^2}{2} + t, \\ y(t)[\alpha] = \frac{t^5}{20} - \frac{t^3}{3}, \\ p(t)[\alpha] = -\frac{t^3}{3} + \alpha, \end{array} \right. \quad \text{при } t \in [0; \tau],$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t)[\alpha] = t - 1, \\ x(t)[\alpha] = \frac{t^2}{2} - t + 2\tau, \\ y(t)[\alpha] = \frac{t^5}{20} - \frac{t^4}{2}(1 + \frac{2\tau}{3})t^3 - 4\tau t^2 + 4\tau^2 t - 4\alpha - \frac{\alpha\tau}{2}, \\ p(t)[\alpha] = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 - 2\tau t + \alpha, \end{array} \right. \quad \text{при } t \in [\tau; 1];$$

$$X(\alpha) = -4\alpha + 4(\sqrt[3]{3\alpha})^2 - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{11}{3}\right)\sqrt[3]{3\alpha} + \frac{53}{60}.$$

При $\lambda = -1$, $-5/3 < \alpha < 0$ на экстремали может оказаться несколько точек переключения. Зависимости $u(t)[\alpha]$, $x(t)[\alpha]$, $y(t)[\alpha]$, $p(t)[\alpha]$ и $X(\alpha)$ при этом оказываются достаточно громоздкими. Отметим лишь, что функция невязок ни при каком выборе α в ноль не обращается, и потому решить задачу с использованием такой вычислительной схемы не удается.

Пример 6. Задача оптимального управления, в которой оптимальная траектория содержит участок с особым управлением.

$$\begin{aligned} I(x(\cdot), u(\cdot)) &\equiv \int_0^2 x^2(t) dt \rightarrow \inf; \\ \dot{x}(t) - u(t) &= 0 \quad \forall t \in \Delta_0 \subseteq \Delta \equiv [0, 2]; \\ u(t) &\in U(t) \equiv \{u(t) | -1 \leq u(t) \leq 1\} \quad \forall t \in [0, 2]; \\ x(0) - 1 &= 0, \quad x(2) = 0. \end{aligned}$$

При $\hat{\lambda}_0 = 1$ краевая задача принципа максимума имеет вид (1.122):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \hat{u}(t) \equiv \begin{cases} -1, & \hat{p}(t) < 0 \\ +1, & \hat{p}(t) > 0 \\ \forall u \in [-1, +1], & \hat{p}(t) = 0 \end{cases}, \\ \dot{\hat{p}}(t) = 2\hat{x}(t); \\ \hat{x}(0) = 1, \quad \hat{x}(2) = 0. \end{cases}$$

Решение краевой задачи с использованием классической вычислительной схемы метода стрельбы, как и следовало ожидать, к успеху не приводит. В самом деле, выберем в качестве параметра пристрелки величину $\alpha = p(0)$, а в качестве функции невязок величину

$$X(\alpha) = x(2)[\alpha].$$

Задав α каким-либо образом и решив задачу Коши от $t = 0$ до $t = 2$, получим соответствующие функции $x(\cdot)[\alpha]$, $p(\cdot)[\alpha]$.

При $\alpha < -1$:

$$\begin{aligned} x(t)[\alpha] &= -t + 1, \\ p(t)[\alpha] &= -(t - 1)^2 + 1 + \alpha, \\ u(t)[\alpha] &= -1. \end{aligned}$$

При $-1 < \alpha < 0$:

$$\begin{aligned} x(t)[\alpha] &= -t + 1, \\ p(t)[\alpha] &= -(t - 1)^2 + 1 + \alpha, \\ u(t)[\alpha] &= -1, \quad t \in [0; 1 - \sqrt{1 + \alpha}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(t)[\alpha] &= t + 2\sqrt{1+\alpha} - 1, \\ p(t)[\alpha] &= (t+1)^2 - (2 - \sqrt{1+\alpha})^2, \\ u(t)[\alpha] &= 1,\end{aligned}\quad t \in [1 - \sqrt{1+\alpha}; 2].$$

При $0 \leq \alpha$:

$$\begin{aligned}x(t)[\alpha] &= t + 1, \\ p(t)[\alpha] &= (t+1)^2 - 1 + \alpha, \\ u(t)[\alpha] &= 1.\end{aligned}$$

При $\alpha = -1$ существует несколько решений задачи Коши. Они начинаются одним и тем же участком:

$$\begin{aligned}x(t)[\alpha] &= -t + 1, \\ p(t)[\alpha] &= -(t-1)^2, \\ u(t)[\alpha] &= -1,\end{aligned}\quad t \in [0; 1].$$

Затем экстремали разделяются в зависимости от способа выбора управления в правой окрестности точки $t = 1$.

При выборе значения $u(1_+) = 1$:

$$\begin{aligned}x(t)[\alpha] &= t - 1, \\ p(t)[\alpha] &= (t+1)^2 - 4, \\ u(t)[\alpha] &= 1,\end{aligned}\quad t \in [1; 2].$$

При выборе значения $u(1_+) = -1$

$$\begin{aligned}x(t)[\alpha] &= -t + 1, \\ p(t)[\alpha] &= -(t-1)^2, \\ u(t)[\alpha] &= -1,\end{aligned}\quad t \in [1; 2].$$

При выборе значения $u(1_+) = 0$, соответствующего режиму особого управления:

$$\begin{aligned}x(t)[\alpha] &= 0, \\ p(t)[\alpha] &= 0, \\ u(t)[\alpha] &= 0.\end{aligned}$$

Участок особого управления может быть завершен в любой момент $\tau_2 \in [1; 2]$, и в зависимости от выбора величины управления $u(\tau_2)$ при сходе с участка получаются две различные экстремали.

Использование классической вычислительной схемы метода стрельбы такой возможности не учитывает, и именно поэтому

построить искомую экстремаль с участком особого управления не позволяет.

Для решения задачи используем вычислительную схему, учитывающую структуру искомой экстремали. Искомая экстремаль состоит из начального неособого участка и конечного особого. В качестве параметров пристрелки выберем две величины:

$$\alpha = (p(0), \tau_1),$$

где τ_1 обозначает момент выхода на особое многообразие. Вектор-функция невязок имеет вид:

$$X(\alpha) \equiv (X_1(\alpha), X_2(\alpha)) \equiv (x(\tau_1)[\alpha], p(\tau_1)[\alpha]) = (0, 0).$$

Обращение в ноль вектор-функции невязок при $0 \leq \tau_1 \leq 2$ гарантирует возможность продолжения решения на отрезке $t \in [\tau_1, 2]$ особым участком и, следовательно, выполнение краевого условия $x(2) = 0$.

Выбор другой вычислительной схемы метода стрельбы с решением задачи Коши в обратном времени сводит решение краевой задачи к одному линейному уравнению. При этом в качестве параметра пристрелки выбирается величина $\alpha = \tau_1$. В момент τ_1 известны два условия нахождения на особом многообразии $x(\tau_1) = 0$, $p(\tau_1) = 0$. Определив условия схода с особого многообразия $u(\tau_{1-}) = -1$ и решив задачу Коши от $t = \tau_1$ до $t = 0$, вычислим функции $x(\cdot)[\alpha]$, $p(\cdot)[\alpha]$, $u(\cdot)[\alpha]$:

$$\begin{aligned} x(t)[\alpha] &= -t + \alpha, \\ p(t)[\alpha] &= -(t - \alpha)^2, \\ u(t)[\alpha] &= -1, \quad t \in [0, \alpha]. \end{aligned}$$

Функция невязки имеет вид:

$$X(\alpha) \equiv x(0)[\alpha] - 1 = 0. \quad (2.23)$$

При определении условия схода с особого многообразия $u(\tau_{1-}) = 1$ функции $x(\cdot)[\alpha]$, $p(\cdot)[\alpha]$, $u(\cdot)[\alpha]$ имеют вид:

$$\begin{aligned} x(t)[\alpha] &= t - \alpha, \\ p(t)[\alpha] &= (t - \alpha)^2, \\ u(t)[\alpha] &= 1, \quad t \in [0, \alpha]. \end{aligned}$$

Функция невязки (2.23) на таких решениях в ноль не обращается.

Другие примеры применения метода стрельбы при решении задач с режимами особого управления см. в [8].

Задачи

Предлагаемые для самостоятельного решения задачи содержат несколько вариантов постановок.

1. $\int_0^{10} (\dot{x}^2 + \alpha x^3) dt \rightarrow \inf, x(0) = 0, x(10) = 0, \alpha \in [0, A]$.
Варианты:

- а) без дополнительных ограничений,
- б) $|\dot{x}| \leq 1$,
- в) $|\ddot{x}| \leq 1$,
- г) условие $x(10) = 0$ заменяется ограничением $-B \leq x(10) \leq B$ и дополняется любым из условий а)-в),

α — параметр задачи, $A \in \mathbb{R}_+$, $B \in \mathbb{R}_+$ — некоторые константы задачи.

2. $\int_0^{10} (\dot{x}^2 + \alpha \dot{x}^3) dt \rightarrow \inf, x(0) = 0, x(10) = 0, \alpha \in [0, A]$.
Варианты:

- а) без дополнительных ограничений,
- б) $|\dot{x}| \leq 1$,
- в) $|\ddot{x}| \leq 1$,
- г) условие $x(10) = 0$ заменяется ограничением $-B \leq x(10) \leq B$ и дополняется любым из условий а)-в),

α — параметр задачи, $A \in \mathbb{R}_+$, $B \in \mathbb{R}_+$ — некоторые константы задачи.

3. $\int_0^4 \left(\dot{x}^2 + \frac{\alpha x}{1 + \dot{x}^2} \right) dt \rightarrow \inf, x(0) = 0, x(4) = 0, \alpha \in [0, A]$.

Варианты:

- а) без дополнительных ограничений,
- б) $|\dot{x}| \leq 1$,
- в) $|\ddot{x}| \leq 1$,
- г) условие $x(4) = 0$ заменяется ограничением $-B \leq x(4) \leq B$ и дополняется любым из условий а)-в),

α — параметр задачи, $A \in \mathbb{R}_+$, $B \in \mathbb{R}_+$ — некоторые константы задачи.

$$4. \int_0^4 \left(\dot{x}^2 + x^2 + \frac{\alpha x}{1 + \dot{x}^2} \right) dt \rightarrow \inf, \quad x(0) = 0, \quad x(4) = 0, \\ \alpha \in [0, A].$$

Варианты:

- а) без дополнительных ограничений,
- б) $|\dot{x}| \leq 1$,
- в) $|\ddot{x}| \leq 1$,
- г) условие $x(10) = 0$ заменяется ограничением $-B \leq x(4) \leq B$ и дополняется любым из условий а)-в),

α — параметр задачи, $A \in \mathbb{R}_+$, $B \in \mathbb{R}_+$ — некоторые константы задачи.

$$5. \int_0^T \left(x^s + \left(\frac{|u + \alpha| + |u - \alpha|}{2} - \alpha \right)^2 \right) dt \rightarrow \inf, \\ x(0) = -1, \quad x(T) = 1.$$

Варианты дифференциальной связи:

- а) $\dot{x} = u$,
- б) $\ddot{x} = u$,
- в) $\ddot{x} + x = u$,
- г) $\ddot{x} - x = u$,

$\alpha = \{0, 1\}$, $s = \{1, 2, 3\}$, $T = \{1, 10, 20\}$ — параметры задачи, $u \in \mathbb{R}$ — управление.

6. Система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, \\ \dot{y} = v_y, \\ \dot{v}_x = -G(y, v_x, v_y) \frac{v_x}{(v_x^2 + v_y^2)^{1/2}} + u_x, \\ \dot{v}_y = -g - G(y, v_x, v_y) \frac{v_y}{(v_x^2 + v_y^2)^{1/2}} + u_y, \end{cases}$$

x, y — дальность и высота, v_x, v_y — компоненты вектора скорости, u_x, u_y — ускорения (компоненты вектора управления);

g — гравитационное ускорение (параметр задачи);

$G(y, v_x, v_y) = \alpha(v_x^2 + v_y^2)e^{-\mu y}$ — сопротивление атмосферы, $\mu \geq 0$ — параметр экспоненциальной модели атмосферы, $\alpha \geq 0$ — параметр сопротивления (при $\alpha = 0$ движение без сопротивления \Rightarrow аналитическое решение).

Краевые условия и функционал (перелет на максимальную дальность):

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & y(0) &= 0, & v_x(0) &= 0, & v_y(0) &= 0, \\ x(T) &\rightarrow \max, & y(T) &= 0, & v_x(T) &= 0, & v_y(T) &= 0. \end{aligned}$$

Варианты:

- a) $T > 0$ — параметр задачи (фиксированное число), $u_x^2 + u_y^2 \leq u_{\max}^2$ (ограничение на управление) u_{\max} — параметр задачи;
 - б) $T > 0$ — свободная (оптимизируемая) величина, $\int_0^T \sqrt{u_x^2 + u_y^2} dt \leq V_{\text{хар}}$, $V_{\text{хар}} > 0$ — характеристическая скорость (параметр задачи);
 - в) $T > 0$ — свободная (оптимизируемая) величина, $\int_0^T u_x^2 + u_y^2 dt \leq C$, $C > 0$ — параметр задачи.
7. Постановка задачи определяется в результате выбора по одному из представленных вариантов функционала, дифференциальной связи, ограничения на управления, краевых условий и, возможно, дополнительных ограничений.

Функционал:

- А) $T \rightarrow \inf$ (задача быстродействия),
- Б) $\int_0^T |u| dt \rightarrow \inf$ (минимизация затрат управления),
- В) $\int_0^T u^2 dt \rightarrow \inf$ (минимизация затрат управления),
- Г) $\int_0^T x dt \rightarrow \inf$ (“площадь под графиком”),
- Д) $x(T) \rightarrow \text{extr}$ (“терминальное значение величины”),
- Е) $k_T T + k_{xT} x(T) + \int_0^T (k_{u1}|u| + k_{u2}u^2 + k_x x) dt \rightarrow \inf$,
 $k_T > 0, k_{xT} > 0, k_{u1} > 0, k_{u2} > 0, k_x > 0$ — параметры компромиссного функционала.

Дифференциальная связь:

- а) $\dot{x} = u$ (скорость),
- б) $\ddot{x} = u$ (ускорение),
- в) $\ddot{x} + x = u$ (маятник),
- г) $\ddot{x} - x = u$,
- д) $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega x = u$,
- е) $\ddot{x} + \omega\dot{x}|\dot{x}| = u$ (трение).

Управления:

- I) $u \in \mathbb{R}_+$,
- II) $|u| \leq 1$.

Краевые условия:

- i) Фиксированные значения фазовых переменных в начале и в конце,
- ii) Частично–свободные значения фазовых переменных в начале и в конце,

Дополнительные ограничения:

- 1) $\int_0^T f(t, x, u) dt = C$,
- 2) $m \leq \int_0^T f(t, x, u) dt \leq M$,

где $f(t, x, u)$ соответствует какому-либо функционалу задачи (например, Б, В или Г) или $x \cos t$, $x \sin t$.

Примеры заданий:

1-б;

4-г-б;

6-а($T = 10$, $u_{\max} = 1$);

7-А-в-II-i ($x(0) = 5$, $\dot{x}(0) = 2$, $x(T) = 0$, $\dot{x}(T) = 0$);

7-Д-е-I-ii-2 ($x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\int_0^T u^2 dt \leq 4$).

Литература

1. Александров В. В., Бахвалов Н. С., Григорьев К. Г. и др. Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. М.: Изд-во Московского гос. ун-та, 1988.
2. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984.
3. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
4. Арутюнов А. В. Условия экстремума. Аномальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
5. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1998.
6. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987 (изд-е 1); М.: Изд-во “Лаборатория Базовых Знаний”, 2000 (изд-е 2).
7. Будак Б. М., Васильев Ф. П. Приближенные методы решения задач оптимального управления. М.: МГУ, 1968.
8. Григорьев И. С. Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2005.
9. Каханер Д., Моулер К., Неш С. Численные методы и программное обеспечение. Пер. с англ. М.: Мир, 1998.
10. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
11. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1973.
12. Локуциевский О. В., Гавриков М. Б. Начала численного анализа. М.: Янус, 1995.
13. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. Пер. с англ. М.: Мир, 1977.
14. Милютин А. А., Илютович А. Е., Осмоловский Н. П., Чуканов С. В. Оптимальное управление в линейных системах. М.: Наука, 1993.
15. Мусеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных

- систем. М.: Наука, 1971.
- 16. *Мусеев Н. Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
 - 17. *Понtryгин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкrelidze Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
 - 18. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
 - 19. *Федоренко Р. П.* Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во Московского физ.-тех. ин-та, 1994.
 - 20. *Хайрер Э., Нерсессян С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Пер. с англ. М.: Мир, 1990.

К. Г. Григорьев, И. С. Григорьев, М. П. Заплетин

Практикум по численным методам в задачах оптимального
управления. Дополнение I.

М., Издательство Центра прикладных исследований при
механико-математическом факультете МГУ, 2007. — 184 с.

Подписано в печать 19.06.2007 г.

Формат 60×90 1/16. Объем 11.5 п.л.

Заказ 17 Тираж 400 экз.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете
МГУ

г. Москва, Воробьевы горы.

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 04059 от
20.02.2001 г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-матема-
тического факультета.