

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

---

Механико-математический факультет

На правах рукописи

РЫЖОВ Сергей Юрьевич

**ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОВИТКОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ  
ПЕРЕЛЁТОВ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА  
С РЕАКТИВНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ ОГРАНИЧЕННОЙ ТЯГИ**

Специальность: 01.02.01 — теоретическая механика

**АВТОРЕФЕРАТ**

Диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва 2007 г.

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники  
механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры вычислительной математики  
механико-математического факультета  
И. С. Григорьев

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,  
профессор В. В. Ивашкин

кандидат технических наук,  
В. Г. Петухов

Ведущая организация:

Институт Проблем Механики РАН

Защита диссертации состоится "\_\_\_" \_\_\_\_\_ в 16.00 на  
заседании диссертационного совета Д.501.001.22 в МГУ по адресу:  
119899, Москва, Воробьевы горы, МГУ,  
механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического  
факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 2007 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д.501.001.22  
кандидат физико-математических наук, доцент

Прошкин В. А.

# 1 Актуальность темы

Разработка реальной технической системы управления движением центра масс космического аппарата (КА) при перелетах между орбитами искусственного спутника Земли (ИСЗ), предполагает возможность системной оценки её проектных вариантов. Для такой оценки требуется решать соответствующие математические задачи оптимального управления движением центра масс КА при различного рода критериях оптимальности и максимально приближенных к реальности предположениях. Диссертация посвящена решению задач оптимального управления многовитковыми перелетами КА между орбитами ИСЗ. Исследуются оптимальные плоские и пространственные траектории перелётов КА с реактивным двигателем ограниченной тяги, управляемого посредством вектора тяги. Рассматриваются перелеты с минимальными затратами массы при ограниченном времени перелета. Исследование проводится численно-аналитически на основе принципа максимума Понтрягина и представляет не только практический, но и самостоятельный теоретический интерес.

## 2 Цель работы

Целью настоящей работы является исследование указанных задач оптимального управления, разработка методики численно-аналитического решения такого класса задач оптимального управления и построение конкретных многовитковых траекторий межорбитальных перелетов КА, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности (принципу максимума).

## 3 Научная новизна

Получаемые краевые задачи принципа максимума имеют много решений. Возможность многократного включения и выключения двигателя КА вносит значительные вычислительные трудности при численном построении решений краевой задачи, так как необходимо очень точно определять точки переключения тяги, число которых может быть достаточно велико. Структура траектории (т.е. количество активных участков) в процессе решения краевой задачи может изменяться, поэтому частные производные вектор-функции невязок по начальным значениям сопряженных переменных терпят разрыв. Всё это делает решение задачи очень чувствительным к изменению краевых условий. Предложенная в работе методика включает устойчивый численный метод, позволяющий получить экстремали с большим числом активных участков (до ста включительно) — решить соответствующие им нелинейные краевые задачи высокого порядка (десятого в плоском и четырнадцатого в пространственном) с разрывными в неизвестные заранее моменты времени правыми частями дифференциальных уравнений. Определенные на основе принципа максимума плоские и пространственные многовитковые траектории перелетов КА с реактивным двигателем ограниченной тяги между орбитами ИСЗ исследованы впервые.

## 4 Практическая и теоретическая ценность

Работа носит теоретический характер. Полученная в работе информация об оптимальных многовитковых траекториях межорбитальных перелетов КА может быть

использована при создании и оценках реальных систем управления движением центра масс КА с реактивным двигателем большой ограниченной тяги, а методика численно-аналитического решения такого рода задач оптимального управления (нелинейных, большой размерности, с большим количеством точек разрыва правых частей системы дифференциальных уравнений) может быть применена и при решении других оптимизационных задач.

## 5 Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. XXVII Академические чтения по космонавтике, посвященных памяти академика С.П.Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства (Москва, 2003г.).
2. Ломоносовские чтения (мех-мат фак-т МГУ, 2003г., 2004г.).
3. XXXVIII Научные чтения памяти К.Э. Циолковского (Калуга, 2003г.).
4. Международный симпозиум по классической и небесной механике (Великие Луки, 2004г.).
5. Межкафедральный научно-исследовательский семинар по механике космического полета им. В.А.Егорова под руководством: В.В. Белецкого, В.В. Сазонова, М.П. Заплетина (МГУ, 2003-2007г.).
6. Семинар "Прикладные задачи оптимального управления и численные методы" под руководством: И.С. Григорьева, М.П. Заплетина (мех-мат фак-т МГУ, 2002-2007г.).
7. Семинар отдела прикладной небесной механики и процессов управления ИПМ им. М.В. Келдыша, под руководством: В.В.Ивашкина, В.В. Сазонова (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН 2006г.).
8. Семинар лаборатории механики управляемых систем ИПМ РАН, под руководством Ф.Л. Черноусько (ИПМ РАН 2006г.).

## 6 Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Рыжов С.Ю. Оптимизация траекторий перелета космического аппарата между орбитами искусственного спутника Земли // Сборник тезисов и докладов XXVII академических чтений по космонавтике, посвященных памяти академика С.П.Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, Москва, 29 января — 4 февраля 2003г. - М.: "Война и мир", 2003, с. 72-73.

2. Рыжов С.Ю. К проблеме многовитковых перелетов космического аппарата // Тезисы докладов научной конференции Ломоносовские чтения. Секция механики. 17-27 апреля 2003, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова - М.: Изд-во Московского университета, 2003, с. 117.
3. Рыжов С.Ю. Оптимизация многовитковых траекторий перелета космического аппарата между орбитами искусственного спутника Земли // XXXVIII научные чтения памяти К.Э. Циолковского: тезисы докладов - Калуга: ИД "Эйдос", 2003, с. 80-81.
4. Рыжов С.Ю., Григорьев И.С., Григорьев К.Г. Метод построения начального приближения для решения задач оптимизации многовитковых траекторий перелета КА между круговыми компланарными орбитами ИСЗ // Тезисы докладов научной конференции Ломоносовские чтения. Секция механики. 19-28 апреля 2004, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова - М.: Изд-во Московского университета, 2004, с. 133.
5. Рыжов С.Ю., Метод построения оптимальных многовитковых межорбитальных перелетов КА // Пятый международный симпозиум по классической и небесной механике. Август 2004, Великие Луки: Тезисы докладов, Великие Луки, 23-28 августа 2004г - Москва-Великие Луки: ВЦ РАН, 2004, с. 173-174.
6. Рыжов С.Ю., Григорьев И.С. Егоров В.А. Оптимизация многовитковых межорбитальных перелетов КА // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. №64, 2005г.
7. Рыжов С.Ю., Григорьев И.С. К проблеме решения задач оптимизации многовитковых траекторий межорбитальных перелётов КА // Космические исследования, 2006, Т.44, №3, с. 272-280.

## 7 Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и приложения. В работе 97 страниц, 34 рисунка и 18 таблиц.

## 8 Содержание работы

**Во введение** представлен обзор близких к рассматриваемым в работе задач и работ посвященных их решению. Рассмотрена общая постановка задачи и определена схема проведения исследования, состоящая из трех этапов (рис.1):

1. На основе решений соответствующих задач импульсной постановки строятся многовитковые экстремали с ограниченным количеством активных участков (каждый импульс реализуется за конечное фиксированное число активных участков). При этом, ограничение на время перелета неактивно. В результате, после первого этапа решения задачи, получены экстремали различной структуры (рис.1а).
2. На втором этапе осуществляется продолжение семейств экстремалей "вправо" (рис.1б). Это продолжение соответствует добавлению пассивного участка в конце траектории. На этом этапе также из рассмотрения исключаются траектории,

оказавшиеся хуже (в смысле функционала) других семейств, на рисунке 1 это семейства 2-2 и 5-1.

3. На третьем этапе, для завершения исследования, полученные семейства экстремалей продолжают "влево". При этом решаются вспомогательные задачи с активным ограничением времени перелета. Продолжение осуществляется с использованием метода продолжения решения по параметру. В качестве параметра продолжения используется ограничение на время перелета  $T^*$ . Продолжение осуществляется до пересечения с соседним семейством экстремалей. В результате третьего этапа оказывается построена кривая лучших экстремалей, определяющая среди полученных экстремалей лучшую по функционалу для любого заданного времени перелета (рис. 1с). Отметим, что в случае доказательства оптимальности экстремалей, эта кривая определяет границу области достижимости и является множеством Парето.

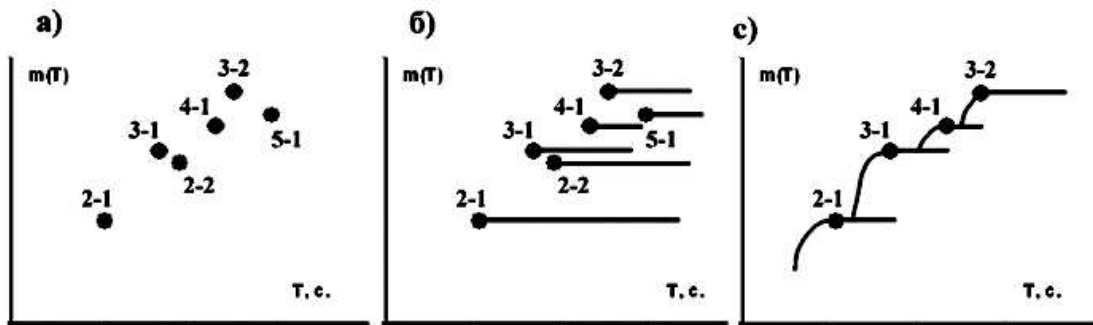


Рис. 1: Этапы исследования задачи.

В главе 1 рассмотрены методы решения краевых задач принципа максимума для задач ракетодинамики и используемые здесь способы построения начального приближения на основе решений задач импульсной постановки. Предложена модифицированная вычислительная схема для решения рассматриваемых задач, включающая в себя алгоритм построения начального приближения на основе решения задачи импульсной постановки:

1. вся траектория разбивается на фиксированную последовательность активных и пассивных участков;
2. в вектор параметров пристрелки включаются все фазовые и сопряженные переменные в начале всех активных и пассивных участков, а также их продолжительности (используется аналог метода многоточечной пристрелки), а в вектор-функцию невязок — краевые условия исходной краевой задачи принципа максимума, условия стыковки по непрерывности участков траектории и условия переключения тяги;
3. при интегрировании задачи Коши считается, что на активных участках тяга всюду включена и максимальна, а на пассивных — выключена, то есть управление по величине тяги задается, а не выбирается из условий оптимальности. На всех получаемых траекториях проверяется условие оптимальности по величине тяги.

4. При построении начального приближения сопряженные переменные полагаются равными сопряженным переменным в соответствующем импульсном решении, фазовые переменные вычисляются из импульсного решения в предположении, что каждый импульс реализуется равномерно за заданное количество активных участков. Продолжительности активных участков вычисляются из расходного уравнения для массы, пассивных — полагаются равными периодам обращения по соответствующим кеплеровским орбитам.

**В главе 2** рассмотрена плоская, а **в главе 3** — пространственная задача перелета между круговыми орбитами ИСЗ. Представлены математические постановки задач. Записаны необходимые условия оптимальности первого порядка (принцип максимума). В соответствии с предложенной модифицированной вычислительной схемой метода стрельбы приведены компоненты векторов параметров пристрелки и вектор-функций невязок, а также формулы построения начального приближения на основе решения соответствующих задач в импульсной постановке для построения решений соответствующих как двух-, так и трехимпульсной схемам перелета.

**В главе 4** приведены численные результаты рассмотренных задач.

Предложенная вычислительная схема и способ построения начального приближения позволяет построить экстремали в рассматриваемых задачах. При этом метод Ньютона сходится достаточно быстро. В таблице 1 приведены размерности векторов параметров пристрелки и вектор-функций невязок для траекторий различных структур, а также количество итераций метода Ньютона, необходимое для получения экстремалей этих структур в пространственном случае.

Таблица 1: Количество итераций метода Ньютона ( $R_0 = 6.58$  тыс. км,  $R_T = 7.0$  тыс. км,  $i = 0.1$ )

структура	размерность вектора параметров пристрелки	$n_0 = 0.1$	$n_0 = 0.05$
5—5	285	3	3
10—10	585	4	3
25—25	1485	4	4

На рисунке 2 показана характерная многовитковая траектория перелета КА на ГСО структуры 10–5 (10 активных участков в окрестности перицентра, 5 — апоцентра) и соответствующая функция переключения в плоском случае.

Результаты решения задачи в плоском случае представлены на рисунках 3, 4. Полученные траектории хорошо приближают импульсное решение по затратам массы. Для низких конечных орбит отличие конечной массы на экстремальных от конечной массы в импульсном решении менее  $10^{-3}$ , для высоких — менее  $10^{-2}$ .

Отличие экстремалей при неактивном ограничении на время перелета от экстремалей с активным ограничением представлено на рисунке 5.

Анализ свойств многовитковых экстремалей с неактивным ограничением времени перелета позволил предложить "простую" схему построения траекторий близких к экстремальным.

Пусть задана структура траектории  $a-b$ . Рассмотрим следующую схему перелета:

- в начальный момент времени аппарат находится на многообразии:

$$r(0) = R_0, \quad \varphi(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = V_0;$$

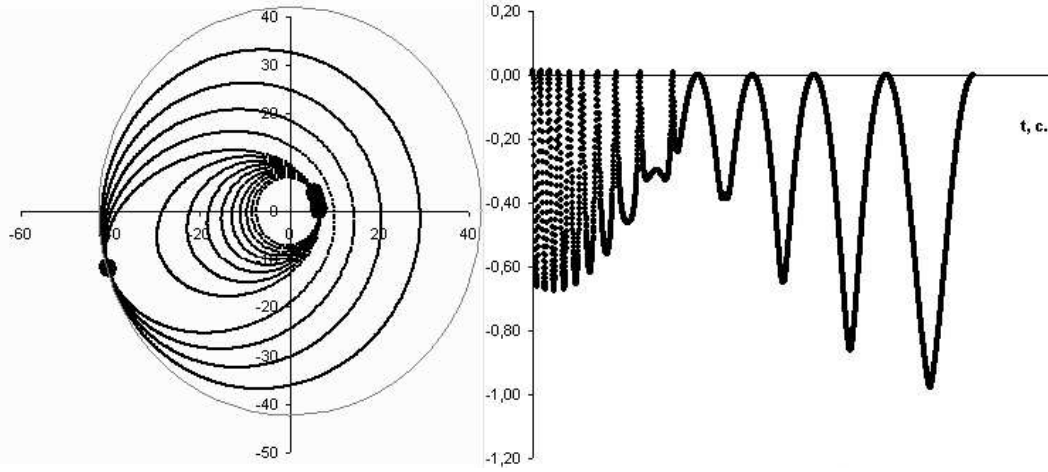


Рис. 2: Траектория структуры 10—5 ( $R_0 = 6.58$  тыс. км,  $R_T = R_{\Gamma\text{CO}}$ ). Тонкие линии соответствуют движению КА с выключенным двигателем (пассивные участки), толстые — с включенным (активные участки).

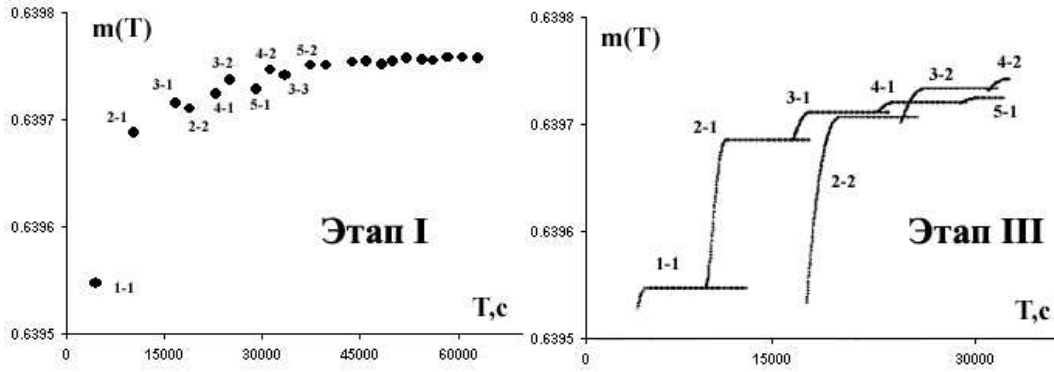


Рис. 3: Зависимость конечной массы от времени перелета ( $R_0 = 6.58$  тыс. км,  $R_T = 10.0$  тыс. км,  $n_0 = 0.08$ ,  $C = 3.255$  км/с)

- задаются 3 угла:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .
- сначала идут  $a$  активных участков в окрестности перицентра, протяженностью по угловой дальности  $\alpha$ . Тяга максимальна и направлена по касательной к вектору скорости.
- затем идут  $b$  активных участков в окрестности апоцентра, протяженностью  $\beta$ . Тяга максимальна и направлена под постоянным углом  $\gamma$  к радиус-вектору положения КА;
- При этом середины всех активных участков находятся на одной прямой — линии апсид переходных орбит;
- условия в конце траектории:  $r = R_T$ ,  $u = 0$ ,  $v = V_T$ .

При использовании такой схемы построения траектории в качестве независимой переменной вместо  $t$  можно рассматривать угол  $\varphi$ .

Таким образом определена краевая задача — найти неизвестные параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  такие что, траектория построенная по указанной выше схеме переведет КА с исходной круговой орбиты на конечную круговую орбиту.



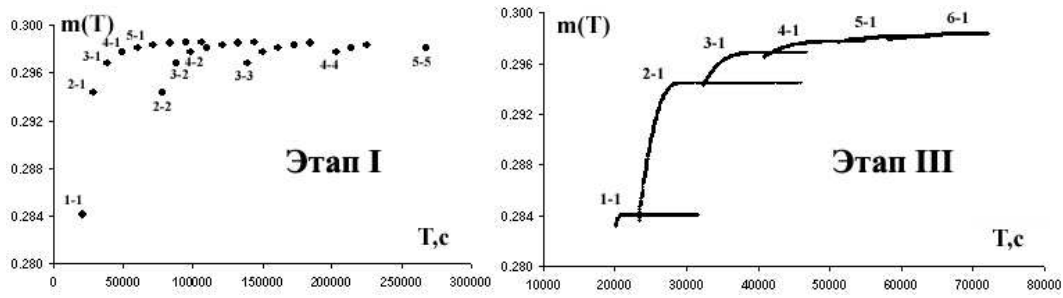


Рис. 4: Зависимость конечной массы от времени перелета ( $R_0 = 6.58$  тыс. км,  $R_T = \Gamma \text{CO}$ ,  $n_0 = 0.08$ ,  $C = 3.255$  км/с)

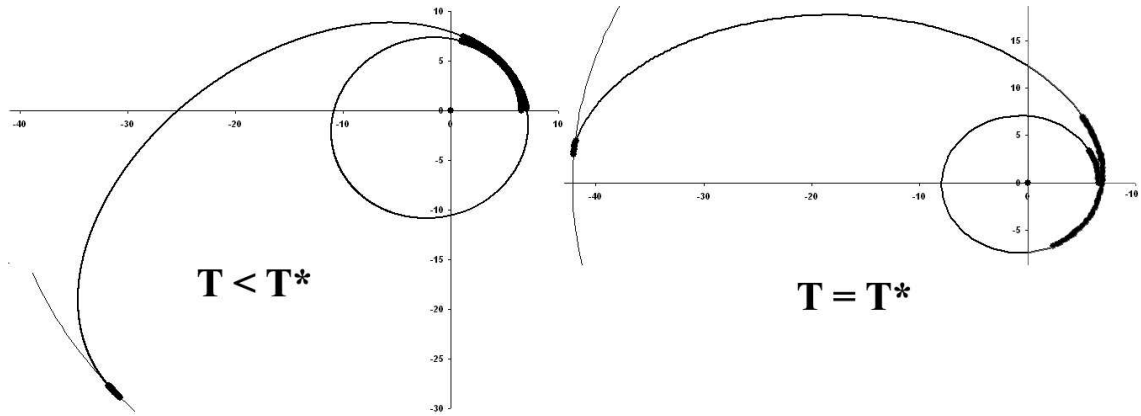


Рис. 5: Характерные траектории при неактивном и активном ограничении времени перелета.

Траектории, полученные таким способом, оказываются близкими по затратам массы и времени к экстремальным траекториям с одинаковой структурой. При решении краевой задачи принципа максимума построение экстремалей Понтрягина с большим количеством витков требует значительных вычислительных затрат. Предложенная схема позволяет строить траектории с большим количеством витков значительно быстрее. Для примера были построены траектории состоящие из 200 витков для различных значений  $R_T$ , среди которых выделены лучшие по функционалу (табл. 2).

Отметим, что с помощью рассмотренной схемы строятся траектории обладающие основными свойствами, которыми обладают экстремали Понтрягина для рассматриваемых задач, и какой-либо оптимизации не производится. Получаемые траектории оказываются близкими по функционалу к экстремальным и позволяют оценить диапазон структур многовитковых траекторий, для проведения первого этапа исследования задачи.

Результаты решения задачи в плоском случае представлены на рисунках 7 - 11.

Для низких конечных орбит (рис. 7) и небольших значений начального наклона оптимальными оказываются экстремали соответствующие двухимпульсной схеме перелета. С увеличением угла некомпланарности оптимальнее становятся экстремали соответствующие трехимпульсной схеме. При этом, такие семейства экстремалей быстро становятся оптимальнее самого двухимпульсного перелета, а значит и любой экстремали соответствующей двухимпульсной схеме.

Для высоких конечных орбит (рис. 8) при небольших углах некомпланарности также оптимальнее экстремали с двухимпульсной схемой перелета. Но в отличие от

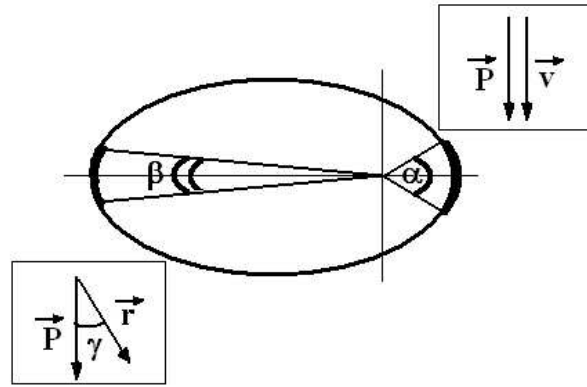


Рис. 6: "Простая" схема.

Таблица 2: Лучшие построенные по "простой схеме" траектории состоящие из 200 витков ( $R_0 = 6.58$  тыс. км;  $n_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ ;  $C = 14.715$  км/с )

$R_T$ , тыс. км	лучшая структура	$m(T)$	$\alpha$ , рад	$\beta$ , рад	$\gamma$ , рад	$\alpha^\circ$	$\beta^\circ$	$\gamma^\circ$
10	125-75	0.905684319	1.4872	1.0444	1.5707	85.21	59.84	89.99
15	147-53	0.840479849	2.2317	1.1765	1.5714	127.87	67.41	90.03
20	159-41	0.806323077	2.5318	1.0598	1.5726	145.06	60.72	90.10
25	168-32	0.785530852	2.6623	0.9842	1.5740	152.54	56.39	90.18
30	173-27	0.771739573	2.7561	0.8672	1.5756	157.91	49.69	90.27
35	177-23	0.762060727	2.8122	0.7864	1.5773	161.12	45.06	90.37
40	180-20	0.754991736	2.8518	0.7182	1.5791	163.40	41.15	90.47
$R_{TCO}$	181-19	0.752408938	2.8677	0.6858	1.5799	164.31	39.29	90.52

низких конечных орбит, для больших значений начального наклонения область оптимальности экстремалей соответствующие двухимпульсной схеме оказывается шире.

Также как и в плоском случае, для высоких конечных орбит из рассмотренных экстремалей, соответствующих двухимпульсной схеме, оптимальнее оказываются траектории структуры вида  $n-1$ . В то время, как для низких — оптимальными могут быть и траектории другого вида ( $n-2$ ,  $n-3$ , и т.д.). Это объясняется тем, что чем больше радиус конечной орбиты, тем меньше затраты массы зависят от начального наклонения орбит и для больших радиусов конечной орбиты выбор наилучшей структуры траектории во многом аналогичен выбору структуры в двухмерном случае.

Результаты третьего этапа представлены на рисунках 9-10.

Таким образом, в пространственной задаче исследованы экстремали Понтрягина соответствующие как двух-, так и трехимпульсной схемам перелета. Для любого заданного времени перелета среди полученных экстремалей построена лучшая по значению конечной массы траектория.

Как частный случай пространственного перелета рассмотрена задача оптимизации поворота плоскости орбиты ( $R_0 = R_T$ ). Результаты представлены на рисунке 11. Отметим, что в импульсной постановке оптимальным по затратам массы решением для любого угла поворота будет трехимпульсный перелет.

**В приложении** рассмотрены соответствующие задачи импульсной постановки. Результаты их решения были использованы для построения начального приближения и оценки оптимальности полученных решений.

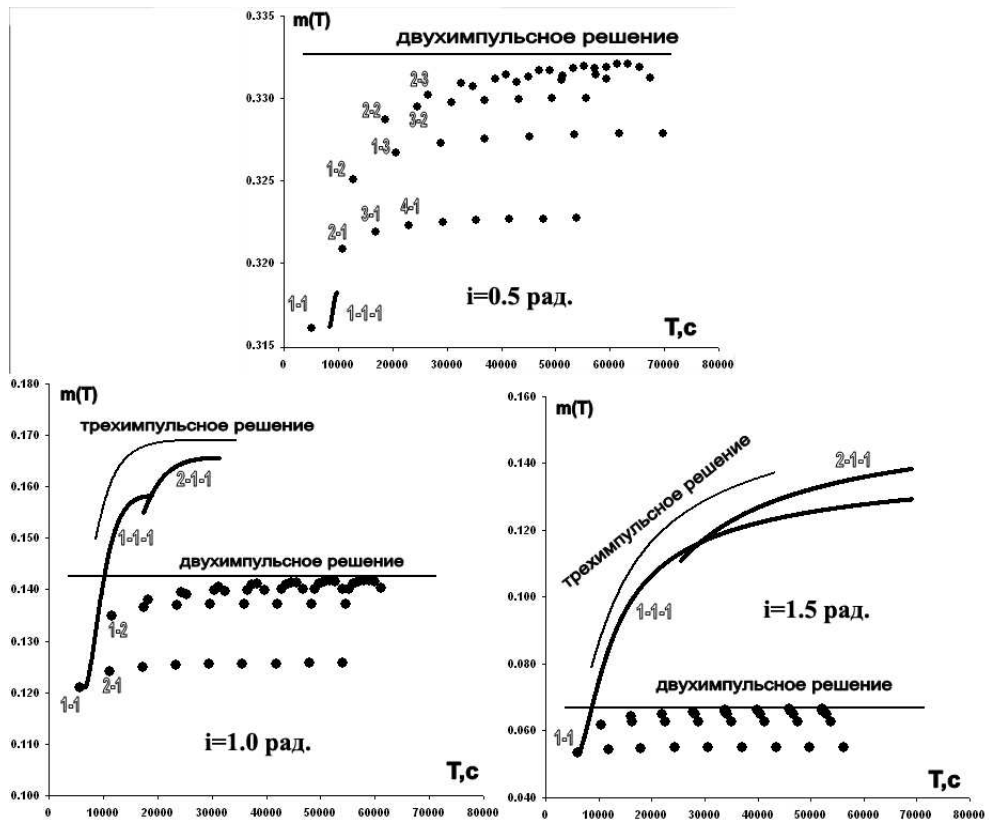


Рис. 7: Этап I. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ( $R_0 = 6.58$  тыс. км,  $R_T = 10.0$  тыс. км,  $n_0 = 0.08$ ,  $C = 3.255$  км/с)

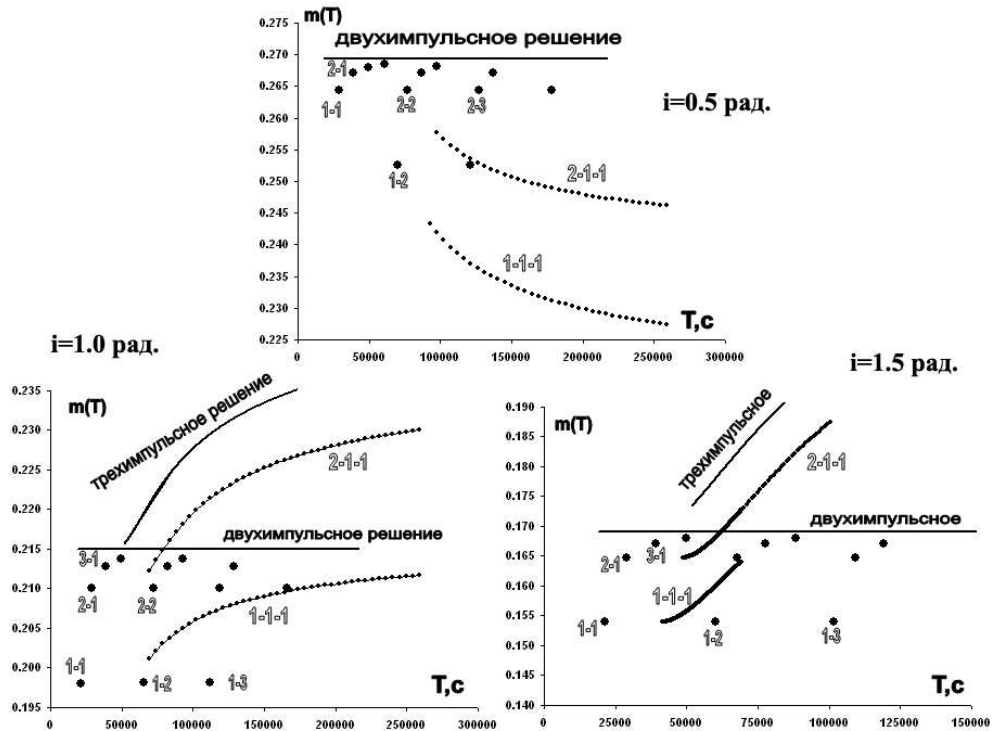


Рис. 8: Этап I. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ( $R_0 = 6.58$  тыс. км,  $R_T = \Gamma CO$ ,  $n_0 = 0.08$ ,  $C = 3.255$  км/с)

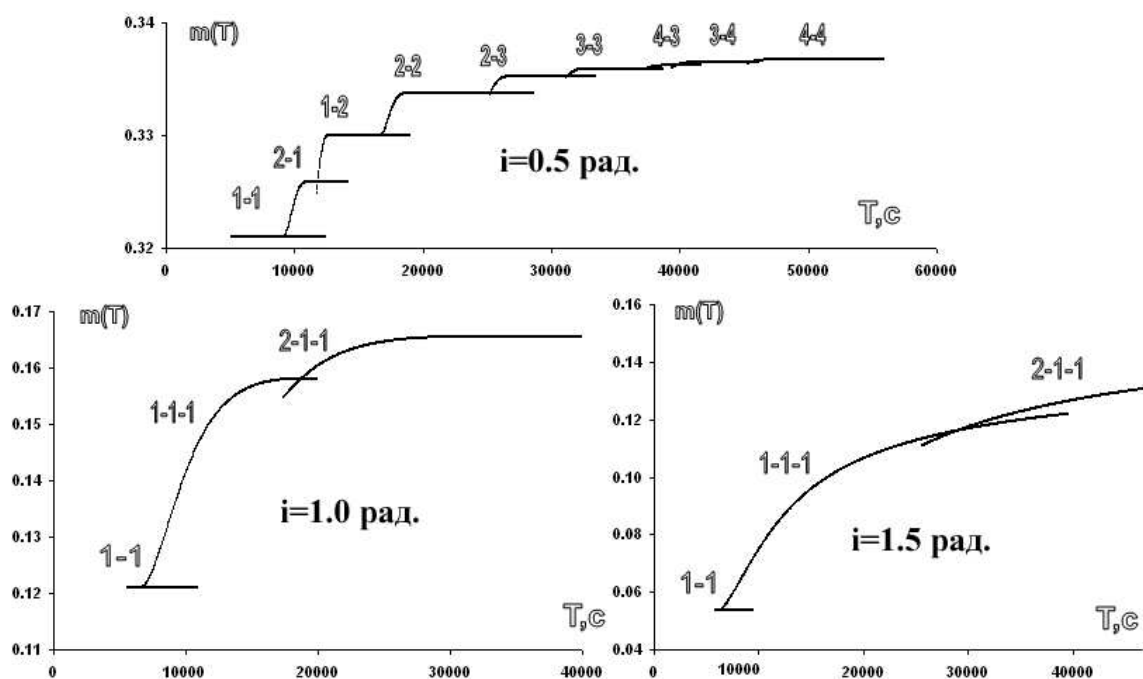


Рис. 9: Этап III. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ( $R_0 = 6.58$  тыс. км,  $R_T = 10.0$  тыс. км,  $n_0 = 0.08$ ,  $C = 3.255$  км/с)

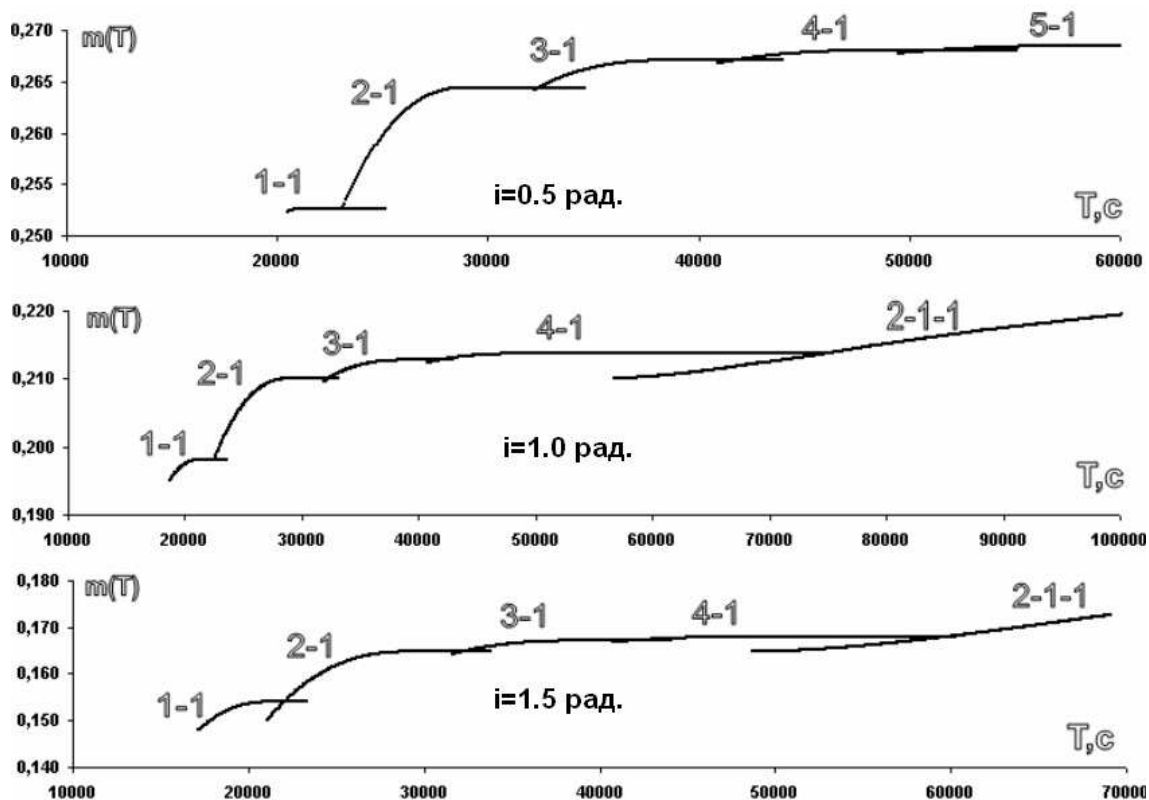


Рис. 10: Этап III. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ( $R_0 = 6.58$  тыс. км,  $R_T = \Gamma CO$ ,  $n_0 = 0.08$ ,  $C = 3.255$  км/с)

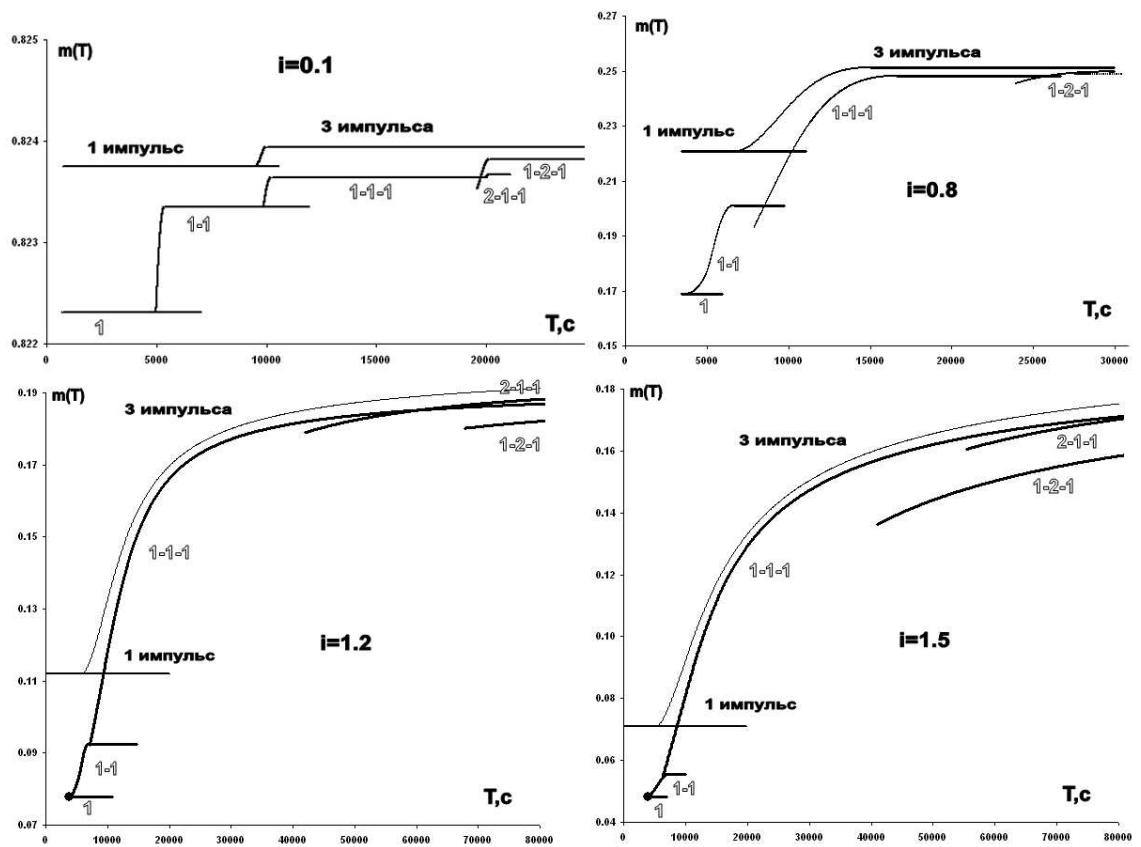


Рис. 11: Этап III. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ( $R_0 = R_T = 10.0$  тыс. км,  $n_0 = 0.08$ ,  $C = 3.255$  км/с)

## 9 Основные положения, выносимые на защиту

1. На основе принципа максимума Л. С. Понтрягина предложен алгоритм исследования задач оптимального управления многовитковыми межорбитальными перелетами КА с реактивным двигателем ограниченной тяги.
2. Разработана соответствующая рассматриваемым задачам методика численного решения краевых задач (краевых задач принципа максимума) для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений большого порядка (десятого порядка в плоском случае и четырнадцатого — в пространственном) с разрывами правых частей (переключениями тяги) в неизвестные заранее моменты времени, с неизвестными заранее конечными и/или начальными моментами времени и краевыми условиями. Методика включает в себя:
  - модифицированную для данного типа задач вычислительную схему метода стрельбы;
  - алгоритм построения начального приближения параметров пристрелки в методе стрельбы на основе импульсных решений рассматриваемых задач.
3. Построены конкретные многовитковые траектории перелетов КА, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности (принципу максимума), в задачах оптимизации перелетов:
  - между круговыми компланарными орбитами;
  - между круговыми некомпланарными орбитами (двухимпульсная схема перелета);
  - между круговыми некомпланарными орбитами (биэллиптическая схема перелета);
  - поворота плоскости орбиты.

Представленные результаты были получены впервые.

4. В плоском случае предложена простая схема построения многовитковых траекторий близких по функционалу к экстремальным. Построение таких траекторий, с любым наперед заданным числом активных участков, сводится к решению краевой задачи с тремя неизвестными.