

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.977.58:629.783

Рыжов Сергей Юрьевич

**ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОВИТКОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ
ПЕРЕЛЁТОВ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА
С РЕАКТИВНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ ОГРАНИЧЕННОЙ ТЯГИ**

01.02.01 — теоретическая механика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры вычислительной математики
механико-математического факультета
И.С. Григорьев

Москва 2007 г.

Содержание

Основные обозначения	3
Введение	4
1 Вычислительные основы решения задач оптимизации траекторий перелетов КА с реактивным двигателем ограниченной тяги	12
1.1 Краевые задачи принципа максимума	13
1.2 Построение начального приближения для краевых задач принципа максимума в задачах ракетодинамики	16
1.3 Вычислительная схема численного решения задачи	21
1.4 Особые управления	23
2 Задача оптимизации многовитковых межорбитальных перелётов между круговыми компланарными орбитами ИСЗ	24
2.1 Постановка задачи	24
2.2 Условия принципа максимума	25
2.3 Краевая задача	26
2.4 Анализ краевой задачи	26
2.5 Вычислительная схема решения краевой задачи	27
3 Задача оптимизации многовитковых межорбитальных перелётов между некомпланарными круговыми орбитами ИСЗ	30
3.1 Постановка задачи	30
3.2 Условия принципа максимума	31
3.3 Краевая задача	32
3.4 Анализ краевой задачи	33
3.5 Вычислительная схема решения краевой задачи. Двухимпульсный перелёт.	33
3.6 Вычислительная схема решения краевой задачи. Трехимпульсный перелёт.	36
4 Результаты и качественный анализ полученных решений	41
4.1 Задача оптимизации многовитковых межорбитальных перелётов между круговыми компланарными орбитами ИСЗ	41
4.1.1 Результаты решения краевой задачи	41
4.1.2 Анализ полученных результатов	44
4.1.3 "Простая" схема	50
4.2 Задача оптимизации многовитковых межорбитальных перелётов между некомпланарными круговыми орбитами ИСЗ	57
4.2.1 Результаты решения краевой задачи	57
4.2.2 Анализ полученных результатов	60
4.3 Задача оптимизации поворота плоскости орбиты ИСЗ	65
4.4 Оценка точности полученных решений	65
А Задачи оптимизации межорбитальных космических перелётов в импульсной постановке	75
A.1 Общие сведения	75
A.2 Импульсная постановка задач ракетодинамики	78

А.3	Краевая задача. Плоский случай. Два импульса.	79
А.3.1	Постановка задачи.	79
А.3.2	Необходимые условия оптимальности	80
А.3.3	Краевая задача	81
А.4	Краевая задача. Пространственный случай. Два импульса.	82
А.4.1	Постановка задачи	82
А.4.2	Необходимые условия оптимальности	84
А.4.3	Краевая задача	85
А.5	Краевая задача. Пространственный случай. Три импульса.	86
А.5.1	Постановка задачи	86
А.5.2	Необходимые условия оптимальности	88
А.5.3	Краевая задача	90
Литература		92

Основные обозначения

- КА — космический аппарат;
ИСЗ — искусственный спутник Земли;
ГСО — геостационарная орбита;
РДБТ — реактивный двигатель большой тяги;
РДОТ — реактивный двигатель ограниченной тяги;
ЭРД — электро-реактивный двигатель;
 g_3 — гравитационное ускорение у поверхности Земли, $g_3 = 9.81\text{м/с}^2$;
 $P_{\text{уд}}$ — удельный импульс (удельная тяга), $[P_{\text{уд}}]_{\text{СИ}} = \text{с}$;
 C — скорость истечения реактивной струи (постоянная величина, не зависящая от величины тяги), $C = g_3 P_{\text{уд}}$;
 R_3 — средний радиус Земли, $R_3 = 6378.155\text{км}$ [1];
 $R_{\text{ГСО}}$ — радиус геостационарной орбиты ИСЗ, $R_{\text{ГСО}} \simeq 42164\text{км}$ [34, стр.425];
 μ — гравитационный параметр Земли, $\mu = 3.986013 \cdot 10^5\text{км}^3/\text{с}^2$ [1];
 F — величина реактивной тяги двигательной системы (двигателя) КА;
 $M(t)$ — абсолютная масса КА в момент времени t ;
 $m(t) \equiv M(t)/M(0)$ — относительная масса КА в момент времени t ;
 $n_0 \equiv F/(M(0)g_3)$ — начальная тяговооруженность (перегрузка) КА;
 $P \equiv g_3 n_0$;
 r, φ — координаты КА в полярной системе координат;
 u, v — радиальная и тангенциальная составляющие вектора скорости КА в полярной системе координат;
 θ — угол между вектором тяги и радиус-вектором в полярной системе координат, отсчитываемый от положительного направления радиус-вектора в ту же сторону, что и угол φ ;
 r, φ, ψ — координаты КА в сферической системе координат;
 u, v, w — составляющие вектора скорости КА в сферической системе координат.

Введение

В работе рассматриваются математические проблемы оптимизации многовитковых траекторий перелётов космического аппарата (КА) с реактивным двигателем ограниченной тяги (РДОТ) в гравитационном поле в вакууме. Решаются задачи о многовитковых перелетах с минимальными затратами массы при ограниченном времени перелета. Исследование проводится на основе принципа максимума Понтрягина. Краевые задачи принципа максимума решаются численно методом стрельбы (пристрелки). Предлагаются вычислительные схемы решения краевых задач и согласованные с ними способы выбора начального приближения. Определяются удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности (принципу максимума) многовитковые траектории перелетов КА между орбитами ИСЗ в плоской и пространственной задачах. Из полученных экстремалей для заданного времени перелета определяется лучшая по функционалу траектория.

За последние 400 лет закономерности движения объектов по орбитам под действием только сил притяжения были хорошо изучены. Однако, для описания управляемого движения КА в космосе умения определять траектории пассивного (неуправляемого) движения КА недостаточно. Возникла необходимость в решении задач, связанных с маневрами КА. Как отмечалось, например, в [40], в задачах оптимизации перелетов с двигателями большой тяги допустимо использовать импульсное приближение решения. При этом, задача оптимизации сводится к минимизации характеристической скорости и требует только построения оптимальных траекторий с указанием на них моментов и направления приложения импульсов тяги. При оптимизации перелетов с двигателями малой по величине тяги необходим более глубокий подход, основанный на выборе оптимального управления величиной и направлением вектора тяги.

Необходимость в методике решения рассматриваемых математических задач при максимально приближенных к практике космических полетов предположениях возникает, в частности, при системной оценке проектных вариантов в процессе разработки реальной технической системы управления КА. Вместе с тем, эти задачи представляют, помимо практического, значительный теоретический (научный) интерес. Эти задачи требуют для своего решения синтеза методов оптимального управления, механики космических полетов, небесной механики и вычислительной математики. Развитие математической теории оптимального управления, совершенствование вычислительной техники, вычислительных методов и программного обеспечения создают благоприятные возможности для более глубокого проникновения в существо рассматриваемых здесь проблем, делают возможным решение задач, безуспешные попытки решения которых предпринимались ранее.

Задачам оптимизации траекторий межорбитальных перелетов КА, в том числе и задачам оптимизации многовитковых траекторий перелетов, посвящено значительное количество работ.

Ряд авторов [83, 88, 90, 93] сводят решение задачи оптимального управления к конечномерной параметрической задаче, которую решают методами нелинейного программирования. Различные комбинации способов дискретизации и методов решения задач параметрической оптимизации приводят к успеху в решении отдельных задач. Решения, получаемые такими способами, не являются решениями задач оптимального управления в строгом смысле, однако, могут давать результаты близкие к оптимальным. К подобным работам можно отнести работы, в которых задачи параметрической оптимизации решаются стохастическими методами [87]. Такому подходу способствует также появление большого количества программного обеспечения (ПО), претендую-

щего на "универсальность" в решении задач оптимизации или подзадач (интегрирование уравнений движения и т.д.). Готовые программы не требуют от исследователей навыков программирования и могут быть легко использованы. Стоит отметить, что подобное программное обеспечение может решать только ограниченный круг задач, точнее, каждое ПО способно решать одну задачу, но с разными параметрами. В целом проблема решения задач оптимального управления настолько сложна, что создать универсальный метод (как, например, метод решения квадратных уравнений), а, следовательно, и ПО, реализующее его, не удастся. Для того чтобы в какой-то мере обосновать оптимальность решений, получаемых методом параметрической оптимизации, желательно сравнивать их по функционалу с решениями, оптимальность которых доказана. Например, при оптимизации затрат массы для сравнения можно рассмотреть решения соответствующей задачи в импульсной постановке. Очевидно, что если при постановке и решении задачи параметрической оптимизации будет учтена структура оптимальных траекторий, то поиск и оценка оптимальности решений задачи существенно упрощаются.

Ещё один подход [47, 66, 68, 94] к решению задач оптимизации траекторий перелётов КА с двигателями "малой тяги" связан с предположением, что небольшая по величине тяга за один виток изменяет параметры орбиты движения КА незначительно. Это позволяет использовать осреднение дифференциальных уравнений движения. Траектории, получаемые при решении осредненной краевой задачи, оказываются близкими к оптимальным решениям. Хотя они и не являются решениями исходной задачи оптимального управления, но их можно использовать в качестве начального приближения, и они позволяют получать качественное представление об устройстве многовитковых траекторий. Использование осреднения предполагает очень слабую тягу, и эффективность такого приема падает с ростом величины тяги двигателя. Поэтому такая методика не подходит для более "сильных" двигателей. Но для очень "слабых" двигателей решения осредненной задачи дают хорошее приближение оптимальных решений, и, возможно, являются на настоящий момент единственным способом оптимизации траекторий перелётов КА с очень "слабыми" двигателями. При решении осредненных краевых задач, с фиксированным временем перелета, в качестве начального приближения, как правило, используются результаты решения задачи быстрогодействия.

Задачи быстрогодействия — один из важных классов задач, которые решаются при оптимизации траекторий перелётов КА с двигателями малого ускорения [21, 39]. Это связано с тем, что межорбитальные перелёты со слабыми двигателями осуществляются за длительное время и даже самые быстрые перелёты (без ограничения на конечную массу) могут занимать неприемлемо большое время.

В задачах быстрогодействия без ограничений на конечную массу тяга всегда включена и максимальна. Поэтому при решении таких задач необходимо определить только направление вектора тяги [21]. При этом система дифференциальных уравнений движения, как правило, имеет гладкие правые части. Трудностью в решении задач быстрогодействия с двигателями малого ускорения является большое время перелета и, следовательно, время интегрирования задачи Коши, что вызывает накопление значительной глобальной вычислительной ошибки, которая ухудшает сходимость метода стрельбы. Существенными вычислительными трудностями также являются возможность ветвления решений и возможность вырождения орбит (столкновение с притягивающим центром). Задача быстрогодействия существенно усложняется, если учитывается движение КА относительно центра масс. При малой тяге двигателя влияние этого фактора может оказаться значительным [71].

В результате предварительного анализа были получены решения задачи быстрогодействия при перелете КА между круговыми компланарными орбитами ИСЗ (см. табл. 1). Из таблицы 1 видно, что перелёт с низкой круговой орбиты на ГСО с использованием двигателя типа СПД-100 и начальной массой около тонны займет минимум полтора года. Затраты массы при этом будут на 4% (от общей начальной массы аппарата) больше затрат массы при импульсном перелете, который является абсолютно оптимальным по затратам массы, то есть, оптимизируя затраты массы путем включения и выключения двигателя, можно экономить до 4% начальной массы. Для сравнения, масса всего топлива в КА SMART-1 составляет 22.7% от начальной массы аппарата. При перелетах между круговыми компланарными орбитами отличие затрат массы в решении задачи быстрогодействия от затрат массы в импульсном решении ($m_{\text{имп}} - m_{\text{быс}}$) уменьшается с уменьшением величины начальной тяговооруженности двигателя КА, так как чем больше витков занимает перелет — тем мгновенный эксцентриситет переходных орбит меньше, а, следовательно, меньше и гравитационные потери на такой траектории.

Таблица 1: Решение задачи быстрогодействия без ограничений на конечную массу. Перелёт между компланарными орбитами ($R_0 = 6580$ км, $R_T = R_{\text{ГСО}}$, $P_{\text{уд}} = 1500$ с).

n_0	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
T, с	$5.10 \cdot 10^4$	$4.19 \cdot 10^5$	$4.11 \cdot 10^6$	$4.11 \cdot 10^7$
T, сут	0.59	4.85	47.61	475.95
кол-во витков	3.53	33.30	331.26	3312.19
$m(T)$	0.6601669	0.7208511	0.7257754	0.7258508
$m_{\text{имп}} - m_{\text{быс}}(T)$	0.1052	0.0445	0.0396	0.0395

Численное определение экстремалей многовитковых перелетов в задаче минимизации затрат массы, при ограниченном времени перелета, рассматривалось в работах [7, 18, 75, 84, 86]. Следует обратить внимание, что построение многовитковых экстремалей (с включениями и выключениями тяги) несколько сложнее и ранее удалось построить лишь экстремали со сравнительно небольшим числом витков (до четырех [84, 86]), при этом обязательно учитывалась специфика Ньютоновского гравитационного поля, что позволяло упростить задачу, например, аналитически интегрировать пассивные участки. В работе [86] для построения экстремалей, при решении краевой задачи, в вектор параметров пристрелки включались продолжительности всех активных и пассивных участков. При этом, количество участков было фиксировано, а пассивные участки интегрировались в аналитическом виде. По результатам, представленным в работе, для построения экстремали с тремя активными участками в пространственной задаче, при использовании такой схемы, требуется 62 итерации метода Ньютона.

В работе [75] была приведена одна многовитковая траектория пространственного перелета между орбитами ИСЗ. Полученная траектория состояла более чем из 50 витков и являлась экстремалью Понтрягина в задаче минимизации расхода массы при ограниченном времени перелета.

В работе [7] решена плоская задача оптимального многовиткового перелета КА с малой тягой с высокоэллиптической орбиты на ГСО. Построены экстремальные траектории с количеством витков до 1000. Решение задачи в этой работе стало возможным благодаря следующему способу построения начального приближения: сначала, с

использованием последовательной линеаризации [73], было построено приближенно-оптимальное решение $\tilde{x}(t)$, затем на отрезке $[t_1; T]$ решалась задача (оптимального управления) попадания в момент времени t_1 в соответствующую точку приближенно-оптимальной траектории ($\tilde{x}(t_1)$), полученное решение использовалось в качестве начального приближения для получения решения на отрезке $[t_2; T]$, $t_2 < t_1$, и так далее до получения решения на всем отрезке $[t_0; T]$.

Во всех представленных работах отмечается, что основная сложность построения оптимальных многovitковых траекторий связана именно с возможностью включения и выключения двигателя. Из-за этого решение задачи оказывается очень чувствительным к изменению краевых условий, а именно частные производные вектор-функции невязок по начальным значениям сопряженных переменных терпят разрывы при появлении или исчезновении активных участков, и построение начального приближения становится основой для успешного решения задачи.

В данной работе рассматривается подход связанный с численным решением задачи оптимального управления на основе принципа максимума.

Постановка задачи. Движение центра масс одноступенчатого КА переменной массы с реактивным двигателем ограниченной тяги в центральном ньютоновском гравитационном поле одного притягивающего центра в вакууме при управлении вектором тяги описывается в инерциальной системе координат, связанной с притягивающим центром, дифференциальными уравнениями [27]:

$$\dot{m} = -\frac{P}{C}, \quad \dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad \dot{\vec{v}} = \frac{P\vec{e}}{m} - \frac{\mu\vec{r}}{r^3}. \quad (1)$$

Управление осуществляется посредством вектора тяги $P\vec{e}$, где P — величина тяги, \vec{e} — вектор задающий направление тяги ($|\vec{e}| = 1$).

При решении задачи рассматривается математическая модель описания управляемого движения центра масс КА, в которой фазовые переменные $m(t)$, $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ — непрерывные кусочно-гладкие функции, удовлетворяющие на участках непрерывности управляющих функций (управлений) $P(t)$, $\vec{e}(t)$ системе (1), а функции $P(t)$, $\vec{e}(t)$ — кусочно-непрерывные ограниченные:

$$0 \leq P(t) \leq P_{max} < \infty, \quad |\vec{e}(t)| = 1 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2)$$

В условиях (2) (и далее в аналогичных условиях, при постановке задачи) T — конечный момент времени; $P_{max} \equiv g_3 n_0$, n_0 — значение начальной тяговооруженности.

В начальный момент времени $t = 0$ КА находится на начальной орбите ИСЗ:

$$m(0) = 1, \quad \vec{f}_0(\vec{r}(0), \vec{v}(0)) = \vec{0}. \quad (3)$$

В конечный заранее не фиксированный момент времени $t = T$ КА должен двигаться по конечной орбите ИСЗ:

$$\vec{f}_T(\vec{r}(T), \vec{v}(T)) = \vec{0}. \quad (4)$$

При этом общее время перелета ограничено:

$$T \leq T^*. \quad (5)$$

Минимизируются затраты массы на перелет $(1 - m(T))$ или эквивалентный им функционал:

$$I = -m(T) \rightarrow \inf. \quad (6)$$

Условия принципа максимума. Задача (1)-(6) представляет собой задачу оптимального управления и решается на основе принципа максимума Понтрягина [3, 15, 69]. Функция Понтрягина \mathcal{H} и терминант l задачи имеют вид:

$$\mathcal{H}(m, \vec{r}, \vec{v}, P, \vec{e}, p_m, \vec{p}_r, \vec{p}_v) \equiv -p_m \frac{P}{C} + (\vec{p}_r, \vec{v}) + (\vec{p}_v, (\frac{P\vec{e}}{m} - \frac{\mu\vec{r}}{r^3})), \quad (7)$$

$$l \equiv -\lambda_0 m(T) + \lambda_{m0}(m(0) - 1) + (\vec{\lambda}_{f0}, \vec{f}_0) + (\vec{\lambda}_{fT}, \vec{f}_T) + \lambda_T(T - T^*),$$

где непрерывная кусочно-гладкая функция $p_m(t)$, непрерывные кусочно-гладкие вектор-функции $\vec{p}_r(t)$, $\vec{p}_v(t)$ (сопряженные переменные), числа λ_0 , λ_T и векторы $\vec{\lambda}_{f0}$, $\vec{\lambda}_{fT}$ — множители Лагранжа.

Условия принципа максимума для рассматриваемой задачи имеют следующий вид.

- Уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряженная система):

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial i}, \quad i = m, \vec{r}, \vec{v}. \quad (8)$$

- Условия оптимальности по управлениям:

$$\{P, \vec{e}\}_{opt} = \arg \max_{P \in [0, P_{max}], |\vec{e}|=1} \mathcal{H}(\dots, P, \vec{e}, \dots); \quad (9)$$

следствия условий оптимальности (9):

$$\begin{aligned} \vec{e}_{opt} &= \begin{cases} \frac{\vec{p}_v}{\rho}, & \rho \neq 0 \quad \text{и} \quad \chi \geq 0, \\ \forall \vec{e}, |\vec{e}| = 1, & \rho = 0 \quad \text{или} \quad \chi < 0; \end{cases} \\ P_{opt} &= \begin{cases} P_{max}, & \chi > 0, \\ 0, & \chi < 0, \\ \forall P \in [0, P_{max}], & \chi = 0; \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

$\chi \equiv \rho - mp_m/C$ — функция переключения управления P , $\rho \equiv |\vec{p}_v|$.

- Условия трансверсальности по фазовым переменным:

$$p_i(0) = \frac{\partial l}{\partial i(0)}, \quad p_i(T) = -\frac{\partial l}{\partial i(T)}, \quad i = m, \vec{r}, \vec{v}. \quad (11)$$

- Условие стационарности по T ($\mathcal{H}(T) = \frac{\partial l}{\partial T}$):

$$\mathcal{H}(T) = \lambda_T. \quad (12)$$

- Условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_T(T - T^*) = 0. \quad (13)$$

- Условия неотрицательности:

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_T \geq 0. \quad (14)$$

- Условие НЕРавенства Одновременно Нулю всех множителей Лагранжа (условие НЕРОН):

$$\|p_m\|_C + \|\vec{p}_r\|_C + \|\vec{p}_v\|_C + |\lambda_0| + |\lambda_T| + |\vec{\lambda}_{f0}| + |\vec{\lambda}_{fT}| \neq 0. \quad (15)$$

- Условие нормировки множителей Лагранжа. В данной работе использовалось следующее:

$$|\vec{p}_r(0)|^2 + |\vec{p}_v(0)|^2 = 1. \quad (16)$$

Краевая задача. Соотношения (1)-(5), (7)-(16) представляют собой краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (краевую задачу принципа максимума). Неизвестными в ней являются постоянные интегрирования её системы дифференциальных уравнений (1), (8), время перелета T и множители Лагранжа λ_0 , λ_T , $\vec{\lambda}_{f0}$, $\vec{\lambda}_{fT}$. Для их определения имеются краевые условия: (3), (4); условия трансверсальности (11); условие стационарности (12); условие дополняющей нежесткости (13) и условие нормировки (16), связанное с однородностью функции Лагранжа по множителям Лагранжа, позволяющей выбирать множители Лагранжа с точностью до положительного сомножителя. Если многообразия \vec{f}_0, \vec{f}_T не имеют особых точек [69, гл.1 §6], то можно показать, что число неизвестных краевой задачи совпадает с числом условий [21].

Из условий стационарности (12) и дополняющей нежесткости (13) можно исключить множитель Лагранжа λ_T . Однако, чтобы избежать, возникающих при этом вычислительных проблем, вместо этого рассматриваются две вспомогательные краевые задачи [20, стр. 56-61]:

1. Задача с неактивным ограничением времени перелета — используется краевое условие $H(T) = 0$, условие $T \leq T^*$ является проверочным;
2. Задача с активным ограничением времени перелета — используется краевое условие $T - T^* = 0$, условие $H(T) \geq 0$ является проверочным.

Полученная краевая задача имеет серию различных семейств решений. В дальнейшем используется классификация семейств решений по числу активных участков, соответствующих каждому из импульсов в импульсном решении задачи. Например, классификация экстремалей, соответствующих двухимпульсной схеме перелета, определяется парой чисел $a-b$, где a — число активных участков, реализующих первый импульс, b — второй. Подробно классификация структур экстремалей рассмотрена в следующих главах.

Построение многовитковых решений задачи происходит по следующей методике:

1. На основе решений соответствующих задач импульсной постановки строятся многовитковые экстремали с ограниченным количеством активных участков (каждый импульс реализуется за конечное фиксированное число активных участков). При этом, ограничение на время неактивно (решается первый тип вспомогательных краевых задач). Используемая в работе вычислительная схема и алгоритм построения начального приближения на основе импульсных решений рассмотрены в первой главе.
2. В результате, после первого этапа решения задачи, получены экстремали различной структуры (рис.1а). На втором этапе осуществляется продолжение семейств

экстремалей "вправо"(рис.1б). Это продолжение соответствует добавлению пассивного участка в конце траектории. На этом этапе также из рассмотрения исключаются траектории, оказавшиеся хуже (в смысле функционала) других семейств, на рисунке 1 это семейства 2-2 и 5-1.

3. На третьем этапе, для завершения исследования, полученные семейства экстремалей продолжают "влево". При этом решаются вспомогательные задачи с активным ограничением времени (вспомогательные краевые задачи второго типа). Продолжение осуществляется с использованием метода продолжения решения по параметру. В качестве параметра продолжения используется величина T^* . Продолжение осуществляется до пересечения с соседним семейством экстремалей. В результате третьего этапа оказывается построена кривая лучших экстремалей, определяющая среди полученных экстремалей лучшую по функционалу для любого заданного времени перелета (рис. 1с). Отметим, что в случае доказательства оптимальности экстремалей, эта кривая определяет границу области достижимости и является множеством Парето.

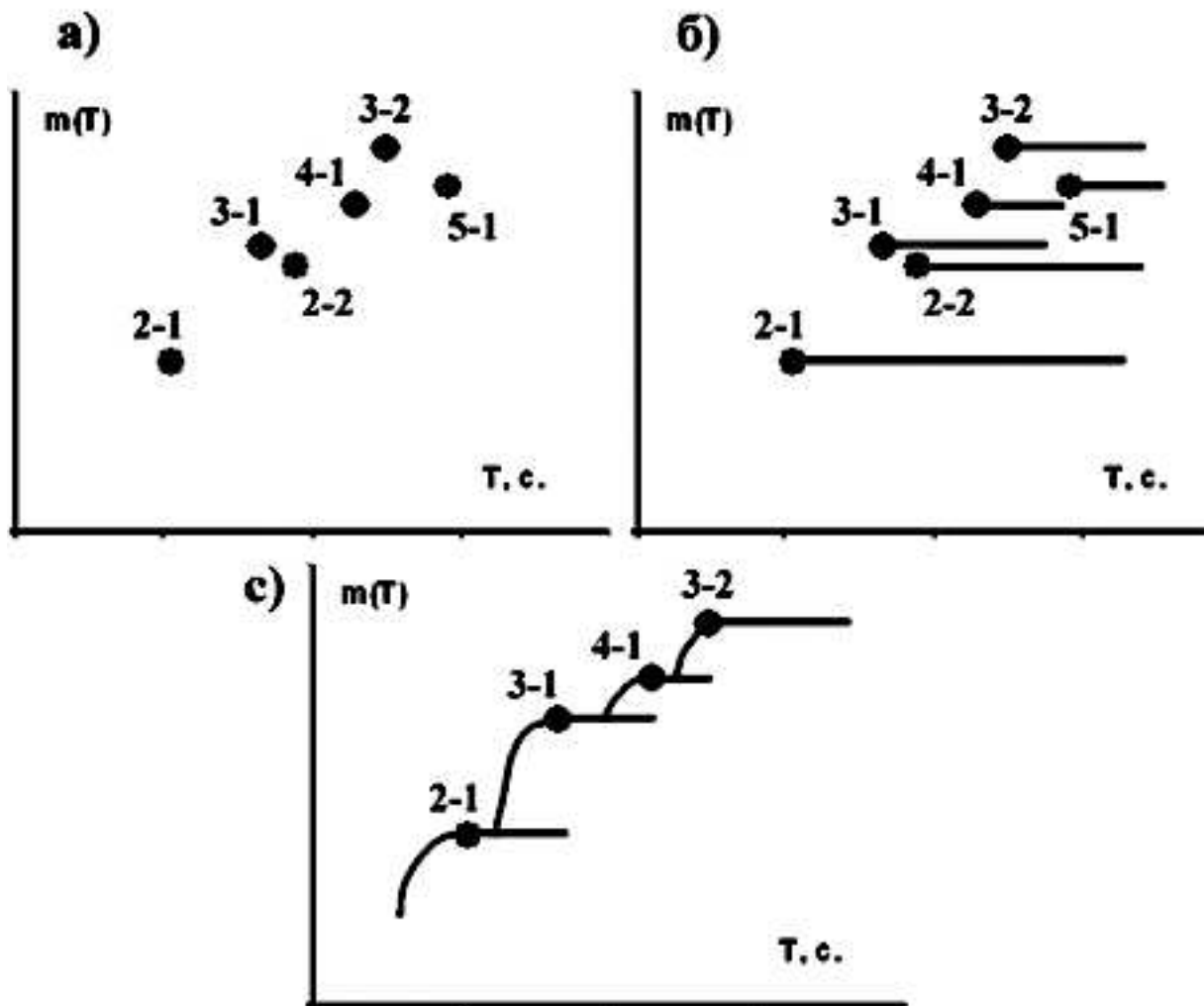


Рис. 1: Семейства многовитковых экстремалей.

Предложенный в работе подход позволяет строить экстремальные многовитковые траектории с десятками включений двигателя в плоских и пространственных задачах. При решении краевой задачи принципа максимума выбор хорошего начального

приближения осуществляется на основе решения краевой задачи импульсной постановки, предлагаются формулы построения начального приближения. При этом в работе решается также и проблема выбора эффективной вычислительной схемы метода стрельбы.

Плоская задача перелета между круговыми орбитами ИСЗ рассмотрена в главе 2. В главе 3 представлена пространственная задача перелета между круговыми орбитами ИСЗ, исследуются многоритковые перелеты соответствующие двух- и трехимпульсной (биэллиптической) схемам перелета. Для всех задач даны: математическая постановка задачи, условия принципа максимума, краевые задачи, вычислительная схема и формулы построения начального приближения на основе решения задач импульсной постановки.

Результаты решения задач приведены в главе 4.

В приложении рассмотрены задачи импульсной постановки, результаты решения которых были использованы в работе для построения начального приближения и оценки оптимальности полученных траекторий.

1 Вычислительные основы решения задач оптимизации траекторий перелетов КА с реактивным двигателем ограниченной тяги

Современные методы решения задач оптимизации можно условно разделить на две части — прямые и непрямые. Прямые методы непосредственно минимизируют критерий качества (функционал). Они основываются на анализе поведения функционала в окрестности некоторой точки из области его определения, выделении экстремального направления (например, направления антиградиента, вдоль которого уменьшение функционала максимально), переходе вдоль этого направления в следующую точку области определения и последовательном повторении процедуры до выхода в точку экстремума функционала. В последнее время появились стохастические и генетические методы оптимизации [87], которые можно отнести к прямым методам. В отличие от детерминированных (традиционных) прямых методов размерность задачи при использовании стохастических и генетических методов с увеличением сложности возрастает медленнее, что позволяет решать более сложные задачи.

Непрямые методы связаны с использованием необходимых и/или достаточных условий оптимальности. Одним из основных непрямых методов является принцип максимума Понтрягина [3, 69], представляющий собой систему необходимых условий локальной оптимальности в задачах оптимального управления. Принцип максимума сводит решение задачи оптимального управления к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений — краевой задаче принципа максимума. В результате решения задачи оптимального управления получается программное управление — управление как функция времени. Это следует отнести к недостаткам принципа максимума, поскольку даже незначительные изменения в условиях задачи (например, изменения в краевых условиях) приводят к необходимости решения задачи заново. Другим недостатком принципа максимума является необходимость проверки полученных на его основе решений (экстремалей Понтрягина) на относительную и/или абсолютную оптимальность. Проверке оптимальности посвящены работы [4, 30, 42, 50]. Однако, как отмечалось в [73, §14 с. 113], наиболее точные и аккуратные численные решения задач оптимального управления связаны именно с решением соответствующих краевых задач принципа максимума.

Существуют также непрямые методы основанные на достаточных условиях абсолютной оптимальности в задачах оптимального управления [9, 10, 50].

Идеалом среди непрямых методов являются методы, позволяющие получать решение задачи в виде синтеза оптимального управления — управления, зависящего не только от времени, но и от фазовой переменной. Такие методы основаны на принципе оптимальности Беллмана [12]. Эти методы сводят решение задачи оптимального управления к решению задачи Коши для уравнения Беллмана — нелинейного уравнения в частных производных. При этом размерность фазового пространства решаемой задачи оптимального управления, как правило, является фатальной и ограничивает возможность решения задач на основе этих методов.

Практика численного решения сложных задач оптимизации показывает целесообразность использования комбинированных методов, сочетающих прямые и непрямые методы оптимизации [2], [72].

1.1 Краевые задачи принципа максимума

Краевая задача принципа максимума для задач ракетодинамики нелинейна, её система дифференциальных уравнений, записанная в форме Коши, имеет высокую размерность и, как правило, разрывные в неизвестные заранее моменты времени правые части, а структура краевой задачи в целом может оказаться не простой, что связано с особенностями структуры исходной задачи оптимального управления — видом управляемой динамической системы, функционала, ограничений на управления, терминальных, промежуточных, смешанных, фазовых и прочих ограничений. В общем случае краевая задача может быть решена лишь численно с использованием ЭВМ. Трудности решения краевых задач принципа максимума носят не только вычислительный характер, но и остающийся обычно за рамками численного решения общетеоретический принципиальный характер, связанный с существованием и ветвлением решений, исследованием режимов особых управлений и оценкой их оптимальности, исследованием возможности аномального случая (случая обращения в ноль множителя Лагранжа при функционале), исследованием локальной и абсолютной оптимальности решений.

Любой численный метод решения краевых задач состоит из численного решения подзадач (решение задачи Коши, решение систем алгебраических уравнений и т.д.). Таким образом при численном решении краевой задачи можно выбирать не только метод решения краевых задач, но и методы решения подзадач, входящих в него.

Вычислительная схема решения краевой задачи — организация вычислений при решении краевой задачи, т.е. набор методов решения подзадач, связь решений подзадач, систем координат, способов хранения данных, построение начального приближения.

Вычислительная схема должна объединить все указанные компоненты так, чтобы удалось решить задачу. Очевидно, что комбинация различных методов решения краевых задач и методов решения подзадач приводит к разным вычислительным схемам.

Одним из основных методов решения краевых задач принципа максимума является метод стрельбы. Коротко метод стрельбы можно описать так:

- 1) задаются произвольным образом недостающие начальные данные, необходимые для решения задачи Коши (вектор параметров пристрелки);
- 2) каким-либо методом решается задача Коши и определяется вектор-функция невязок, описывающая отличие условий в конце от требуемых значений;
- 3) вектор-функция невязок соответствует вектору параметров пристрелки и должна при решении задачи обратиться в ноль. Требование обращения вектор-функции невязок в ноль приводит к необходимости решения системы алгебраических уравнений;
- 4) система алгебраических уравнений решается, как правило, модифицированным методом Ньютона.

Выбор вычислительной схемы метода стрельбы зависит от многих факторов. Основными среди них являются:

- 1) точность представления чисел ЭВМ;
- 2) метод интегрирования задачи Коши и его точность;

- 3) система координат, в которой рассматривается задача;
- 4) выбор компонент вектора параметров пристрелки;
- 5) выбор компонент вектор-функции невязок;
- 6) метод нахождения корней вектор-функции невязок;
- 7) способ построения начального приближения для вектора параметров пристрелки.

Заметим, что система координат входит в постановку исходной задачи оптимизации и при ее замене изменяются и задача оптимизации, и соответствующая ей крайняя задача. Однако выбор системы координат влияет на сходимость метода решения крайней задачи и, потому, включение системы координат в вычислительную схему целесообразно.

Схематично связь составляющих вычислительной схемы метода стрельбы, использующей для решения системы алгебраических уравнений модифицированный метод Ньютона, показана на рис. 2.

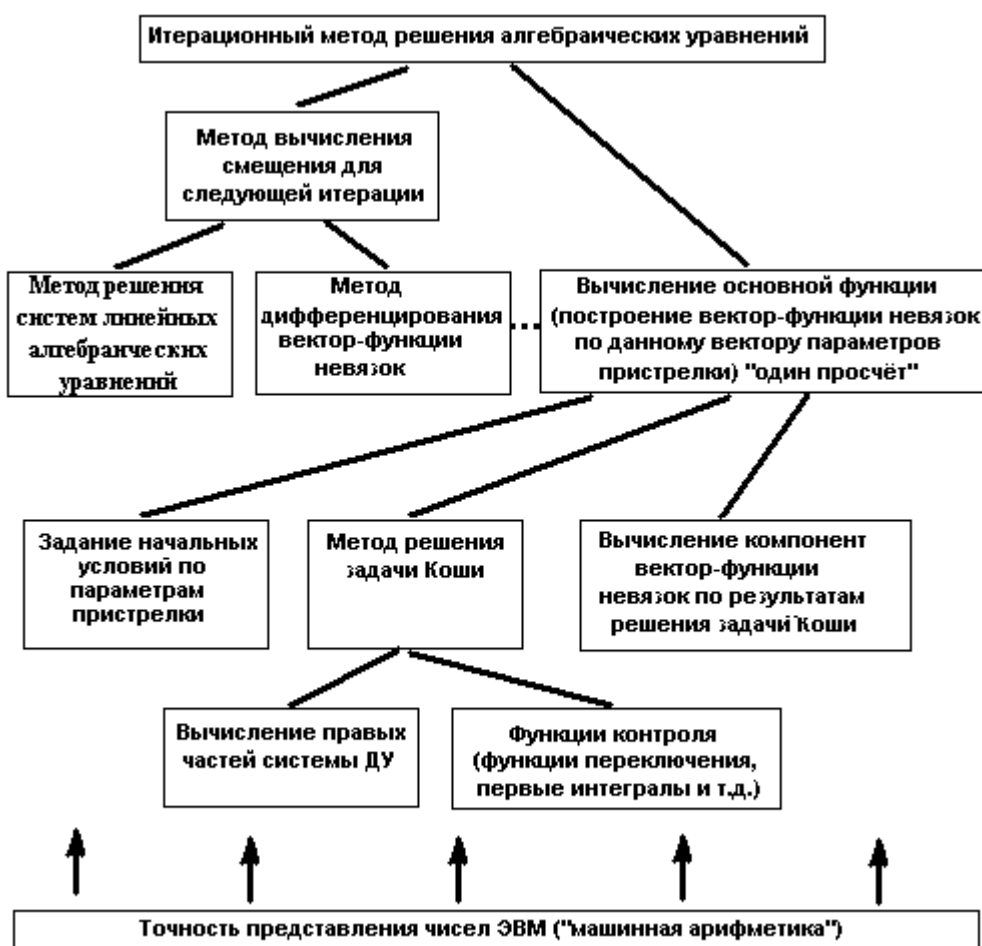


Рис. 2: Блок-схема решения краевой задачи методом стрельбы, использующей для решения системы алгебраических уравнений модифицированный метод Ньютона.

Обратим внимание, что в этой блок-схеме модифицированному методу Ньютона соответствуют три составляющих: "метод вычисления смещения для следующей итерации" (отвечает за используемую модификацию метода Ньютона), "метод дифферен-

цирования вектор-функции невязок" и "метод решения систем линейных алгебраических уравнений" — являются неотъемлемыми составными частями метода Ньютона любой модификации. При использовании других методов решения систем алгебраических уравнений вычисление смещения для следующей итерации может не требовать дифференцирования вектор-функции невязок и решения систем линейных алгебраических уравнений. Также заметим, что "метод дифференцирования вектор-функции невязок" может обращаться к блоку "вычисление основной функции" (при приближении производных конечными разностями) или не обращаться (при вычислении производных на основе решения матричной системы дифференциальных уравнений в вариациях).

Точность и скорость работы составляющих нижних уровней схемы оказывают влияние на точность и эффективность работы всех элементов стоящих выше. В результате сходимость итерационного метода зависит от эффективности каждой составляющей вычислительной схемы.

Точность представления чисел ЭВМ влияет на работу всей вычислительной схемы, так как вычислительные операции производятся каждым элементом вычислительной схемы. Точность представления чисел накладывает также ограничения на выбор точности методов, входящих в схему. Например, при точности представления чисел 16 значащих цифр не имеет смысла использовать метод интегрирования задачи Коши с ограничением точности на шаге более 13-14 знаков. Сравнительный анализ эффективности использования различных методов решения задачи Коши можно найти, например, в [78]. Выбор системы координат проявляется на этапе вычисления правых частей системы ДУ и влияет на скорость (количество шагов) метода интегрирования системы ДУ, что отражается на точности решения задачи Коши.

При решении краевой задачи можно использовать различные вычислительные схемы. При различном выборе параметров пристрелки, вектор-функции невязок, их числа и способа вычисления скорость сходимости и даже сама сходимость итерационного метода может изменяться. Кроме того, при выборе компонент вектора параметров пристрелки следует учитывать возможность построения для них достаточно хорошего начального приближения. Время T , в задачах с нефиксированным временем, можно включать в вектор параметров пристрелки, а можно определять из специально сформированного условия остановки счета. Использование второго способа позволяет решить некоторые задачи, в которых первый способ к успеху не приводит, но при этом требует дополнительных исследований, так как условие остановки может выполняться на экстремали несколько раз.

Назовем вычислительную схему решения краевой задачи *собственной*, если множество решений полученных с ее помощью принадлежит множеству решений краевой задачи. На практике оказывается, что решить краевую задачу собственными вычислительными схемами не всегда удастся. Тогда решение задачи ищется в каком-либо фиксированном классе решений или при дополнительных ограничениях на решения. Это позволяет модифицировать вычислительную схему с учетом накладываемых ограничений, что упрощает построение решений. Строго говоря модифицированная вычислительная схема решает другую краевую задачу, и множество решений, полученных с использованием модифицированной вычислительной схемы, лишь пересекается с множеством решений исходной краевой задачи, а не принадлежит ему полностью. Поэтому для того, чтобы модифицированная схема стала собственной, в неё необходимо включить проверку того, что полученное решение является решением исходной краевой задачи.

Необходимо отметить, что преодоления значительных трудностей требуют и дру-

гие, отличные от метода стрельбы, методы, применяемые для численного решения краевых задач принципа максимума [82]. Без преувеличения можно сказать, что алгоритмов численного решения краевых задач принципа максимума, однозначно приводящих к успеху, в настоящее время не существует, и успех численного решения краевых задач определяется в значительной степени индивидуальным искусством исследователя и опытом решения задач такого рода. Отчасти это связано с "индивидуальностью" каждой краевой задачи принципа максимума, о чем упоминалось выше. Накопленный опыт численного решения методом стрельбы краевых задач принципа максимума для задач оптимизации траекторий КА с РДОТ значителен, но вместе с тем недостаточен для решения целого ряда интересующих практику оптимизационных задач.

1.2 Построение начального приближения для краевых задач принципа максимума в задачах ракетодинамики

Выбор хорошего начального приближения, наряду с выбором эффективной вычислительной схемы решения, является одной из основных трудностей решения краевых задач. Поэтому проблеме выбора хорошего начального приближения уделяется большое внимание. Алгоритмических методов, которые давали бы достаточно хорошее для нахождения решения приближение, в настоящее время не существует, и выбор начального приближения, также, как и выбор эффективной вычислительной схемы метода стрельбы, не формализован, а, в значительной мере, основывается на интуиции и накопленном опыте решения подобных задач.

В процессе решения методом стрельбы нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе краевых задач принципа максимума, при выборе начального приближения для вектора параметров пристрелки, как правило, используется метод продолжения решения по параметру. Этот метод применяется в случаях, когда решение краевой задачи известно при некотором значении входящего в задачу (или специально сформированного для этого) параметра. В задачах оптимизации траекторий КА с РДОТ при численном решении краевой задачи принципа максимума для продолжения решения по параметру в качестве параметра используются, например, величины, связанные с величиной тяги двигателя (максимальная тяговооруженность, максимальное реактивное ускорение, максимальная тяга), а в качестве начального приближения может быть использовано решение задачи в импульсной постановке, соответствующее предельному, бесконечно большому значению величины максимальной тяги.

Идея использования в качестве начального приближения импульсного решения не нова (примеры использования этой идеи в оптимизационных задачах ракетодинамики см., например, в [60, 64, 79]), однако, существующие методики использования импульсного решения в качестве начального приближения могут оказаться непригодными для решения целого ряда задач оптимизации траекторий КА с РДОТ из-за недостаточной точности получаемого с их помощью начального приближения и несовершенства этих методик в целом. Подробное описание задач оптимизации в импульсной постановке и соответствующих краевых задач см. в Приложении А.

Если решение задачи в импульсной постановке получено, то возникает проблема, связанная с необходимостью перехода в процессе метода продолжения решения по параметру от решения краевой задачи при бесконечно большом значении параметра P_{max} к решению краевой задачи при заданном конечном значении этого параметра. Необходимость такого перехода и порождает основные трудности, возникающие при

решении краевых задач принципа максимума с использованием импульсного решения в качестве начального приближения в методе продолжения по параметру.

Типичный прием использования импульсного решения для получения решения в неимпульсном случае при построении экстремалей Понтрягина в [79] описывается так: "... сначала задается большое, но конечное значение ускорения силы тяги $F/M(0)$, и начинается итерационный процесс вычислений (решения краевой задачи - авт.) для неимпульсного случая. Чтобы обеспечить сходимость (итерационного процесса - авт.), значения λ_{i0} (начальные значения сопряженных переменных λ_i , играющих в [79] роль составляющих вектора параметров пристрелки - авт.) **выбираются слегка отличными** от значений, соответствующих импульсному случаю. Затем величина $F/M(0)$ уменьшается ступенчато до требуемого конечного значения. Для каждого значения $F/M(0)$ итерационным способом определяется оптимальная траектория, значения $\lambda_i(0)$ которой используются в качестве начальных приближений для расчета новой траектории, соответствующей следующей величине $F/M(0)$ ". Таким образом, в [79] для получения начальных значений сопряженных переменных в неимпульсном случае предлагается несколько изменить начальные значения сопряженных переменных, полученных в результате решения задачи в импульсной постановке. В [79] приведены таблицы, позволяющие оценить точность полученного начального приближения. Анализ таблиц показывает, что для решаемой задачи в начальном приближении, как правило, верен один первый знак. Для решения рассматриваемых в [79] задач такой точности начального приближения достаточно. Однако существуют задачи (см., например, [17, 18, 21, 22, 25, 38]), для решения значительной части которых точность начального приближения (при использовании собственной вычислительной схемы метода стрельбы) должна быть значительно увеличена.

В [60] при получении начального приближения для начальных значений $p_i(0)$ сопряженных переменных $p_i(t)$ используется связь этих начальных значений с производными экстремальных значений функционала по начальным значениям $x_i(0)$ фазовых переменных $x_i(t)$: $p_i(0) = -dJ_{extr}/dx_i(0)$ [64]. При этом неявно предполагается, что множитель Лагранжа при функционале J отличен от нуля: $\lambda_0 \neq 0$. Иными словами, предполагается, что аномальный случай: $\lambda_0 = 0$, невозможен, поскольку при $\lambda_0 = 0$ этот метод неприменим (при $\lambda_0 = 0$ решение задачи оптимизации "не зависит" от функционала J и поэтому "не зависят" от функционала значения $p_i(0)$). В связи с этим предлагаемый в [60] способ определения начальных значений $p_i(0)$, строго говоря, не корректен, так как использует в качестве условия нормировки множителей Лагранжа условие $\lambda_0 = 1$ и тем самым исключает возможность случая $\lambda_0 = 0$. Производные $dJ_{extr}/dx_i(0)$ находятся численно в результате решения, как минимум, двух оптимизационных задач импульсной постановки. Предполагается, что экстремальные значения функционалов J_{extr} и производные $dJ_{extr}/dx_i(0)$ в импульсном и неимпульсном случаях близки. Что вообще говоря неверно, так как решения задачи в импульсной постановке и с двигателем ограниченной тяги могут качественно различаться, см. пример [26].

Анализ решения задачи, рассмотренной в [60] в качестве примера (неоднократно рассматривавшейся ранее рядом авторов задачи минимизации характеристической скорости при перелете КА между компланарными круговыми орбитами с заданной угловой дальностью и не заданным заранее временем перелета), показал хорошее совпадение полученной траектории с ранее известными. Следует, однако, отметить, что данных для детальной оценки полученных приближений параметров пристрелки в [60] недостаточно.

Переход от решения краевой задачи импульсной постановки (с $P_{max} = \infty$) к решению краевой задачи неимпульсной постановки (при ограниченном P_{max}) состоит, как правило, из двух этапов — этапа перехода от решения краевой задачи с $P_{max} = \infty$ к решению краевой задачи при каком-либо конечном P_{max} и последующего этапа перехода к решению краевой задачи для заданного значения P_{max} (с использованием метода продолжения по параметру). Отличие различных методик друг от друга и, в частности, отличие рассматриваемой в данной работе методики от предшествующих методик состоит в способах организации таких переходов. При организации этих переходов используется характерная особенность оптимизационных задач перелётов КА с РДОТ — малая по сравнению с общей продолжительностью полёта продолжительность участков включения тяги. Учёт этой особенности является важным, если не определяющим, обстоятельством при выборе вычислительной схемы метода стрельбы. Заметим, что для задач, в которых эта особенность отсутствует, предлагаемая методика получения начального приближения неприменима (например, для задач о наискорейших перелётах при неограниченной заранее конечной массе, на траекториях которых тяга всегда включена и максимальна). Отметим, что учёт специфики задачи важен при решении краевых задач принципа максимума и в других классах задач оптимизации траекторий перелётов КА, например, в задачах оптимизации траекторий перелётов в вакууме КА с реактивным двигателем "малой" тяги [67], с солнечным парусом [35], а также в задачах оптимизации траекторий перелётов КА в атмосфере [76].

Анализ результатов решения задач оптимизации траекторий перелётов КА в импульсной и неимпульсной постановках показывает, что, как правило, экстремали в задачах оптимизации перелётов КА в импульсной постановке являются достаточно хорошим приближением экстремалей в соответствующих задачах оптимального управления перелётами КА с РДОТ. В то же время попытки использования решения задач оптимизации перелётов КА в импульсной постановке для определения экстремалей в задачах оптимального управления КА с РДОТ зачастую к успеху не приводят, что, в первую очередь, связано с использованием при решении краевой задачи лишь классической вычислительной схемы метода стрельбы, которая не учитывает специфику задачи. Лучшему пониманию возникающих проблем перехода от решения краевой задачи импульсной постановки к решению краевой задачи неимпульсной постановки способствует анализ поведения функции переключения $\chi(t)$ управления величиной тяги в задачах оптимизации траекторий перелёта КА с РДОТ: $\chi(t) = \rho(t) - m(t)p_m(t)/C$. (Входящая в $\chi(t)$ функция $\rho(t)$ — модуль вектора $\vec{p}_v(t)$, сопряженного вектору скорости КА: $\rho(t) = |\vec{p}_v(t)|$; $m(t)$ и $p_m(t)$ — относительная масса КА и соответствующая ей сопряженная переменная; C — скорость истечения реактивной струи (постоянная величина)).

Функция переключения в задаче импульсной постановки достигает своего максимума $\chi(t) = 0$ в точках приложения импульсных воздействий, в то время, как в задаче неимпульсной постановки функция переключения может быть как положительной, так и отрицательной на протяженных интервалах движения, что является принципиальным отличием. Если в задаче импульсной постановки пассивное движение может интегрироваться аналитически (например, движение в центральном ньютоновском поле в вакууме), то задача оптимизации может быть сведена к конечномерной задаче на условный экстремум и рассмотрение сопряженных переменных, а, следовательно, и функции переключения совсем не обязательно, в то время, как при неимпульсной постановке аналогичной задачи построение функции переключения является обязательным. Поэтому анализ особенностей решения краевой задачи, которые приносит с

собой функция переключения, во многом может объяснить возникающие трудности.

В задаче оптимизации траекторий перелета КА импульсной постановки следствием условий трансверсальности в начальный момент времени, при наличии импульсного воздействия, будет условие $\chi(0_+) = 0$ (при наличии в этот момент импульсного воздействия) [23]. В задаче оптимизации траекторий перелета КА с РДОТ функция $\chi(t)$ входит в условие оптимальности для величины тяги и определяет её поведение: при $\chi(t) > 0$ тяга максимальна, при $\chi(t) < 0$ — нулевая (случай $\chi(t) = 0$ при нахождении величины тяги порождает неопределенность и требует отдельного рассмотрения). Обращение в ноль функции переключения в изолированных точках (при смене её знака) определяет точки переключения тяги и одновременно точки разрыва правых частей системы дифференциальных уравнений движения КА. При решении задачи в импульсной постановке за начальным импульсным воздействием следует участок полёта с выключенной тягой, на котором при решении задачи в импульсной постановке функция переключения отрицательна: $\chi(t) < 0$. В связи с этим необдуманное использование начальных значений сопряженных переменных импульсной постановки в качестве начальных значений сопряженных переменных в задаче неимпульсной постановки может привести к тому, что функция переключения в начальный момент времени обратится в ноль и затем на участке траектории полёта КА с выключенной тягой останется отрицательной: $\chi(t) < 0$. Вследствие этого в момент старта КА с РДОТ тяга не включается, и потому выбранное начальное приближение оказывается непригодным для решения краевой задачи принципа максимума в задаче оптимального управления КА с РДОТ. Для улучшения начального приближения параметры пристрелки (сопряженные переменные) для неимпульсного случая необходимо выбрать так, чтобы включение тяги произошло. Подобная проблема возникает и на траекториях с импульсными воздействиями в промежуточные моменты времени: функция $\chi(t)$ на таких траекториях достигает своего максимального значения $\chi(t) = 0$ в отдельных точках (точках приложения импульсных воздействий), и при переходе к решению задачи оптимизации траекторий перелета КА с РДОТ при тех же значениях фазовых и сопряженных переменных промежуточных включений тяги не происходит, вследствие чего приближение оказывается плохим. Для улучшения начального приближения параметры пристрелки (сопряженные переменные) необходимо выбрать так, чтобы включение тяги произошло и промежуточный участок траектории полёта КА с РДОТ с включенной тягой соответствовал по продолжительности включения тяги и её ориентации промежуточному импульсному воздействию. Таким образом, очевидно, что решение задачи импульсной постановки является хорошим начальным приближением только для пассивных участков и будет более правильным использовать импульсное решение в качестве начального приближения для сопряженных переменных в моменты начала и(или) окончания пассивных участков. Это приводит к идее использовать метод многоточечной пристрелки, что позволит полнее использовать импульсное решение для построения начального приближения решения неимпульсной задачи, т.к. вместо данных в одной точке (точке старта — момента первого импульса) при этом используются значения переменных в точках начала и окончания пассивных участков. Это позволит также исключить недостаток двухточечной схемы, связанный с тем, что для начала активного участка (первого активного участка) используется начальное приближение построенное на основе значений сопряженных переменных соответствующих началу пассивного участка.

Необходимость вычисления функции переключения и нахождения её нулей в процессе решения задачи Коши создаёт значительные трудности. На приведенной блок-схеме (см. рис. 2) вычисление функции переключения находится на самом нижнем

уровне и влияет на сходимость всего метода в целом. Дело в том, что нули функции переключения (точки переключения тяги и точки разрыва первого рода для правых частей системы ДУ) вычисляются численно с некоторой вычислительной погрешностью.

Пусть τ — точное значение точки переключения, а τ' — её численное приближение (см. рис. 3).

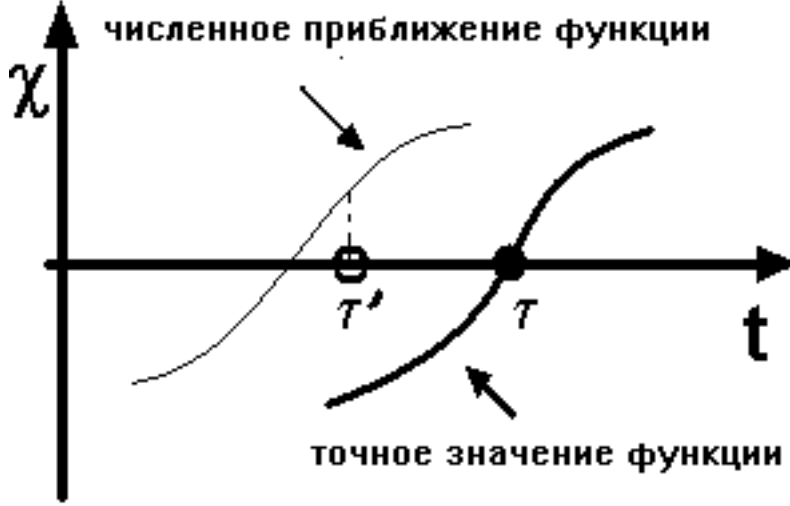


Рис. 3: Точное значение и численное приближение нуля функции переключения.

Из-за вычислительной погрешности определения точек переключения на интервале $(\tau'; \tau)$ управление $P(t)$ и, следовательно, правые части дифференциальных уравнений, содержащих управление $P(t)$, вычисляются неточно. Справедливо

Утверждение 1.1 [78, стр.66] Пусть для задачи Коши

$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$, и её численного решения $v(x)$ справедливы оценки:

$$\mu\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \nu)\right) \leq l(x), \quad \nu \in [y(x), v(x)],$$

$$\|v'(x) - f(x, v(x))\| \leq \delta(x), \quad \|v(x_0) - y(x_0)\| \leq \rho,$$

где $\mu(A) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{\|E + hA\| - 1}{h}$ — логарифмическая норма матрицы $A \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$, (наибольшее собственное значение матрицы $(A^T + A)/2$).

тогда при $x > x_0$ имеет место оценка:

$$\|y(x) - v(x)\| \leq e^{L(x)}\left(\rho + \int_{x_0}^x e^{-L(s)} \delta(s) ds\right),$$

где $L(x) = \int_{x_0}^x l(s) ds$.

Таким образом, при численном определении точки переключения управления $P(t)$ из условий оптимальности (10) оценка глобальной вычислительной ошибки решения задачи Коши увеличивается на $e^{L(x)} \int_{x_0}^x e^{-L(s)} \delta(s) ds$, и эта оценка затем экспоненциально возрастает. В рассматриваемых задачах эта оценка достигается. Наличие большого количества точек переключения и большая продолжительность перелета могут привести (и приводят) к практической невозможности решать задачу Коши с требуемой для решения краевой задачи точностью.

Численное интегрирование задачи Коши на всей протяженности активных и пассивных участков накапливает значительную вычислительную ошибку, что также влияет на сходимость всего метода стрельбы.

1.3 Вычислительная схема численного решения задачи

Указанные сложности решения задач оптимизации многовитковых перелетов КА с РДОТ показывают, что для решения этих задач надо модифицировать не только способ построения начального приближения, но и вычислительную схему.

В данной работе предлагается вычислительная схема решения краевых задач принципа максимума при оптимизации многовитковых перелетов КА. Характерные особенности этой вычислительной схемы следующие:

- 1) вся траектория разбивается на фиксированную последовательность активных и пассивных участков;
- 2) в вектор параметров пристрелки включаются все фазовые и сопряженные переменные в точках переключения тяги, а также продолжительности активных и пассивных участков (используется аналог метода многоточечной пристрелки), а в вектор-функцию невязок — соответствующие этим новым параметрам пристрелки условия стыковки участков траектории и условия переключения тяги;
- 3) при интегрировании задачи Коши считается, что на активных участках тяга всюду включена, а на пассивных — выключена, то есть управление по величине тяги задается, а не выбирается из условий оптимальности.

Такая схема позволяет избежать разрывов частных производных вектор-функции невязок по начальным значениям сопряженных переменных и избавляет от необходимости численного определения точек переключения тяги. При этом вычислительная ошибка определения нулей функции переключения переносится в погрешность определения нулей вектор-функции невязок и не накапливается при решении задачи Коши. Задача Коши решается на участках между точками переключения тяги отдельно, а не на всей протяженности перелета сразу. При этом глобальная вычислительная ошибка метода решения задачи Коши накапливаемая на каждом участке также переносится в погрешность определения нулей вектор-функции невязок, а не продолжает накапливаться при интегрировании последующих участков. Всё это позволяет заметно уменьшить вычислительную ошибку (одну вычислительную погрешность разделить на несколько меньших) и получить достаточную для сходимости метода Ньютона точность вычисления компонент вектор-функции невязок.

Недостатком такого подхода является то, что необходимо фиксировать структуру траектории и искать экстремали Понтрягина только в классе решений фиксированной структуры. Поэтому на построенных решениях необходимо проверять условие того, что оно является решением исходной краевой задачи. В нашем случае достаточно проверить условие оптимальности по управлению величиной тяги, т.к. предложенная модификация не проверяет только это условие. Количество возможных структур ограничено (в первую очередь из-за ограничения времени перелета), и достаточно построить только некоторые из них. В итоге, с использованием селекции решений по функционалу, выбирается экстремаль наиболее выгодной структуры.

Размерность вектора параметров пристрелки и вектор-функции невязок при использовании этой схемы возрастает во много раз. Следует, однако, отметить, что матрица производных имеет блочный вид. При её построении необходимо решать задачу

Коши всего несколько раз на каждом участке. Количество переменных, для которых требуется найти начальное приближение увеличилось, что должно было бы усложнить задачу, так как требуется "угадать" большее количество величин. Однако в предлагаемой вычислительной схеме это оказывается преимуществом. Так как одновременно предлагается алгоритм построения начального приближения на основании решения задачи в импульсной постановке. В силу того, что начальное приближение строится не только для точки старта, но и для всех точек переключения тяги, решение задачи в импульсной постановке используется более полно. При этом значения сопряженных переменных при построении начального приближения берутся равными соответствующим значениям сопряженных переменных в задаче импульсной постановки **без каких-либо изменений** (см. например, формулы построения начального приближения в главах 2 и 3). Таким образом удастся решить самую сложную проблему — проблему построения начального приближения. В целом же в работе одновременно решаются взаимосвязанные проблемы выбора эффективной вычислительной схемы и выбора хорошего начального приближения (вычислительная схема считается эффективной, а начальное приближение — хорошим, если они позволяют решить задачу за приемлемое время).

Рассмотрим приложение предложенной схемы к решению задач оптимизации многовитковых перелётов КА между круговыми орбитами ИСЗ.

Верхняя грань m_{max} конечной массы КА, соответствующая решению задачи в импульсной постановке, для перелета КА с РДОТ является точной: $m_{max} \equiv \sup m(T)$, и достигается на минимизирующей функционал $(1 - m(T))$ последовательности — "циклическом скользящем режиме", представляющем собой бесконечную последовательность переходных квазиэллиптических орбит (циклов) с включениями ограниченной тяги на малое время в окрестностях точек приложения импульсов [50, 28, 29]. Так как тяга ограничена, а времена её включений малы — время перелета будет сколь угодно велико.

Бесконечно долгие перелёты не представляют большого интереса для практики. Целью данной работы является построение приближающих импульсное решение многовитковых траекторий перелётов КА, время перелета по которым (а потому число витков вокруг Земли и число активных участков) ограничено. Для этого при решении задачи оптимизации перелета КА с РДОТ импульсные воздействия, полученные в результате решения задачи оптимизации в импульсной постановке, реализуются за ограниченное количество включений двигателя в окрестности точек приложения импульсов.

Определение. Структурой траектории будем называть последовательность чисел (a_1, a_2, \dots, a_n) , где n — количество импульсов в оптимальном импульсном решении, a_i — количество включений двигателя, за которое реализуется i -й импульс. При этом активные участки, соответствующие $i+1$ импульсу, начинаются только после последнего активного участка, соответствующего i -му импульсу.

Построив n -импульсное решение задачи импульсной постановки, можно разбить каждый i -й импульс на a_i число импульсов. При этом получится $\sum_{i=1}^n a_i$ - импульсное решение, которое берётся за начальное приближение вектора параметров пристрелки в новой вычислительной схеме. Продолжительности пассивных участков вычисляются как периоды обращения по соответствующим кеплеровским орбитам. Продолжительности активных участков вычисляются из расходного дифференциального уравнения для массы $\dot{m} = -P/C$. Начальное приближение для значений сопряженных переменных полагается равным соответствующим значениям сопряженных переменных в n -импульсном решении. В рассматриваемых в данной работе задачах

такой точности начального приближения оказывается достаточно и решать краевую задачу в импульсной постановке (для построения $\sum_{i=1}^n a_i$ - импульсного решения) не требуется. Отметим, что в других, возможно более сложных, задачах можно воспользоваться этим "резервом" и для построения начального приближения сопряженных переменных решить краевую задачу для построения $\sum_{i=1}^n a_i$ - импульсного решения.

Схематично построение начального приближения показано на рис. 4:

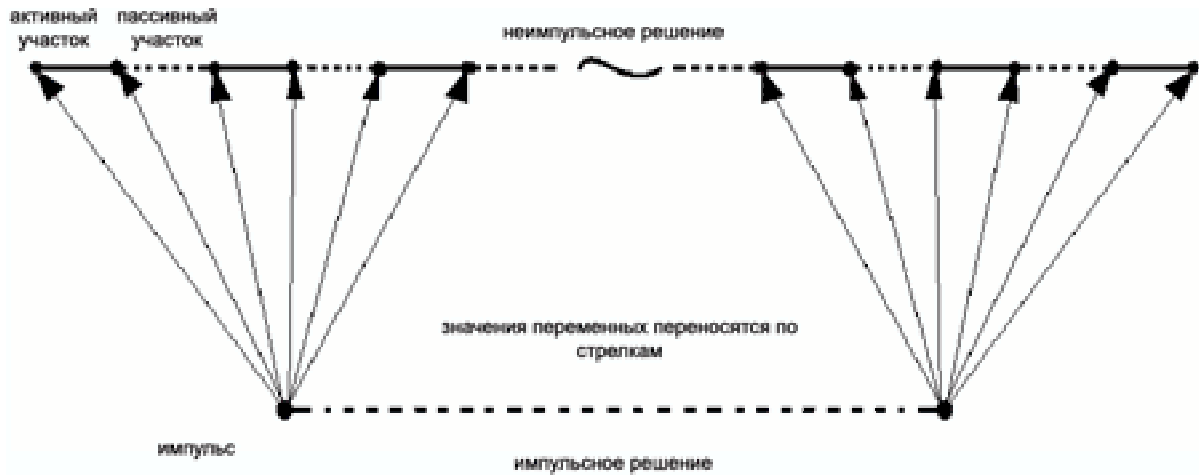


Рис. 4: Схема построения начального приближения.

1.4 Особые управления

При оптимизации перелетов КА с РДОТ возможно появление участков особого управления, то есть участков, на которых управление не определяется однозначно из необходимых условий оптимальности. Построение траекторий с участками особого управления и исследование их оптимальности представляет собой отдельную сложную задачу. В рассматриваемых в данной работе задачах оптимизации межорбитальных перелетов можно показать отсутствие участков особого управления по направлению вектора тяги. Отсутствие участков особого управления по величине тяги $P(t)$ удастся показать в задаче быстрогодействия и в задаче на минимум расхода массы без ограничений на время перелета [16, 17]. В общем случае доказать отсутствие оптимальных траекторий с участками особого управления по величине тяги не удастся. Исследование оптимальности траекторий с участками особого управления требует рассмотрения условий высших порядков, например, условия Келли или Коппа-Мойера, а также возможных способов стыковки особых и неособых участков [14].

Заметим, что при использовании предложенной модифицированной вычислительной схемы нельзя построить траектории с участками ненулевого особого управления. Впрочем, использование классической вычислительной схемы метода стрельбы к успеху также не приведет [20, 73].

2 Задача оптимизации многовитковых межорбитальных перелётов между круговыми компланарными орбитами ИСЗ

2.1 Постановка задачи

В качестве первого примера приложения предложенной методики рассматривается задача оптимального управления многовитковыми перелетами КА между круговыми компланарными орбитами ИСЗ. Управление осуществляется посредством вектора тяги реактивного двигателя ограниченной тяги. Минимизируются затраты массы при ограниченном времени перелета.

Плоское движение центра масс одноступенчатого КА переменной массы с реактивным двигателем ограниченной тяги в центральном ньютоновском гравитационном поле одного притягивающего центра в вакууме при управлении вектором тяги описывается в связанной с притягивающим центром полярной системе координат дифференциальными уравнениями [27]:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= -P/C, \quad \dot{r} = u, \quad \dot{\varphi} = v/r, \\ \dot{u} &= (P \cos \theta)/m + v^2/r - \mu/r^2, \quad \dot{v} = (P \sin \theta)/m - uv/r. \end{aligned} \quad (17)$$

При решении задачи рассматривается математическая модель описания управляемого движения центра масс КА, в которой фазовые переменные $m(t)$, $r(t)$, $\varphi(t)$, $u(t)$, $v(t)$ — непрерывные кусочно-гладкие функции, удовлетворяющие на участках непрерывности управляющих функций (управлений) $P(t)$, $\theta(t)$ системе (17), а функции $P(t)$, $\theta(t)$ — кусочно-непрерывные ограниченные:

$$0 \leq P(t) \leq P_{max} < \infty, \quad 0 \leq \theta(t) < 2\pi \quad \forall t \in [0, T]. \quad (18)$$

В начальный момент времени $t = 0$ КА движется по начальной круговой орбите ИСЗ радиуса R_0 с орбитальной скоростью $V_0 \equiv \sqrt{\mu/R_0}$ (учитывая, что орбиты круговые, точку старта без ограничения общности можно фиксировать):

$$m(0) = 1, \quad r(0) = R_0, \quad \varphi(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = V_0. \quad (19)$$

В конечный заранее не фиксированный момент времени $t = T$ КА должен двигаться по конечной круговой орбите ИСЗ радиуса R_T с орбитальной скоростью $V_T \equiv \sqrt{\mu/R_T}$ (угловое положение $\varphi(T)$ КА при этом нефиксировано):

$$r(T) = R_T, \quad u(T) = 0, \quad v(T) = V_T. \quad (20)$$

Общее время перелета ограничено:

$$T \leq T^*. \quad (21)$$

Минимизируются затраты массы $(1 - m(T))$ или эквивалентный им функционал:

$$I = -m(T) \rightarrow \inf. \quad (22)$$

2.2 Условия принципа максимума

Задача (17)-(22) представляет собой задачу оптимального управления и решается на основе принципа максимума Понтрягина [3, 15, 69]. Функция Понтрягина \mathcal{H} и терминант l задачи имеют вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(m, r, \varphi, u, v, P, \theta, p_m, p_r, p_\varphi, p_u, p_v) &\equiv -p_m P/C + p_r u + p_\varphi v/r + \\ &+ p_u((P \cos \theta)/m + v^2/r - \mu/r^2) + p_v((P \sin \theta)/m - uv/r), \\ l &\equiv \lambda_0(-m(T)) + \lambda_{m0}(m(0) - 1) + \\ &+ \lambda_{r0}(r(0) - R_0) + \lambda_{\varphi 0}\varphi(0) + \lambda_{u0}u(0) + \lambda_{v0}(v(0) - V_0) + \\ &+ \lambda_{rT}(r(T) - R_T) + \lambda_{uT}u(T) + \lambda_{vT}(v(T) - V_T) + \lambda_T(T - T^*),\end{aligned}\tag{23}$$

где непрерывные кусочно-гладкие функции (сопряженные переменные) $p_i(t)$ ($i = m, r, \varphi, u, v$) и числа $\lambda_0, \lambda_T, \lambda_{i0}$ ($i = m, r, \varphi, u, v$), λ_{iT} ($i = r, u, v$) — множители Лагранжа.

Условия принципа максимума для рассматриваемой задачи.

- Уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряженная система: $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial i}$, $i = m, r, \varphi, u, v$):

$$\begin{aligned}\dot{p}_m &= P(p_u \cos \theta + p_v \sin \theta)/m^2, \\ \dot{p}_r &= p_\varphi v/r^2 + p_u(v^2/r^2 - 2\mu/r^3) - p_v uv/r^2, \\ \dot{p}_\varphi &= 0, \\ \dot{p}_u &= -p_r + p_v v/r, \\ \dot{p}_v &= -p_\varphi/r - p_u 2v/r + p_v u/r.\end{aligned}\tag{24}$$

- Условия трансверсальности по фазовым переменным ($p_i(0) = \frac{\partial l}{\partial i(0)}$, $p_i(T) = -\frac{\partial l}{\partial i(T)}$, $i = m, r, \varphi, u, v$):

$$\begin{aligned}p_m(0) &= \lambda_{m0}, \quad p_r(0) = \lambda_{r0}, \quad p_\varphi(0) = \lambda_{\varphi 0}, \\ p_u(0) &= \lambda_{u0}, \quad p_v(0) = \lambda_{v0};\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}p_m(T) &= \lambda_0, \quad p_r(T) = -\lambda_{rT}, \quad p_\varphi(T) = 0, \\ p_u(T) &= -\lambda_{uT}, \quad p_v(T) = -\lambda_{vT}.\end{aligned}\tag{26}$$

- Условие стационарности по T ($\mathcal{H}(T) = \frac{\partial l}{\partial T}$):

$$\mathcal{H}(T) = \lambda_T.\tag{27}$$

- Условия оптимальности по управлениям:

$$\{P, \theta\}_{opt} = \arg \max_{P \in [0, P_{max}], \theta \in [0, 2\pi]} \mathcal{H}(\dots, P, \theta, \dots);\tag{28}$$

следствия условий оптимальности (28):

$$\begin{aligned}(\cos \theta, \sin \theta)_{opt} &= \begin{cases} (p_u/\rho, p_v/\rho), & \rho \neq 0 \text{ и } \chi \geq 0, \\ (\cos \theta, \sin \theta) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi), & \rho = 0 \text{ или } \chi < 0; \end{cases} \\ P_{opt} &= \begin{cases} P_{max}, & \chi > 0, \\ 0, & \chi < 0, \\ \forall P \in [0, P_{max}], & \chi = 0; \end{cases}\end{aligned}\tag{29}$$

$\chi \equiv \rho - mp_m/C$ — функция переключения управления P , $\rho \equiv \sqrt{p_u^2 + p_v^2}$.

- Условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_T(T - T^*) = 0. \quad (30)$$

- Условия неотрицательности:

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_T \geq 0. \quad (31)$$

- Условие НЕРавенства Одновременно Нулю всех множителей Лагранжа (условие НЕРОН):

$$\sum_{i=r,\varphi,u,v,m} (\|p_i\|_C + |\lambda_{i0}|) + \sum_{i=r,u,v} |\lambda_{iT}| + \lambda_0 + \lambda_T \neq 0. \quad (32)$$

- Условие нормировки множителей Лагранжа:

$$p_r^2(0) + p_u^2(0) + p_v^2(0) = 1. \quad (33)$$

2.3 Краевая задача

Соотношения (17)-(20), (23)-(33) представляют собой краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (краевую задачу принципа максимума). Неизвестными в ней являются 10 постоянных интегрирования её системы дифференциальных уравнений (17), (24), время перелета T и числовые множители Лагранжа $\lambda_0, \lambda_T, \lambda_{i0}$ ($i = m, r, \varphi, u, v$), λ_{iT} ($i = r, u, v$) — всего 21 неизвестное. Для их определения имеется 21 условие — 8 краевых условий (19), (20); 10 условий трансверсальности (25), (26); условие стационарности (27); условие дополняющей нежесткости 30 и условие нормировки (33), связанное с однородностью функции Лагранжа по множителям Лагранжа, позволяющей выбирать множители Лагранжа с точностью до положительного сомножителя.

2.4 Анализ краевой задачи

Утверждение 2.1 *Выбор нормировки в виде $p_r^2(0) + p_u^2(0) + p_v^2(0) = 1$ корректен.*

Доказательство. Обращение в ноль суммы $p_r^2(0) + p_u^2(0) + p_v^2(0)$ влечет за собой равенство нулю значений $p_r(0), p_u(0), p_v(0)$. Так как $p_\varphi(T) = 0$ и $\dot{p}_\varphi = 0$, то и $p_\varphi(0) = 0$. Последние четыре уравнения из системы (24) отделяются и образуют систему линейных ОДУ с переменными коэффициентами. Решение задачи Коши для данной системы, с нулевыми начальными значениями пересекает в точке $t = 0$ нулевое решение и по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных уравнений [65] совпадает с ним. Таким образом $p_r(t) \equiv p_\varphi(t) \equiv p_u(t) \equiv p_v(t) \equiv 0, t \in [0; T]$. Что также влечет за собой тождество $p_m(t) \equiv \text{const}$. Причем в силу условий неотрицательности (31) и трансверсальности (26) $p_m(t) \equiv \text{const} \geq 0$. Из условий оптимальности (29) следует, что включение тяги (а, следовательно, и перелёт) возможно только если $p_m(t) \equiv 0$. Из условий трансверсальности (25)-(26) следует, что все множители Лагранжа обращаются в ноль, что противоречит условию НЕРОН (32) [21]. Таким образом, выбор указанной нормировки правомерен.

Из рассмотрения можно исключить все скалярные множители Лагранжа и краевая задача будет иметь следующий вид:

- система ОДУ — (17), (24);
- неизвестные:

$$r(0), \varphi(0), u(0), v(0), m(0), p_r(0), p_\varphi(0), p_u(0), p_v(0), p_m(0), T;$$

- условия:

$$\begin{aligned} m(0) = 1, \quad r(0) = R_0, \quad \varphi(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = V_0, \\ r(T) = R_T, \quad u(T) = 0, \quad v(T) = V_T, \\ p_\varphi(T) = 0, \quad p_r^2(0) + p_u^2(0) + p_v^2(0) = 1, \\ H(T) = 0, \text{ если ограничение по времени не активно,} \\ \text{или} \\ T - T^* = 0, \text{ если ограничение по времени активно;} \end{aligned} \quad (34)$$

- управления P , θ в каждый момент времени определяются из условий оптимальности (29).

В результате решения краевой задачи определяются удовлетворяющие необходимым условиям локальной оптимальности (условиям принципа максимума) экстремальные траектории перелета КА (экстремали Понтрягина).

2.5 Вычислительная схема решения краевой задачи

В задачах оптимизации импульсной постановки при перелетах между круговыми компланарными орбитами, соотношение радиусов (R_T/R_0) которых меньше 11.94, оптимальным является двухимпульсный гомановский перелёт. В данной работе рассматриваются орбиты с отношением радиусов менее 11.94 (например для ГСО это соотношение около 6.7), поэтому получаемые экстремали приближают двухимпульсный перелёт (первый импульс сообщается КА в перицентре исходной орбиты, второй — в апоцентре переходной орбиты). Подробнее про оптимальность двух- и трехимпульсных перелетов см. [63].

Определение. Структурой многовитковой траектории в рассматриваемом случае называется пара чисел $a - b$, где a — количество активных участков в окрестности перицентра, b — в окрестности апоцентра. При этом сначала все включения двигателя происходят в окрестности перицентра, а потом апоцентра.

На первом этапе построения решений краевой задачи осуществляется переход от импульсного решения к решению краевой задачи в случае неактивного ограничения времени перелета ($T < T^*$). Следуя предложенной вычислительной схеме, в вектор параметров пристрелки включаются все фазовые и сопряженные переменные в начале всех активных и пассивных участков, а также продолжительности активных и пассивных участков:

$$r_j, \varphi_j, u_j, v_j, m_j, p_{rj}, p_{\varphi j}, p_{uj}, p_{vj}, p_{mj}, T_j, \quad j = \overline{0, 2(a+b-1)}. \quad (35)$$

В вектор-функцию невязок включаются краевые условия, условия стыковки участков траектории и задаваемые равенствами $\chi_j(T_j) = 0$ условия переключения тяги:

$$r_0(0) - R_0 = 0, \quad \varphi_0(0) = 0, \quad u_0(0) = 0, \quad v_0(0) - V_0 = 0, \quad m_0(0) - 1 = 0, \quad (36)$$

$$p_{r0}^2(0) + p_{u0}^2(0) + p_{v0}^2(0) - 1 = 0; \quad (37)$$

$$\alpha_j(T_j) - \alpha_{j+1}(0) = 0 \quad (\alpha = r, \varphi, u, v, m, p_r, p_\varphi, p_u, p_v, p_m), \quad (38)$$

$$\chi_j(T_j) \equiv \sqrt{p_{uj}^2(T_j) + p_{vj}^2(T_j)} - m_j(T_j)p_{mj}(T_j)/C = 0, \quad j = 0, 2(a+b-1)-1;$$

$$\begin{aligned} r_j(T_j) - R_T = 0, \quad u_j(T_j) = 0, \quad v_j(T_j) - V_T = 0, \\ p_{\varphi j}(T_j) = 0, \quad H_j(T_j) = 0, \quad j = 2(a+b-1). \end{aligned} \quad (39)$$

Условия (36), (37) — условия в начале траектории, (37) — условие нормировки; (38) — условия стыковки участков траектории и условия переключения тяги ($\chi = 0$) в моменты стыковки участков (так как активные и пассивные участки чередуются); (39) — условия в конце траектории. Время на каждом участке отсчитывается заново ($t_j \in [0; T_j]$). Общее время перелета вычисляется как сумма продолжительностей всех участков $T = \sum_{j=0}^{2(a+b-1)-1} T_j$. Предполагается, что на четных (пассивных) участках тяга выключена, на нечетных (активных) участках тяга включена и максимальна ($P = P_{\max}$), её направление при этом определяется из условия оптимальности (29). На всех полученных с помощью такой вычислительной схемы траекториях проверяется условие оптимальности по управлению $P(t)$ (29). Условия (36) можно было бы исключить из вектор-функции невязок вместе с соответствующими компонентами из вектора параметров пристрелки. Влияния на сходимость метода Ньютона это не оказывает, и условия (36) приведены здесь для общности.

Размерность вектора параметров пристрелки и вектор-функции невязок, при использовании такой схемы, возрастает до $22(a+b)-11$. Следует отметить, что матрица производных имеет блочный вид и при её построении в виде конечных разностей необходимо решать задачу Коши не более 11 раз на каждом участке.

Начальное приближение для вектора параметров пристрелки получается на основании решения задачи в импульсной постановке. Пусть в результате решения краевой задачи для соответствующей задачи оптимизации в импульсной постановке (условие нормировки в задаче импульсной постановки берётся совпадающим с условием нормировки в исходной краевой задаче: $p_{r(\text{imp}0)}^2 + p_{u(\text{imp}0)}^2 + p_{v(\text{imp}0)}^2 = 1$) построена двухимпульсная гомановская траектория и определены:

$$r_{\text{imp}0} = R_0, \quad \varphi_{\text{imp}0} = 0, \quad u_{\text{imp}0} = 0, \quad v_{\text{imp}0} = V_0 + \Delta V_0, \quad m_{\text{imp}0} = e^{-\Delta V_0/C},$$

$$p_r(\text{imp}0), \quad p_\varphi(\text{imp}0) = 0, \quad p_u(\text{imp}0), \quad p_v(\text{imp}0), \quad p_m(\text{imp}0);$$

$$r_{\text{imp}1} = R_T, \quad \varphi_{\text{imp}1} = \pi, \quad u_{\text{imp}1} = 0, \quad v_{\text{imp}1} = V_T - \Delta V_1, \quad m_{\text{imp}1} = e^{-\Delta V_0/C},$$

$$p_r(\text{imp}1), \quad p_\varphi(\text{imp}1) = 0, \quad p_u(\text{imp}1), \quad p_v(\text{imp}1), \quad p_m(\text{imp}1), \quad —$$

значения фазовых и сопряженных переменных в начале и конце этой траектории, $\Delta V_0, \Delta V_1$ — величины первого и второго импульсов. Признаком гомановского перелета является сонаправленность векторов импульсов $\Delta \vec{V}_0, \Delta \vec{V}_1$ и векторов скоростей КА на начальной и конечной круговой орбитах (импульсы скорости осуществляются в перигеентре и апоцентре переходной эллиптической орбиты), $\Delta V_0 = V_0(\sqrt{2R_T/(R_T + R_0)} - 1)$, $\Delta V_1 = V_T(1 - \sqrt{2R_0/(R_T + R_0)})$ [63]. Начальное приближение для решения исходной краевой задачи получается по формулам (для удобства записи формул вместо индекса j использован индекс i ; при этом $j = 2i$ соответствует началу i -го активного участка, $j = 2i + 1$ — началу i -го пассивного участка):

$$r_{2i} = r_{2i+1} = r_{\text{imp}0}, \quad \varphi_{2i} = \varphi_{2i+1} = 2\pi i, \quad u_{2i} = u_{2i+1} = 0 \quad (i = \overline{0, a-1})$$

(соотношения показывают, что активные и пассивные участки начинаются в перицентре, угол φ возрастает на 2π после каждого пассивного участка);

$$v_{2i} = V_0 + i\Delta V_0/a, \quad v_{2i+1} = V_0 + \Delta V_0(i+1)/a \quad (i = \overline{0, a-1})$$

(трансверсальная составляющая вектора скорости после активного участка возрастает на $\Delta V_0/a$);

$$p_{r2i} = p_{r2i+1} = p_{r(imp0)}, \quad p_{\varphi 2i} = p_{\varphi 2i+1} = 0, \quad p_{u2i} = p_{u2i+1} = p_{u(imp0)},$$

$$p_{v2i} = p_{v2i+1} = p_{v(imp0)}, \quad p_{m2i} = p_{m2i+1} = p_{m(imp0)} \quad (i = \overline{0, a-1})$$

(сопряженные переменные в начале каждого участка полагаются равными соответствующим сопряженным переменным из решения задачи в импульсной постановке);

$$m_{2i} = e^{-i\Delta V_0/aC}, \quad m_{2i+1} = e^{-(i+1)\Delta V_0/aC}, \quad T_{2i} = C(m_{2i+1} - m_{2i})/P_{max} \quad (i = \overline{0, a-1})$$

(масса после активного участка вычисляется по формуле Циолковского, продолжительность активного участка вычисляется из расходного дифференциального уравнения для массы ($\dot{m} = -P/C$));

$$T_{2i+1} = \frac{2\pi r_{2i+1}^{3/2}}{\sqrt{\mu}(2 - v_{2i+1}^2/V_0^2)^{3/2}} \quad (i = \overline{0, a-2})$$

(продолжительности пассивных участков равны периодам обращения по соответствующим кеплеровским орбитам);

$$T_{2i+1} = \frac{\pi r_{2i+1}^{3/2}}{\sqrt{\mu}(2 - v_{2i+1}^2/V_0^2)^{3/2}} \quad (i = a-1)$$

(продолжительность пассивного участка перед началом включений в окрестности апоцентра равна, соответственно, половине периода обращения).

По аналогичной схеме получается начальное приближение для участков в окрестности апоцентра:

$$r_{2i} = r_{2i+1} = r_{imp1}, \quad \varphi_{2i} = \varphi_{2i+1} = 2\pi i - \pi, \quad u_{2i} = u_{2i+1} = 0,$$

$$v_{2i} = V_T - (a+b-i)\Delta V_1/b, \quad v_{2i+1} = V_T - \Delta V_1(a+b-i-1)/b,$$

$$p_{r2i} = p_{r2i+1} = p_{r(imp1)}, \quad p_{\varphi 2i} = p_{\varphi 2i+1} = 0, \quad p_{u2i} = p_{u2i+1} = p_{u(imp1)},$$

$$p_{v2i} = p_{v2i+1} = p_{v(imp1)}, \quad p_{m2i} = p_{m2i+1} = p_{m(imp1)},$$

$$m_{2i} = m_{2a-1}e^{-(i-a)\Delta V_1/bC}, \quad m_{2i+1} = m_{2a-1}e^{-(i+1-a)\Delta V_1/bC},$$

$$T_{2i} = C(m_{2i+1} - m_{2i})/P_{max}, \quad T_{2i+1} = \frac{2\pi r_{2i+1}^{3/2}}{\sqrt{\mu}(2 - v_{2i+1}^2/V_T^2)^{3/2}} \quad (i = \overline{a, a+b-2});$$

$$r_{2i} = r_{imp1}, \quad \varphi_{2i} = 2\pi i - \pi, \quad u_{2i} = 0, \quad v_{2i} = V_T - (a+b-i)\Delta V_1/b,$$

$$p_{r2i} = p_{r(imp1)}, \quad p_{\varphi 2i} = 0, \quad p_{u2i} = p_{u(imp1)}, \quad p_{v2i} = p_{v(imp1)}, \quad p_{m2i} = p_{m(imp1)},$$

$$m_{2i} = m_{2a-1}e^{-(i-a)\Delta V_1/bC}, \quad T_{2i} = C(m_{2i+1} - m_{2i})/P_{max} \quad (i = a+b-1).$$

Отметим, что для получения решения, используемого в качестве начального приближения, большому радиусу конечной орбиты должна соответствовать большая величина начальной тяговооруженности. Это связано с тем, что тяга двигателя должна выбираться так, что бы приблизить импульсное воздействие.

Для построения решений при активном ограничении на время перелета (третий этап исследования задачи) применяется приведенная выше вычислительная схема, в которой в условиях (39) вместо $H_j(T_j) = 0$ ($j = 2(a+b-1)$) используется условие $\sum_{j=0}^{2(a+b-1)} T_j - T^* = 0$.

3 Задача оптимизации многовитковых межорбитальных перелётов между некомпланарными круговыми орбитами ИСЗ

3.1 Постановка задачи

Задача оптимизации перелета между круговыми некомпланарными орбитами ИСЗ является более интересной и сложной. Точку старта в такой задаче следует оптимизировать. Изменение наклона орбиты может потребовать не меньших затрат топлива, чем увеличение радиуса апоцентра или перицентра орбиты, чего было достаточно в двухмерном случае. Вместе с увеличением размерности системы ДУ это создает дополнительные трудности при решении этой задачи. При перелетах между некомпланарными круговыми орбитами необходимо рассматривать многовитковые траектории, приближающие не только двух-импульсные решения, но и трех-импульсные. Анализ областей оптимальности двух- и трех- импульсных решений см., например, в [63].

Движение центра масс одноступенчатого КА переменной массы с реактивным двигателем ограниченной тяги в центральном ньютоновском гравитационном поле одного притягивающего центра в вакууме при управлении вектором тяги описывается в связанной с притягивающим центром сферической системе координат дифференциальными уравнениями [27]:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= -P/C, \\ \dot{r} &= u, \\ \dot{\psi} &= v/r, \\ \dot{\varphi} &= w/r \cos \psi, \\ \dot{u} &= (P \cos \theta \cos \gamma)/m + v^2/r + w^2/r - \mu/r^2, \\ \dot{v} &= (P \sin \theta \cos \gamma)/m - uv/r - w^2 \operatorname{tg} \psi/r, \\ \dot{w} &= (P \sin \gamma)/m - uw/r + vw \operatorname{tg} \psi/r. \end{aligned} \quad (40)$$

При решении задачи рассматривается математическая модель описания управляемого движения центра масс КА, в которой фазовые переменные $m(t)$, $r(t)$, $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ — непрерывные кусочно-гладкие функции, удовлетворяющие на участках непрерывности управляющих функций (управлений) $P(t)$, $\theta(t)$, $\gamma(t)$ системе (40), а функции $P(t)$, $\theta(t)$, $\gamma(t)$ — кусочно-непрерывные ограниченные:

$$0 \leq P(t) \leq P_{\max} < \infty, \quad 0 \leq \theta(t) < 2\pi, \quad -\pi/2 < \gamma(t) < \pi/2 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (41)$$

В начальный момент времени $t = 0$ КА движется по начальной круговой орбите ИСЗ заданного наклона i , радиуса R_0 , с орбитальной скоростью $V_0 \equiv \sqrt{\mu/R_0}$:

$$\begin{aligned} m(0) &= 1, \quad r(0) = R_0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = V_0 \cos \varphi(0) \sin i, \\ w^2(0) + v^2(0) &= V_0^2, \quad \cos \psi(0) \sin \varphi(0) \sin i - \sin \psi(0) \cos i = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

В конечный заранее не фиксированный момент времени $t = T$ КА должен двигаться по конечной круговой орбите ИСЗ нулевого наклона, радиуса R_T , с орбитальной скоростью $V_T \equiv \sqrt{\mu/R_T}$ (угловое положение $\varphi(T)$ не фиксировано):

$$r(T) = R_T, \quad u(T) = 0, \quad v(T) = 0, \quad w(T) = V_T, \quad \psi(T) = 0. \quad (43)$$

При этом общее время перелета ограничено:

$$T \leq T^*. \quad (44)$$

Минимизируются затраты массы $(1 - m(T))$ или эквивалентный им функционал:

$$I = -m(T) \rightarrow \inf. \quad (45)$$

3.2 Условия принципа максимума

Задача (40)-(45) представляет собой задачу оптимального управления и решается на основе принципа максимума Понтрягина [3, 15, 69]. Функция Понтрягина \mathcal{H} и терминант l задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(m, r, \psi, \varphi, u, v, w, P, \theta, \gamma, p_m, p_r, p_\psi, p_\varphi, p_u, p_v, p_w) \equiv \\ \equiv -p_m P/C + p_r u + p_\psi v/r + p_\varphi w/r \cos \psi + \\ + p_u((P \cos \theta \cos \gamma)/m + v^2/r + w^2/r - \mu/r^2) + \\ + p_v((P \sin \theta \cos \gamma)/m - uv/r - w^2 \operatorname{tg} \psi/r) + \\ + p_w((P \sin \gamma)/m - uw/r + vw \operatorname{tg} \psi/r), \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} l \equiv \lambda_0(-m(T)) + \lambda_{m0}(m(0) - 1) + \lambda_{r0}(r(0) - R_0) + \\ + \lambda_{u0}u(0) + \lambda_{v0}(v(0) - V_0 \cos \varphi(0) \sin i) + \lambda_{w0}(w^2(0) + v^2(0) - V_0^2) + \\ + \lambda_{n0}(\cos \psi(0) \sin \varphi(0) \sin i - \sin \psi(0) \cos i) + \lambda_{rT}(r(T) - R_T) + \\ + \lambda_{uT}u(T) + \lambda_{vT}v(T) + \lambda_{wT}(w(T) - V_T) + \lambda_{\psi T}\psi(T) + \lambda_T(T - T^*), \end{aligned}$$

где непрерывные кусочно-гладкие функции (сопряженные переменные) $p_i(t)$ ($i = m, r, \psi, \varphi, u, v, w$) и числа $\lambda_0, \lambda_T, \lambda_{i0}$ ($i = m, r, u, v, w, n$), λ_{iT} ($i = r, u, v, w, \psi$) — множители Лагранжа.

Условия принципа максимума для рассматриваемой задачи имеют следующий вид.

- Уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряженная система: $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial i}$, $i = m, r, \psi, \varphi, u, v, w$):

$$\begin{aligned} \dot{p}_m &= P(p_u \cos \theta \cos \gamma + p_v \sin \theta \cos \gamma + p_w \sin \gamma)/m^2, \\ \dot{p}_r &= p_\psi v/r^2 + p_\varphi w/r^2 \cos \psi + p_u(v^2/r^2 + w^2/r^2 - 2\mu/r^3) - \\ &\quad - p_v(uv/r^2 + w^2 \operatorname{tg} \psi/r^2) - p_w(uw/r^2 - vw \operatorname{tg} \psi/r^2), \\ \dot{p}_\psi &= -p_\varphi w \sin \psi/r \cos^2 \psi + p_v w^2/r \cos^2 \psi - p_w vw/r \cos^2 \psi, \\ \dot{p}_\varphi &= 0, \\ \dot{p}_u &= -p_r + p_v v/r + p_w w/r, \\ \dot{p}_v &= -p_\psi/r - 2p_u v/r + p_v u/r - p_w w \operatorname{tg} \psi/r, \\ \dot{p}_w &= -p_\varphi/r \cos \psi - 2p_u w/r + 2p_v w \operatorname{tg} \psi/r - p_w(v \operatorname{tg} \psi/r - u/r). \end{aligned} \quad (47)$$

- Условия трансверсальности по фазовым переменным ($p_i(0) = \frac{\partial l}{\partial i(0)}$, $p_i(T) = -\frac{\partial l}{\partial i(T)}$, $i = m, r, \psi, \varphi, u, v, w$):

$$\begin{aligned} p_m(0) &= \lambda_{m0}, \quad p_r(0) = \lambda_{r0}, \\ p_\psi(0) &= \lambda_{n0}(-\sin \psi(0) \sin \varphi(0) \sin i - \cos \psi(0) \cos i), \\ p_\varphi(0) &= \lambda_{v0}V_0 \sin \varphi(0) \sin i + \lambda_{n0} \cos \psi(0) \cos \varphi(0) \sin i, \\ p_u(0) &= \lambda_{u0}, \quad p_v(0) = \lambda_{v0} + 2\lambda_{w0}v(0), \quad p_w(0) = 2\lambda_{w0}w(0); \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} p_m(T) &= \lambda_0, \quad p_r(T) = -\lambda_{rT}, \quad p_\psi(0) = -\lambda_{\psi T}, \quad p_\varphi(T) = 0, \\ p_u(T) &= -\lambda_{uT}, \quad p_v(T) = -\lambda_{vT}, \quad p_w(T) = -\lambda_{wT}. \end{aligned} \quad (49)$$

- Условие стационарности по T ($\mathcal{H}(T) = \frac{\partial l}{\partial T}$):

$$\mathcal{H}(T) = \lambda_T. \quad (50)$$

- Условия оптимальности по управлениям:

$$\{P, \theta\}_{opt} = \arg \max_{P \in [0, P_{max}], \theta \in [0, 2\pi) \gamma \in [0; 2\pi)} \mathcal{H}(\dots, P, \theta, \gamma, \dots); \quad (51)$$

следствия условий оптимальности (51):

$$\begin{aligned} (\cos \theta \cos \gamma, \sin \theta \cos \gamma, \sin \gamma)_{opt} &= \begin{cases} (p_u/\rho, p_v/\rho, p_w/\rho), & \rho \neq 0 \text{ и } \chi \geq 0, \\ \forall \vec{e}, \quad |\vec{e}| = 1, & \rho = 0 \text{ или } \chi < 0; \end{cases} \\ P_{opt} &= \begin{cases} P_{max}, & \chi > 0, \\ 0, & \chi < 0, \\ \forall P \in [0, P_{max}], & \chi = 0; \end{cases} \end{aligned} \quad (52)$$

$\chi \equiv \rho - mp_m/C$ — функция переключения управления P , $\rho \equiv \sqrt{p_u^2 + p_v^2 + p_w^2}$.

- Условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_T(T - T^*) = 0. \quad (53)$$

- Условия неотрицательности:

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_T \geq 0. \quad (54)$$

- Условие НЕРавенства Одновременно Нулю всех множителей Лагранжа (условие НЕРОН):

$$\sum_{i=r, \varphi, \psi, u, v, w, m} \|p_i\|_C + |\lambda_0| + |\lambda_T| + \sum_{i=m, r, u, v, w, n} |\lambda_{i0}| + \sum_{i=m, r, u, v, w, \psi} |\lambda_{iT}| \neq 0. \quad (55)$$

- Условие нормировки множителей Лагранжа:

$$p_r^2(0) + p_\psi^2(0) + p_u^2(0) + p_v^2(0) + p_w^2(0) = 1. \quad (56)$$

3.3 Краевая задача

Соотношения (40)-(43), (46)-(56) представляют собой краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (краевую задачу принципа максимума). Неизвестными в ней являются 14 постоянных интегрирования её системы дифференциальных уравнений (40), (47), время перелета T и числовые множители Лагранжа λ_0 , λ_T , λ_{i0} ($i = m, r, u, v, w, n$), λ_{iT} ($i = r, u, v, w, \psi$) — всего 28 неизвестных. Для их определения имеется 28 условий — 11 краевых условий (42), (43); 14 условий трансверсальности (48), (49); условие стационарности (50); условие дополняющей нежесткости (53) и условие нормировки (56), связанное с однородностью функции Лагранжа по множителям Лагранжа, позволяющей выбирать множители Лагранжа с точностью до положительного сомножителя.

3.4 Анализ краевой задачи

По аналогии с двухмерным случаем можно показать, что выбор нормировки правомерен.

Из рассмотрения можно исключить все скалярные множители Лагранжа и краевая задача будет иметь следующий вид:

- система ОДУ — (40), (47);

- неизвестные:

$$r(0), \psi(0), \varphi(0), u(0), v(0), w(0), m(0), p_r(0), p_\psi(0), p_\varphi(0), p_u(0), p_v(0), p_w(0), p_m(0), T;$$

- условия:

$$\begin{aligned} m(0) = 1, \quad r(0) = R_0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = V_0 \cos \varphi(0) \sin i, \\ w^2(0) + v^2(0) = V_0^2, \quad \cos \psi(0) \sin \varphi(0) \sin i - \sin \psi(0) \cos i = 0, \\ p_\psi(0) \cos \psi(0) \cos \varphi(0) \sin i + (\sin \psi(0) \sin \varphi(0) \sin i + \cos \psi(0) \cos i) \times \\ \times \left(p_\varphi(0) - \frac{p_v(0)w(0) - p_w(0)v(0)}{w(0)V_0 \sin \varphi(0) \sin i} \right) = 0, \\ r(T) = R_T, \quad u(T) = 0, \quad v(T) = 0, \quad w(T) = V_T, \quad \psi(T) = 0, \\ p_\varphi(T) = 0, \quad p_r^2(0) + p_\psi^2(0) + p_u^2(0) + p_v^2(0) + p_w^2(0) = 1, \\ H(T) = 0, \text{ если ограничение по времени не активно,} \\ \text{или} \\ T - T^* = 0, \text{ если ограничение по времени активно;} \end{aligned} \quad (57)$$

- управления P , θ , γ в каждый момент времени определяются из условий оптимальности (52).

В результате решения краевой задачи определяются удовлетворяющие необходимым условиям локальной оптимальности (условиям принципа максимума) экстремальные траектории перелета КА (экстремали Понтрягина).

3.5 Вычислительная схема решения краевой задачи. Двухимпульсный перелёт.

Определение. Структурой многовитковой траектории, соответствующей двухимпульсному перелету, называется пара чисел $a - b$, где a — количество активных участков в окрестности перицентра, b — в окрестности апоцентра. При этом сначала все включения двигателя происходят в окрестности перицентра, а потом апоцентра.

На первом этапе построения решений краевой задачи осуществляется переход от импульсного решения к решению краевой задачи в случае неактивного ограничения по времени перелета ($T < T^*$). Следуя предложенной вычислительной схеме, в вектор параметров пристрелки включаются все фазовые и сопряженные переменные в началах всех активных и пассивных участков, а также продолжительности активных и пассивных участков:

$$r_j, \psi_j, \varphi_j, u_j, v_j, w_j, m_j, p_{rj}, p_{\psi j}, p_{\varphi j}, p_{uj}, p_{vj}, p_{wj}, p_{mj}, T_j, \quad j = \overline{0, 2(a+b-1)}. \quad (58)$$

В вектор-функцию невязок включаются краевые условия, условия стыковки участков траектории и задаваемые равенствами $\chi_j(T_j) = 0$ условия переключения тяги:

$$\begin{aligned}
m_0(0) = 1, \quad r_0(0) = R_0, \quad u_0(0) = 0, \quad v_0(0) = V_0 \cos \varphi_0(0) \sin i, \\
w_0^2(0) + v_0^2(0) = V_0^2, \quad \cos \psi_0(0) \sin \varphi_0(0) \sin i - \sin \psi_0(0) \cos i = 0, \\
p_{\psi 0}(0) \cos \psi_0(0) \cos \varphi_0(0) \sin i + (\sin \psi_0(0) \sin \varphi_0(0) \sin i + \cos \psi_0(0) \cos i) \times \\
\times \left(p_{\varphi 0}(0) - \frac{p_{v 0}(0) w_0(0) - p_{w 0}(0) v_0(0)}{w_0(0) V_0 \sin \varphi_0(0) \sin i} \right) = 0;
\end{aligned} \tag{59}$$

$$p_{r 0}^2(0) + p_{\psi 0}^2(0) + p_{u 0}^2(0) + p_{v 0}^2(0) + p_{w 0}^2(0) - 1 = 0; \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_j(T_j) - \alpha_{j+1}(0) = 0 \quad (\alpha = r, \psi, \varphi, u, v, w, m, p_r, p_\psi, p_\varphi, p_u, p_v, p_w, p_m), \\
\chi_j(T_j) \equiv \sqrt{p_{u j}^2(T_j) + p_{v j}^2(T_j) + p_{w j}^2(T_j)} - m_j(T_j) p_{m j}(T_j) / C = 0, \\
j = 0, 2(a+b-1)-1;
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
r_j(T_j) = R_T, \quad u_j(T_j) = 0, \quad v_j(T_j) = 0, \quad w_j(T_j) = V_T, \quad \psi_j(T_j) = 0, \\
H_j(T_j) = 0, \quad p_{\varphi j}(T_j) = 0, \quad j = 2(a+b-1).
\end{aligned} \tag{62}$$

Условия (59), (60) — условия в начале траектории, (60) — условие нормировки; (61) — условия стыковки участков траектории и условия переключения тяги ($\chi = 0$) в моменты стыковки участков (так как активные и пассивные участки чередуются); (62) — условия в конце траектории. Время на каждом участке отсчитывается заново ($t_j \in [0; T_j]$). Общее время перелета вычисляется как сумма продолжительностей всех участков $T = \sum_{j=0}^{2(a+b-1)-1} T_j$. Предполагается, что тяга включена и максимальна ($P = P_{max}$) на каждом нечетном участке, направление вектора тяги определяется из условия оптимальности (52). Условия (59) можно было бы исключить из вектор-функции невязок вместе с соответствующими компонентами из вектора параметров пристрелки. Влияния на сходимость метода Ньютона это не оказывает, и условия (59) приведены здесь для общности.

Размерность вектора параметров пристрелки и вектор-функции невязок, при использовании такой схемы, возрастает до $30(a+b) - 15$. Следует отметить, что матрица производных имеет блочный вид и при её построении в виде конечных разностей необходимо решать задачу Коши не более 15 раз на каждом участке.

Пусть в результате решения краевой задачи для соответствующей задачи оптимизации в импульсной постановке (условие нормировки в задаче импульсной постановки берётся совпадающим с условием нормировки в исходной краевой задаче: $p_r^2(0) + p_\psi^2(0) + p_u^2(0) + p_v^2(0) + p_w^2(0) = 1$) построена двухимпульсная траектория и определены:

$$\begin{aligned}
r_{imp0} = R_0, \quad \psi_{imp0} = 0, \quad \varphi_{imp0} = 0, \quad m_{imp0} = e^{-\Delta V_0/C}, \\
u_{imp0} = 0, \quad v_{imp0} = V_{0v} + \Delta V_{0v}, \quad w_{imp0} = V_{0w} + \Delta V_{0w}, \\
p_r(imp0), \quad p_\psi(imp0), \quad p_\varphi(imp0) = 0, \quad p_m(imp0), \\
p_u(imp0), \quad p_v(imp0), \quad p_w(imp0)
\end{aligned}$$

— значения фазовых и сопряженных переменные после первого импульса;

$$\begin{aligned}
r_{imp1} = R_T, \quad \psi_{imp1} = 0, \quad \varphi_{imp1} = \pi, \quad m_{imp1} = e^{-\Delta V_0/C}, \\
u_{imp1} = 0, \quad v_{imp1} = V_{1v} - \Delta V_{1v}, \quad w_{imp1} = V_{1w} - \Delta V_{1w}, \\
p_r(imp1), \quad p_\psi(imp1), \quad p_\varphi(imp1) = 0, \quad p_m(imp1),
\end{aligned}$$

$$P_{u(imp1)}, \quad P_{v(imp1)}, \quad P_{w(imp1)}$$

— значения фазовых и сопряженных переменные перед вторым импульсом; ΔV_0 , ΔV_1 — величины первого и второго импульсов, ΔV_{0v} , ΔV_{0w} , ΔV_{1v} , ΔV_{1w} — трансверсальные и бинормальные составляющие векторов импульсов, соответственно.

Начальное приближение для решения исходной краевой задачи получается по формулам (для удобства записи формул вместо индекса j использован индекс i ; при этом $j = 2i$ соответствует началу i -го активного участка, $j = 2i + 1$ — началу i -го пассивного участка) :

$$r_{2i} = r_{2i+1} = r_{imp0}, \quad \psi_{2i} = \psi_{2i+1} = \psi_{imp0}, \quad \varphi_{2i} = \varphi_{2i+1} = 2\pi i,$$

$$u_{2i} = u_{2i+1} = 0 \quad (i = \overline{0, a-1})$$

(соотношения показывают, что активные и пассивные участки начинаются в перицентре, угол φ возрастает на 2π после каждого пассивного участка);

$$v_{2i} = V_{0v} + i\Delta V_{0v}/a, \quad v_{2i+1} = V_{0v} + \Delta V_{0v}(i+1)/a,$$

$$w_{2i} = V_{0w} + i\Delta V_{0w}/a, \quad w_{2i+1} = V_{0w} + \Delta V_{0w}(i+1)/a \quad (i = \overline{0, a-1})$$

(трансверсальная и бинормальная составляющие вектора скорости после активного участка возрастают на $\Delta V_{0v}/a$ и $\Delta V_{0w}/a$ соответственно);

$$p_{r2i} = p_{r2i+1} = p_{r(imp0)}, \quad p_{\psi2i} = p_{\psi2i+1} = p_{\psi(imp0)}, \quad p_{\varphi2i} = p_{\varphi2i+1} = 0,$$

$$p_{u2i} = p_{u2i+1} = p_{u(imp0)}, \quad p_{v2i} = p_{v2i+1} = p_{v(imp0)}, \quad p_{w2i} = p_{w2i+1} = p_{w(imp0)},$$

$$p_{m2i} = p_{m2i+1} = p_{m(imp0)} \quad (i = \overline{0, a-1})$$

(сопряженные переменные в начале каждого участка полагаются равными соответствующим сопряженным переменным из решения задачи в импульсной постановке);

$$m_{2i} = e^{-i\Delta V_0/aC}, \quad m_{2i+1} = e^{-(i+1)\Delta V_0/aC}, \quad T_{2i} = C(m_{2i+1} - m_{2i})/P_{max} \quad (i = \overline{0, a-1})$$

(масса после активного участка вычисляется по формуле Циолковского, продолжительность активного участка вычисляется из расходного уравнения для массы ($\dot{m} = -P/C$));

$$T_{2i+1} = \frac{2\pi r_{2i+1}^{3/2}}{\sqrt{\mu}(2 - V_{2i+1}^2/V_0^2)^{3/2}} \quad (i = \overline{0, a-2}), \quad V_k = \sqrt{u_k^2 + v_k^2 + w_k^2}$$

(продолжительности пассивных участков равны периодам обращения по соответствующим кеплеровским орбитам);

$$T_{2i+1} = \frac{\pi r_{2i+1}^{3/2}}{\sqrt{\mu}(2 - V_{2i+1}^2/V_0^2)^{3/2}} \quad (i = a-1)$$

(продолжительность пассивного участка перед началом включений в окрестности апоцентра равна, соответственно, половине периода обращения).

По аналогичной схеме получается начальное приближение для участков в окрестности апоцентра:

$$r_{2i} = r_{2i+1} = r_{imp1}, \quad \psi_{2i} = \psi_{2i+1} = \psi_{imp1}, \quad \varphi_{2i} = \varphi_{2i+1} = 2\pi i - \pi, \quad u_{2i} = u_{2i+1} = 0,$$

$$\begin{aligned}
v_{2i} &= V_{1v} - (a + b - i)\Delta V_{1v}/b, & v_{2i+1} &= V_{1v} - (a + b - i - 1)\Delta V_{1v}/b, \\
w_{2i} &= V_{1w} - (a + b - i)\Delta V_{1w}/b, & w_{2i+1} &= V_{1w} - (a + b - i - 1)\Delta V_{1w}/b, \\
p_{r2i} &= p_{r2i+1} = p_{r(imp1)}, & p_{\psi2i} &= p_{\psi2i+1} = p_{\psi(imp1)}, & p_{\varphi2i} &= p_{\varphi2i+1} = 0, \\
p_{u2i} &= p_{u2i+1} = p_{u(imp1)}, & p_{v2i} &= p_{v2i+1} = p_{v(imp1)}, & p_{w2i} &= p_{w2i+1} = p_{w(imp1)}, \\
p_{m2i} &= p_{m2i+1} = p_{m(imp1)}, \\
m_{2i} &= m_{2a-1}e^{-(i-a)\Delta V_1/bC}, & m_{2i+1} &= m_{2a-1}e^{-(i-a+1)\Delta V_1/bC}, & T_{2i} &= C(m_{2i+1} - m_{2i})/P_{max}, \\
T_{2i+1} &= \frac{2\pi r_{2i+1}^{3/2}}{\sqrt{\mu}(2 - V_{2i+1}^2/V_T^2)^{3/2}} \quad (i = \overline{a, a+b-2}), \\
r_{2i} &= r_{imp1}, & \psi_{2i} &= \psi_{imp1}, & \varphi_{2i} &= 2\pi i - \pi, & u_{2i} &= 0, \\
v_{2i} &= V_{1v} - (a + b - i)\Delta V_{1v}/b, & w_{2i} &= V_{1w} - (a + b - i)\Delta V_{1w}/b, \\
p_{r2i} &= p_{r(imp1)}, & p_{\psi2i} &= p_{\psi(imp1)}, & p_{\varphi2i} &= 0, \\
p_{u2i} &= p_{u(imp1)}, & p_{v2i} &= p_{v(imp1)}, & p_{w2i} &= p_{w(imp1)}, & p_{m2i} &= p_{m(imp1)}, \\
m_{2i} &= m_{2a-1}e^{-(i-a)\Delta V_1/bC}, & T_{2i} &= C(m_{2i+1} - m_{2i})/P_{max} \quad (i = a + b - 1).
\end{aligned}$$

Отметим, что для получения решения, используемого в качестве начального приближения, большему радиусу конечной орбиты должна соответствовать большая величина начальной тяговооруженности. Это связано с тем, что активные участки должны быть достаточно короткими, чтобы приблизить импульсное воздействие.

Для построения решений при активном ограничении на время перелета (третий этап исследования задачи) применяется приведенная выше вычислительная схема, в которой в условиях (62) вместо $H_j(T_j) = 0$ ($j = 2(a + b - 1)$) используется условие $\sum_{j=0}^{2(a+b-1)} T_j - T^* = 0$.

3.6 Вычислительная схема решения краевой задачи. Трехимпульсный перелёт.

Определение. Структурой многовитковой траектории в рассматриваемом случае называется тройка чисел $a-b-c$, где a — количество активных участков, реализующих первый импульс, b — второй, c — третий. При этом все импульсы реализуются последовательно, один за другим.

В качестве начального приближения используется трехимпульсное решение с ограничением на время перелета $T - T^* = 0$. При этом, на импульсных решениях это ограничение достигается.

В рассматриваемых задачах скорость КА при втором импульсе минимальна, а, следовательно, и гравитационные потери при приближении второго импульса активным участком с РДОТ незначительны. Поэтому ниже приведены формулы только для экстремалей структуры $a - 1 - b$.

В вычислительной схеме используется "встречный" просчет. Активные и пассивные участки первой фазы перелета (первый импульс) интегрируются "вперед" (от 0 до T_j). Активные и пассивные участки второй и третьей фаз перелета интегрируются в обратную сторону (от T_j до 0). Таким образом, вектор параметров пристрелки содержит фазовые и сопряженные переменные в начале активных и пассивных участков первой фазы перелета ($j = \overline{0, 2a-1}$) и фазовые и сопряженные переменные на

концах активных и пассивных участков второй и третьей фаз ($j = \overline{2a, 2(a+b)}$), а также продолжительности всех активных и пассивных участков:

$$r_j, \psi_j, \varphi_j, u_j, v_j, w_j, m_j, p_{rj}, p_{\psi j}, p_{\varphi j}, p_{uj}, p_{vj}, p_{wj}, p_{mj}, T_j, \quad j = \overline{0, 2(a+b)}. \quad (63)$$

В вектор-функцию невязок включаются краевые условия, условия стыковки участков траектории и задаваемые равенствами $\chi_j(T_j) = 0$ условия переключения тяги:

$$\begin{aligned} m_0(0) = 1, \quad r_0(0) = R_0, \quad u_0(0) = 0, \quad v_0(0) = V_0 \cos \varphi_0(0) \sin i, \\ w_0^2(0) + v_0^2(0) = V_0^2, \quad \cos \psi_0(0) \sin \varphi_0(0) \sin i - \sin \psi_0(0) \cos i = 0, \\ p_{\psi 0}(0) \cos \psi_0(0) \cos \varphi_0(0) \sin i + (\sin \psi_0(0) \sin \varphi_0(0) \sin i + \cos \psi_0(0) \cos i) \times \\ \times \left(p_{\varphi 0}(0) - \frac{p_{v0}(0)w_0(0) - p_{w0}(0)v_0(0)}{w_0(0)V_0 \sin \varphi_0(0) \sin i} \right) = 0; \end{aligned} \quad (64)$$

$$p_{r0}^2(0) + p_{\psi 0}^2(0) + p_{u0}^2(0) + p_{v0}^2(0) + p_{w0}^2(0) - 1 = 0; \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \alpha_j(T_j) - \alpha_{j+1}(0) = 0 \quad (\alpha = r, \psi, \varphi, u, v, w, m, p_r, p_\psi, p_\varphi, p_u, p_v, p_w, p_m), \\ \chi_j(T_j) \equiv \sqrt{p_{uj}^2(T_j) + p_{vj}^2(T_j) + p_{wj}^2(T_j)} - m_j(T_j)p_{mj}(T_j)/C = 0, \\ j = \overline{0, 2(a+b) - 1}; \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} r_j(T_j) = R_T, \quad u_j(T_j) = 0, \quad v_j(T_j) = 0, \quad w_j(T_j) = V_T, \quad \psi_j(T_j) = 0, \\ p_{\varphi j}(T_j) = 0, \quad j = 2(a+b); \end{aligned} \quad (67)$$

$$\sum_0^j T_k = T^*. \quad (68)$$

Условия (64), (65) — условия в начале траектории, (65) — условие нормировки; (66) — условия стыковки участков траектории и условия переключения тяги ($\chi = 0$) в моменты стыковки участков (так как активные и пассивные участки чередуются); (67), (68) — условия в конце траектории. Время на каждом участке отсчитывается заново ($t_j \in [0; T_j]$). Общее время перелета вычисляется как сумма продолжительностей всех участков $T = \sum_{j=0}^{2(a+b)} T_j$. Предполагается, что тяга включена и максимальна ($P = P_{max}$) на каждом нечетном участке, направление вектора тяги определяется из условия оптимальности (52). Условия (64) и (67) можно было бы исключить из вектор-функции невязок вместе с соответствующими компонентами из вектора параметров пристрелки. Влияния на сходимость метода Ньютона это не оказывает, и эти условия приведены здесь для общности.

Размерность вектора параметров пристрелки и вектор-функции невязок при использовании такой схемы возрастает до $30(a+b+1) - 15$. Следует отметить, что матрица производных имеет блочный вид и при её построении в виде конечных разностей необходимо решать задачу Коши не более 15 раз на каждом участке.

Пусть в результате решения краевой задачи для соответствующей задачи оптимизации в импульсной постановке (условие нормировки в задаче импульсной постановки берётся совпадающим с условием нормировки в исходной краевой задаче: $p_r^2(0) + p_\psi^2(0) + p_u^2(0) + p_v^2(0) + p_w^2(0) = 1$) построена трехимпульсная траектория и определены:

$$\begin{aligned} r_{imp0} = R_0, \quad \psi_{imp0} = 0, \quad \varphi_{imp0}, \quad m_{imp0} = e^{-\Delta V_0/C}, \\ u_{imp0} = \Delta V_{0u}, \quad v_{imp0} = V_{0v} + \Delta V_{0v}, \quad w_{imp0} = V_{0w} + \Delta V_{0w}, \\ p_{r(imp0)}, \quad p_{\psi(imp0)}, \quad p_{\varphi(imp0)} = 0, \quad p_{m(imp0)}, \end{aligned}$$

$$P_{u(imp0)}, \quad P_{v(imp0)}, \quad P_{w(imp0)}$$

— значения фазовых и сопряженных переменных после первого импульса;

$$\begin{aligned} r_{imp1} &= R_a, \quad \psi_{imp1} = 0, \quad \varphi_{imp1}, \quad m_{imp1} = e^{-(\Delta V_0 + \Delta V_1)/C}, \\ u_{imp1} &= V_{au} + \Delta V_{1u}, \quad v_{imp1} = V_{av} + \Delta V_{1v}, \quad w_{imp1} = V_{aw} + \Delta V_{1w}, \\ p_{r(imp1)}, \quad p_{\psi(imp1)}, \quad p_{\varphi(imp1)} &= 0, \quad p_{m(imp1)}, \\ P_{u(imp1)}, \quad P_{v(imp1)}, \quad P_{w(imp1)} \end{aligned}$$

— значения фазовых и сопряженных переменных после второго импульса;

$$\begin{aligned} r_{imp2} &= R_T, \quad \psi_{imp2} = 0, \quad \varphi_{imp2}, \quad m_{imp2} = e^{-(\Delta V_0 + \Delta V_1)/C}, \\ u_{imp2} &= -\Delta V_{2u}, \quad v_{imp2} = V_{Tv} - \Delta V_{2v}, \quad w_{imp2} = V_{Tw} - \Delta V_{2w}, \\ p_{r(imp2)}, \quad p_{\psi(imp2)}, \quad p_{\varphi(imp2)} &= 0, \quad p_{m(imp2)}, \\ P_{u(imp2)}, \quad P_{v(imp2)}, \quad P_{w(imp2)} \end{aligned}$$

— значения фазовых и сопряженных переменных перед третьим импульсом; ΔV_0 , ΔV_1 , ΔV_2 — величины первого, второго и третьего импульсов; ΔV_{0u} , ΔV_{0v} , ΔV_{0w} , ΔV_{1u} , ΔV_{1v} , ΔV_{1w} , ΔV_{2u} , ΔV_{2v} , ΔV_{2w} — составляющие векторов импульсов, соответственно; V_{au} , V_{av} , V_{aw} — составляющие вектора скорости перед вторым импульсом.

Начальное приближение для решения исходной краевой задачи получается по формулам (для удобства записи формул вместо индекса j использован индекс i ; при этом $j = 2i$ соответствует началу i -го активного участка, $j = 2i + 1$ — началу i -го пассивного участка в первой фазе перелета и концам соответствующих участков во второй и третьей фазах):

$$r_{2i} = r_{2i+1} = r_{imp0}, \quad \psi_{2i} = \psi_{2i+1} = \psi_{imp0}, \quad \varphi_{2i} = \varphi_{2i+1} = \varphi_{imp0} + 2\pi i \quad (i = \overline{0, a-1})$$

(соотношения показывают, что активные и пассивные участки начинаются в точке приложения первого импульса, угол φ возрастает на 2π после каждого пассивного участка);

$$\begin{aligned} u_{2i} &= i\Delta V_{0u}/a, \quad u_{2i+1} = \Delta V_{0u}(i+1)/a, \\ v_{2i} &= V_{0v} + i\Delta V_{0v}/a, \quad v_{2i+1} = V_{0v} + \Delta V_{0v}(i+1)/a, \\ w_{2i} &= V_{0w} + i\Delta V_{0w}/a, \quad w_{2i+1} = V_{0w} + \Delta V_{0w}(i+1)/a \quad (i = \overline{0, a-1}) \end{aligned}$$

(составляющие вектора скорости после активного участка возрастают на $\Delta V_{0u}/a$, $\Delta V_{0v}/a$, $\Delta V_{0w}/a$ соответственно);

$$p_{r2i} = p_{r2i+1} = p_{r(imp0)}, \quad p_{\psi2i} = p_{\psi2i+1} = p_{\psi(imp0)}, \quad p_{\varphi2i} = p_{\varphi2i+1} = 0,$$

$$P_{u2i} = P_{u2i+1} = P_{u(imp0)}, \quad P_{v2i} = P_{v2i+1} = P_{v(imp0)}, \quad P_{w2i} = P_{w2i+1} = P_{w(imp0)},$$

$$p_{m2i} = p_{m2i+1} = p_{m(imp0)} \quad (i = \overline{0, a-1})$$

(сопряженные переменные в начале каждого участка полагаются равными соответствующим сопряженным переменным из решения задачи в импульсной постановке);

$$m_{2i} = e^{-i\Delta V_0/aC}, \quad m_{2i+1} = e^{-(i+1)\Delta V_0/aC}, \quad T_{2i} = C(m_{2i+1} - m_{2i})/P_{max} \quad (i = \overline{0, a-1})$$

(масса после активного участка вычисляется по формуле Циолковского, продолжительность активного участка вычисляется из расходного уравнения для массы ($\dot{m} = -P/C$));

$$T_{2i+1} = \frac{2\pi r_{2i+1}^{3/2}}{\sqrt{\mu}(2 - V_{2i+1}^2/V_0^2)^{3/2}} \quad (i = \overline{0, a-2}), \quad V_k = \sqrt{u_k^2 + v_k^2 + w_k^2}$$

(продолжительности пассивных участков равны периодам обращения по соответствующим кеплеровским орбитам);

$$T_{2i+1} = \frac{\pi r_{2i+1}^{3/2}}{\sqrt{\mu}(2 - V_{2i+1}^2/V_0^2)^{3/2}} \quad (i = a-1)$$

(продолжительность пассивного участка перед началом включений в окрестности приложения второго импульса равна, соответственно, половине периода обращения).

По аналогичной схеме получается начальное приближение для участков второй и третьей фаз перелета:

$$\begin{aligned} r_{2i} &= r_{imp1}, \quad \psi_{2i} = \psi_{imp1}, \quad \varphi_{2i} = \varphi_{imp1} + 2\pi(i-1), \\ u_{2i} &= V_{au} + \Delta V_{1u}, \quad v_{2i} = V_{av} + \Delta V_{1v}, \quad w_{2i} = V_{aw} + \Delta V_{1w}, \\ p_{r2i} &= p_{r(imp1)}, \quad p_{\psi 2i} = p_{\psi(imp1)}, \quad p_{\varphi 2i} = 0, \\ p_{u2i} &= p_{u(imp1)}, \quad p_{v2i} = p_{v(imp1)}, \quad p_{w2i} = p_{w(imp1)}, \quad p_{m2i} = p_{m(imp1)}, \\ m_{2i} &= e^{-(\Delta V_0 + \Delta V_1)/C}, \quad T_{2i} = C(m_{2i} - m_{2i-1})/P_{max} \quad (i = a) \end{aligned}$$

(конец активного участка, реализующего второй импульс);

$$\begin{aligned} r_{2i+1} &= r_{imp2}, \quad \psi_{2i+1} = \psi_{imp2}, \quad \varphi_{2i+1} = \varphi_{imp2} + 2\pi(i-1), \quad u_{2i+1} = -(a+b-i)\Delta V_{2u}/b, \\ v_{2i+1} &= V_{Tv} - (a+b-i)\Delta V_{2v}/b, \quad w_{2i+1} = V_{Tw} - (a+b-i)\Delta V_{2w}/b, \\ p_{r2i+1} &= p_{r(imp2)}, \quad p_{\psi 2i+1} = p_{\psi(imp2)}, \quad p_{\varphi 2i+1} = 0, \\ p_{u2i+1} &= p_{u(imp2)}, \quad p_{v2i+1} = p_{v(imp2)}, \quad p_{w2i+1} = p_{w(imp2)}, \\ p_{m2i+1} &= p_{m(imp2)}, \quad m_{2i+1} = e^{-(\Delta V_0 + \Delta V_1)/C}, \\ T_{2i+1} &= \frac{\pi r_{2i+1}^{3/2}}{\sqrt{\mu}(2 - V_{2i+1}^2/V_T^2)^{3/2}} \quad (i = a) \end{aligned}$$

(конец пассивного участка, перед началом реализации третьего импульса);

$$\begin{aligned} r_{2i} &= r_{2i+1} = r_{imp2}, \quad \psi_{2i} = \psi_{2i+1} = \psi_{imp2}, \\ \varphi_{2i} &= \varphi_{imp2} + 2\pi(i-2), \quad \varphi_{2i+1} = \varphi_{imp2} + 2\pi(i-1), \\ u_{2i} &= -(a+b-i)\Delta V_{2u}/b, \quad u_{2i+1} = -(a+b-i)\Delta V_{2u}/b, \\ v_{2i} &= V_{Tv} - (a+b-i)\Delta V_{2v}/b, \quad v_{2i+1} = V_{Tv} - (a+b-i)\Delta V_{2v}/b, \\ w_{2i} &= V_{Tw} - (a+b-i)\Delta V_{2w}/b, \quad w_{2i+1} = V_{Tw} - (a+b-i)\Delta V_{2w}/b, \\ p_{r2i} &= p_{r2i+1} = p_{r(imp2)}, \quad p_{\psi 2i} = p_{\psi 2i+1} = p_{\psi(imp2)}, \quad p_{\varphi 2i} = p_{\varphi 2i+1} = 0, \\ p_{u2i} &= p_{u2i+1} = p_{u(imp2)}, \quad p_{v2i} = p_{v2i+1} = p_{v(imp2)}, \quad p_{w2i} = p_{w2i+1} = p_{w(imp2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{m2i} &= p_{m2i+1} = p_{m(imp2)}, \\
m_{2i} &= m_{2i-1} e^{-(a+b-i)\Delta V_2/bC}, \quad m_{2i+1} = m_{2i-1} e^{-(a+b-i)\Delta V_2/bC}, \quad T_{2i} = C(m_{2i} - m_{2i-1})/P_{max}, \\
T_{2i+1} &= \frac{2\pi r_{2i+1}^{3/2}}{\sqrt{\mu}(2 - V_{2i+1}^2/V_T^2)^{3/2}} \quad (i = \overline{a+1, a+b-1}), \\
r_{2i} &= r_{imp2}, \quad \psi_{2i} = \psi_{imp2}, \quad \varphi_{2i} = \varphi_{imp2} + 2\pi(i-2), \quad u_{2i} = 0, \\
v_{2i} &= V_{Tv}, \quad w_{2i} = V_{Tw}, \\
p_{r2i} &= p_{r(imp2)}, \quad p_{\psi 2i} = p_{\psi(imp2)}, \quad p_{\varphi 2i} = 0, \\
p_{u2i} &= p_{u(imp2)}, \quad p_{v2i} = p_{v(imp2)}, \quad p_{w2i} = p_{w(imp2)}, \quad p_{m2i} = p_{m(imp2)}, \\
m_{2i} &= e^{-(\Delta V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2)/C}, \quad T_{2i} = C(m_{2i} - m_{2i-1})/P_{max} \quad (i = a+b),
\end{aligned}$$

$$T^* = \sum_0^{2(a+b)} T_k.$$

Оценка ограничения по времени $T^* = \sum_0^{2(a+b)} T_k$ также является приближением и, к сожалению, может оказаться не достаточно точной для получения решения.

4 Результаты и качественный анализ полученных решений

Используя предложенную вычислительную схему и способ построения начального приближения удалось построить экстремальные многовитковые траектории. При решении задачи Коши использовался метод Дормана — Принса 8-7 с автоматическим выбором шага [78] при ограничении оценки точности на шаге 10^{-13} . Система алгебраических уравнений решалась модифицированным методом Ньютона с использованием в условии сходимости нормировки Федоренко [73, гл.IV, §43], [74, §1].

4.1 Задача оптимизации многовитковых межорбитальных перелётов между круговыми компланарными орбитами ИСЗ

4.1.1 Результаты решения краевой задачи

Результаты решения задачи в плоском случае (гл. 2) представлены в таблицах 2–10 и на рисунках 5–14.

В таблице 2 приведены размерности векторов параметров пристрелки и вектор-функций невязок для траекторий различных структур, а также количество итераций метода Ньютона, необходимое для получения экстремалей этих структур при $R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = 7.0$ тыс. км, $C = 14.715$ км/с. Видно, что при использовании предложенной вычислительной схемы метод Ньютона сходится быстро (за 1-2 итерации).

Таблица 2:

структура	размерность вектора параметров пристрелки	$n_0 = 0.1$	$n_0 = 0.05$
10–5	319	2	2
20–10	649	2	2
30–15	979	2	2
30–20	1309	1	2
50–25	1639	1	2

В таблице 3 представлены значения сопряженных переменных в решении задачи оптимизации перелета в импульсной постановке между круговыми орбитами $R_0 = 6.58$ тыс. км. и $R_T = 7.0$ тыс. км. (гомановская траектория). Согласно формулам построения начального приближения (гл. 2) эти значения были использованы без изменений для приближения сопряженных переменных в задаче с ограниченной тягой. В таблице 4 представлены сопряженные переменные на экстремали структуры 10-5, полученной в результате решения краевой задачи. Как отмечалось в таблице 2, для достижения заданной точности 10^{-6} для вектор-функции невязок потребовалось 2 итерации метода Ньютона.

На рисунке 5 показана характерная многовитковая траектория перелета КА на ГСО структуры 10–5 для параметров задачи $R_0 = 6.58$ тыс. км., $R_T = R_{\text{ГСО}}$, $n_0 = 0.05$; на рисунке 6 — соответствующая этой траектории функция переключения.

При получении решения задачи оптимизации перелета КА с ограниченной тягой на основе решения задачи импульсной постановки сходимость метода Ньютона ока-

Таблица 3: Сопряженные переменные. Импульсное решение.

	p_r	p_u	p_v	ΔV , м/с
$t = 0$	$1.183159 \cdot 10^{-03}$	0	0.9999993	117.38
$t = T$	$1.078280 \cdot 10^{-03}$	0	0.9999994	119.75

Таблица 4: Сопряженные переменные. Решение структуры 10–5.

j	p_r	p_u	p_v	t , с
0	$1.183158 \cdot 10^{-3}$	$-5.1037 \cdot 10^{-6}$	0.999999300	24.29
1	$1.183157 \cdot 10^{-3}$	$2.7103 \cdot 10^{-5}$	0.999999300	5308.83
2	$1.183157 \cdot 10^{-3}$	$-2.7103 \cdot 10^{-5}$	0.999999300	24.29
3	$1.183156 \cdot 10^{-3}$	$4.9103 \cdot 10^{-5}$	0.999999299	5333.57
4	$1.183156 \cdot 10^{-3}$	$-4.9104 \cdot 10^{-5}$	0.999999299	24.28
5	$1.183156 \cdot 10^{-3}$	$7.1104 \cdot 10^{-5}$	0.999999298	5358.55
6	$1.183156 \cdot 10^{-3}$	$-7.1105 \cdot 10^{-5}$	0.999999298	24.27
7	$1.183155 \cdot 10^{-3}$	$9.3105 \cdot 10^{-5}$	0.999999296	5383.77
8	$1.183155 \cdot 10^{-3}$	$-9.3107 \cdot 10^{-5}$	0.999999296	24.27
9	$1.183154 \cdot 10^{-3}$	$1.1511 \cdot 10^{-4}$	0.999999294	5409.25
10	$1.183154 \cdot 10^{-3}$	$-1.1511 \cdot 10^{-4}$	0.999999294	24.26
11	$1.183153 \cdot 10^{-3}$	$1.3711 \cdot 10^{-4}$	0.999999291	5434.98
12	$1.183153 \cdot 10^{-3}$	$-1.3712 \cdot 10^{-4}$	0.999999291	24.26
13	$1.183153 \cdot 10^{-3}$	$1.5912 \cdot 10^{-4}$	0.999999288	5460.97
14	$1.183153 \cdot 10^{-3}$	$-1.5912 \cdot 10^{-4}$	0.999999288	24.25
15	$1.183152 \cdot 10^{-3}$	$1.8113 \cdot 10^{-4}$	0.999999284	5487.23
16	$1.183152 \cdot 10^{-3}$	$-1.8113 \cdot 10^{-4}$	0.999999284	24.26
17	$1.183151 \cdot 10^{-3}$	$2.0335 \cdot 10^{-4}$	0.999999280	5513.74
18	$1.183151 \cdot 10^{-3}$	$-2.0315 \cdot 10^{-4}$	0.999999280	24.24
19	$1.183150 \cdot 10^{-3}$	$2.2515 \cdot 10^{-4}$	0.999999275	2746.53
20	$1.078301 \cdot 10^{-3}$	$3.8970 \cdot 10^{-4}$	0.999999225	47.46
21	$1.078297 \cdot 10^{-3}$	$-3.0990 \cdot 10^{-4}$	0.999999253	5567.37
22	$1.078297 \cdot 10^{-3}$	$3.0990 \cdot 10^{-4}$	0.999999253	47.43
23	$1.078293 \cdot 10^{-3}$	$-2.3010 \cdot 10^{-4}$	0.999999274	5618.40
24	$1.078293 \cdot 10^{-3}$	$2.3010 \cdot 10^{-4}$	0.999999274	47.41
25	$1.078288 \cdot 10^{-3}$	$-1.5031 \cdot 10^{-4}$	0.999999290	5670.43
26	$1.078288 \cdot 10^{-3}$	$1.5031 \cdot 10^{-4}$	0.999999290	47.38
27	$1.078284 \cdot 10^{-3}$	$-7.0529 \cdot 10^{-5}$	0.999999299	5723.48
28	$1.078284 \cdot 10^{-3}$	$7.0529 \cdot 10^{-5}$	0.999999299	47.36

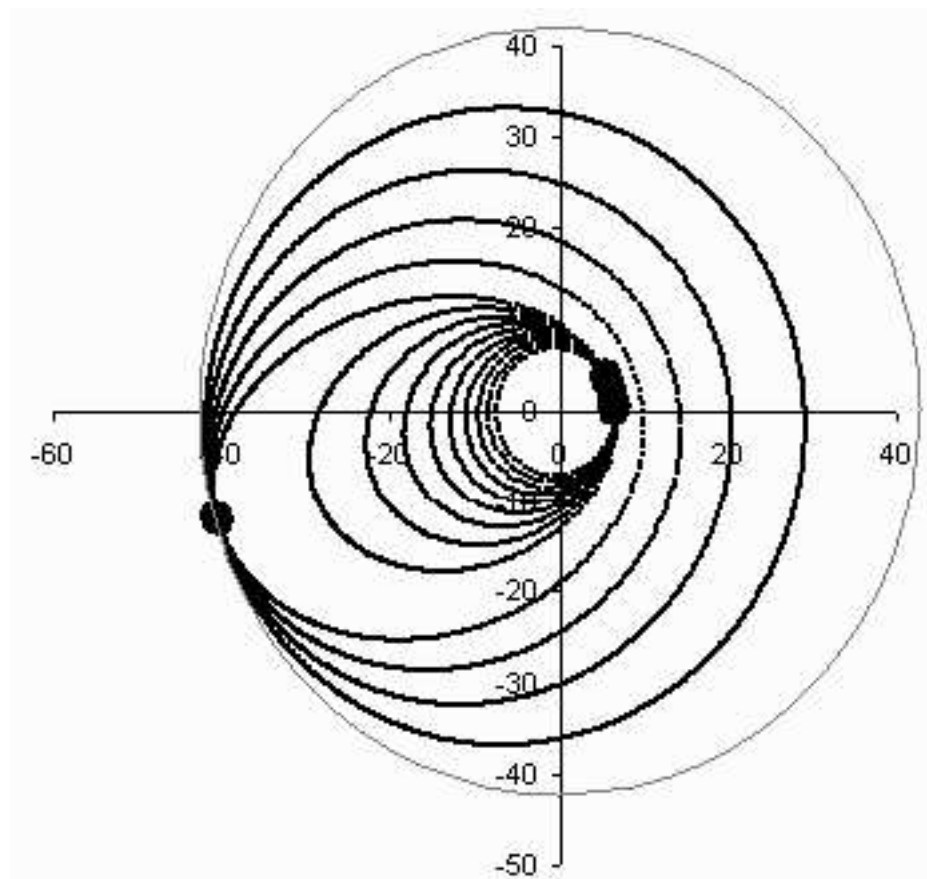


Рис. 5: Характерная многовитковая экстремаль. Тонкие линии соответствуют движению КА с выключенным двигателем (пассивные участки), толстые — с включенным (активные участки).

зывается лучше для отношений радиусов орбит R_T/R_0 близких к единице. Для них удается построить решения для большего диапазона структур траектории и параметров двигателя. В ряде случаев, при большом отношении радиусов конечной и начальной орбит, построение экстремалей многовитковых перелетов для близких орбит, с последующим использованием метода продолжения решения по параметру, оказалось эффективнее непосредственного использования импульсного приближения для получения решения с заданным соотношением радиусов.

4.1.2 Анализ полученных результатов

На первом этапе осуществляется переход от решения задачи в импульсной постановке к решению задачи оптимизации перелета КА с ограниченной тягой при неактивном ограничении времени перелета (задача 1, стр. 9). В таблицах 5, 6 и на рисунках 7, 8 представлены результаты решения таких задач. В таблице 5 и на рисунке 7 приведены зависимости конечной массы КА и времени перелета T между круговыми орбитами радиусов $R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = 10.0$ тыс. км при $n_0 = 0.08$, $C = 3.255$ км/с от структуры траектории (содержащих до 10 активных участков). А в таблице 6 и на рисунке 8 — те же зависимости для многовитковых перелетов КА между круговой орбитой радиуса $R_0 = 6.58$ тыс. км и ГСО. Результаты в таблицах упорядочены по убыванию значений конечной массы. Также в таблицах для сравнения приведено отличие полученной конечной массы от конечной массы КА для двухимпульсного гомановского перелета. Жирным шрифтом в таблицах выделены экстремали, рассматриваемые на втором этапе. Для оставшихся траекторий существуют экстремали, лучшие одновременно как по времени, так и по конечной массе, и потому они в дальнейшем исследовании не участвуют.

Отметим отличие получившихся результатов для перелетов на низкие и высокие орбиты. В таблице 6, в отличие от таблицы 5, лучшими среди рассмотренных оказались траектории со структурой вида $n-1$. Вероятно, это обусловлено следующими факторами.

Во-первых, продолжительность витка, соответствующего активному участку в перицентре, меньше продолжительности витка с активным участком в апоцентре. Это связано с тем, что продолжительность витка практически совпадает с продолжительностью пассивного перелета по эллипсу и зависит от его большой полуоси. Большая полуось переходной орбиты на этапе поднятия апоцентра (активные участки в перицентре) меньше большой полуоси на этапе поднятия перицентра (активные участки в апоцентре). Поэтому время перелета по экстремали структуры $\langle a+1 \rangle - b$ меньше, чем по экстремали структуры $a - \langle b+1 \rangle$. И, чем больше высота конечной орбиты, тем больше эта разность.

Во-вторых, гравитационные потери на активных участках в окрестности перицентра больше гравитационных потерь на активных участках в окрестности апоцентра. Это связано с тем, что скорость движения в окрестности перицентра максимальна, а в окрестности апоцентра минимальна, и за одно и то же время КА проходит значительно большее расстояние по эллиптической траектории в окрестности перицентра, чем в окрестности апоцентра. Чем больше высота конечной орбиты, тем больше разность в скоростях в окрестностях перицентров и апоцентров переходных орбит.

На третьем этапе проводится параметрическое исследование решений задачи при различных ограничениях времени перелета. Результаты третьего этапа для рассматриваемых перелетов с низкой круговой орбиты радиуса $R_0 = 6.58$ тыс. км на орбиту радиуса $R_T = 10.0$ тыс. км и на ГСО представлены на рисунках 9 и 10 соответственно.

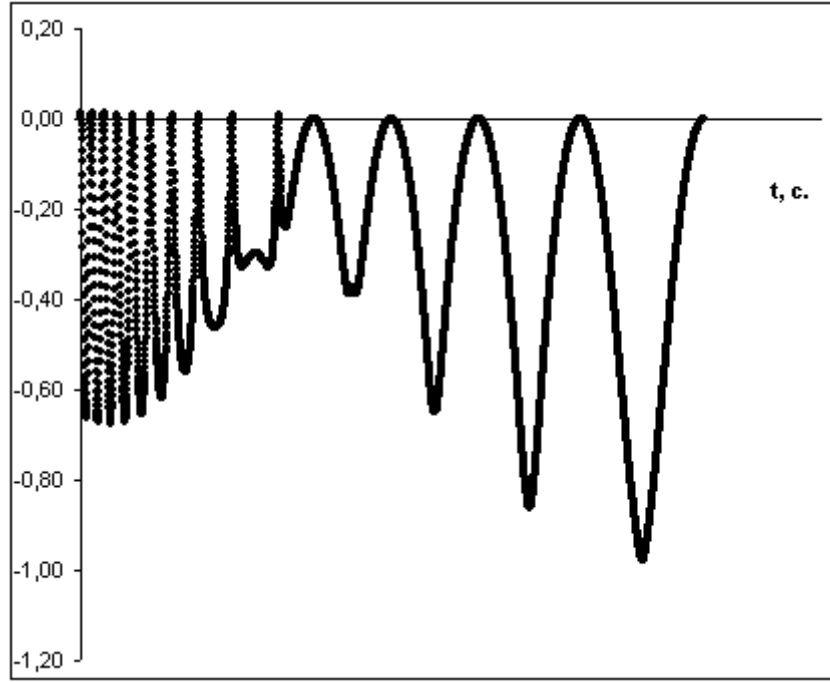


Рис. 6: Характерная функция переключения.

Таблица 5: Этап I. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = 10.0$ тыс. км, $n_0 = 0.08$, $C = 3.255$ км/с).

структура	$T, \text{с}$	$m(T)$	$\Delta m = m(T) - m_{imp}$
7-3	58430	0.639759	$7.30 \cdot 10^{-6}$
6-4	60734	0.639759	$7.30 \cdot 10^{-6}$
6-3	52184	0.639758	$8.70 \cdot 10^{-6}$
5-5	63058	0.639757	$9.00 \cdot 10^{-6}$
5-4	54494	0.639757	$9.70 \cdot 10^{-6}$
8-2	56164	0.639756	$1.05 \cdot 10^{-5}$
5-3	45945	0.639755	$1.11 \cdot 10^{-5}$
7-2	49915	0.639755	$1.14 \cdot 10^{-5}$
6-2	43670	0.639753	$1.29 \cdot 10^{-5}$
4-4	48266	0.639752	$1.41 \cdot 10^{-5}$
5-2	37431	0.639751	$1.53 \cdot 10^{-5}$
4-3	39716	0.639751	$1.55 \cdot 10^{-5}$
4-2	31203	0.639747	$1.96 \cdot 10^{-5}$
3-3	33510	0.639741	$2.50 \cdot 10^{-5}$
3-2	24996	0.639737	$2.91 \cdot 10^{-5}$
5-1	29037	0.639729	$3.77 \cdot 10^{-5}$
4-1	22822	0.639724	$4.20 \cdot 10^{-5}$
3-1	16624	0.639715	$5.13 \cdot 10^{-5}$
2-2	18843	0.639710	$5.61 \cdot 10^{-5}$
2-1	10469	0.639689	$7.78 \cdot 10^{-5}$
1-1	4524	0.639548	$2.18 \cdot 10^{-4}$

Таблица 6: Этап I. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = \Gamma\text{CO}$, $n_0 = 0.08$, $C = 3.255$ км/с).

структура	T , с	$m(T)$	$\Delta m = m(T) - m_{imp}$
9-1	106753	0.298635	$2.391 \cdot 10^{-4}$
8-2	144410	0.298579	$2.951 \cdot 10^{-4}$
8-1	95192	0.298573	$3.007 \cdot 10^{-4}$
7-3	184442	0.298490	$3.836 \cdot 10^{-4}$
7-2	132882	0.298489	$3.846 \cdot 10^{-4}$
7-1	83657	0.298484	$3.902 \cdot 10^{-4}$
6-4	225388	0.298353	$5.208 \cdot 10^{-4}$
6-3	172989	0.298353	$5.211 \cdot 10^{-4}$
6-2	121421	0.298352	$5.221 \cdot 10^{-4}$
6-1	72187	0.298346	$5.277 \cdot 10^{-4}$
5-5	267213	0.298127	$7.474 \cdot 10^{-4}$
5-4	214110	0.298126	$7.476 \cdot 10^{-4}$
5-3	161676	0.298126	$7.479 \cdot 10^{-4}$
5-2	110086	0.298125	$7.490 \cdot 10^{-4}$
5-1	60835	0.298119	$7.545 \cdot 10^{-4}$
4-4	203077	0.297712	$1.162 \cdot 10^{-3}$
4-3	150604	0.297712	$1.162 \cdot 10^{-3}$
4-2	98980	0.297711	$1.163 \cdot 10^{-3}$
4-1	49696	0.297706	$1.168 \cdot 10^{-3}$
3-3	139990	0.296833	$2.041 \cdot 10^{-3}$
3-2	88294	0.296832	$2.042 \cdot 10^{-3}$
3-1	38939	0.296827	$2.047 \cdot 10^{-3}$
2-2	78515	0.294435	$4.439 \cdot 10^{-3}$
2-1	28950	0.294430	$4.444 \cdot 10^{-3}$
1-1	21100	0.284110	$1.476 \cdot 10^{-2}$

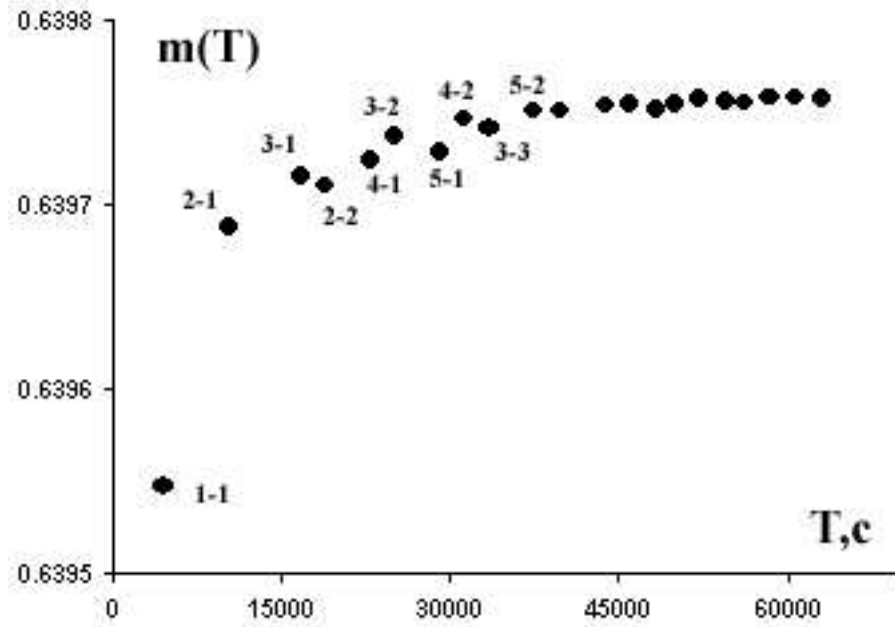


Рис. 7: Этап I. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = 10.0$ тыс. км, $n_0 = 0.08$, $C = 3.255$ км/с).

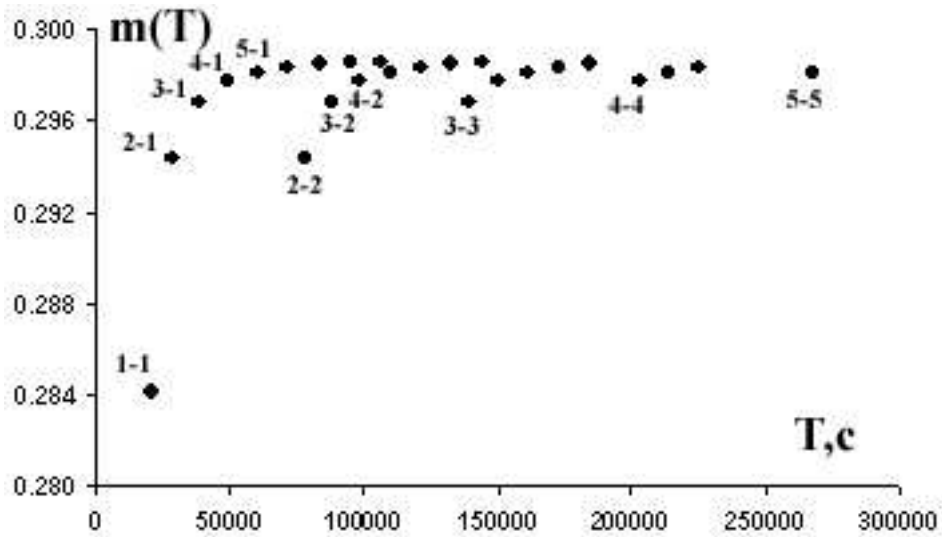


Рис. 8: Этап I. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = \Gamma\text{CO}$, $n_0 = 0.08$, $C = 3.255$ км/с).

Продолжение "вправо" из точек, соответствующих решениям задачи на первом этапе (при неактивном ограничении на время перелета), осуществляется по лучам $m(T) = \text{const}$. Эти лучи соответствуют возможности продолжения полученной на первом этапе экстремали участком пассивного движения по конечной орбите. Продолжение "влево" получается в результате решения задачи с активным ограничением времени перелета (задача 2, стр. 10). Продолжение осуществляется до пересечения с ближайшим соседним семейством экстремалей.

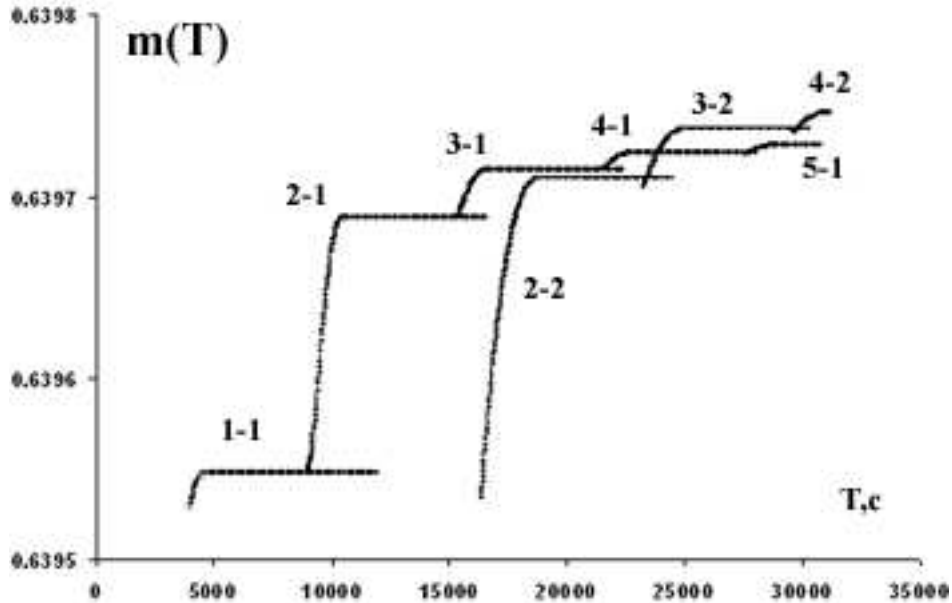


Рис. 9: Этап III. Зависимость конечной массы от времени перелета ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = 10.0$ тыс. км, $n_0 = 0.08$, $C = 3.255$ км/с).

Таким образом, для заданного времени перелета T среди полученных экстремалей выбрана лучшая по значению конечной массы. Заметим, что в случае обоснования оптимальности этих траекторий, кривые, представленные на рисунках 9 и 10, оказываются оптимальными по Парето, т.е. лежат на границе области достижимости.

Отметим существенное отличие экстремалей при неактивном ограничении на время перелета от экстремалей с активным ограничением. На рисунке 11 представлена траектория с неактивным ограничением по времени. Линии апсид переходных орбит практически совпадают. Активные участки расположены равномерно в окрестности перицентров или апоцентров переходных орбит. Это согласуется с импульсным решением задачи без ограничения на время перелета (гомановский перелет — импульсы в перицентре и апоцентре переходной орбиты). На рисунке 12 представлена траектория того же семейства, но с активным ограничением по времени, при этом время перелета меньше, чем на предыдущей экстремали. Видно, что линии апсид переходных орбит значительно различаются, а активные участки не обязательно находятся в окрестности перицентров или апоцентров переходных орбит. Это также соответствует решению задачи в импульсной постановке с ограничением на время перелета.

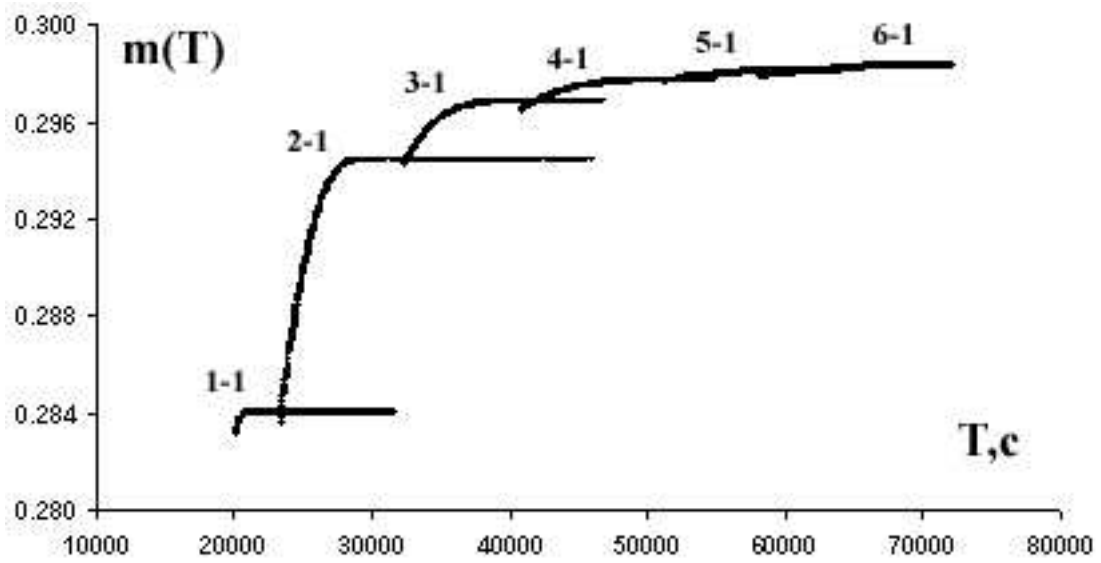


Рис. 10: Этап III. Зависимость конечной массы от времени перелета ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = \Gamma CO$, $n_0 = 0.08$, $C = 3.255$ км/с).

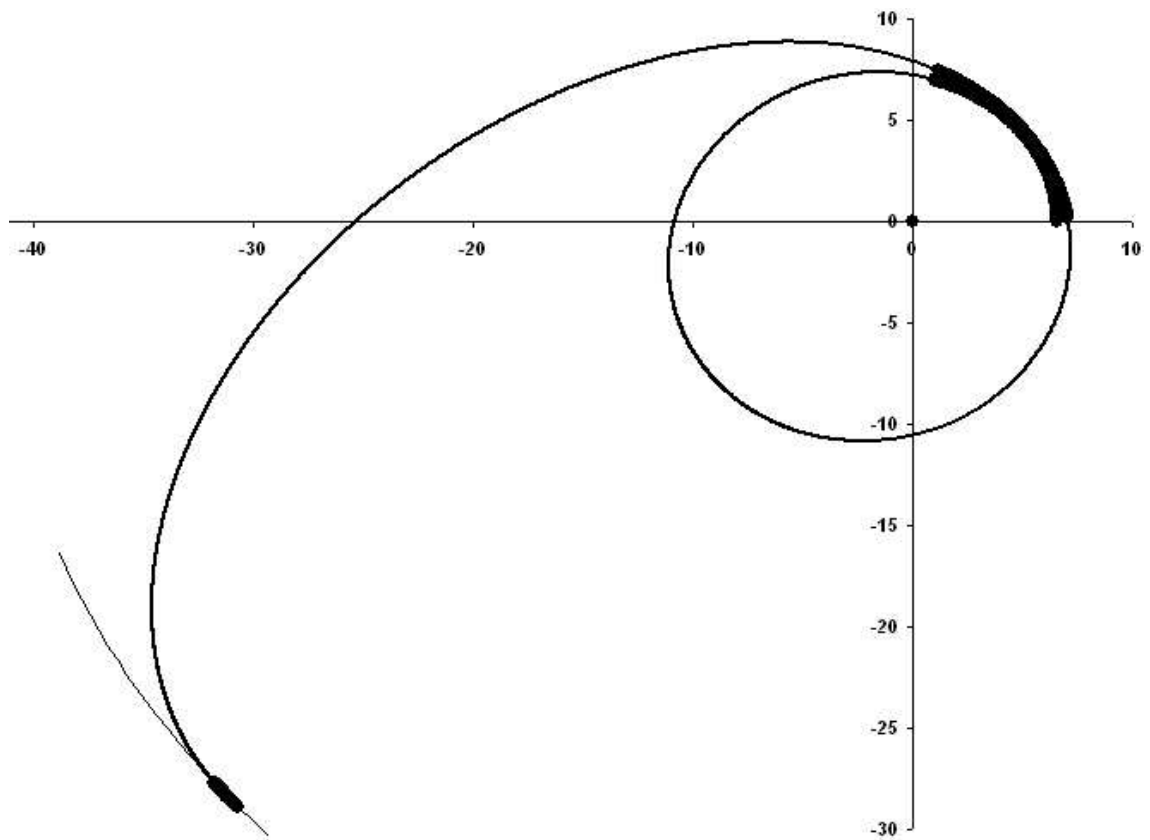


Рис. 11: Характерная траектория при неактивном ограничении времени перелета.

4.1.3 "Простая" схема

Наиболее трудоемким оказывается первый этап исследования, когда требуется построить большое количество экстремалей, значительная часть которых не потребуется для дальнейшего исследования. Эта проблема становится особенно актуальной для слабых маршевых двигателей КА, так как перелеты могут потребовать десятки или сотни витков. Для сокращения диапазона рассматриваемых решений предлагается "простая" схема построения траекторий, близких к экстремальным. С помощью этой схемы можно построить траектории, обладающие основными свойствами получаемых на первом этапе экстремалей.

Можно выделить следующие закономерности устройства экстремальных многовитковых межорбитальных перелетов между круговыми компланарными орбитами:

- 1) включения тяги происходят в окрестности перицентров и апоцентров переходных орбит;
- 2) протяженность (по угловой дальности φ) активных участков практически одинакова для участков в окрестности перицентра;
- 3) то же самое верно для активных участков в окрестности апоцентра.

Пусть задана структура траектории $a-b$. Рассмотрим следующую схему перелета (рис. 13).

1. Задание начальных данных

- в начальный момент времени аппарат находится на многообразии:

$$r(0) = R_0, \quad \varphi(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = V_0;$$

- задаются 3 угла: α, β, γ .

2. Активные участки в окрестности перицентра

- первые $a-1$ витка состоят из активного и пассивного участка, при этом активный участок ограничен условиями $\varphi(t) \in [2\pi(k-1); 2\pi(k-1) + \alpha]$, $k = \overline{(1, a-1)}$, пассивный — $\varphi(t) \in [2\pi(k-1) + \alpha; 2\pi k]$, $k = \overline{(1, a-1)}$;
- виток a начинается активным участком траектории $\varphi(t) \in [2\pi(a-1); 2\pi(a-1) + \alpha]$, затем следует переходный пассивный участок $\varphi(t) \in [2\pi(a-1) + \alpha; 2\pi a - \pi + \alpha/2 - \beta/2]$;
- принципиально важно, чтобы середины всех активных участков находились на одной прямой — линии апсид переходных орбит;
- на всех активных участках в окрестности перицентра $P = P_{\max}$, $(\cos \theta, \sin \theta) \uparrow \uparrow (u, v)$, т.е. тяга максимальна и направлена по касательной к траектории.

3. Активные участки в окрестности апоцентра

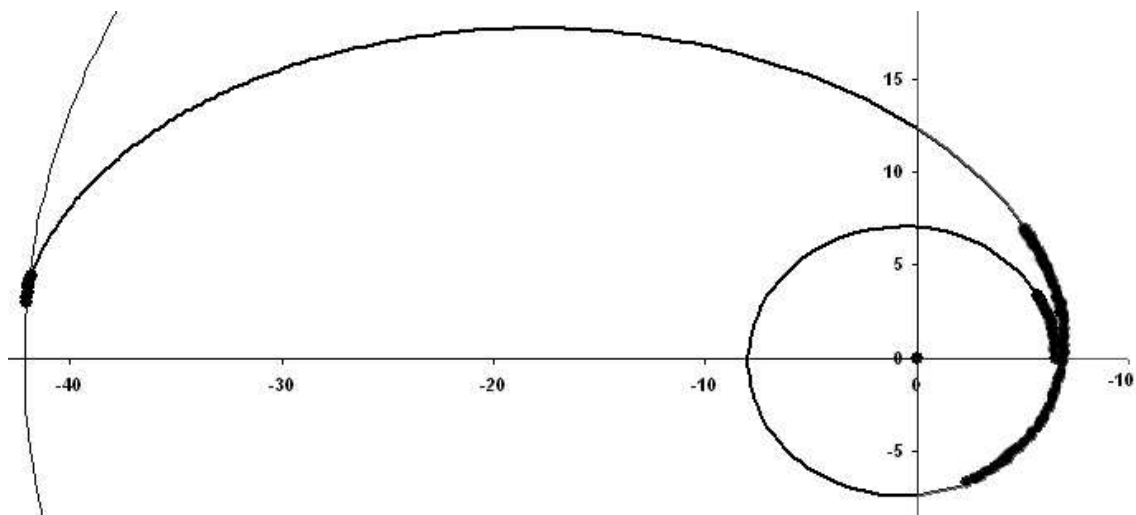


Рис. 12: Характерная траектория при активном ограничении времени перелета.

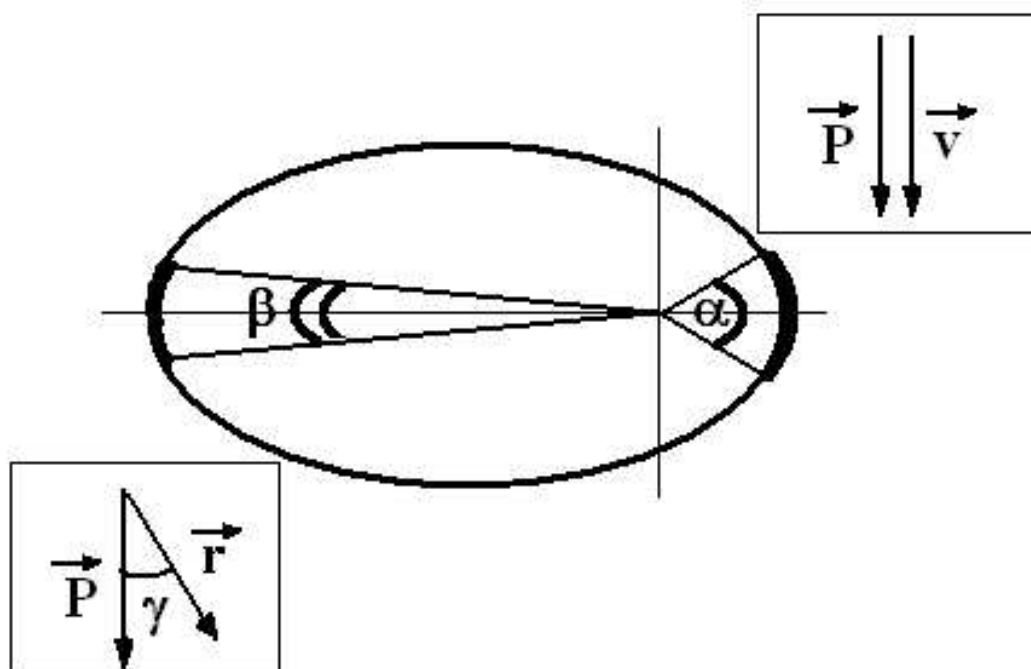


Рис. 13: "Простая" схема.

- потом идут b витков, которые состоят из активного и пассивного участков (на последнем витке пассивный участок отсутствует), при этом активный участок ограничен условиями $\varphi(t) \in [2\pi(k-1) - \pi + \alpha/2 - \beta/2; 2\pi(k-1) - \pi + \alpha/2 + \beta/2]$, $k = \overline{(a+1, a+b)}$, пассивный — $\varphi(t) \in [2\pi(k-1) - \pi + \alpha/2 + \beta/2; 2\pi k - \pi + \alpha/2 - \beta/2]$, $k = \overline{(a+1, a+b-1)}$;
- на всех активных участках в окрестности апоцентра $P = P_{\max}$, $\theta = \gamma = \text{const}$, т.е. тяга максимальна и направлена под постоянным углом к радиус-вектору положения КА;

4. условия в конце траектории:

$$r = R_T, \quad u = 0, \quad v = V_T.$$

При использовании такой схемы построения траектории в качестве независимой переменной вместо t можно рассматривать угол φ . Уравнения движения в этом случае будут иметь вид:

- на пассивных участках

$$m' = 0, \quad r' = \frac{ur}{v}, \quad u' = v - \frac{\mu}{vr}, \quad v' = -u; \quad (69)$$

- на активных участках в окрестности перицентра

$$m' = -\frac{rP}{vC}, \quad r' = \frac{ur}{v}, \quad u' = v - \frac{\mu}{vr} + \frac{urP}{mv\sqrt{u^2+v^2}}, \quad v' = -u + \frac{rP}{m\sqrt{u^2+v^2}}; \quad (70)$$

- на активных участках в окрестности апоцентра

$$m' = -\frac{rP}{vC}, \quad r' = \frac{ur}{v}, \quad u' = v - \frac{\mu}{vr} + \frac{rP \cos \gamma}{mv}, \quad v' = -u + \frac{rP \sin \gamma}{mv}. \quad (71)$$

Таким образом определена краевая задача — найти неизвестные параметры α , β , γ такие, что траектория, построенная по указанной выше схеме, переведет КА с исходной круговой орбиты:

$$r(0) = R_0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = V_0,$$

на конечную круговую орбиту:

$$r(2\pi(a+b-1) - \pi + \alpha/2 + \beta/2) = R_T,$$

$$u(2\pi(a+b-1) - \pi + \alpha/2 + \beta/2) = 0,$$

$$v(2\pi(a+b-1) - \pi + \alpha/2 + \beta/2) = V_T.$$

Решения такой краевой задачи можно использовать в качестве начального приближения для построения решений "соседних" структур (например, решение задачи структуры $a-b$ можно использовать как приближение для решения структуры $< a+1 > -b$).

Траектории, полученные таким способом, будем называть — *построенными*. В таблицах 7 и 8 представлено сравнение построенных траекторий с экстремальными. Видно, что построенные траектории оказываются близкими по затратам массы и времени к экстремальным траекториям с одинаковой структурой.

Таблица 7: Сравнение построенных траекторий и экстремалей ($R_0 = 6.58$ тыс. км;
 $R_T = 10.0$ тыс. км; $n_0 = 0.08$; $C = 3.225$ км/с).

структура	экстремаль		построенная		$m_{\text{экс.}}(T) - m_{\text{постр.}}(T)$
	T,с	m(T)	T,с	m(T)	
8-2	56164	0.639756	56196	0.639755	$9.09 \cdot 10^{-7}$
7-3	58430	0.639759	58470	0.639759	$4.69 \cdot 10^{-7}$
7-2	49915	0.639755	49945	0.639754	$9.73 \cdot 10^{-7}$
6-4	60734	0.639759	60782	0.639759	$4.73 \cdot 10^{-7}$
6-3	52184	0.639758	52222	0.639757	$6.28 \cdot 10^{-7}$
6-2	43670	0.639753	43697	0.639752	$9.95 \cdot 10^{-7}$
5-5	63058	0.639757	63114	0.639757	$5.73 \cdot 10^{-7}$
5-4	54494	0.639757	54540	0.639756	$9.00 \cdot 10^{-7}$
5-3	45945	0.639755	45980	0.639754	$1.03 \cdot 10^{-6}$
5-2	37431	0.639751	37455	0.639750	$1.34 \cdot 10^{-6}$
5-1	29037	0.639729	29065	0.639723	$5.74 \cdot 10^{-6}$
4-4	48266	0.639752	48310	0.639751	$9.88 \cdot 10^{-7}$
4-3	39716	0.639751	39749	0.639747	$4.17 \cdot 10^{-6}$
4-2	31203	0.639747	31224	0.639742	$4.46 \cdot 10^{-6}$
4-1	22822	0.639724	22835	0.639719	$5.13 \cdot 10^{-6}$
3-3	33510	0.639741	33540	0.639739	$1.82 \cdot 10^{-6}$
3-2	24996	0.639737	25014	0.639735	$1.88 \cdot 10^{-6}$
3-1	16624	0.639715	16627	0.639710	$4.75 \cdot 10^{-6}$
2-2	18843	0.639710	18859	0.639705	$4.91 \cdot 10^{-6}$
2-1	10469	0.639689	10470	0.639683	$5.31 \cdot 10^{-6}$
1-1	4524	0.639548	4520	0.639522	$2.68 \cdot 10^{-5}$

Таблица 8: Сравнение построенных траекторий и экстремалей ($R_0 = 6.58$ тыс. км; $R_T = R_{\Gamma\text{CO}}$; $n_0 = 0.08$; $C = 3.225$ км/с).

структура	экстремаль		построенная		$m_{\text{экс.}}(T) - m_{\text{постр.}}(T)$
	T,с	m(T)	T,с	m(T)	
9-1	106753	0.298635	107113	0.298620	$1.51 \cdot 10^{-5}$
8-2	144410	0.298579	147045	0.298571	$7.38 \cdot 10^{-6}$
8-1	95192	0.298573	95417	0.298558	$1.52 \cdot 10^{-5}$
7-3	184442	0.298490	189072	0.298480	$9.98 \cdot 10^{-6}$
7-2	132882	0.298489	135419	0.298480	$9.50 \cdot 10^{-6}$
7-1	83657	0.298484	83786	0.298468	$1.58 \cdot 10^{-5}$
6-4	225388	0.298353	231822	0.298339	$1.45 \cdot 10^{-5}$
6-3	172989	0.298353	177552	0.298339	$1.40 \cdot 10^{-5}$
6-2	121421	0.298352	123891	0.298339	$1.31 \cdot 10^{-5}$
6-1	72187	0.298346	72248	0.298329	$1.71 \cdot 10^{-5}$
5-5	267213	0.298127	275010	0.298104	$2.25 \cdot 10^{-5}$
5-4	214110	0.298126	220469	0.298104	$2.21 \cdot 10^{-5}$
5-3	161676	0.298126	166186	0.298105	$2.14 \cdot 10^{-5}$
5-2	110086	0.298125	112511	0.298105	$1.97 \cdot 10^{-5}$
5-1	60835	0.298119	60852	0.298099	$2.04 \cdot 10^{-5}$
4-4	203077	0.297712	209378	0.297675	$3.72 \cdot 10^{-5}$
4-3	150604	0.297712	155070	0.297676	$3.61 \cdot 10^{-5}$
4-2	98980	0.297711	101369	0.297678	$3.35 \cdot 10^{-5}$
4-1	49696	0.297706	49682	0.297676	$2.94 \cdot 10^{-5}$
3-3	139990	0.296833	144402	0.296766	$6.76 \cdot 10^{-5}$
3-2	88294	0.296832	90644	0.296768	$6.40 \cdot 10^{-5}$
3-1	38939	0.296827	38897	0.296772	$5.45 \cdot 10^{-5}$
2-2	78515	0.294435	80672	0.294294	$1.42 \cdot 10^{-4}$
2-1	28950	0.294430	28754	0.294282	$1.48 \cdot 10^{-4}$
1-1	21100	0.284110	17768	0.270623	$1.35 \cdot 10^{-2}$

Таблица 9: Лучшие построенные траектории состоящие из 200 витков ($R_0 = 6.58$ тыс. км; $n_0 = 5 \cdot 10^{-4}$; $C = 14.715$ км/с).

R_T , тыс. км	лучшая структура	$m(T)$	α , рад	β , рад	γ , рад	α°	β°	γ°
10	125-75	0.905684319	1.4872	1.0444	1.5707	85.21	59.84	89.99
15	147-53	0.840479849	2.2317	1.1765	1.5714	127.87	67.41	90.03
20	159-41	0.806323077	2.5318	1.0598	1.5726	145.06	60.72	90.10
25	168-32	0.785530852	2.6623	0.9842	1.5740	152.54	56.39	90.18
30	173-27	0.771739573	2.7561	0.8672	1.5756	157.91	49.69	90.27
35	177-23	0.762060727	2.8122	0.7864	1.5773	161.12	45.06	90.37
40	180-20	0.754991736	2.8518	0.7182	1.5791	163.40	41.15	90.47
$R_{\Gamma\text{CO}}$	181-19	0.752408938	2.8677	0.6858	1.5799	164.31	39.29	90.52

При решении краевой задачи принципа максимума построение экстремалей Понтрягина с большим количеством витков требует значительных вычислительных затрат. Предложенная схема позволяет строить траектории с большим количеством витков значительно быстрее. Для примера были построены траектории состоящие из 200 витков для различных значений R_T , среди которых выделены лучшие по функционалу (см. табл. 9).

Пример построенной траектории приведён на рисунке 14.

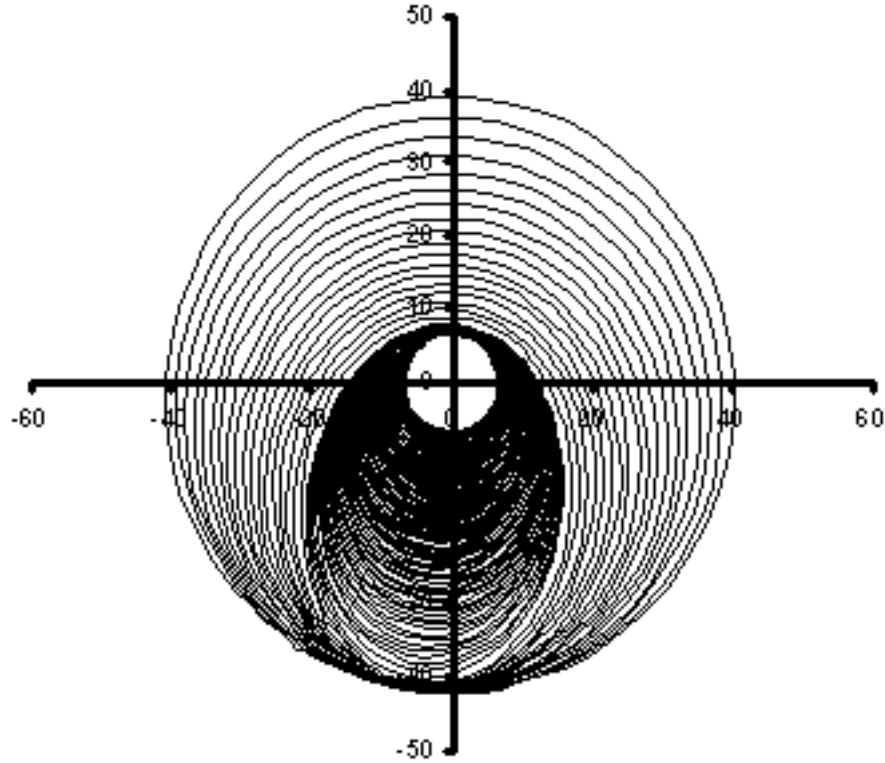


Рис. 14: Построенная траектория структуры 181-19 ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = R_{\Gamma CO}$).

Проведем сравнение построенной траектории с решением задачи быстродействия (табл. 10).

Таблица 10: Сравнение решения задачи быстродействия с построенным решением ($R_0 = 6.58$ тыс. км; $R_T = R_{\Gamma CO}$; $n_0 = 5 \cdot 10^{-4}$; $C = 14.715$ км/с).

траектория	$m(T)$	$m_{\text{имп}}(T) - m(T)$	$T, \text{с}$	$T, \text{суток}$
решение задачи быстродействия	0.7241972	0.0412	827408	9.58
построенная структура 181-19	0.7524089	0.0129	3244861	37.56

Видно, что в задаче быстродействия затраты массы для рассматриваемых параметров задачи на 4,1% (от общей начальной массы КА) выше, чем в абсолютно оптимальном по затратам массы — импульсном решении. Затраты массы на построенной

траектории всего на 1,3% выше затрат массы в импульсном решении. Таким образом выигрыш построенного решения в полезной нагрузке по сравнению с решением задачи быстрогодействия около 3%, что для аппарата с начальной массой 500-600 кг составляет 15-20 кг. При этом перелёт по построенной траектории в 4 раза продолжительней, чем наискорейший перелёт.

Отметим, что с помощью рассмотренной схемы строятся траектории обладающие основными свойствами, которыми обладают экстремали Понтрягина для рассматриваемых задач, и какой-либо оптимизации не производится. Получаемые траектории оказываются близкими по функционалу к экстремальным и позволяют оценить диапазон структур многовитковых траекторий, для проведения первого этапа исследования задачи.

4.2 Задача оптимизации многовитковых межорбитальных перелётов между некомпланарными круговыми орбитами ИСЗ

4.2.1 Результаты решения краевой задачи

В результате решения задачи, рассмотренной в главе 3, получены экстремальные многовитковые траектории. Результаты решения представлены в таблицах 11-13 и на рисунках 15-27.

Таблица 11:

структура	размерность вектора параметров пристрелки	$n_0 = 0.1$	$n_0 = 0.05$
5—5	285	3	3
10—10	585	4	3
25—25	1485	4	4

В таблице 11 приведены размерности векторов параметров пристрелки и вектор-функций невязок для траекторий различных структур, а также количество итераций метода Ньютона, необходимое для получения экстремалей этих структур при $R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = 7.0$ тыс. км, $i = 0.1$, $C = 14.715$ км/с. Видно, что при использовании предложенной вычислительной схемы метод Ньютона сходится быстро (за 3-4 итерации).

Характерная многовитковая экстремаль перелета с низкой круговой орбиты $R_0 = 6.58$ тыс. км наклонением $i = 1.0$ рад. на ГСО, построенная на основе двухимпульсного перелета, представлена на рисунке 15.

На рисунках 16-17 показано наклонение орбиты в конце каждого активного витка для различных параметров задачи. Видно, что основной поворот плоскости орбиты происходит при включениях двигателя в окрестностях апоцентра, что согласуется с результатами решения задач в импульсной постановке.

На рисунке 18 показана характерная экстремальная траектория перелета структуры 2–1–1 с низкой круговой орбиты радиуса $R_0 = 6.58$ тыс. км и наклонением $i = 1.5$ рад. на ГСО. Время перелета $T = 1$ сут.

Оптимальным трехимпульсным решением в задаче без ограничения на время перелета будет бипараболический перелет через бесконечность. При соответствующих трехимпульсной схеме многовитковых перелетах, с заданным числом витков, максимум конечной массы может быть достигнут за конечное время. Это связано с тем, что с увеличением времени перелета возрастает радиус апоцентра, а, следовательно, и гравитационные потери на первом этапе перелета (поднятие апоцентра). В определенный момент дополнительные затраты на гравитационные потери становятся больше, чем экономия на повороте плоскости орбиты, за счет более высокого апоцентра, и конечная масса начинает убывать с увеличением времени перелета.

На рисунке 19 показаны семейства экстремалей структуры 1–1–1 и 2–1–1 перелетов с низкой круговой орбиты радиуса $R_0 = 6.58$ тыс. км на ГСО для различных значений начального наклонения. Пунктиром представлены решения вспомогательной краевой задачи (с фиксированным временем $T - T^* = 0$), которые не являются решением

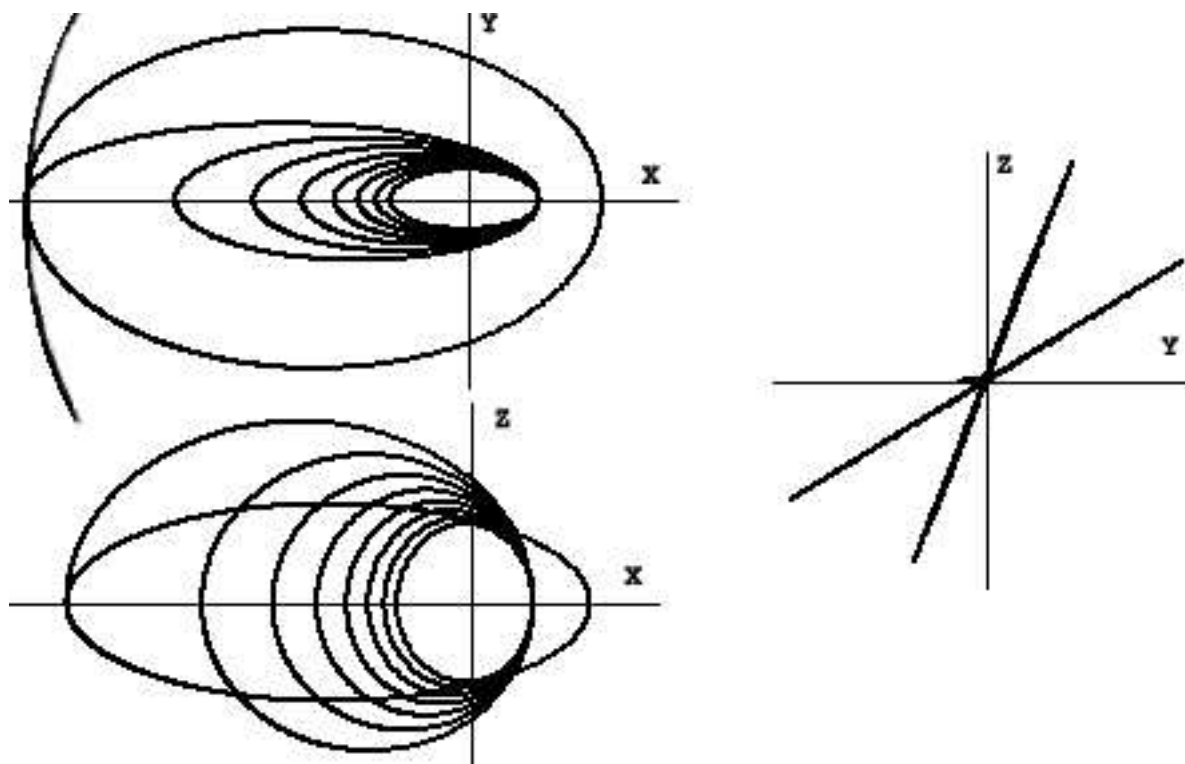


Рис. 15: Характерная экстремаль. Проекция на декартовы оси координат.

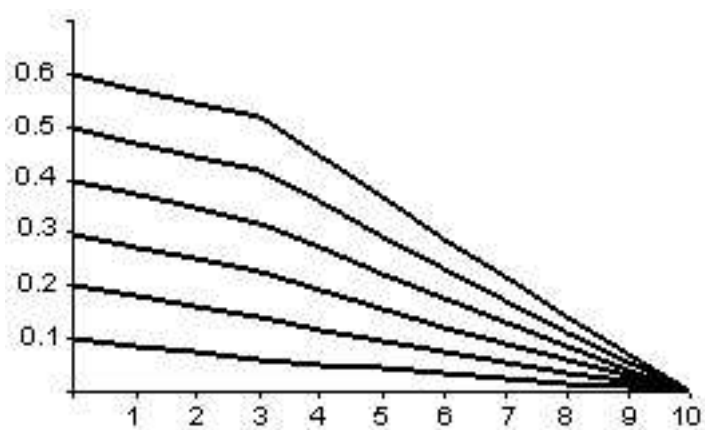


Рис. 16: Наклонение орбиты в конце каждого активного витка на экстремальных структурах 4–6 ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = 10$ тыс. км, $C = 14.715$ км/с, $n_0 = 0.05$).

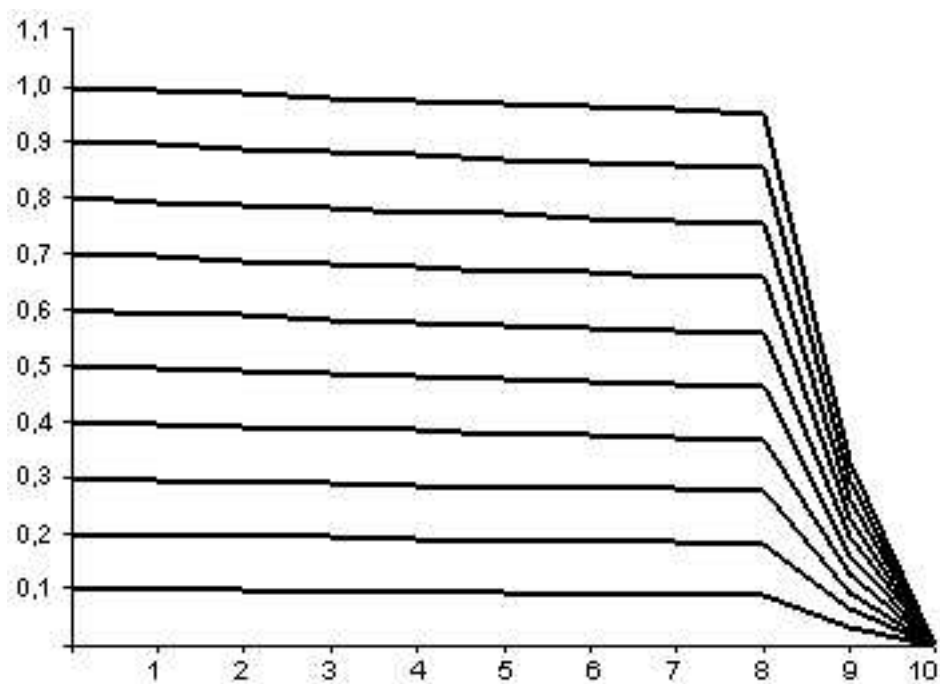


Рис. 17: Наклонение орбиты в конце каждого активного витка на экстремальных структурах 8-2 ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = R_{\Gamma CO}$, $C = 14.715$ км/с, $n_0 = 0.05$).

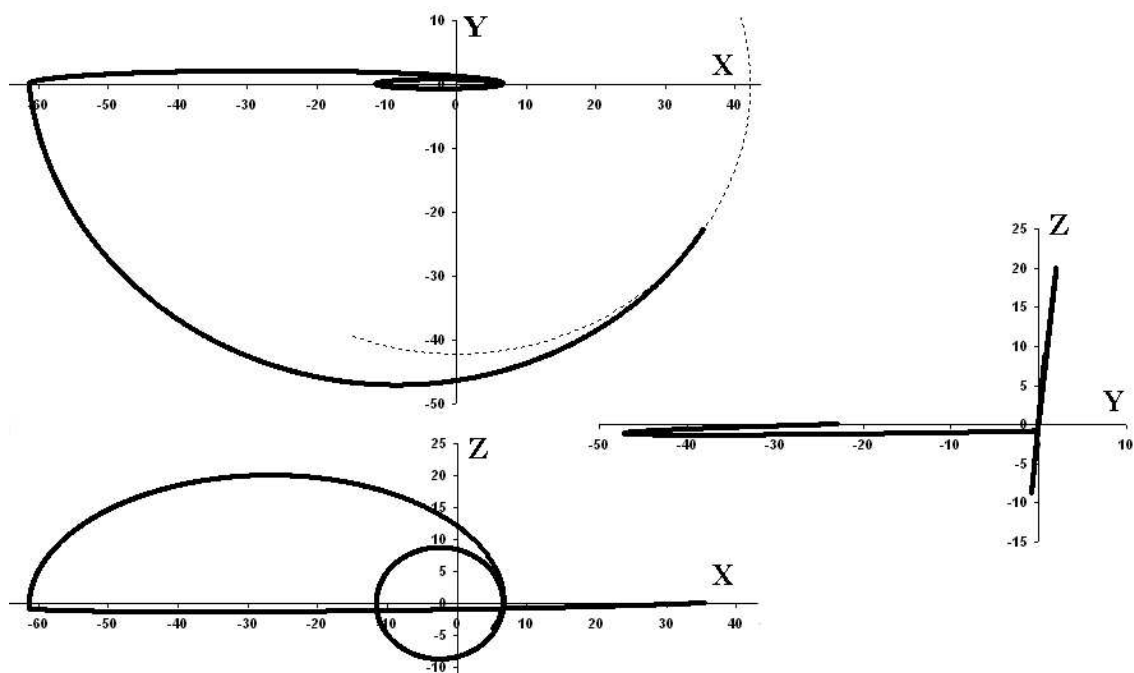


Рис. 18: Характерная экстремаль. Проекция на декартовы оси координат.

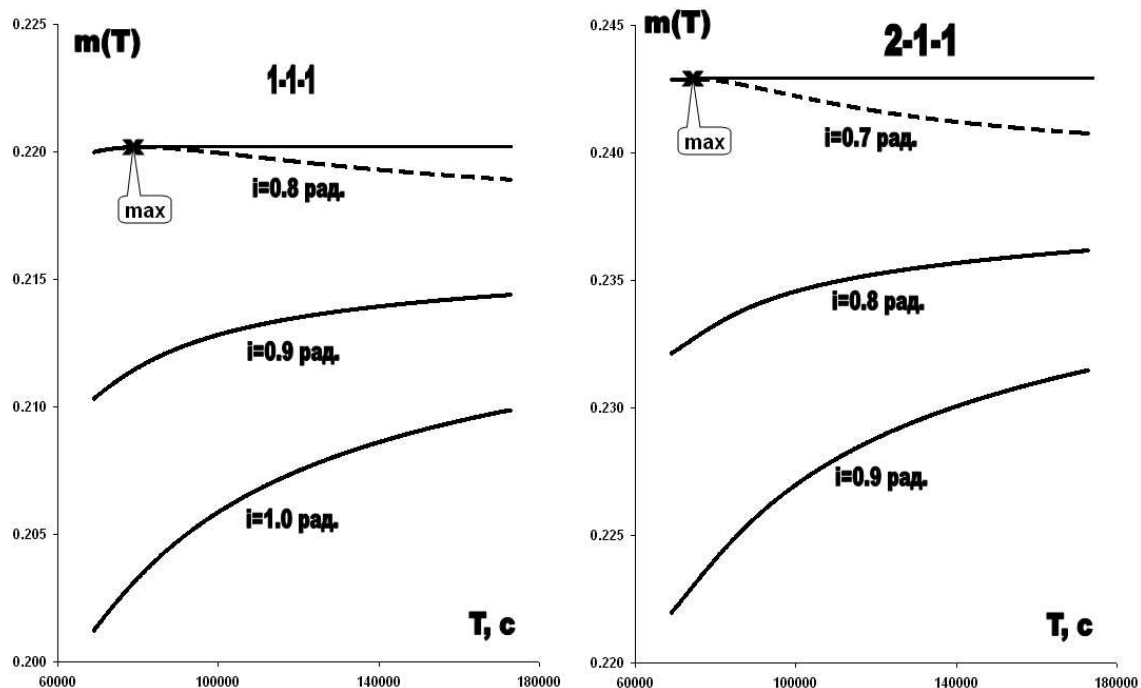


Рис. 19: Семейства экстремалей структур 1–1–1 и 2–1–1 при различных значениях начального наклона ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = R_{ГСО}$, $C = 3.255$ км/с, $n_0 = 0.08$).

исходной задачи оптимизации: проверочное условие $H(T) \geq 0$ на этих решениях не выполняется.

В рассмотренном случае, при $i = 0.8$ семейство экстремалей структуры 1–1–1 имеет максимум при $T \leq 1$ сут, а семейство экстремалей структуры 2–1–1 — не достигает своего максимума на этом интервале. Очевидно, это связано с тем, что первый этап перелета происходит не за один, а за два активных участка, и гравитационные потери на этап подъема апоцентра меньше. В точках максимума на экстремальных выполнено условие $H(T) = 0$. Для завершения исследования, на третьем этапе такие семейства продолжают вправо от точки максимума, путем добавления пассивных участков в конце траектории.

4.2.2 Анализ полученных результатов

Экстремали, полученные на первом этапе исследований (переход от импульсного решения к решению задачи оптимизации с ограниченной тягой и неактивным ограничением времени), представлены в таблицах 12–13 и на рисунках 20–25.

В таблице 12 и на рисунках 20–22 приведены зависимости конечной массы КА и времени перелета T между круговыми орбитами радиусов $R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = 10.0$ тыс. км при $n_0 = 0.08$, $C = 3.255$ км/с от структуры траектории и наклона. В таблице 13 и на рисунках 23–25 — те же зависимости для многовитковых перелетов КА между круговой орбитой радиуса $R_0 = 6.58$ тыс. км и ГСО. Также как и в плоском случае, результаты в таблицах упорядочены по убыванию значений конечной массы и для сравнения приведено отличие полученной конечной массы от конечной массы КА двухимпульсного гомановского перелета. Жирным шрифтом в таблицах выделены экстремали, рассматриваемые на втором этапе. Для оставшихся траекторий существуют экстремали, лучшие одновременно как по времени, так и по

конечной массе, и потому они в дальнейшем исследовании не участвуют.

Для низких конечных орбит и небольших значений начального наклона оптимальными оказываются экстремали, соответствующие двухимпульсной схеме перелета (рис. 20). С увеличением угла некомпланарности оптимальными становятся экстремали соответствующие трехимпульсной схеме (рис. 21-22). При этом, с определенной величины T^* , конечная масса на таких экстремальных, превосходит конечную массу КА самого двухимпульсного перелета, а значит и конечную массу КА на любой экстремали, соответствующей двухимпульсной схеме.

Также как и в плоском случае для высоких конечных орбит из рассмотренных экстремалей, соответствующих двухимпульсной схеме, эффективнее оказываются траектории структуры вида $n-1$. В то время, как для низких — оптимальными могут быть и траектории другого вида ($n-2$, $n-3$, и т.д.). Вероятно, это объясняется тем, что чем больше радиус конечной орбиты, тем меньше затраты массы зависят от начального наклона орбиты и для больших радиусов конечной орбиты выбор лучшей структуры траектории во многом аналогичен выбору структуры в двухмерном случае.

Таблица 12: Этап I. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ($R_T = 10.0$ тыс. км).

структура	$T, \text{с}$	$m(T)$	$\Delta m = m(T) - m_{imp}$
i=0.5 рад.			
4-6	63371	0.332068	$6.23 \cdot 10^{-4}$
5-5	61372	0.332060	$6.31 \cdot 10^{-4}$
4-5	55178	0.331940	$7.52 \cdot 10^{-4}$
6-4	59403	0.331891	$8.00 \cdot 10^{-4}$
3-7	65405	0.331890	$8.01 \cdot 10^{-4}$
5-4	53197	0.331825	$8.66 \cdot 10^{-4}$
3-6	57201	0.331812	$8.79 \cdot 10^{-4}$
4-4	47005	0.331704	$9.88 \cdot 10^{-4}$
3-5	49009	0.331683	$1.01 \cdot 10^{-3}$
3-4	40837	0.331445	$1.25 \cdot 10^{-3}$
7-3	57476	0.331426	$1.27 \cdot 10^{-3}$
6-3	51264	0.331385	$1.31 \cdot 10^{-3}$
5-3	45060	0.331318	$1.37 \cdot 10^{-3}$
2-8	67503	0.331235	$1.46 \cdot 10^{-3}$
4-3	38870	0.331194	$1.50 \cdot 10^{-3}$
2-7	59293	0.331183	$1.51 \cdot 10^{-3}$
2-6	51091	0.331103	$1.59 \cdot 10^{-3}$
2-5	42901	0.330971	$1.72 \cdot 10^{-3}$
3-3	32705	0.330930	$1.76 \cdot 10^{-3}$
2-4	34731	0.330727	$1.96 \cdot 10^{-3}$
2-3	26603	0.330201	$2.49 \cdot 10^{-3}$
8-2	55625	0.330016	$2.68 \cdot 10^{-3}$
7-2	49414	0.329987	$2.70 \cdot 10^{-3}$
6-2	43208	0.329944	$2.75 \cdot 10^{-3}$
5-2	37010	0.329873	$2.82 \cdot 10^{-3}$
4-2	30825	0.329742	$2.95 \cdot 10^{-3}$
3-2	24668	0.329464	$3.23 \cdot 10^{-3}$
2-2	18575	0.328696	$4.00 \cdot 10^{-3}$
1-6	45212	0.327685	$5.01 \cdot 10^{-3}$
1-5	37023	0.327541	$5.15 \cdot 10^{-3}$
1-4	28857	0.327277	$5.41 \cdot 10^{-3}$
1-3	20734	0.326705	$5.99 \cdot 10^{-3}$
1-2	12719	0.325056	$7.64 \cdot 10^{-3}$
2-1	10901	0.320818	$1.19 \cdot 10^{-2}$
1-1	5131	0.316046	$1.66 \cdot 10^{-2}$
i=1.0 рад.			
2-2	17480	0.136610	$5.92 \cdot 10^{-3}$
1-2	11592	0.134884	$7.65 \cdot 10^{-3}$
2-1	11274	0.124160	$1.84 \cdot 10^{-2}$
1-1	5616	0.121009	$2.15 \cdot 10^{-2}$
i=1.5 рад.			
2-2	16418	0.062582	$4.44 \cdot 10^{-3}$
1-2	10487	0.061901	$5.12 \cdot 10^{-3}$
1-1	5959	0.053514	$1.35 \cdot 10^{-2}$

Таблица 13: Этап I. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ($R_T = \Gamma\text{CO}$).

структура	T , с	$m(T)$	$\Delta m = m(T) - m_{imp}$
i=0.5 рад.			
5-1	60815	0.268523	$8.42 \cdot 10^{-4}$
4-2	97316	0.268076	$1.29 \cdot 10^{-3}$
4-1	49695	0.268065	$1.30 \cdot 10^{-3}$
3-3	136810	0.267104	$2.26 \cdot 10^{-3}$
3-2	86633	0.267102	$2.26 \cdot 10^{-3}$
3-1	38960	0.267090	$2.27 \cdot 10^{-3}$
2-4	178387	0.264433	$4.93 \cdot 10^{-3}$
2-3	127153	0.264432	$4.93 \cdot 10^{-3}$
2-2	76826	0.264430	$4.93 \cdot 10^{-3}$
2-1	28992	0.264420	$4.94 \cdot 10^{-3}$
1-3	121058	0.252649	$1.67 \cdot 10^{-2}$
1-2	69894	0.252648	$1.67 \cdot 10^{-2}$
1-1	21156	0.252639	$1.67 \cdot 10^{-2}$
i=1.0 рад.			
4-2	93139	0.213755	$1.29 \cdot 10^{-3}$
4-1	49738	0.213728	$1.32 \cdot 10^{-3}$
3-3	128699	0.212786	$2.26 \cdot 10^{-3}$
3-2	82446	0.212781	$2.27 \cdot 10^{-3}$
3-1	39017	0.212754	$2.29 \cdot 10^{-3}$
2-4	166298	0.210111	$4.94 \cdot 10^{-3}$
2-3	118907	0.210109	$4.94 \cdot 10^{-3}$
2-2	72573	0.210104	$4.94 \cdot 10^{-3}$
2-1	29061	0.210079	$4.97 \cdot 10^{-3}$
1-3	112082	0.198104	$1.69 \cdot 10^{-2}$
1-2	65247	0.198100	$1.69 \cdot 10^{-2}$
1-1	21224	0.198078	$1.70 \cdot 10^{-2}$
i=1.5 рад.			
4-2	88279	0.168016	$1.14 \cdot 10^{-3}$
4-1	49810	0.167974	$1.19 \cdot 10^{-3}$
3-3	119073	0.167163	$2.00 \cdot 10^{-3}$
3-2	77560	0.167156	$2.00 \cdot 10^{-3}$
3-1	39081	0.167115	$2.05 \cdot 10^{-3}$
2-4	151948	0.164800	$4.36 \cdot 10^{-3}$
2-3	109166	0.164797	$4.36 \cdot 10^{-3}$
2-2	67623	0.164790	$4.37 \cdot 10^{-3}$
2-1	29114	0.164750	$4.41 \cdot 10^{-3}$
1-3	101743	0.154056	$1.51 \cdot 10^{-2}$
1-2	59974	0.154050	$1.51 \cdot 10^{-2}$
1-1	21247	0.154015	$1.51 \cdot 10^{-2}$

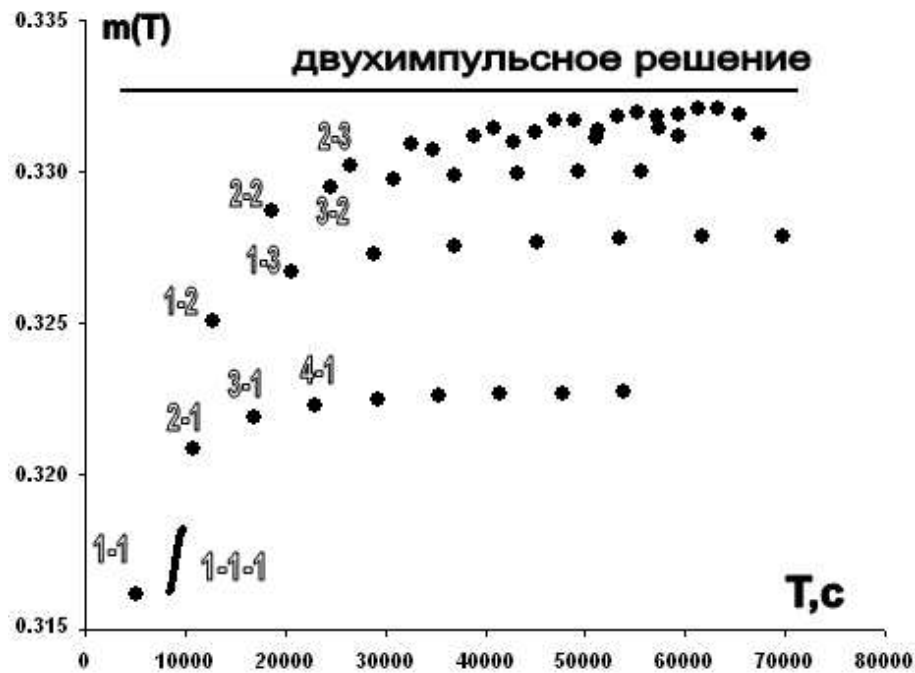


Рис. 20: Этап I. Зависимость конечной массы и времени перелёта от структуры траектории ($R_T = 10.0$ тыс. км, $i = 0.5$ рад.).

На третьем этапе проводится параметрическое исследование решений задачи при различных ограничениях времени перелета. Результаты третьего этапа для рассматриваемых перелетов с низкой круговой орбиты радиуса $R_0 = 6.58$ тыс. км на орбиту радиуса $R_T = 10.0$ тыс. км и на ГСО представлены на рисунках 26 и 27 соответственно.

Продолжение семейств экстремалей, соответствующих двухимпульсной схеме перелета, "вправо" из точек, соответствующих решениям задачи на первом этапе (при неактивном ограничении на время перелета), осуществляется по лучам $m(T) = const$. Также как и в плоском случае, эти лучи соответствуют возможности продолжения полученной на первом этапе экстремали участком пассивного движения по конечной орбите.

Продолжение "влево" получается в результате использования метода продолжения решения по параметру (T^*), для задачи с активным ограничением времени перелета (задача 2, стр. 9). Продолжение осуществляется до пересечения с ближайшим соседним семейством экстремалей.

Продолжение "вправо" и "влево" семейств экстремалей соответствующих трехимпульсной (биэллиптической) схеме перелета получается в результате решения задачи с активным ограничением времени перелета. При этом продолжение "вправо" осуществляется до точки семейства, в которой достигается максимум конечной массы (или, что тоже самое, $H(T) = 0$), а далее по лучам $m(T) = const$. Продолжение "влево" осуществляется до пересечения с ближайшим соседним семейством экстремалей.

В результате третьего этапа, в пространственной задаче исследованы экстремали Понтрягина соответствующие как двух-, так и трехимпульсной (биэллиптической) схемам перелета. Для заданного времени перелета T среди полученных экстремалей выбрана лучшая по значению конечной массы.

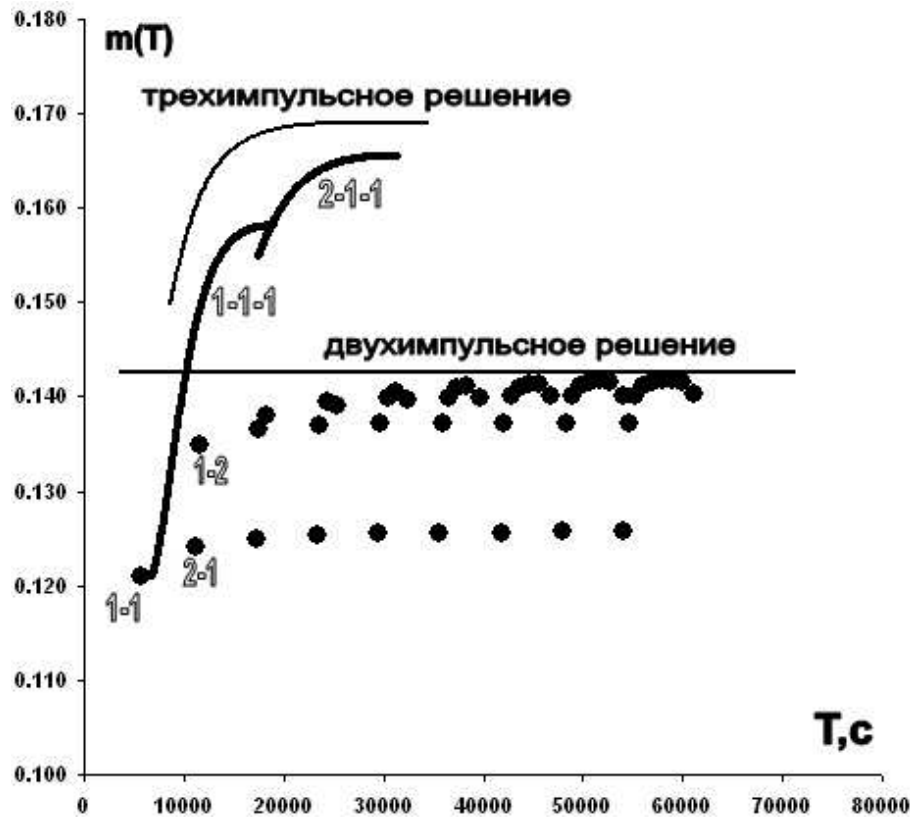


Рис. 21: Этап I. Зависимость конечной массы и времени перелёта от структуры траектории ($R_T = 10.0$ тыс. км, $i = 1.0$ рад.).

4.3 Задача оптимизации поворота плоскости орбиты ИСЗ

Задача поворота плоскости орбиты является частным случаем рассмотренной выше задачи, при $R_0 = R_T$. Однако, задача поворота плоскости орбиты представляет отдельный практический и теоретический интерес. В импульсной постановке оптимальным по затратам массы решением для любого угла поворота будет трехимпульсный перелет.

Результаты решения представлены на рисунках 28-31.

4.4 Оценка точности полученных решений

Как отмечалось в [20, с.152-153], оценки точности с использованием существующих методик могут оказаться (и оказываются) сильно завышенными. Для контроля точности в таких ситуациях рекомендуется проводить тестовые расчеты, которыми проверяется корректность вычислений.

В данном параграфе тестовые расчеты проводятся на примере типичной экстремали структуры 4-2 перелета с низкой круговой орбиты радиуса $R_0 = 6.58$ тыс. км. и наклона $i = 1.0$ рад. на орбиту с радиусом $R_T = 10.0$ тыс. км., при параметрах двигателя $C = 3.255$ км/с, $n_0 = 0.08$. В работе были проведены следующие расчеты.

1. Решение задачи Коши от начала траектории на всем интервале интегрирования. При этом используются определенные в результате решения задачи значения фазовых и сопряженных переменных в начале траектории, а также моменты

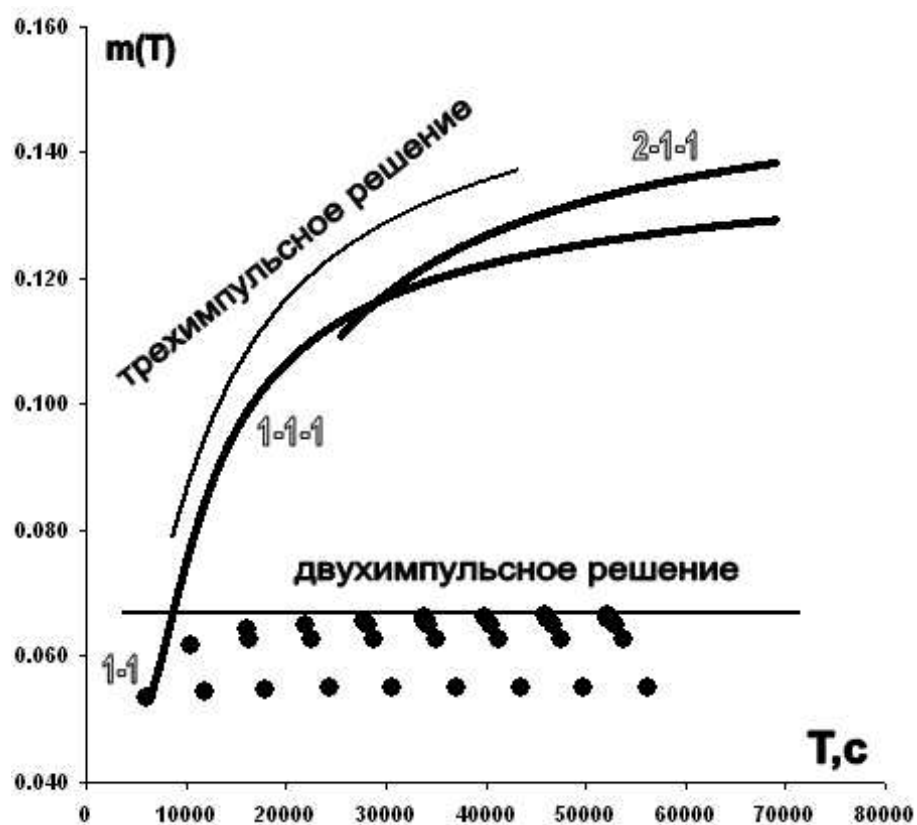


Рис. 22: Этап I. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ($R_T = 10.0$ тыс. км, $i = 1.5$ рад.).

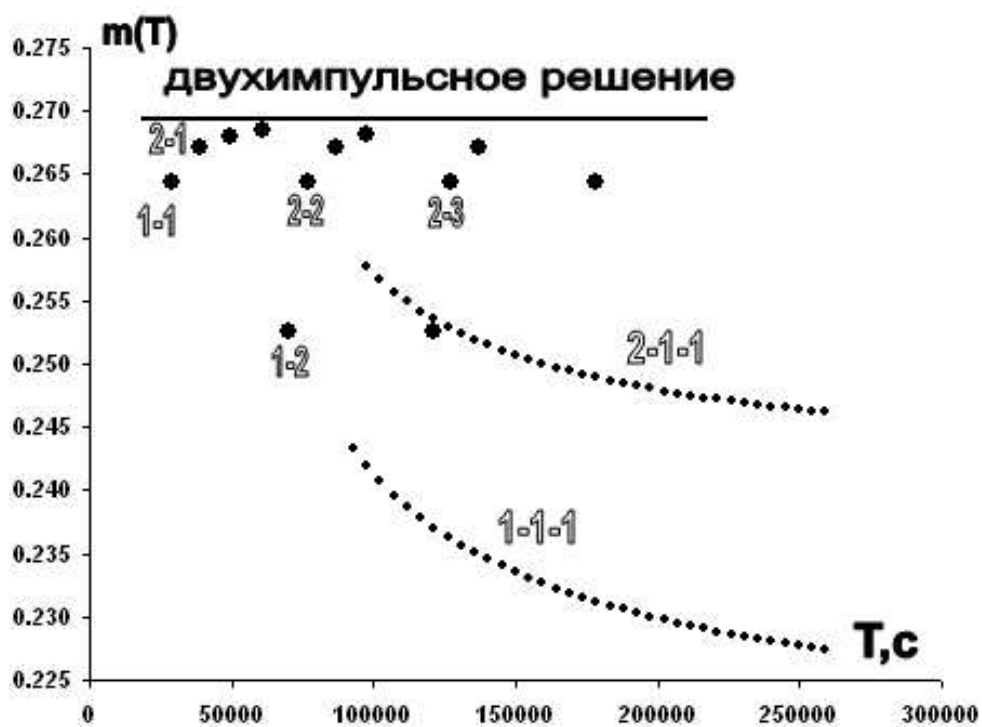


Рис. 23: Этап I. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ($R_T = \Gamma CO$, $i = 0.5$ рад.).

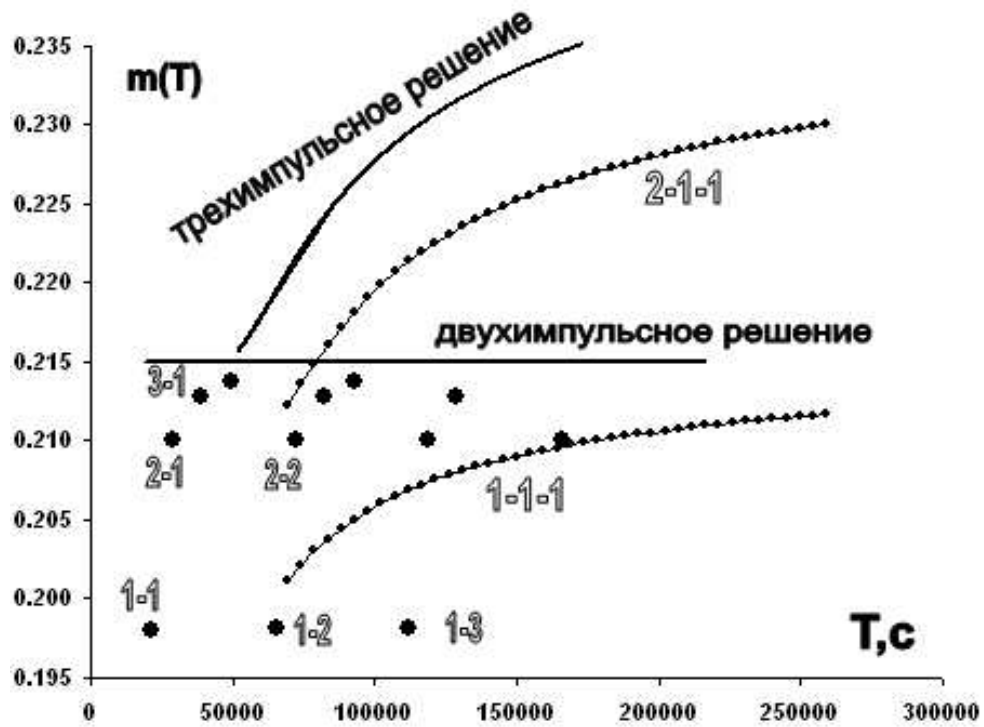


Рис. 24: Этап I. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ($R_T = \text{ГСО}$, $i = 1.0$ рад.).

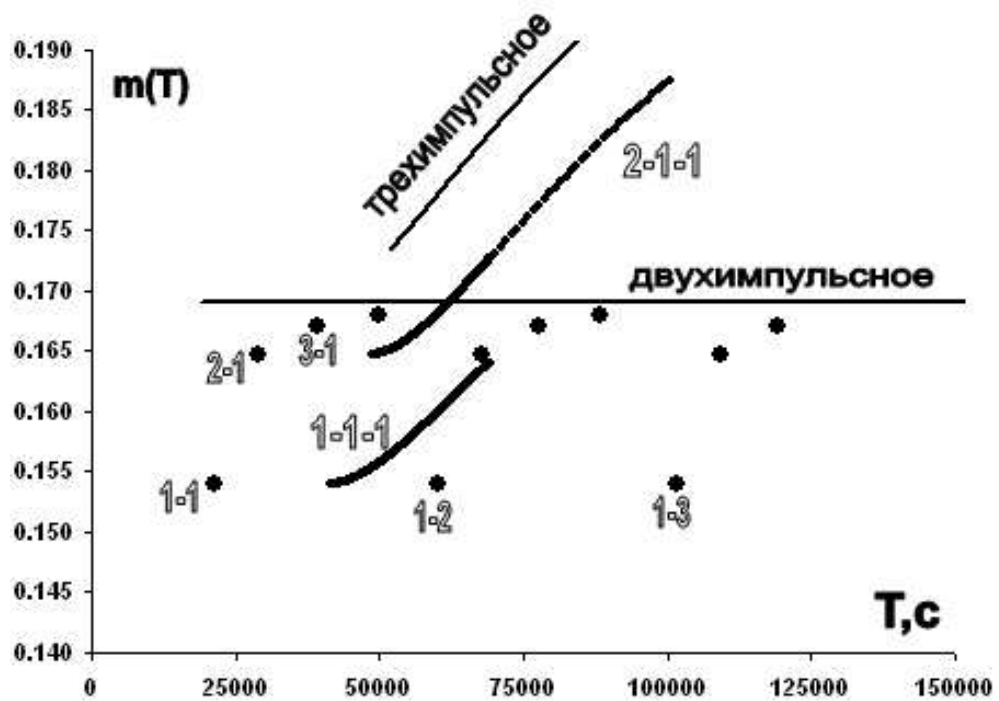


Рис. 25: Этап I. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ($R_T = \text{ГСО}$, $i = 1.5$ рад.).

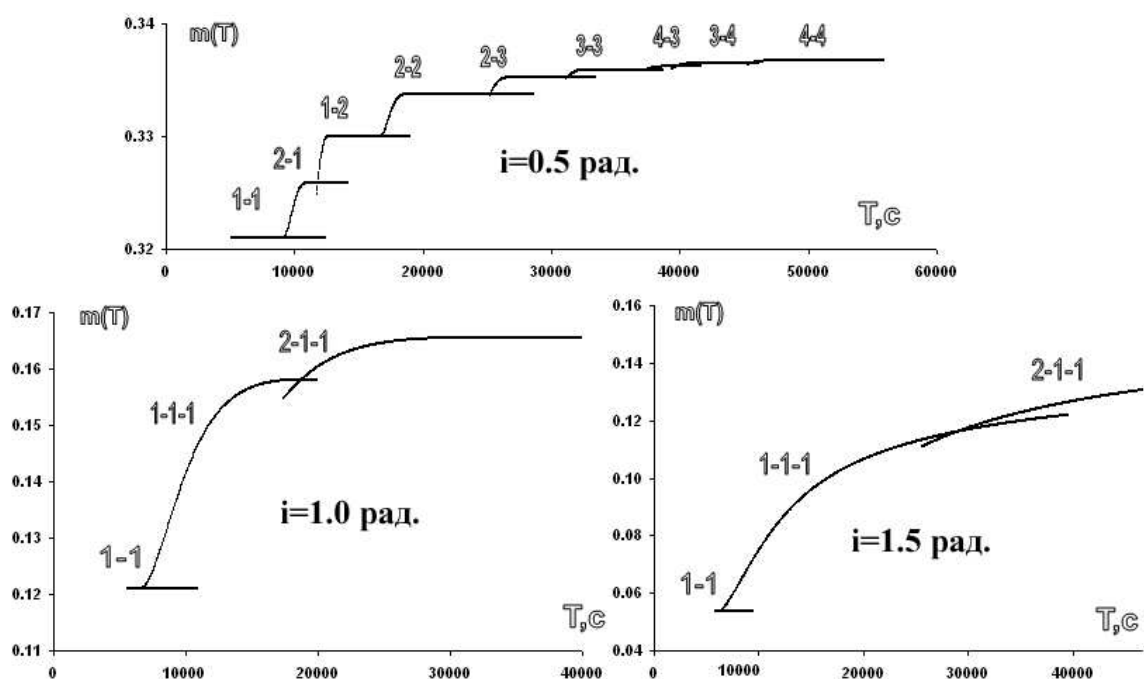


Рис. 26: Этап III. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ($R_T = 10.0$ тыс. км).

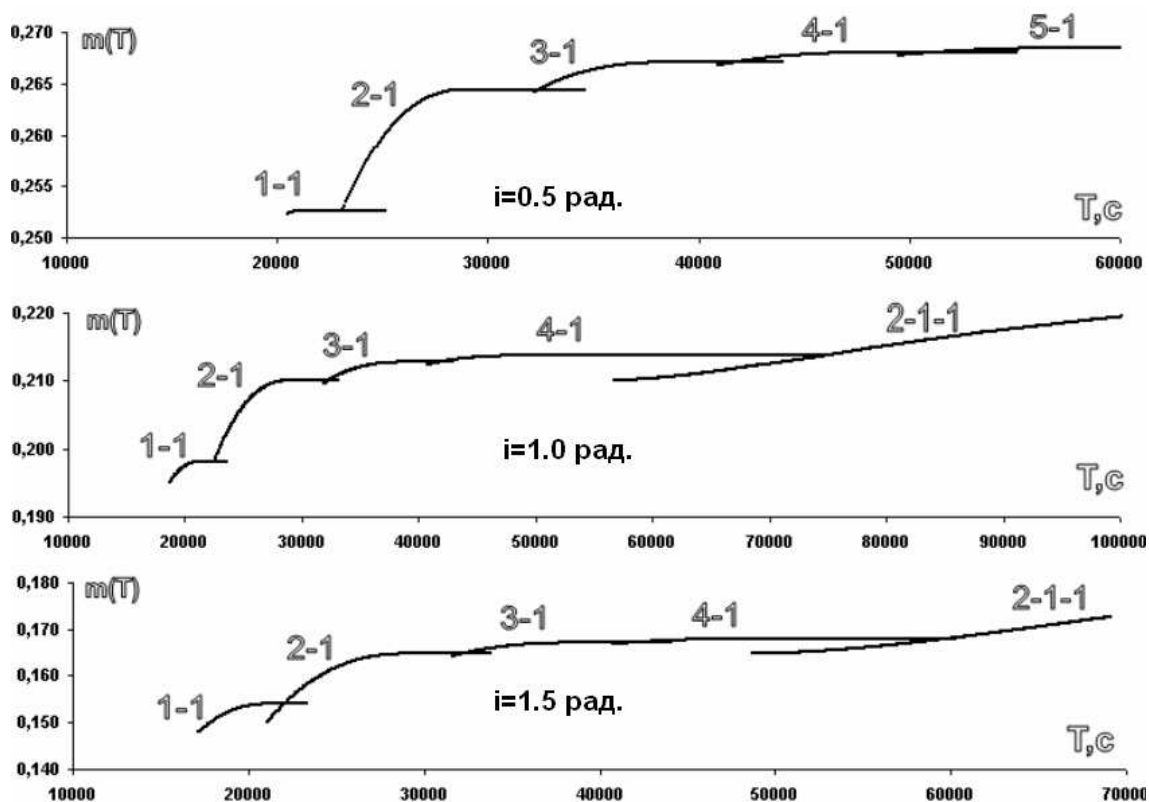


Рис. 27: Этап III. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ($R_T = \Gamma CO$).

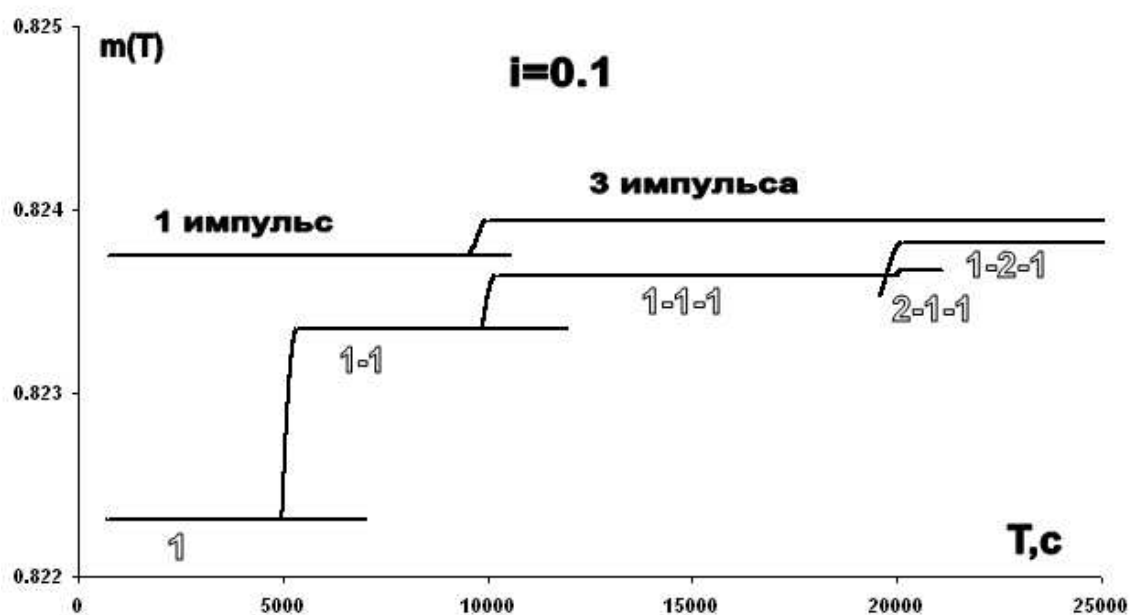


Рис. 28: Этап III. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ($R_0 = R_T = 10.0$ тыс. км, $i = 0.1$ рад., $n_0 = 0.08$, $C = 3.255$ км/с)

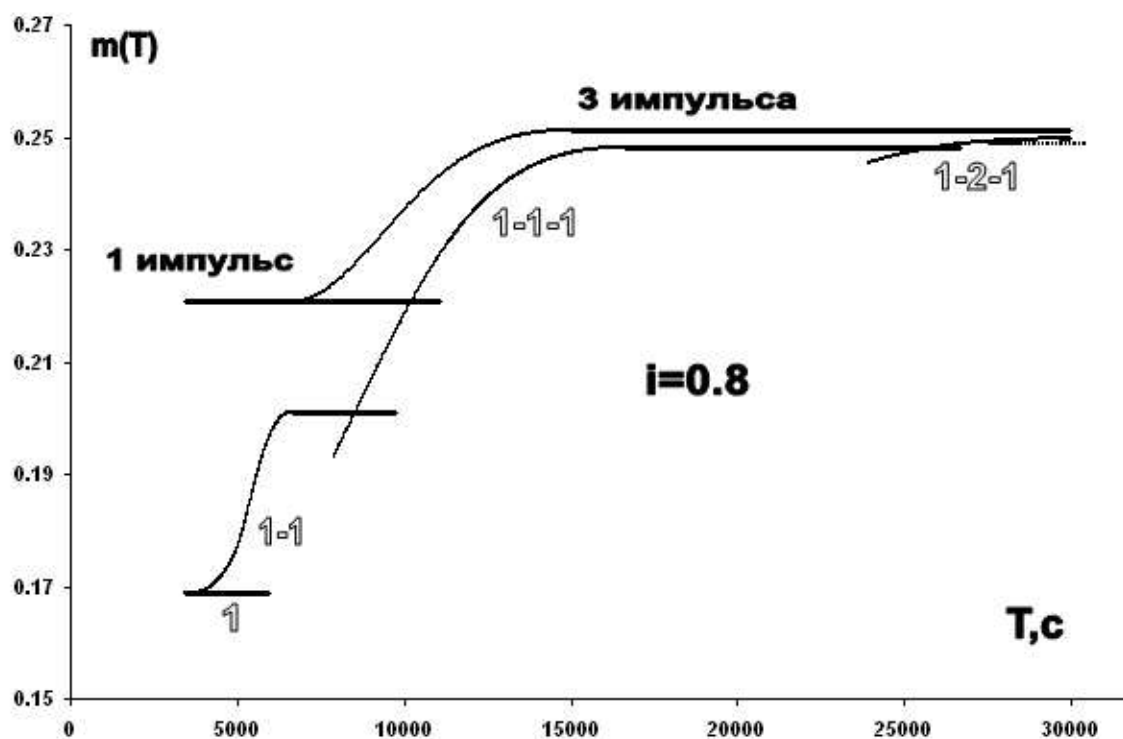


Рис. 29: Этап III. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ($R_0 = R_T = 10.0$ тыс. км, $i = 0.8$ рад., $n_0 = 0.08$, $C = 3.255$ км/с)

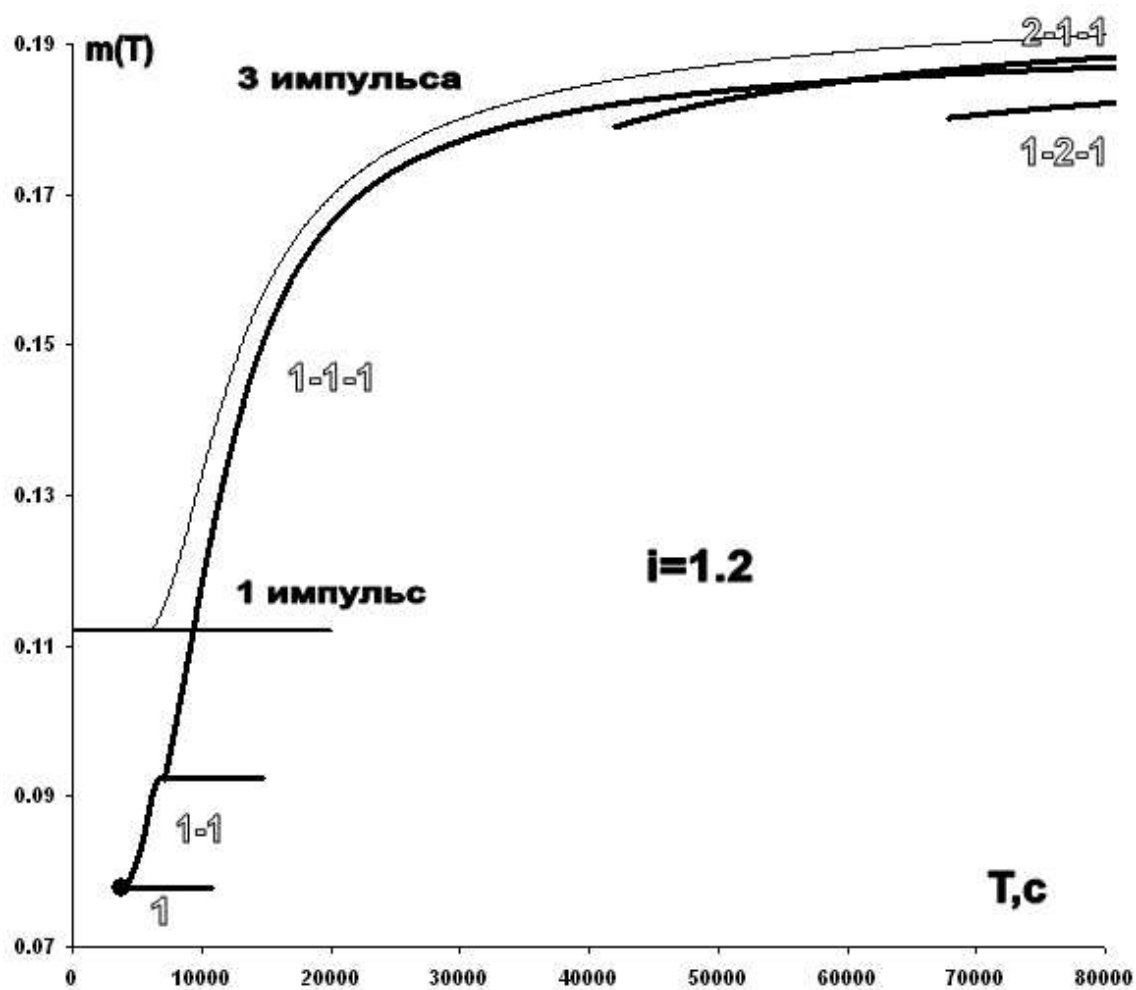


Рис. 30: Этап III. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ($R_0 = R_T = 10.0$ тыс. км, $i = 1.2$ рад., $n_0 = 0.08$, $C = 3.255$ км/с)

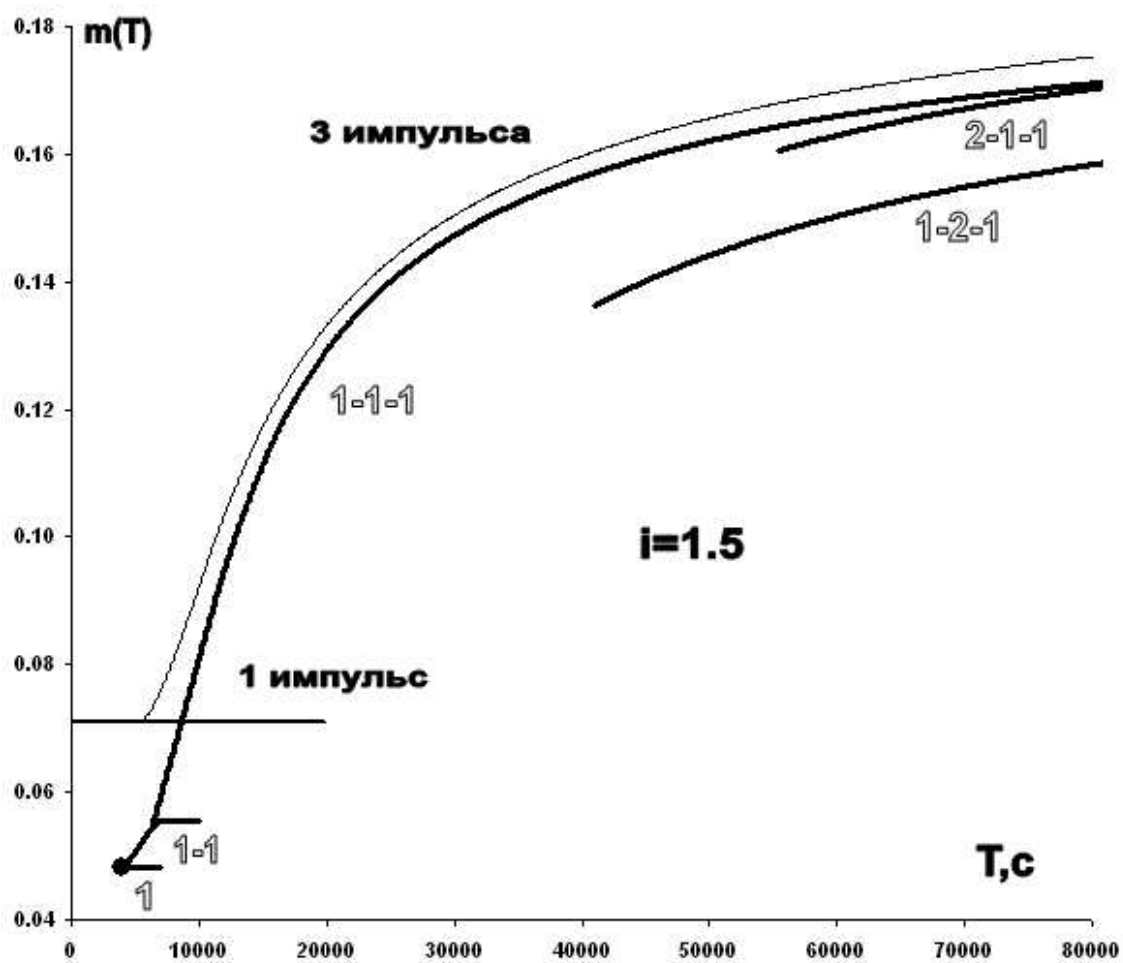


Рис. 31: Этап III. Зависимость конечной массы и времени перелета от структуры траектории ($R_0 = R_T = 10.0$ тыс. км, $i = 1.5$ рад., $n_0 = 0.08$, $C = 3.255$ км/с)

Таблица 14: Функция переключения в точках переключения.

момент	χ
конец 1 активного участка	$-5.2 \cdot 10^{-12}$
конец 1 пассивного участка	$1.4 \cdot 10^{-10}$
конец 2 активного участка	$-2.2 \cdot 10^{-11}$
конец 2 пассивного участка	$2.6 \cdot 10^{-10}$
конец 3 активного участка	$1.2 \cdot 10^{-10}$
конец 3 пассивного участка	$1.2 \cdot 10^{-09}$
конец 4 активного участка	$1.1 \cdot 10^{-09}$
конец 4 пассивного участка	$-1.2 \cdot 10^{-09}$
конец 5 активного участка	$-1.1 \cdot 10^{-09}$
конец 5 пассивного участка	$-3.7 \cdot 10^{-09}$

Таблица 15: Абсолютная погрешность вычисления фазовых переменных.

r тыс. км	ψ рад.	φ рад.	u тыс. км/с	v тыс. км/с	w тыс. км/с	m
$1.6 \cdot 10^{-11}$	$-2.7 \cdot 10^{-13}$	$6.6 \cdot 10^{-12}$	$5.5 \cdot 10^{-14}$	$-3.0 \cdot 10^{-14}$	$1.6 \cdot 10^{-14}$	$3 \cdot 10^{-17}$
$6.0 \cdot 10^{-11}$	$-3.8 \cdot 10^{-11}$	$-5.6 \cdot 10^{-11}$	$-6.4 \cdot 10^{-14}$	$-2.2 \cdot 10^{-13}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-17}$
$3.8 \cdot 10^{-11}$	$-4.8 \cdot 10^{-11}$	$-5.0 \cdot 10^{-11}$	$-8.1 \cdot 10^{-14}$	$-1.6 \cdot 10^{-13}$	$6.9 \cdot 10^{-14}$	$3 \cdot 10^{-17}$
$1.8 \cdot 10^{-10}$	$4.9 \cdot 10^{-11}$	$-7.7 \cdot 10^{-11}$	$2.8 \cdot 10^{-14}$	$-6.5 \cdot 10^{-13}$	$2.5 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-17}$
$1.5 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-11}$	$-7.4 \cdot 10^{-11}$	$-2.1 \cdot 10^{-13}$	$-6.2 \cdot 10^{-13}$	$3.1 \cdot 10^{-13}$	$-6 \cdot 10^{-18}$
$3.1 \cdot 10^{-10}$	$5.4 \cdot 10^{-10}$	$1.4 \cdot 10^{-10}$	$7.5 \cdot 10^{-13}$	$-1.0 \cdot 10^{-12}$	$2.0 \cdot 10^{-13}$	$-6 \cdot 10^{-18}$
$4.7 \cdot 10^{-10}$	$4.6 \cdot 10^{-10}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	$3.8 \cdot 10^{-13}$	$-1.4 \cdot 10^{-12}$	$7.8 \cdot 10^{-13}$	$-4 \cdot 10^{-17}$
$-6.1 \cdot 10^{-10}$	$-3.8 \cdot 10^{-10}$	$2.8 \cdot 10^{-11}$	$-4.6 \cdot 10^{-13}$	$-2.2 \cdot 10^{-13}$	$2.9 \cdot 10^{-13}$	$-4 \cdot 10^{-17}$
$-7.3 \cdot 10^{-10}$	$-5.8 \cdot 10^{-10}$	$4.5 \cdot 10^{-10}$	$1.2 \cdot 10^{-12}$	$-2.1 \cdot 10^{-12}$	$6.2 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-17}$
$-6.1 \cdot 10^{-09}$	$3.2 \cdot 10^{-09}$	$-6.1 \cdot 10^{-09}$	$7.6 \cdot 10^{-12}$	$-9.1 \cdot 10^{-14}$	$1.1 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-17}$

переключения. На полученной таким образом траектории проверяется точность обращения функции переключения в ноль в точках переключения тяги, сохранение первых интегралов — функции Понтрягина $\Delta H(t)$ и $p_\varphi(t)$. Определяется погрешность вычисления фазовых и сопряженных переменных в точках переключения тяги, а именно их отличие от соответствующих значений в численном решении краевой задачи. Также определяется точность обращения вектор-функции невязок в ноль.

По результатам этого теста оказалось, что нули функции переключения определяются с точностью меньшей 10^{-8} (таблица 14). Первые интегралы сохраняются с точностью: $|\Delta H(t)| < 10^{-15}$ и $|p_\varphi(t)| < 10^{-26}$. Радиус вектор вычисляется с точностью до сантиметров, скорости с точностью до мм/с (таблица 15). Если учесть, что скорости имеют порядок 10 км/с, то относительная погрешность вычисления фазовых и сопряженных переменных $< 10^{-8}$ (таблицы 15, 16). Вектор-функция невязок обращается в ноль с точностью $< 10^{-8}$ (таблица 17).

Таблица 16: Относительная погрешность вычисления сопряженных переменных.

p_r	p_ψ	p_u	p_v	p_w	p_m
максимальное значение переменной					
$5.8 \cdot 10^{-04}$	$6.0 \cdot 10^{-03}$	$2.9 \cdot 10^{-01}$	$9.4 \cdot 10^{-01}$	1.0	$2.6 \cdot 10^{-02}$
относительная погрешность					
$-1.2 \cdot 10^{-11}$	$-8.2 \cdot 10^{-12}$	$1.3 \cdot 10^{-11}$	$-3.3 \cdot 10^{-12}$	$-4.2 \cdot 10^{-12}$	$6.4 \cdot 10^{-13}$
$-9.2 \cdot 10^{-11}$	$4.9 \cdot 10^{-11}$	$-5.5 \cdot 10^{-11}$	$-5.1 \cdot 10^{-11}$	$-3.1 \cdot 10^{-11}$	$6.4 \cdot 10^{-13}$
$-6.8 \cdot 10^{-11}$	$4.7 \cdot 10^{-11}$	$-5.8 \cdot 10^{-11}$	$-4.5 \cdot 10^{-11}$	$-1.7 \cdot 10^{-11}$	$1.0 \cdot 10^{-12}$
$4.2 \cdot 10^{-10}$	$4.8 \cdot 10^{-11}$	$1.3 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-10}$	$1.3 \cdot 10^{-10}$	$1.0 \cdot 10^{-12}$
$4.6 \cdot 10^{-10}$	$6.5 \cdot 10^{-11}$	$-1.9 \cdot 10^{-11}$	$1.3 \cdot 10^{-10}$	$1.2 \cdot 10^{-10}$	$2.5 \cdot 10^{-12}$
$3.6 \cdot 10^{-09}$	$-2.1 \cdot 10^{-10}$	$4.4 \cdot 10^{-10}$	$1.5 \cdot 10^{-09}$	$1.2 \cdot 10^{-09}$	$2.5 \cdot 10^{-12}$
$3.5 \cdot 10^{-09}$	$-1.7 \cdot 10^{-10}$	$6.3 \cdot 10^{-10}$	$1.4 \cdot 10^{-09}$	$1.0 \cdot 10^{-09}$	$2.2 \cdot 10^{-11}$
$3.5 \cdot 10^{-09}$	$1.2 \cdot 10^{-10}$	$-2.6 \cdot 10^{-09}$	$-2.3 \cdot 10^{-09}$	$1.7 \cdot 10^{-09}$	$2.2 \cdot 10^{-11}$
$5.0 \cdot 10^{-09}$	$4.2 \cdot 10^{-10}$	$-5.2 \cdot 10^{-09}$	$-3.4 \cdot 10^{-09}$	$2.2 \cdot 10^{-09}$	$-1.9 \cdot 10^{-10}$
$9.8 \cdot 10^{-09}$	$-5.8 \cdot 10^{-09}$	$-3.0 \cdot 10^{-09}$	$-7.2 \cdot 10^{-09}$	$3.0 \cdot 10^{-09}$	$-1.9 \cdot 10^{-10}$

Таблица 17: Вектор-функция невязок.

элемент	значение
$p_r^2(0) + p_\psi^2(0) + p_u^2(0) + p_v^2(0) + p_w^2(0) - 1$	$2.21 \cdot 10^{-13}$
$r(0) - R_0$	0
$u(0)$	$2.58 \cdot 10^{-27}$
$v(0) - V_0 \cos \varphi(0) \sin i$	$1.32 \cdot 10^{-14}$
$w^2(0) + v^2(0) - V_0^2$	$9.86 \cdot 10^{-16}$
$m(0) - 1$	0
$\cos \psi(0) \sin \varphi(0) \sin i - \sin \psi(0) \cos i$	$9.98 \cdot 10^{-13}$
$p_\psi(0) \cos \psi(0) \cos \varphi(0) \sin i + (\sin \psi(0) \sin \varphi(0) \sin i + \cos \psi(0) \cos i) \times$ $\times \left(p_\varphi(0) - \frac{p_v(0)w(0) - p_w(0)v(0)}{w(0)V_0 \sin \varphi(0) \sin i} \right)$	$-2.56 \cdot 10^{-15}$
$r(T) - R_T$	$6.49 \cdot 10^{-09}$
$\psi(T)$	$2.23 \cdot 10^{-09}$
$w(T) - V_T$	$2.21 \cdot 10^{-11}$
$u(T)$	$1.86 \cdot 10^{-11}$
$p_\varphi(T)$	$3.42 \cdot 10^{-27}$
$v(T)$	$-2.02 \cdot 10^{-11}$
$H(T)$	$-5.13 \cdot 10^{-15}$

Таблица 18: Результаты второго теста.

переменная	Δ
r	$-9.05 \cdot 10^{-13}$
ψ	$-1.65 \cdot 10^{-13}$
φ	$-1.18 \cdot 10^{-13}$
u	$-1.02 \cdot 10^{-15}$
v	$1.94 \cdot 10^{-15}$
w	$-7.46 \cdot 10^{-17}$
m	$9.22 \cdot 10^{-18}$
p_r	$-2.08 \cdot 10^{-15}$
p_ψ	$1.43 \cdot 10^{-16}$
p_φ	0
p_u	$1.44 \cdot 10^{-13}$
p_v	$-2.07 \cdot 10^{-12}$
p_w	$-1.97 \cdot 10^{-12}$
p_m	$1.22 \cdot 10^{-15}$

2. Схема просчета траектории аналогична первому тесту. Решаются задачи Коши "вперед" и "назад". Сравнивается отличие полученных в результате такого просчета значений фазовых и сопряженных переменных от исходных значений. Из таблицы 18 видно, что полученная разность имеет порядок 10^{-12} .

Проведенные тесты позволяют предположить, что с помощью предложенной вычислительной схемы краевая задача решена с достаточно высокой точностью.

А Задачи оптимизации межорбитальных космических перелётов в импульсной постановке

А.1 Общие сведения

Известно, что решаемые в импульсной постановке задачи оптимизации траекторий перелета КА с РДБТ, в которых система дифференциальных уравнений неуправляемого (пассивного) движения КА имеет полный набор первых интегралов (общий интеграл), как, например, система дифференциальных уравнений пассивного движения КА в вакууме в центральном ньютоновском гравитационном поле одного притягивающего центра [63, с. 39,40], могут быть сведены для некоторых типов функционалов и краевых условий к задачам математического (нелинейного) программирования — конечномерным задачам, не требующим решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности, к определению условного или безусловного экстремума функции одного, двух и т.д. независимых переменных [63]. Приведем некоторые результаты решения импульсных задач оптимизации перелётов КА в центральном ньютоновском поле.

Расчёт импульсных маневров обычно проводят в терминах требуемого приращения скорости. Полученное решение можно пересчитать в затраты топлива на перелёт, если известны характеристики двигательной установки. Для этого используется формула Циолковского $m_1 = m_0 e^{-\Delta V/C}$, где m_0 — масса КА до импульса, m_1 — после импульса, ΔV — величина импульса, C — скорость истечения реактивной струи. Обозначение \tilde{r} означает радиус, отнесенный к радиусу начальной орбиты, \tilde{V} — скорость отнесенная к скорости движения по начальной круговой орбите.

В случае компланарных круговых орбит рассматриваются двух- и трехимпульсные траектории. Затраты скорости при оптимальном гомановском двухимпульсном перелете вычисляются по формулам [63]:

$$\Delta \tilde{V}_1 = \sqrt{2\tilde{r}/(1+\tilde{r})} - 1, \quad \Delta \tilde{V}_2 = (1 - \sqrt{2/(1+\tilde{r})})/\sqrt{\tilde{r}}.$$

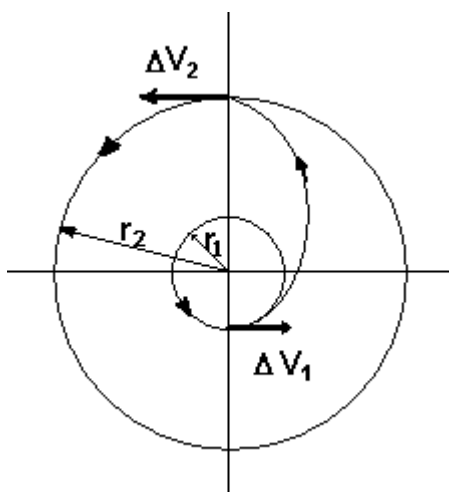


Рис. 32: Схема двухимпульсного перелета.

Затраты скорости при трехимпульсном апсидальном перелете вычисляются по формулам:

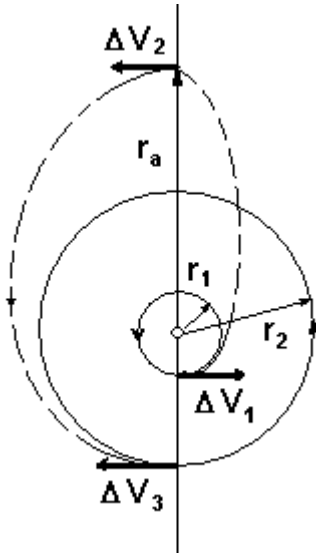


Рис. 33: Схема трехимпульсного перелета.

$$\begin{aligned}\Delta \widetilde{V}_1 &= \sqrt{2\widetilde{r}_a/(1+\widetilde{r}_a)} - 1, \\ \Delta \widetilde{V}_2 &= (\sqrt{2\widetilde{r}/(\widetilde{r}+\widetilde{r}_a)} - \sqrt{2/(1+\widetilde{r}_a)})/\sqrt{\widetilde{r}_a}, \\ \Delta \widetilde{V}_3 &= \pm \sqrt{2\widetilde{r}_a/(\widetilde{r}+\widetilde{r}_a)}/\sqrt{\widetilde{r}},\end{aligned}$$

где r_a — радиус апоцентра, в котором сообщается второй импульс. Знак "+" в выражении для $\Delta \widetilde{V}_3$ соответствует случаю $r_a > r_2$, "-" в случае $r_a < r_2$.

Разница в приращении скорости на перелёт в случае двухимпульсного и трехимпульсного перелета (при $r_a \rightarrow \infty$):

$$\delta \widetilde{V}(\widetilde{r}) = \sqrt{2} \left\{ (\widetilde{r} - 1)/\sqrt{\widetilde{r}(1 + \widetilde{r})} + (\sqrt{2} - 1)/\sqrt{(\widetilde{r}) - 1} \right\}.$$

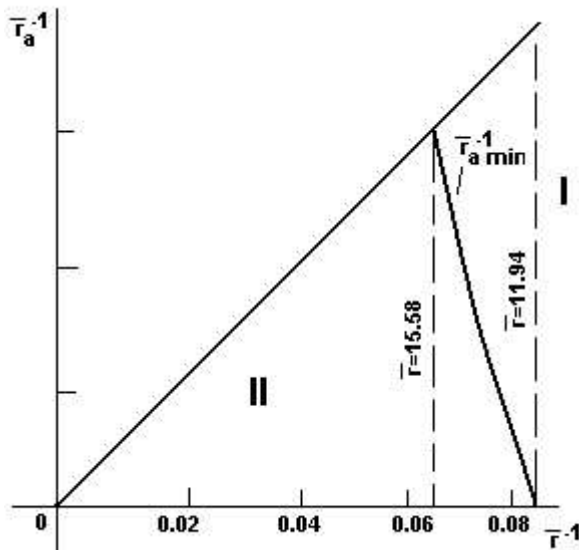


Рис. 34: Области оптимальности двух- и трехимпульсного перелета.

На рисунке 34 r_{amin} — радиус апоцентра, при котором затраты характеристической скорости на двух- и трехимпульсный перелёт одинаковы. Область I — область оптимальности двухимпульсного перелета, II — трехимпульсного.

При соотношении радиусов орбит $\tilde{r} < 11.94$ затраты массы минимальны при двухимпульсном гомановском перелете; для $11.94 < \tilde{r} < 15.58$ существует величина апоцентрического расстояния $r_\alpha > R_T$, для которой затраты массы при трехимпульсном биэллиптическом перелете будут меньше, чем при двухимпульсном; при $R_T/R_0 > 15.58$ затраты массы при трехимпульсном биэллиптическом перелета с любым апоцентрическим расстоянием $r_\alpha > R_T$ меньше, чем при двухимпульсном (выигрыш в затратах массы при использовании трехимпульсного перелета вместо двухимпульсного не превышает 8%, время перелета увеличивается в несколько раз)[63, 25].

Схемы двух- и трехимпульсного перелетов в пространственном случае отличаются от плоского тем, что в моменты приложения импульсов меняется не только радиус апоцентра или перицентра, но и наклон плоскости орбиты. При перелете между круговыми некомпланарными орбитами импульсы прикладываются в точках пересечения плоскостей орбит. Затраты скорости при двухимпульсном перелете вычисляются по формулам [63]:

$$\Delta\tilde{V}_1 = \sqrt{\frac{1+3\tilde{r}}{1+\tilde{r}} - 2\sqrt{\frac{2\tilde{r}}{1+\tilde{r}}} \cos i_1}, \quad \Delta\tilde{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \sqrt{\frac{3+\tilde{r}}{1+\tilde{r}} - 2\sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}}} \cos(i-i_1)},$$

где i — угол между плоскостями орбит, i_1 — угол поворота плоскости в момент приложения первого импульса, который определяется из условия $d(\Delta\tilde{V}_1 + \Delta\tilde{V}_2)/di_1 = 0$:

$$\frac{\tilde{r} \sin i}{\sqrt{1+3\tilde{r} - 2\sqrt{2\tilde{r}(1+\tilde{r})} \cos i_1}} - \frac{\sin i \cos i_1 - \cos i \sin i_1}{\sqrt{3+\tilde{r} - 2\sqrt{2(1+\tilde{r})}(\cos i \cos i_1 + \sin i \sin i_1)}} = 0.$$

Оптимальный угол $i_1^{\text{опт}}$ не превышает нескольких градусов.

Затраты характеристической скорости при трехимпульсном перелете вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{V}_1 &= \sqrt{\frac{1+3\tilde{r}_a}{1+\tilde{r}_a} - 2\sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1+\tilde{r}_a}} \cos i_1}, \\ \Delta\tilde{V}_2 &= \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}_a}} \sqrt{\frac{1}{1+\tilde{r}_a} + \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}+\tilde{r}_a} - 2\sqrt{\frac{\tilde{r}}{(1+\tilde{r}_a)(\tilde{r}+\tilde{r}_a)}} \cos i_2}, \\ \Delta\tilde{V}_3 &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \sqrt{\frac{\tilde{r}+3\tilde{r}_a}{\tilde{r}+\tilde{r}_a} - 2\sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{\tilde{r}+\tilde{r}_a}} \cos(i-i_1-i_2)}. \end{aligned}$$

Если $i < 30^\circ$ и $\tilde{r} < 8$, то оптимальным является двухимпульсный перелёт. Если $i > 45^\circ$ или $\tilde{r} > 11.94$, то оптимальным будет трехимпульсный перелёт с $\tilde{r}_a = \infty$. В остальных случаях можно выбрать величину апоцентрического расстояния, при котором оптимальным будет трехимпульсный перелёт. При углах некомпланарности $i > 45^\circ$ затраты характеристической скорости при перелетах на удаленные орбиты меньше, чем на близкие орбиты.

Неапсидальные трехимпульсные перелеты исследованы в работах [43, 44, 45].

А.2 Импульсная постановка задач ракетодинамики

Решению в импульсной постановке задач оптимизации траекторий перелетов КА с РДБТ посвящено большое количество работ (см., например, обзор [85]; статьи, сборники, монографии [27, 31, 43, 44, 45, 46, 48, 50, 52, 53, 54, 59, 62, 63, 80, 81] и библиографию в них).

Если система дифференциальных уравнений пассивного движения не имеет общего интеграла, как, например, система дифференциальных уравнений движения КА в вакууме в сложном гравитационном поле нескольких притягивающих центров, то задача оптимизации траекторий перелета КА с РДБТ в импульсной постановке не сводится к задаче математического программирования, но может быть сведена к задаче на условный экстремум в функциональном пространстве [3, с. 252]. Эта задача не является задачей оптимального управления: в ней нет управляющих функций (управлений) в обычном понимании [3, 70], и воздействие на траекторию осуществляется посредством мгновенных скачкообразных (импульсных) изменений вектора скорости — импульсов скорости (импульсных воздействий), величина, направление и в общем случае моменты осуществления которых подлежат определению. Решение такой задачи на основе необходимых условий оптимальности первого порядка требует решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

При получении необходимых условий оптимальности первого порядка для решаемых в импульсной постановке задач оптимизации траекторий перелетов КА с РДБТ в настоящее время используется несколько подходов. В одном из них необходимые условия оптимальности получаются из необходимых условий оптимальности для задач оптимизации траекторий перелета КА с РДБТ в результате предельного перехода по тяге — при стремлении тяги к бесконечности, а времени ее действия к нулю (см., например, [43, с. 32–40]; [46, с. 90–94]; [54, с. 73]). Следует отметить, что математическая корректность такого предельного перехода не очевидна и требует обоснования. В другом подходе необходимые условия оптимальности для рассматриваемых задач получаются в результате непосредственного использования метода вариаций (см., например, [31]; [46, с. 77–90]). Такой подход в общем случае связан со значительным объемом нетривиальных громоздких преобразований, вследствие чего, по-видимому, необходимые условия оптимальности первого порядка с использованием этого подхода получены лишь в процессе решения некоторых конкретных задач оптимизации траекторий перелета КА с РДБТ при минимальных затратах массы и лишь для задач с терминальными ограничениями. Помимо двух указанных подходов, необходимые условия оптимальности первого порядка в рассматриваемых задачах могут быть получены и другими способами, например, в результате использования теории управления динамическими системами с управлениями из класса обобщенных функций [36, 37, 49, 61] или в результате импульсно-траекторного расширения задачи [32] путем включения процессов с разрывными траекториями и управлениями импульсного типа в число допустимых. В частности, задачу оптимизации траектории перелета КА с РДБТ в импульсной постановке можно представить как задачу оптимального управления с управлением из класса обобщенных функций, задав величину вектора тяги с помощью δ -функции Дирака, и, воспользовавшись методикой [61], получить необходимые условия оптимальности для такой задачи в форме обобщенного (интегрального) принципа максимума. Можно, следуя [36, 37], преобразовать рассматриваемую задачу оптимизации траекторий перелета КА с РДБТ к задаче оптимального управления с дифференциальными связями, содержащими управления в виде произведений разрывных функций на импульсные, и для такой задачи получить необходимые условия

оптимальности по методике [36, 37]. (Об использовании этого подхода при решении задач оптимизации перелетов КА с РДБТ в импульсной постановке см., например, [36, § 6.3.]).

Задачи в импульсной постановке используются не только в ракетодинамике, но и в других областях науки. В связи с этим, следует отметить работу [33], в которой предложена интересная теория оптимизации импульсных решений и их приложений в различных областях.

В работе [23] необходимые условия оптимальности первого порядка для решаемых в импульсной постановке задач оптимизации траекторий перелетов КА с РДБТ получаются в результате сведения этих задач к задачам на условный экстремум в функциональном пространстве и использования универсального способа получения необходимых условий оптимальности первого порядка в задачах на условный экстремум — принципа Лагранжа снятия ограничений. (Обоснование принципа Лагранжа для задач на условный экстремум в функциональном пространстве см. [3, с. 252]). Приводится подробное описание алгоритма перехода от задачи оптимизации траекторий перелета КА с РДБТ к оптимизационной задаче в импульсной постановке и математически корректная методика получения необходимых условий оптимальности первого порядка в этой задаче. Алгоритм и методика позволяют формализовать переход от задачи оптимизации в импульсной постановке к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и применимы при решении в импульсной постановке на основе необходимых условий оптимальности первого порядка любых задач оптимизации траекторий перелета КА с РДБТ, для которых импульсная постановка имеет смысл, в частности, задач не только с терминальными, но и с промежуточными и прочими ограничениями типа равенств и неравенств. Функционал задачи при этом может быть отличен от функционала задачи минимизации затрат массы, традиционно решаемой в импульсной постановке.

В данной работе используется модификация способа предложенного в [23].

Заметим, что импульсная постановка для задачи оптимизации может не иметь смысла, как, например, для задачи о наискорейших перелетах КА с РДБТ в гравитационном поле в вакууме при не ограниченной заранее конечной массе в случае, когда тяга в процессе полета оказывается всегда включенной и максимальной [21, 38].

Приведем краевые задачи в импульсной постановке, соответствующие рассматриваемым в гл. 2–4 задачам оптимального управления движением КА.

А.3 Краевая задача. Плоский случай. Два импульса.

А.3.1 Постановка задачи.

Рассматривается задача оптимизации перелета КА между круговыми компланарными орбитами ИСЗ. Без ограничения общности точка старта предполагается фиксированной ($\varphi(0) = 0$). Траектория делится на участки: до момента первого импульса ($t = 0_-$), участок пассивного движения по кеплеровской траектории после первого импульса и до второго ($t \in [0_+; T_-]$), после второго импульса ($t = T_+$).

Плоское движение центра масс КА в центральном ньютоновском гравитационном поле одного притягивающего центра в пустоте описывается в связанной с притягивающим центром полярной системе координат дифференциальными уравнениями [27]:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= 0, & \dot{r} &= u, & \dot{\varphi} &= v/r, \\ \dot{u} &= v^2/r - \mu/r^2, & \dot{v} &= -uv/r; \end{aligned} \quad (72)$$

Фазовые координаты в моменты времени $t = 0_-, 0_+, T_-, T_+$ принадлежат следующим многообразиям:

при $t = 0_-$ многообразию G_{0-} , задаваемому условиями:

$$m(0_-) = 1, \quad r(0_-) = R_0, \quad \varphi(0_-) = 0, \quad u(0_-) = 0, \quad v(0_-) = V_0, \quad (73)$$

где R_0 — радиус исходной орбиты КА; $V_0 \equiv \sqrt{\mu/R_0}$ — скорость движения КА по исходной круговой орбите ИСЗ;

при $t = 0_+$ многообразию G_{0+} :

$$m(0_+) = m(0_-)e^{-\Delta V_0/c}, \quad r(0_+) = r(0_-), \quad \varphi(0_+) = \varphi(0_-), \quad (74)$$

где $\Delta V_0 = \sqrt{(u(0_+) - u(0_-))^2 + (v(0_+) - v(0_-))^2}$, c — скорость истечения реактивной струи (постоянная величина, не зависящая от величины тяги), $c = g_3 P_{ud}$, P_{ud} — удельная тяга (постоянная величина);

при $t = T_-$ многообразию G_{T-} :

$$m(T_+) = m(T_-)e^{-\Delta V_1/c}, \quad r(T_+) = r(T_-), \quad \varphi(T_+) = \varphi(T_-), \quad (75)$$

где $\Delta V_1 = \sqrt{(u(T_+) - u(T_-))^2 + (v(T_+) - v(T_-))^2}$;

при $t = T_+$ многообразию G_{T+} :

$$r(T_+) = R_T, \quad u(T_+) = 0, \quad v(T_+) = V_T, \quad (76)$$

где R_T — радиус конечной орбиты, $V_T \equiv \sqrt{\mu/R_T}$ — скорость движения КА по конечной круговой орбите.

Минимизируется терминальный функционал:

$$I \equiv -m(T_+) \rightarrow \inf. \quad (77)$$

А.3.2 Необходимые условия оптимальности

Функция \mathcal{H} и терминант l задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(m, r, \varphi, u, v, p_m, p_r, p_\varphi, p_u, p_v) &\equiv p_r u + p_\varphi v + p_u (v^2/r - \mu/r^2) - p_v uv/r, \\ l &\equiv -\lambda_0 m(T_+) + \lambda_{m0-} (m(0_-) - 1) + \lambda_{r0-} (r(0_-) - R_0) + \lambda_{\varphi 0-} \varphi(0_-) + \\ &+ \lambda_{u0-} u(0_-) + \lambda_{v0-} (v(0_-) - V_0) + \\ &+ \lambda_{r0+} (r(0_+) - r(0_-)) + \lambda_{\varphi 0+} (\varphi(0_+) - \varphi(0_-) + \lambda_{m0+} (m(0_+) - m(0_-)e^{-\Delta V_0/c}) + \\ &+ \lambda_{rT-} (r(T_+) - r(T_-)) + \lambda_{\varphi T-} (\varphi(T_+) - \varphi(T_-) + \lambda_{mT-} (m(T_+) - m(T_-)e^{-\Delta V_1/c}) + \\ &+ \lambda_{rT+} (r(T_+) - R_T) + \lambda_{uT+} u(T_+) + \lambda_{vT+} (v(T_+) - V_T), \end{aligned} \quad (78)$$

где непрерывные кусочно-гладкие функции (сопряженные переменные) $p_i(t)$ ($i = m, r, \varphi, u, v$) и числа λ_0 , λ_{i0} ($i = m, r, \varphi, u, v$), λ_{iT} ($i = r, u, v$) — множители Лагранжа.

- уравнения Эйлера (сопряженная система $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial i}$, $i = m, r, \varphi, u, v$):

$$\begin{aligned} \dot{p}_m &= 0 \\ \dot{p}_r &= p_\varphi v/r^2 + p_u (v^2/r - 2\mu/r^3) - p_v uv/r^2 \\ \dot{p}_\varphi &= 0 \\ \dot{p}_u &= -p_r + p_v v/r \\ \dot{p}_v &= -r_\varphi/r - p_u 2u/r + p_v u/r; \end{aligned} \quad (79)$$

- условия трансверсальности по фазовым переменным:

$$\begin{aligned}
(p_i(0_+) = \frac{\partial l}{\partial i(0_+)}, \quad p_i(T_-) = -\frac{\partial l}{\partial i(T_-)}, \quad i = m, r, \varphi, u, v): \\
\begin{aligned}
p_m(0_+) &= \lambda_{m0+}, \quad p_m(T_-) = \lambda_{mT-} e^{-\Delta V_1/c}, \\
p_r(0_+) &= \lambda_{r0+}, \quad p_\varphi(0_+) = \lambda_{\varphi0+}, \\
p_u(0_+) &= \lambda_{m0+} m(0_-) e^{-\Delta V_0/c} \frac{u(0_+) - u(0_-)}{\Delta V_0 c}, \\
p_v(0_+) &= \lambda_{m0+} m(0_-) e^{-\Delta V_0/c} \frac{v(0_+) - v(0_-)}{\Delta V_0 c}, \\
p_r(T_-) &= \lambda_{rT-}, \quad p_\varphi(T_-) = \lambda_{\varphi T-}, \\
p_u(T_-) &= \lambda_{mT-} m(T_-) e^{-\Delta V_1/c} \frac{u(T_+) - u(T_-)}{\Delta V_1 c}, \\
p_v(T_-) &= \lambda_{mT-} m(T_-) e^{-\Delta V_1/c} \frac{v(T_+) - v(T_-)}{\Delta V_1 c};
\end{aligned}
\end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned}
(p_i(0_-) = \frac{\partial l}{\partial i(0_-)} = 0, \quad p_i(T_+) = \frac{\partial l}{\partial i(T_+)} = 0, \quad i = m, r, \varphi, u, v): \\
\begin{aligned}
0 &= p_m(0_-) = \lambda_{m0-} - \lambda_{m0+} e^{-\Delta V_0/c}, \quad 0 = p_m(T_+) = -\lambda_0 + \lambda_{mT-}, \\
0 &= p_r(0_-) = \lambda_{r0-} - \lambda_{r0+}, \quad 0 = p_\varphi(0_-) = \lambda_{\varphi0-} - \lambda_{\varphi0+}, \\
0 &= p_u(0_-) = \lambda_{u0-} - \lambda_{m0+} m(0_-) e^{-\Delta V_0/c} \frac{u(0_+) - u(0_-)}{\Delta V_0 c}, \\
0 &= p_v(0_-) = \lambda_{v0-} - \lambda_{m0+} m(0_-) e^{-\Delta V_0/c} \frac{v(0_+) - v(0_-)}{\Delta V_0 c}, \\
0 &= p_r(T_+) = \lambda_{rT+} - \lambda_{rT-}, \quad 0 = p_\varphi(T_+) = \lambda_{\varphi T+} - \lambda_{\varphi T-}, \\
0 &= p_u(T_+) = \lambda_{uT+} - \lambda_{mT-} m(T_-) e^{-\Delta V_1/c} \frac{u(T_+) - u(T_-)}{\Delta V_1 c}, \\
0 &= p_v(T_+) = \lambda_{vT+} - \lambda_{mT-} m(T_-) e^{-\Delta V_1/c} \frac{v(T_+) - v(T_-)}{\Delta V_1 c};
\end{aligned}
\end{aligned} \tag{81}$$

- условие стационарности по T_- ($\mathcal{H}(T_-) = \frac{\partial l}{\partial T_-}$):

$$\mathcal{H}(T_-) = 0; \tag{82}$$

- условие неотрицательности:

$$\lambda_0 \geq 0; \tag{83}$$

- условие НЕРавенства Одновременно Нулю всех множителей Лагранжа (условие НЕРОН):

$$\sum_{i=r,\varphi,u,v,m} \|p_i\|_{KC_1} + \sum_{i=m,r,\varphi,u,v} |\lambda_{i0-}| + \sum_{i=m,r,\varphi} (|\lambda_{i0+}| + |\lambda_{iT-}|) + \sum_{i=r,u,v} |\lambda_{iT+}| + |\lambda_0| \neq 0. \tag{84}$$

А.3.3 Краевая задача

Соотношения (72)-(76), (78)-(84) представляют собой краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Неизвестными в ней являются 10 фазовых и сопряженных переменных в момент $t = 0_-$, 10 постоянных интегрирования системы дифференциальных уравнений (72),(79) на участке $t \in [0_+; T_-]$, время перелета T , числовые множители Лагранжа λ_0 , λ_{i0-} ($i = m, r, \varphi, u, v$), λ_{i0+} ($i = m, r, \varphi$), λ_{iT-} ($i = m, r, \varphi$), λ_{iT+} ($i = r, u, v$) — всего 36 неизвестных. Для их определения имеется 36 условий — 14 граничных условий (73)-(76), 20 условий трансверсальности (80)-(81), условие стационарности (82) и условие нормировки, связанное с однородностью

условий принципа Лагранжа по множителям Лагранжа, позволяющей выбирать их с точностью до положительного сомножителя. Условие нормировки совпадает с условием нормировки в соответствующей задаче оптимального управления (гл. 2):

$$p_r^2(0_+) + p_u^2(0_+) + p_v^2(0_+) = 1. \quad (85)$$

Выбор такого условия правомерен, т.к. обращение в ноль суммы

$$p_r^2(0_+) + p_u^2(0_+) + p_v^2(0_+)$$

противоречит условию НЕРОН (84).

Заметим также, что из условий трансверсальности $p_m(T_-) = \lambda_{mT_-} e^{-\Delta V/c}$, $p_m(T_+) = -\lambda_0 + \lambda_{mT_-} = 0$ и условия неотрицательности (83) следует что $p_m(t) \geq 0$, $t \in [0_+; T_-]$.

Неизвестные переменные в точках $t = 0_-$ и $t = T_+$ можно исключать как после постановки задачи, так и после применения принципа Лагранжа. Оба способа приводят к одинаковому результату.

Краевая задача имеет следующий вид. Система уравнений (72), (79). Неизвестные:

$$r(0_+), \varphi(0_+), u(0_+), v(0_+), m(0_+), p_r(0_+), p_\varphi(0_+), p_u(0_+), p_v(0_+), p_m(0_+), T; \quad (86)$$

Условия:

$$\begin{aligned} r(0_+) &= R_0, \quad \varphi(0_+) = 0, \quad m(0_+) = e^{-\Delta V_0/c}, \\ p_u(0_+) &= \frac{p_m(0_+)m(0_+)u(0_+)}{\Delta V_0 c}, \quad p_v(0_+) = \frac{p_m(0_+)m(0_+)(v(0_+) - V_0)}{\Delta V_0 c}, \\ p_r^2(0_+) + p_u^2(0_+) + p_v^2(0_+) &= 1, \\ r(T_-) &= R_T, \quad p_\varphi(T_-) = 0, \quad \mathcal{H}(T_-) = 0, \\ p_u(T_-) &= -\frac{p_m(T_-)m(T_-)u(T_-)}{\Delta V_1 c}, \quad p_v(T_-) = \frac{p_m(T_-)m(T_-)(V_1 - v(T_-))}{\Delta V_1 c}. \end{aligned} \quad (87)$$

При численном построении решений можно заменить $u(0_+)$, $v(0_+)$ на ΔV_0 , θ — величину и угол между вектором тяги и радиус-вектором, отсчитываемый от положительного направления радиус-вектора в ту же сторону, что и угол φ . Тогда $u(0_+) = \Delta V_0 \cos \theta$, $V(0_+) = V_0 + \Delta V_0 \sin \theta$.

В результате решения этой краевой задачи определяются удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности первого порядка траектории импульсного перелета КА (экстремали задачи).

А.4 Краевая задача. Пространственный случай. Два импульса.

А.4.1 Постановка задачи

Рассматривается задача перелета КА между круговыми орбитами ИСЗ. Без ограничения общности считается, что целевая орбита находится в экваториальной плоскости ($i = 0$), а долгота восходящего узла начальной орбиты равна нулю. Траектория делится на участки: до момента первого импульса ($t = 0_-$), участок пассивного движения по кеплеровской траектории после первого импульса и до второго ($t \in [0_+; T_-]$), после второго импульса ($t = T_+$).

Движение центра масс КА в центральном ньютоновском гравитационном поле одного притягивающего центра в пустоте описывается в сферической системе координат дифференциальными уравнениями [27]:

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= 0, \\
\dot{r} &= u, \\
\dot{\psi} &= v/r, \\
\dot{\varphi} &= w/r \cos \psi, \\
\dot{u} &= v^2/r + w^2/r - \mu/r^2, \\
\dot{v} &= -uv/r - w^2 \operatorname{tg} \psi/r, \\
\dot{w} &= -uw/r + vw \operatorname{tg} \psi/r;
\end{aligned} \tag{88}$$

Фазовые координаты в моменты времени $t = 0_-, 0_+, T_-, T_+$ принадлежат следующим многообразиям:

при $t = 0_-$ многообразию G_{0-} , задаваемому условиями:

$$\begin{aligned}
m(0_-) &= 1, \quad r(0_-) = R_{0-}, \quad u(0_-) = 0, \quad v(0_-) = V_0 \cos \varphi(0_-) \sin i, \\
w^2(0_-) + v^2(0_-) &= V_0^2, \quad \cos \psi(0_-) \sin \varphi(0_-) \sin i - \sin \psi(0_-) \cos i = 0,
\end{aligned} \tag{89}$$

где R_0 — радиус исходной орбиты КА, $V_0 \equiv \sqrt{\mu/R_0}$ — скорость движения КА по исходной круговой орбите ИСЗ, i — наклонение исходной орбиты;

при $t = 0_+$ многообразию G_{0+} :

$$\begin{aligned}
m(0_+) &= m(0_-) e^{-\Delta V_0/c}, \quad r(0_+) = r(0_-), \\
\psi(0_+) &= \psi(0_-), \quad \varphi(0_+) = \varphi(0_-),
\end{aligned} \tag{90}$$

где $\Delta V_0 = \sqrt{(u(0_+) - u(0_-))^2 + (v(0_+) - v(0_-))^2 + (w(0_+) - w(0_-))^2}$;
при $t = T_-$ многообразию G_{T-} :

$$\begin{aligned}
m(T_+) &= m(T_-) e^{-\Delta V_1/c}, \quad r(T_+) = r(T_-), \\
\psi(T_+) &= \psi(T_-), \quad \varphi(T_+) = \varphi(T_-),
\end{aligned} \tag{91}$$

где $\Delta V_1 = \sqrt{(u(T_+) - u(T_-))^2 + (v(T_+) - v(T_-))^2 + (w(T_+) - w(T_-))^2}$;
при $t = T_+$ многообразию G_{T+} :

$$r(T_+) = R_T, \quad u(T_+) = 0, \quad v(T_+) = 0, \quad w(T_+) = V_T, \quad \psi(T_+) = 0, \tag{92}$$

где R_T — радиус конечной орбиты, $V_T \equiv \sqrt{\mu/R_T}$ — скорость движения КА по конечной круговой орбите.

Минимизируется терминальный функционал:

$$I \equiv -m(T_+) \rightarrow \inf. \tag{93}$$

A.4.2 Необходимые условия оптимальности

Функция \mathcal{H} и терминант l задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(m, r, \psi, \varphi, u, v, w, P, \theta, \gamma, p_m, p_r, p_\psi, p_\varphi, p_u, p_v, p_w) \equiv \\ \equiv p_r u + p_\psi v/r + p_\varphi w/r \cos \psi + p_u(v^2/r + w^2/r - \mu/r^2) + \\ + p_v(-uv/r - w^2 \operatorname{tg} \psi/r) + p_w(-uw/r + vw \operatorname{tg} \psi/r), \\ l \equiv \lambda_0(-m(T_+)) + \lambda_{m0-}(m(0_-) - 1) + \lambda_{r0-}(r(0_-) - R_0) + \\ + \lambda_{u0-}u(0_-) + \lambda_{v0-}(v(0_-) - V_0 \cos \varphi(0_-) \sin i) + \lambda_{w0-}(w^2(0_-) + v^2(0_-) - V_0^2) + \\ + \lambda_{n0-}(\cos \psi(0_-) \sin \varphi(0_-) \sin i - \sin \psi(0_-) \cos i) + \\ + \lambda_{r0+}(r(0_+) - r(0_-)) + \lambda_{\psi0+}(\psi(0_+) - \psi(0_-)) + \lambda_{\varphi0+}(\varphi(0_+) - \varphi(0_-)) + \\ + \lambda_{m0+}(m(0_+) - m(0_-)e^{-\Delta V_0/c}) + \lambda_{rT-}(r(T_+) - r(T_-)) + \lambda_{\psi T-}(\psi(T_+) - \psi(T_-)) + \\ + \lambda_{\varphi T-}(\varphi(T_+) - \varphi(T_-)) + \lambda_{mT-}(m(T_+) - m(T_-)e^{-\Delta V_1/c}) + \lambda_{rT+}(r(T_+) - R_T) + \\ + \lambda_{uT+}u(T_+) + \lambda_{vT+}v(T_+) + \lambda_{wT+}(w(T_+) - V_T) + \lambda_{\psi T+}\psi(T_+), \end{aligned} \quad (94)$$

где непрерывные кусочно-гладкие функции (сопряженные переменные) $p_i(t)$ ($i = m, r, \psi, \varphi, u, v, w$) и числа λ_0 , λ_{i0-} ($i = m, r, n, u, v, w$), λ_{i0+} ($i = m, r, \psi, \varphi$), λ_{iT-} ($i = m, r, \psi, \varphi$), λ_{iT+} ($i = r, \psi, u, v, w$) — множители Лагранжа.

- уравнения Эйлера (сопряженная система $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial i}$, $i = m, r, \psi, \varphi, u, v, w$):

$$\begin{aligned} \dot{p}_m &= 0, \\ \dot{p}_r &= p_\psi v/r^2 + p_\varphi w/r^2 \cos \psi + p_u(v^2/r^2 + w^2/r^2 - 2\mu/r^3) - \\ &\quad - p_v(uv/r^2 + w^2 \operatorname{tg} \psi/r^2) - p_w(uw/r^2 - vw \operatorname{tg} \psi/r^2), \\ \dot{p}_\psi &= -p_\varphi w \sin \psi/r \cos^2 \psi + p_v w^2/r \cos^2 \psi - p_w vw/r \cos^2 \psi, \\ \dot{p}_\varphi &= 0, \\ \dot{p}_u &= -p_r + p_v v/r + p_w w/r, \\ \dot{p}_v &= -p_\psi/r - 2p_u v/r + p_v u/r - p_w w \operatorname{tg} \psi/r, \\ \dot{p}_w &= -p_\varphi/r \cos \psi - 2p_u w/r + 2p_v w \operatorname{tg} \psi/r - p_w(v \operatorname{tg} \psi/r - u/r); \end{aligned} \quad (95)$$

- условия трансверсальности по фазовым переменным:

$$(p_i(0_+) = \frac{\partial l}{\partial i(0_+)}, \quad p_i(T_-) = -\frac{\partial l}{\partial i(T_-)}, \quad i = m, r, \psi, \varphi, u, v, w):$$

$$\begin{aligned} p_m(0_+) &= \lambda_{m0+}, \quad p_m(T_-) = \lambda_{mT-} e^{-\Delta V_1/c}, \\ p_r(0_+) &= \lambda_{r0+}, \quad p_\psi(0_+) = \lambda_{\psi0+}, \quad p_\varphi(0_+) = \lambda_{\varphi0+}, \\ p_u(0_+) &= \lambda_{m0+} m(0_-) e^{-\Delta V_0/c} \frac{u(0_+) - u(0_-)}{\Delta V_0 c}, \\ p_v(0_+) &= \lambda_{m0+} m(0_-) e^{-\Delta V_0/c} \frac{v(0_+) - v(0_-)}{\Delta V_0 c}, \\ p_w(0_+) &= \lambda_{m0+} m(0_-) e^{-\Delta V_0/c} \frac{w(0_+) - w(0_-)}{\Delta V_0 c}, \\ p_r(T_-) &= \lambda_{rT-}, \quad p_\psi(T_-) = \lambda_{\psi T-}, \quad p_\varphi(T_-) = \lambda_{\varphi T-}, \\ p_u(T_-) &= \lambda_{mT-} m(T_-) e^{-\Delta V_1/c} \frac{u(T_+) - u(T_-)}{\Delta V_1 c}, \\ p_v(T_-) &= \lambda_{mT-} m(T_-) e^{-\Delta V_1/c} \frac{v(T_+) - v(T_-)}{\Delta V_1 c}, \\ p_w(T_-) &= \lambda_{mT-} m(T_-) e^{-\Delta V_1/c} \frac{w(T_+) - w(T_-)}{\Delta V_1 c}; \end{aligned} \quad (96)$$

$$(p_i(0_-) = \frac{\partial l}{\partial i(0_-)} = 0, \quad p_i(T_+) = \frac{\partial l}{\partial i(T_+)} = 0, \quad i = m, r, \psi, \varphi, u, v, w):$$

$$\begin{aligned}
0 &= p_m(0_-) = \lambda_{m0_-} - \lambda_{m0_+} e^{-\Delta V_0/c}, \quad 0 = p_m(T_+) = -\lambda_0 + \lambda_{mT_+}, \\
0 &= p_r(0_-) = \lambda_{r0_-} - \lambda_{r0_+}, \\
0 &= p_\psi(0_-) = \lambda_{n0_-} (-\sin \psi(0_-) \sin \varphi(0_-) \sin i - \cos \psi(0_-) \cos i), \\
0 &= p_\varphi(0_-) = \lambda_{v0_-} V_0 \sin \varphi(0_-) \sin i + \lambda_{n0_-} \cos \psi(0_-) \cos \varphi(0_-) \sin i, \\
0 &= p_u(0_-) = \lambda_{u0_-} - \lambda_{m0_+} m(0_-) e^{-\Delta V_0/c} \frac{u(0_+) - u(0_-)}{\Delta V_0 c}, \\
0 &= p_v(0_-) = \lambda_{v0_-} - 2\lambda_{w0_-} v(0_-) - \lambda_{m0_+} m(0_-) e^{-\Delta V_0/c} \frac{v(0_+) - v(0_-)}{\Delta V_0 c}, \\
0 &= p_w(0_-) = 2\lambda_{w0_-} w(0_-) - \lambda_{m0_+} m(0_-) e^{-\Delta V_0/c} \frac{w(0_+) - w(0_-)}{\Delta V_0 c}, \\
0 &= p_r(T_+) = \lambda_{rT_-} + \lambda_{rT_+} \\
0 &= p_\psi(T_+) = \lambda_{\psi T_-} + \lambda_{\psi T_+} \\
0 &= p_\varphi(T_+) = \lambda_{\varphi T_-} + \lambda_{\varphi T_+} \\
0 &= p_u(T_+) = \lambda_{uT_+} - \lambda_{mT_-} m(T_-) e^{-\Delta V_1/c} \frac{u(T_+) - u(T_-)}{\Delta V_1 c}, \\
0 &= p_v(T_+) = \lambda_{vT_+} - \lambda_{mT_-} m(T_-) e^{-\Delta V_1/c} \frac{v(T_+) - v(T_-)}{\Delta V_1 c}, \\
0 &= p_w(T_+) = \lambda_{wT_+} - \lambda_{mT_-} m(T_-) e^{-\Delta V_1/c} \frac{w(T_+) - w(T_-)}{\Delta V_1 c};
\end{aligned} \tag{97}$$

- условие стационарности по T_- ($\mathcal{H}(T_-) = \frac{\partial l}{\partial T_-}$):

$$\mathcal{H}(T_-) = 0; \tag{98}$$

- условие неотрицательности:

$$\lambda_0 \geq 0; \tag{99}$$

- условие НЕРавенства Одновременно Нулю всех множителей Лагранжа (условие НЕРОН):

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=r,\psi,\varphi,u,v,w,m} \|p_i\|_{KC_1} + \sum_{i=m,r,n,u,v,w} |\lambda_{i0_-}| + \\
&+ \sum_{i=m,r,\varphi,\psi} (|\lambda_{i0_+}| + |\lambda_{iT_-}|) + \sum_{i=r,\psi,u,v,w} |\lambda_{iT_+}| + \lambda_0 \neq 0.
\end{aligned} \tag{100}$$

А.4.3 Краевая задача

Соотношения (88)-(92), (94)-(100) представляют собой краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Неизвестными в ней являются 14 фазовых и сопряженных переменных в момент $t = 0_-$, 14 постоянных интегрирования системы дифференциальных уравнений (88),(95) на участке $t \in [0_+; T_-]$, время перелета T , числовые множители Лагранжа λ_{i0_-} ($i = m, r, n, u, v, w$), λ_{i0_+} ($i = m, r, \psi, \varphi$), λ_{iT_-} ($i = m, r, \psi, \varphi$), λ_{iT_+} ($i = r, \psi, u, v, w$), λ_0 — всего 49 неизвестных. Для их определения имеется 49 условий — 19 граничных условий (89)-(92), 28 условий трансверсальности (96)-(97), условие стационарности (98) и условие нормировки, связанное с однородностью условий принципа Лагранжа по множителям Лагранжа, позволяющей выбирать их с точностью до положительного сомножителя. Условие нормировки совпадает с условием нормировки в соответствующей задаче оптимального управления (гл. 3):

$$p_r^2(0_+) + p_\psi^2(0_+) + p_u^2(0_+) + p_v^2(0_+) + p_w^2(0_+) = 1. \tag{101}$$

Выбор такого условия правомерен, т.к. обращение в ноль суммы (101) противоречит условию НЕРОН (100).

Заметим, что из условий трансверсальности:

$$p_m(T_-) = -\lambda_{mT_-},$$

$$p_m(T_+) = -\lambda_0 - \lambda_{mT_-} e^{\Delta V_1/c} = 0$$

и условия неотрицательности (99) следует $p_m(t) \geq 0$, $t \in [0_+; T_-]$.

Краевая задача имеет следующий вид. Система уравнений (88), (95). Неизвестные:

$$\begin{aligned} & r(0_+), \psi(0_+), \varphi(0_+), u(0_+), v(0_+), w(0_+), m(0_+), \\ & p_r(0_+), p_\psi(0_+), p_\varphi(0_+), p_u(0_+), p_v(0_+), p_w(0_+), p_m(0_+), T; \end{aligned} \quad (102)$$

Условия:

$$\begin{aligned} & r(0_+) = R_0, \quad \cos \psi(0_-) \sin \varphi(0_-) \sin i - \sin \psi(0_-) \cos i = 0, \quad m(0_+) = e^{-\Delta V_0/c}, \\ & p_u(0_+) = \frac{p_m(0_+)m(0_+)u(0_+)}{\Delta V_0 c}, \\ & p_v(0_+) = \frac{p_m(0_+)m(0_+)(v(0_+) - V_0 \cos \varphi(0_+) \sin i)}{\Delta V_0 c}, \\ & p_w(0_+) = \frac{p_m(0_+)m(0_+)(w(0_+) - V_0 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi(0_+) \sin^2 i})}{\Delta V_0 c}, \\ & p_r^2(0_+) + p_\psi^2(0_+) + p_u^2(0_+) + p_v^2(0_+) + p_w^2(0_+) = 1, \\ & p_\psi(0_+) \cos \psi(0_+) \cos \varphi(0_+) \sin i + (\sin \psi(0_+) \sin \varphi(0_+) \sin i + \cos \psi(0_+) \cos i) \times \\ & \times (p_\varphi(0_+) - (p_v(0_+) - p_w(0_+) \frac{\cos \varphi(0_+) \sin i}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi(0_+) \sin^2 i}}) / V_0 \sin \varphi(0_+) \sin i) = 0, \\ & \mathcal{H}(T_-) = 0, \quad p_\varphi(T_-) = 0, \quad r(T_-) = R_T, \quad \psi(T_-) = 0, \\ & p_u(T_-) = -\frac{p_m(T_-)m(T_-)u(T_-)}{\Delta V_1 c}, \\ & p_v(T_-) = -\frac{p_m(T_-)m(T_-)v(T_-)}{\Delta V_1 c}, \\ & p_w(T_-) = \frac{p_m(T_-)m(T_-)(V_T - w(T_-))}{\Delta V_1 c}. \end{aligned} \quad (103)$$

В результате решения этой краевой задачи определяются удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности первого порядка траектории перелета КА (экстремали задачи).

А.5 Краевая задача. Пространственный случай. Три импульса.

А.5.1 Постановка задачи

Рассматривается задача перелета КА между круговыми орбитами ИСЗ. Без ограничения общности считается, что целевая орбита находится в экваториальной плоскости ($i = 0$), а долгота восходящего узла начальной орбиты равна нулю. Траектория делится на участки: до момента первого импульса ($t = 0_-$), участок пассивного движения по кеплеровской траектории после первого импульса и до второго ($t \in [0_+; t_{\alpha_-}]$), пассивного движения по кеплеровской траектории после второго импульса до третьего ($t \in [t_{\alpha_+}; T_-]$), после третьего импульса $t = T_+$.

Движение центра масс КА в центральном ньютоновском гравитационном поле одного притягивающего центра в пустоте описывается в сферической системе координат

дифференциальными уравнениями [27]:

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= 0, \\
\dot{r} &= u, \\
\dot{\psi} &= v/r, \\
\dot{\varphi} &= w/r \cos \psi, \\
\dot{u} &= v^2/r + w^2/r - \mu/r^2, \\
\dot{v} &= -uv/r - w^2 \operatorname{tg} \psi/r, \\
\dot{w} &= -uw/r + vw \operatorname{tg} \psi/r;
\end{aligned} \tag{104}$$

Фазовые координаты в моменты времени $t = 0_-, 0_+, t_{\alpha+}, T_-, T_+$ принадлежат следующим многообразиям:

при $t = 0_-$ многообразию G_{0-} , задаваемому условиями:

$$\begin{aligned}
m(0_-) &= 1, \quad r(0_-) = R_{0-}, \quad u(0_-) = 0, \quad v(0_-) = V_0 \cos \varphi(0_-) \sin i, \\
w^2(0_-) + v^2(0_-) &= V_0^2, \quad \cos \psi(0_-) \sin \varphi(0_-) \sin i - \sin \psi(0_-) \cos i = 0,
\end{aligned} \tag{105}$$

где R_0 — радиус исходной орбиты КА, $V_0 \equiv \sqrt{\mu/R_0}$ — скорость движения КА по исходной круговой орбите ИСЗ, i — наклонение исходной орбиты;

при $t = 0_+$ многообразию G_{0+} :

$$\begin{aligned}
m(0_+) &= m(0_-) e^{-\Delta V_1/c}, \quad r(0_+) = r(0_-), \\
\psi(0_+) &= \psi(0_-), \quad \varphi(0_+) = \varphi(0_-),
\end{aligned} \tag{106}$$

где $\Delta V_1 = \sqrt{(u(0_+) - u(0_-))^2 + (v(0_+) - v(0_-))^2 + (w(0_+) - w(0_-))^2}$;
при $t = t_{\alpha+}$ многообразию $G_{\alpha+}$:

$$\begin{aligned}
m(t_{\alpha+}) &= m(t_{\alpha-}) e^{-\Delta V_2/c}, \quad r(t_{\alpha+}) = r(t_{\alpha-}), \\
\psi(t_{\alpha+}) &= \psi(t_{\alpha-}), \quad \varphi(t_{\alpha+}) = \varphi(t_{\alpha-}), \quad t_{\alpha+} = t_{\alpha-},
\end{aligned} \tag{107}$$

где $\Delta V_2 = \sqrt{(u(t_{\alpha+}) - u(t_{\alpha-}))^2 + (v(t_{\alpha+}) - v(t_{\alpha-}))^2 + (w(t_{\alpha+}) - w(t_{\alpha-}))^2}$;
при $t = T_-$ многообразию G_{T-} :

$$\begin{aligned}
m(T_+) &= m(T_-) e^{-\Delta V_3/c}, \quad r(T_+) = r(T_-), \\
\psi(T_+) &= \psi(T_-), \quad \varphi(T_+) = \varphi(T_-),
\end{aligned} \tag{108}$$

где $\Delta V_3 = \sqrt{(u(T_+) - u(T_-))^2 + (v(T_+) - v(T_-))^2 + (w(T_+) - w(T_-))^2}$;
при $t = T_+$ многообразию G_{T+} :

$$r(T_+) = R_T, \quad u(T_+) = 0, \quad v(T_+) = 0, \quad w(T_+) = V_T, \quad \psi(T_+) = 0, \tag{109}$$

где R_T — радиус конечной орбиты, $V_T \equiv \sqrt{\mu/R_T}$ — скорость движения КА по конечной круговой орбите.

Минимизируется терминальный компромиссный функционал:

$$I \equiv k_T T_- - k_m m(T_+) \rightarrow \inf. \tag{110}$$

Коэффициенты компромисса k_T, k_m ($k_T \geq 0$, $k_m \geq 0$, $[k_T]_{cu} = c^{-1}$, $[k_m]_{cu} = 1$ не обращаются в ноль одновременно: $k_T^2 + k_m^2 > 0$).

А.5.2 Необходимые условия оптимальности

Функция \mathcal{H} и терминант l задачи имеют вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(m, r, \psi, \varphi, u, v, w, P, \theta, \gamma, p_m, p_r, p_\psi, p_\varphi, p_u, p_v, p_w) \equiv \\
\equiv p_r u + p_\psi v/r + p_\varphi w/r \cos \psi + p_u(v^2/r + w^2/r - \mu/r^2) + \\
+ p_v(-uv/r - w^2 \operatorname{tg} \psi/r) + p_w(-uw/r + vw \operatorname{tg} \psi/r), \\
\\
l \equiv \lambda_0(k_T T_- - k_m m(T_+)) + \lambda_{m0_-}(m(0_-) - 1) + \lambda_{r0_-}(r(0_-) - R_0) + \\
+ \lambda_{u0_-}u(0_-) + \lambda_{v0_-}(v(0_-) - V_0 \cos \varphi(0_-) \sin i) + \lambda_{w0_-}(w^2(0_-) + v^2(0_-) - V_0^2) + \\
+ \lambda_{n0_-}(\cos \psi(0_-) \sin \varphi(0_-) \sin i - \sin \psi(0_-) \cos i) + \\
+ \lambda_{r0_+}(r(0_+) - r(0_-)) + \lambda_{\psi0_+}(\psi(0_+) - \psi(0_-)) + \lambda_{\varphi0_+}(\varphi(0_+) - \varphi(0_-)) + \\
+ \lambda_{m0_+}(m(0_+) - m(0_-)e^{-\Delta V_1/c}) + \lambda_{t\alpha_+}(t_{\alpha_-} - t_{\alpha_+}) + \\
+ \lambda_{r\alpha_+}(r(t_{\alpha_+}) - r(t_{\alpha_-})) + \lambda_{\psi\alpha_+}(\psi(t_{\alpha_+}) - \psi(t_{\alpha_-})) + \\
+ \lambda_{\varphi\alpha_+}(\varphi(t_{\alpha_+}) - \varphi(t_{\alpha_-})) + \lambda_{m\alpha_+}(m(t_{\alpha_+}) - m(t_{\alpha_-})e^{-\Delta V_2/c}) + \\
+ \lambda_{rT_-}(r(T_+) - r(T_-)) + \lambda_{\psi T_-}(\psi(T_+) - \psi(T_-)) + \\
+ \lambda_{\varphi T_-}(\varphi(T_+) - \varphi(T_-)) + \lambda_{mT_-}(m(T_+) - m(T_-)e^{-\Delta V_3/c}) + \lambda_{rT_+}(r(T_+) - R_T) + \\
+ \lambda_{uT_+}u(T_+) + \lambda_{vT_+}v(T_+) + \lambda_{wT_+}w(T_+) - V_T + \lambda_{\psi T_+}\psi(T_+),
\end{aligned} \tag{111}$$

где непрерывные кусочно-гладкие функции (сопряженные переменные) $p_i(t)$ ($i = m, r, \psi, \varphi, u, v, w$) и числа λ_0 , λ_{i0_-} ($i = m, r, n, u, v, w$), λ_{i0_+} ($i = m, r, \psi, \varphi$), $\lambda_{i\alpha_+}$ ($i = m, r, \psi, \varphi, t$), λ_{iT_-} ($i = m, r, \psi, \varphi$), λ_{iT_+} ($i = r, \psi, u, v, w$) — множители Лагранжа.

- уравнения Эйлера (сопряженная система $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial i}$, $i = m, r, \psi, \varphi, u, v, w$):

$$\begin{aligned}
\dot{p}_m &= 0, \\
\dot{p}_r &= p_\psi v/r^2 + p_\varphi w/r^2 \cos \psi + p_u(v^2/r^2 + w^2/r^2 - 2\mu/r^3) - \\
&\quad - p_v(uv/r^2 + w^2 \operatorname{tg} \psi/r^2) - p_w(uw/r^2 - vw \operatorname{tg} \psi/r^2), \\
\dot{p}_\psi &= -p_\varphi w \sin \psi/r \cos^2 \psi + p_v w^2/r \cos^2 \psi - p_w v w/r \cos^2 \psi, \\
\dot{p}_\varphi &= 0, \\
\dot{p}_u &= -p_r + p_v v/r + p_w w/r, \\
\dot{p}_v &= -p_\psi/r - 2p_u v/r + p_v u/r - p_w w \operatorname{tg} \psi/r, \\
\dot{p}_w &= -p_\varphi/r \cos \psi - 2p_u w/r + 2p_v w \operatorname{tg} \psi/r - p_w(v \operatorname{tg} \psi/r - u/r);
\end{aligned} \tag{112}$$

- условия трансверсальности по фазовым переменным:

$$(p_i(0_+) = \frac{\partial l}{\partial i(0_+)}, \quad p_i(t_{\alpha_-}) = -\frac{\partial l}{\partial i(t_{\alpha_-})}, \quad p_i(t_{\alpha_+}) = \frac{\partial l}{\partial i(t_{\alpha_+})}, \quad p_i(T_-) = -\frac{\partial l}{\partial i(T_-)},$$

$i = m, r, \psi, \varphi, u, v, w$):

$$\begin{aligned}
p_m(0_+) &= \lambda_{m0_+}, \\
p_r(0_+) &= \lambda_{r0_+}, \quad p_\psi(0_+) = \lambda_{\psi0_+}, \quad p_\varphi(0_+) = \lambda_{\varphi0_+}, \\
p_u(0_+) &= \lambda_{m0_+} m(0_-) e^{-\Delta V_1/c} \frac{u(0_+) - u(0_-)}{\Delta V_1 c}, \\
p_v(0_+) &= \lambda_{m0_+} m(0_-) e^{-\Delta V_1/c} \frac{v(0_+) - v(0_-)}{\Delta V_1 c}, \\
p_w(0_+) &= \lambda_{m0_+} m(0_-) e^{-\Delta V_1/c} \frac{w(0_+) - w(0_-)}{\Delta V_1 c}, \\
p_m(t_{\alpha_-}) &= \lambda_{m\alpha_+} e^{-\Delta V_2/c}, \\
p_r(t_{\alpha_-}) &= \lambda_{r\alpha_+}, \quad p_\psi(t_{\alpha_-}) = \lambda_{\psi\alpha_+}, \quad p_\varphi(t_{\alpha_-}) = \lambda_{\varphi\alpha_+}, \\
p_u(t_{\alpha_-}) &= \lambda_{m\alpha_+} m(t_{\alpha_-}) e^{-\Delta V_2/c} \frac{u(t_{\alpha_+}) - u(t_{\alpha_-})}{\Delta V_2 c}, \\
p_v(t_{\alpha_-}) &= \lambda_{m\alpha_+} m(t_{\alpha_-}) e^{-\Delta V_2/c} \frac{v(t_{\alpha_+}) - v(t_{\alpha_-})}{\Delta V_2 c}, \\
p_w(t_{\alpha_-}) &= \lambda_{m\alpha_+} m(t_{\alpha_-}) e^{-\Delta V_2/c} \frac{w(t_{\alpha_+}) - w(t_{\alpha_-})}{\Delta V_2 c}, \\
p_m(t_{\alpha_+}) &= \lambda_{m\alpha_+}, \\
p_r(t_{\alpha_+}) &= \lambda_{r\alpha_+}, \quad p_\psi(t_{\alpha_+}) = \lambda_{\psi\alpha_+}, \quad p_\varphi(t_{\alpha_+}) = \lambda_{\varphi\alpha_+}, \\
p_u(t_{\alpha_+}) &= \lambda_{m\alpha_+} m(t_{\alpha_-}) e^{-\Delta V_2/c} \frac{u(t_{\alpha_+}) - u(t_{\alpha_-})}{\Delta V_2 c}, \\
p_v(t_{\alpha_+}) &= \lambda_{m\alpha_+} m(t_{\alpha_-}) e^{-\Delta V_2/c} \frac{v(t_{\alpha_+}) - v(t_{\alpha_-})}{\Delta V_2 c}, \\
p_w(t_{\alpha_+}) &= \lambda_{m\alpha_+} m(t_{\alpha_-}) e^{-\Delta V_2/c} \frac{w(t_{\alpha_+}) - w(t_{\alpha_-})}{\Delta V_2 c}, \\
p_m(T_-) &= \lambda_{mT_-} e^{-\Delta V_3/c}, \\
p_r(T_-) &= \lambda_{rT_-}, \quad p_\psi(T_-) = \lambda_{\psi T_-}, \quad p_\varphi(T_-) = \lambda_{\varphi T_-}, \\
p_u(T_-) &= \lambda_{mT_-} m(T_-) e^{-\Delta V_3/c} \frac{u(T_+) - u(T_-)}{\Delta V_3 c}, \\
p_v(T_-) &= \lambda_{mT_-} m(T_-) e^{-\Delta V_3/c} \frac{v(T_+) - v(T_-)}{\Delta V_3 c}, \\
p_w(T_-) &= \lambda_{mT_-} m(T_-) e^{-\Delta V_3/c} \frac{w(T_+) - w(T_-)}{\Delta V_3 c};
\end{aligned} \tag{113}$$

$$(p_i(0_-) = \frac{\partial l}{\partial i(0_-)} = 0, \quad p_i(T_+) = \frac{\partial l}{\partial i(T_+)} = 0, \quad i = m, r, \psi, \varphi, u, v, w):$$

$$\begin{aligned}
0 &= p_m(0_-) = \lambda_{m0_-} - \lambda_{m0_+} e^{-\Delta V_0/c}, \quad 0 = p_m(T_+) = -\lambda_0 k_m + \lambda_{mT_-}, \\
0 &= p_r(0_-) = \lambda_{r0_-} - \lambda_{r0_+}, \\
0 &= p_\psi(0_-) = \lambda_{n0_-} (-\sin \psi(0_-) \sin \varphi(0_-) \sin i - \cos \psi(0_-) \cos i), \\
0 &= p_\varphi(0_-) = \lambda_{v0_-} V_0 \sin \varphi(0_-) \sin i + \lambda_{n0_-} \cos \psi(0_-) \cos \varphi(0_-) \sin i, \\
0 &= p_u(0_-) = \lambda_{u0_-} - \lambda_{m0_+} m(0_-) e^{-\Delta V_1/c} \frac{u(0_+) - u(0_-)}{\Delta V_1 c}, \\
0 &= p_v(0_-) = \lambda_{v0_-} - 2\lambda_{w0_-} v(0_-) - \lambda_{m0_+} m(0_-) e^{-\Delta V_1/c} \frac{v(0_+) - v(0_-)}{\Delta V_1 c}, \\
0 &= p_w(0_-) = 2\lambda_{w0_-} w(0_-) - \lambda_{m0_+} m(0_-) e^{-\Delta V_1/c} \frac{w(0_+) - w(0_-)}{\Delta V_1 c}, \\
0 &= p_r(T_+) = \lambda_{rT_-} + \lambda_{rT_+}, \\
0 &= p_\psi(T_+) = \lambda_{\psi T_-} + \lambda_{\psi T_+}, \\
0 &= p_\varphi(T_+) = \lambda_{\varphi T_-} + \lambda_{\varphi T_+}, \\
0 &= p_u(T_+) = \lambda_{uT_+} - \lambda_{mT_-} m(T_-) e^{-\Delta V_3/c} \frac{u(T_+) - u(T_-)}{\Delta V_3 c}, \\
0 &= p_v(T_+) = \lambda_{vT_+} - \lambda_{mT_-} m(T_-) e^{-\Delta V_3/c} \frac{v(T_+) - v(T_-)}{\Delta V_3 c}, \\
0 &= p_w(T_+) = \lambda_{wT_+} - \lambda_{mT_-} m(T_-) e^{-\Delta V_3/c} \frac{w(T_+) - w(T_-)}{\Delta V_3 c};
\end{aligned} \tag{114}$$

- условия стационарности:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t_{\alpha-}) &= \lambda_{t_{\alpha+}}, \\ \mathcal{H}(t_{\alpha+}) &= \lambda_{t_{\alpha+}}, \\ \mathcal{H}(T_-) &= \lambda_0 k_T;\end{aligned}\tag{115}$$

- условие неотрицательности:

$$\lambda_0 \geq 0;\tag{116}$$

- условие НЕРавенства Одновременно Нулю всех множителей Лагранжа (условие НЕРОН):

$$\begin{aligned}& \sum_{i=r,\psi,\varphi,u,v,w,m} \|p_i\|_{KC_1} + \sum_{i=m,r,n,u,v,w} |\lambda_{i0-}| + |\lambda_{t_{\alpha+}}| + \\ & + \sum_{i=m,r,\varphi,\psi} (|\lambda_{i0+}| + |\lambda_{i\alpha+}| + |\lambda_{iT_-}|) + \sum_{i=r,\psi,u,v,w} |\lambda_{iT_+}| + \lambda_0 \neq 0.\end{aligned}\tag{117}$$

А.5.3 Краевая задача

Соотношения (104)-(109), (111)-(117) представляют собой краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Неизвестными в ней являются 14 фазовых и сопряженных переменных в момент $t = 0_-$, 14 постоянных интегрирования системы дифференциальных уравнений (104),(112) на участке $t \in [0_+; t_{\alpha-}]$, 14 — на участке $t \in [t_{\alpha+}; T_-]$, времена $t_{\alpha-}$, $t_{\alpha+}$, T , числовые множители Лагранжа λ_{i0-} ($i = m, r, n, u, v, w$), λ_{i0+} ($i = m, r, \psi, \varphi$), $\lambda_{i\alpha+}$ ($i = m, r, \psi, \varphi, t$), λ_{iT_-} ($i = m, r, \psi, \varphi$), λ_{iT_+} ($i = r, \psi, u, v, w$), λ_0 — всего 70 неизвестных. Для их определения имеется 70 условий — 24 граничных условия (105)-(109), 42 условия трансверсальности (113)-(114), 3 условия стационарности (115) и условие нормировки, связанное с однородностью условий принципа максимума по множителям Лагранжа, позволяющей выбирать их с точностью до положительного сомножителя. Условие нормировки совпадает с условием нормировки в соответствующий задаче оптимального управления (гл. 3):

$$p_r^2(0_+) + p_\psi^2(0_+) + p_u^2(0_+) + p_v^2(0_+) + p_w^2(0_+) = 1.\tag{118}$$

Выбор такого условия правомерен, т.к. обращение в ноль суммы (118) противоречит условию НЕРОН (117).

Заметим, что из условий трансверсальности $p_m(t_{\alpha-}) = \lambda_{m\alpha+} e^{-\Delta V_2/c}$, $p_m(t_{\alpha-}) = \lambda_{m\alpha+}$, $p_m(T_-) = \lambda_{mT_-} e^{-\Delta V_3/c}$, $p_m(T_+) = -\lambda_0 k_m + \lambda_{mT_-} = 0$ и условия неотрицательности (116) следует что $p_m(t) \geq 0$, $t \in [0_+; T_-]$.

Краевая задача имеет следующий вид. Система уравнений (104),(112). Неизвестные:

$$\begin{aligned}& r(0_+), \psi(0_+), \varphi(0_+), u(0_+), v(0_+), w(0_+), m(0_+), \\ & p_r(0_+), p_\psi(0_+), p_\varphi(0_+), p_u(0_+), p_v(0_+), p_w(0_+), p_m(0_+), t_\alpha, \\ & r(t_{\alpha+}), \psi(t_{\alpha+}), \varphi(t_{\alpha+}), u(t_{\alpha+}), v(t_{\alpha+}), w(t_{\alpha+}), m(t_{\alpha+}), \\ & p_r(t_{\alpha+}), p_\psi(t_{\alpha+}), p_\varphi(t_{\alpha+}), p_u(t_{\alpha+}), p_v(t_{\alpha+}), p_w(t_{\alpha+}), p_m(t_{\alpha+}), T;\end{aligned}\tag{119}$$

Условия:

$$\begin{aligned}
r(0_+) &= R_0, \quad \cos \psi(0_-) \sin \varphi(0_-) \sin i - \sin \psi(0_-) \cos i = 0, \quad m(0_+) = e^{-\Delta V_1/c}, \\
p_u(0_+) &= \frac{p_m(0_+)m(0_+)u(0_+)}{\Delta V_1 c}, \\
p_v(0_+) &= \frac{p_m(0_+)m(0_+)(v(0_+) - V_0 \cos \varphi(0_+) \sin i)}{\Delta V_1 c}, \\
p_w(0_+) &= \frac{p_m(0_+)m(0_+)(w(0_+) - V_0 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi(0_+) \sin^2 i})}{\Delta V_1 c}, \\
p_r^2(0_+) + p_\psi^2(0_+) + p_u^2(0_+) + p_v^2(0_+) + p_w^2(0_+) &= 1, \\
p_\psi(0_+) \cos \psi(0_+) \cos \varphi(0_+) \sin i + (\sin \psi(0_+) \sin \varphi(0_+) \sin i + \cos \psi(0_+) \cos i) \times \\
\times (p_\varphi(0_+) - (p_v(0_+) - p_w(0_+) \frac{\cos \varphi(0_+) \sin i}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi(0_+) \sin^2 i}}) / V_0 \sin \varphi(0_+) \sin i) &= 0, \\
\psi(t_{\alpha_+}) - \psi(t_{\alpha_-}) &= 0, \quad \varphi(t_{\alpha_+}) - \varphi(t_{\alpha_-}) = 0, \quad r(t_{\alpha_+}) - r(t_{\alpha_-}) = 0, \\
p_r(t_{\alpha_+}) - p_r(t_{\alpha_-}) &= 0, \quad p_\psi(t_{\alpha_+}) - p_\psi(t_{\alpha_-}) = 0, \quad p_\varphi(t_{\alpha_+}) - p_\varphi(t_{\alpha_-}) = 0, \\
p_u(t_{\alpha_+}) - p_u(t_{\alpha_-}) &= 0, \quad p_v(t_{\alpha_+}) - p_v(t_{\alpha_-}) = 0, \quad p_w(t_{\alpha_+}) - p_w(t_{\alpha_-}) = 0, \\
p_m(t_{\alpha_-}) - p_m(t_{\alpha_+})e^{-\Delta V_2/c} &= 0, \quad \mathcal{H}(t_{\alpha_+}) - \mathcal{H}(t_{\alpha_-}) = 0, \\
m(t_{\alpha_+}) - m(t_{\alpha_-})e^{-\Delta V_2/c} &= 0, \\
p_u(t_{\alpha_+}) &= \frac{p_m(t_{\alpha_+})m(t_{\alpha_+})(u(t_{\alpha_+}) - u(t_{\alpha_-}))}{\Delta V_2 c}, \\
p_v(t_{\alpha_+}) &= \frac{p_m(t_{\alpha_+})m(t_{\alpha_+})(v(t_{\alpha_+}) - v(t_{\alpha_-}))}{\Delta V_2 c}, \\
p_w(t_{\alpha_+}) &= \frac{p_m(t_{\alpha_+})m(t_{\alpha_+})(w(t_{\alpha_+}) - w(t_{\alpha_-}))}{\Delta V_2 c}, \\
k_m \mathcal{H}(T_-) - k_T p_m(T_-) &= 0, \quad p_\varphi(T_-) = 0, \quad r(T_-) = R_T, \quad \psi(T_-) = 0, \\
p_u(T_-) &= -\frac{p_m(T_-)m(T_-)u(T_-)}{\Delta V_3 c}, \\
p_v(T_-) &= -\frac{p_m(T_-)m(T_-)v(T_-)}{\Delta V_3 c}, \\
p_w(T_-) &= \frac{p_m(T_-)m(T_-)(V_T - w(T_-))}{\Delta V_3 c}.
\end{aligned} \tag{120}$$

В результате решения этой краевой задачи определяются удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности первого порядка траектории перелета КА (экстремали задачи).

Список литературы

- [1] Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике (под редакцией Дубошина Г.Н.). Издание 2-е, дополненное и переработанное М.: Наука, 1978.
- [2] Александров В.В., Бахвалов Н.С., Григорьев К.Г. и др. Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. М.: Изд-во Московского гос. ун-та, 1988.
- [3] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление М.: Наука, 1979.
- [4] Анрион, Р. Теория второй вариации и ее приложения в оптимальном управлении // перевод с фр. В.Б. Колманского, В.Р. Носова. - М. Наука 1979.
- [5] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: Наука, 1971.
- [6] Арутюнов А.В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Изд-во "Факториал", 1997.
- [7] Ахметшин Р.З. Плоская задача оптимального перелета космического аппарата с малой тягой с высокоэллиптической орбиты на геостационар // Космические Исследования, 2004, т.42, N3. с.248–259.
- [8] Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений М.: Мир, 1969.
- [9] Батурич В.А., Дыхта В.А., Москаленко А.И. Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения. Новосибирск: Наука, Сиб. предприятие РАН 1990.
- [10] Батурич В.А., Урбанович Д.Е. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. Новосибирск: Наука, Сиб. предприятие РАН 1997.
- [11] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы М.: Наука, 1987.
- [12] Беллман Р. Динамическое программирование, ИЛ, 1960.
- [13] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
- [14] Габасов Р., Кириллова Ф. Особые оптимальные управления М.: Наука, 1973.
- [15] Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [16] Григорьев К.Г. О наискорейших маневрах космического аппарата // Космические Исследования 1994, т.32, N1. с.56–69.
- [17] Григорьев К.Г. О маневрах космического аппарата при минимальных затратах массы и ограниченном времени // Космические Исследования 1994, т.32, N2. с.45–60.

- [18] Григорьев И.С. Исследование оптимальных траекторий перелетов КА с реактивным двигателем большой ограниченной тяги между Землей и Луной // Дис... канд. физ-мат. наук. Моск. гос. ун. мех-мат. факультет. 1997.
- [19] Григорьев И.С. Об оптимальном перелете космического аппарата с орбиты искусственного спутника Земли на поверхность Луны. Труды XXVIII чтений К.Э. Циолковского. Секция Механика космического полета. М.: ИИЕТ РАН. 1994. С. 41–46.
- [20] Григорьев И.С. Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. — М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005.
- [21] Григорьев И.С., Григорьев К.Г., Петрикова Ю.Д. О наискорейших маневрах космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги в гравитационном поле в вакууме // Космические Исследования, 2000, т.38, N2. с. 171–192.
- [22] Григорьев К.Г., Григорьев И.С. Исследование оптимальных пространственных траекторий перелетов космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги между орбитами искусственных спутников Земли и Луны // Космические Исследования, 1997, т.35, N1.
- [23] Григорьев И.С., Григорьев К.Г. К проблеме решения в импульсной постановке задач оптимизации траекторий перелётов космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги в гравитационном поле в вакууме // Космические Исследования, 2002, т.40, N1, с.88–111.
- [24] Григорьев К.Г., Заплетин М.П. О вертикальном старте в оптимизационных задачах ракетодинамики // Космические Исследования, 1997, т.35, N4.
- [25] Григорьев К.Г., Федина А.В. Оптимальные перелеты космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги между компланарными круговыми орбитами // Космические Исследования, 1995, т.33, N4. с. 403–416.
- [26] Григорьев И.С. Сравнение решений задач об оптимизации траекторий мягкой посадки КА на поверхность Луны в импульсной постановке и с двигателем большой ограниченной тяги // Тезисы докладов XXVI академических чтений по космонавтике, посвященных памяти академика С.П.Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, Москва, 2002г. ([http://www.ihst.ru/personal/akm/section5\(2002\).htm](http://www.ihst.ru/personal/akm/section5(2002).htm))
- [27] Гроздовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975.
- [28] Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
- [29] Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1977.
- [30] Дмитрук А.В. Условия типа Якоби для задачи Больца с неравенствами // Мат. заметки. 1984. Т. 35. №6. с. 813–827.

- [31] Дубовский С.В. Межорбитальные и межпланетные перелеты // Космические Исследования, 1967, т.5, N4.
- [32] Дыхта В.А. Вариационный принцип максимума и квадратичные условия оптимальности импульсных и особых процессов // Сибирский математический журнал. Т 35. N. 1. 1994 г. С. 70–82.
- [33] Дыхта В.А., Самсонык О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. 2-е изд. -М.: Физматлит, 2003.
- [34] Егоров В.В., Гусев Л.И. Динамика перелетов между Землей и Луной М.: Наука, 1980.
- [35] Егоров В.А., Сазонов В.В., Егоров М.А., Смирнов В.В. Сравнение оптимального и локально-оптимального геоцентрических разгонов космического аппарата с солнечным парусом // Космич. исслед. 1994, Т.32, N6, с.77-88.
- [36] Завалицин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы: модели и приложения. М.: Наука, 1991.
- [37] Завалицин С.Т., Суханов В.И. Прикладные задачи синтеза и проектирования управляющих алгоритмов. М.: Наука, 1985.
- [38] Заплетин М.П. Оптимальные перелеты КА между поверхностью Луны и орбитами ее искусственных спутников // Дис... канд. физ-мат. наук. Моск. гос. ун. мех-мат. факультет. 1993.
- [39] Заплетин М.П. О задачах быстрогодействия в центральном гравитационном поле // Сб. Численное моделирование в задачах механики. - М.: Изд. МГУ, 1991, с. 136-138.
- [40] Захаров Ю.А. Проектирование межорбитальных космических аппаратов. Выбор траекторий и проектных параметров. М.: Машиностроение, 1984.
- [41] Зеликин М.И., Борисов В.Ф. Синтез в задачах оптимального управления, содержащий траектории с учащающимися переключениями и особые траектории второго порядка // Математические заметки, 1990, т.47, N1.
- [42] Зеликин М.И. Гессиан решения уравнения Гамильтона-Якоби в теории экстремальных задач // Математический сборник. 2004. Т. 195. №6. с.57-70.
- [43] Ивашкин В.В. Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояние до планет М.: Наука, 1975.
- [44] Ивашкин В.В., Скороходов А.П. Сравнительный анализ трехимпульсных траекторий, оптимальных при ограничениях на время перехода и наибольшее расстояние от планеты // Космические Исследования 1980, т.18, N1. с.11–21.
- [45] Ивашкин В.В., Коровина Л.А., Скороходов А.П. Об одном свойстве трехимпульсных траекторий, оптимальных при ограничениях на расстояние и время перелета // Космические Исследования 1982, т.20, N3. с.352–356.
- [46] Ильин В.А., Кузьмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов М.: Наука, 1976.

- [47] Ишков С.А. Расчет оптимальных межорбитальных перелетов с малой трансверсальной тягой на эллиптическую орбиту // Космические Исследования, 1997, т.35, N2.с.178–188.
- [48] Космические траектории. М.: Изд-во иностр. лит-ры. Биб-ка сб. “Механика”. 1963.
- [49] Красовский Н.Н. Теория оптимальных управляемых систем // в кн. Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1968. Т. 1. С. 179-244.
- [50] Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
- [51] Ли Э., Маркус Л. Основы теории оптимального управления М.: Наука, 1972.
- [52] Лоуден Д.Ф. Межпланетные траектории ракет. В сб. [48]. С. 177–242.
- [53] Лоуден Д.Ф. Импульсный переход между эллиптическими орбитами. В сб. citeLeitman-63. С. 387–415.
- [54] Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. Пер. с англ. М.: Мир, 1966.
- [55] Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука 1971.
- [56] Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
- [57] Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на Фортране М.: Мир, 1977.
- [58] Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космонавтике. М.: Наука, 1978.
- [59] Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. Под ред. Дж. Лейтмана. М.: Наука, 1963.
- [60] Мордашов С.Н. Об одном подходе к определению начальных значений сопряженных значений в краевых задачах ракетодинамики // Труды XXVIII чтений К.Э.Циолковского. Секция механика космического полёта. М.: ИИЕТ РАН, 1994, с.73-81.
- [61] Орлов Ю.В. Теория оптимальных систем с обобщенными управлениями. М.: Наука, 1988.
- [62] Охоцимский Д.Е. Динамика космических полетов. М.: Изд-во Московского гос. ун-та, 1968.
- [63] Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета М.: Наука, 1990.
- [64] Пайнс С. Константы движения для оптимальных активных траекторий в центральном силовом поле // Ракетная Техника и Космонавтика, N11, 1964,с.162-167.

- [65] Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям М.: Наука, 1970.
- [66] Петухов В.Г. Оптимизация траекторий и эволюция движения космических аппаратов с двигательными установками малой тяги // Дис... канд. тех. наук. МАИ 1996 г.
- [67] Петухов В.Г. Использование методов продолжения по параметру для оптимизации траекторий КА с малой тягой // Труды XXXI-XXXII чтений К.Э.Циолковского. Секция Механики космического полёта. М.: ИИЕТ РАН, 1999, с.114-121.
- [68] Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелётов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования, 2004, Т-42, N3, с.1-20
- [69] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов М.: Наука, 1969.
- [70] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: Наука, 1970.
- [71] Салмин В.В. Оптимизация космических полетов с малой тягой: Проблемы совместного управления траекторным и угловым движением. - М.: Машиностроение 1987.
- [72] Тятюшкин А.И. Мультимедийные алгоритмы для численного решения задач оптимального управления // сборник "Нелинейная теория управления: динамика, управление, оптимизация". М: Физматлит, 2003, с.201-217.
- [73] Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления М.: Наука, 1978.
- [74] Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику М.: Изд-во МФТИ, 1994.
- [75] Федотов Г.Г. Методические основы проектно-баллистического анализа межпланетных КА с ЭРД // Дис... доктора техн.наук. Москва 2002.
- [76] Филатьев А.С. Оптимальный запуск искусственного спутника Земли с использованием аэродинамических сил // Космич. исслед. 1991, Т.29, N2, с.255-271.
- [77] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью М.: Наука, 1985.
- [78] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений М.: Мир, 1990.
- [79] Хендельсмен М. Оптимальные траектории полёта в безвоздушном пространстве с постоянной тягой при использовании импульсных траекторий в качестве начальных приближений // Ракетная техника и космонавтика, N6, 1996, с.151-158.
- [80] Хок Д.С. Космические маневры. Оптимизация. В сб. [48]. С. 163–176.
- [81] Чарный В.И. Об оптимальных траекториях со многими импульсами // Искусственные спутники Земли, АН СССР. 1963. Вып. 16. С. 257–264.

- [82] Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973.
- [83] Geethaikrishnan C. Parameter optimization approach to launch vehicle optimal trajectory problem // AE 601 Ph.D. seminar report. Indian Institute of Technology, Bombay. November 2002.
- [84] Genin Y. Transferts orbitaux économiques. Cas des propulseurs à faible poussée. Thèse de Doctorat. Faculté des Sciences Appliquées. Université de Liège, 1969.
- [85] Gobetz F.W., Doll J.R. A survey of impulsive trajectories // AIAA Journal, 1969, V. 7, No. 5. Русский перевод: Гобец Ф.У., Долл Дж.Р. Обзор импульсных траекторий // Ракет. техника и космонавтика. 1969. Т.7. №5. С. 3–46.
- [86] Jezewski D.J. Optimal, multi-burn, space trajectories // McDonnell Douglas Technical Services Co. Houston, Texas 77062. August 1985.
- [87] Hartmann J.W. Low-thrust trajectory optimization using stochastic optimization methods // University of Illinois. Thesis 1999.
- [88] Inge Spangelo. Trajectory optimization for vehicles using control vector parameterization and nonlinear programming // Department of Engineering Cybernetics, The Norwegian Institute of Technology. Dr.ing. thesis. Report 94-111-W.
- [89] Kelley H.J., Kopp R.E., Moyer H.G. Singular extremals // Topics in Optimization (ed. Leitmann G.), N.Y., 1967.
- [90] Kien-Ming Ng. A continuation approach for solving nonlinear optimization problems with discrete variables // Stanford University. Dissertation 2002.
- [91] Lawden D. Optimal intermediate thrust arcs in a gravitational field // Astronautica Acta, 1962, v.8, N2-3.
- [92] Marchal C. Generalisation tridimensionnelle et étude de l'optimalité des arcs à poussée intermédiaire de Lawden // La recherche aérospatiale, 1968, N123, Mars-avril.
- [93] Richards A.G. Trajectory optimization using mixed-integer linear programming. Massachusetts Institute of Technology. Dissertation 2002.
- [94] Whiting J.K. Orbital transfer trajectory optimization // Massachusetts Institute of Technology. Dissertation 2004.