

Григорьев И.С., Данилина И.А.

ОПТИМИЗАЦИЯ МЕЖОРБИТАЛЬНЫХ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЕТОВ
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С РАЗГОННЫМ БЛОКОМ

2020 г.

Григорьев И.С., Данилина И.А.

Оптимизация межорбитальных пространственных траекторий перелётов космического аппарата с разгонным блоком. — 196 с. Баку. 2020.

В книге рассматривается задача оптимизации траекторий перелётов космического аппарата с низкой круговой орбиты искусственного спутника Земли на геостационарную и на целевую орбиты. Исследуются перелёты ступенчатого космического аппарата и аппарата с дополнительным топливным баком. На основе соответствующего принципа максимума решение задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи. Многоточечная краевая задача принципа максимума решается численно методом стрельбы. Проводится параметрическое исследование полученных экстремалей и их сравнение с решениями задач "простых моделей".

Для специалистов в области вычислительной оптимизации, вычислительного оптимального управления, небесной механики и механики космического полёта.

Григорьев Илья Сергеевич:

<http://istina.msu.ru/profile/iliagri>

Данилина Ирина Александровна:

<https://istina.msu.ru/workers/8084170>

В свободном доступе книга представлена на

<http://mech.math.msu.su/~iliagri>

Рецензенты:

д.т.н., В.Г. Петухов, к.ф.-м.н., доц. М.П. Заплетин

ISBN 978-9952-8354-0-3

Оглавление

1	Введение	7
2	Постановки задач	15
2.1	Одноступенчатый КА	16
2.2	Двухступенчатый КА	22
2.3	КА с ДТБ	23
3	Необходимые условия оптимальности	25
3.1	Одноступенчатый КА	25
3.2	Двухступенчатый КА	30
3.3	КА с ДТБ	32
4	Краевые задачи принципа максимума	35
4.1	Перелет одноступенчатого КА на геостационарную орбиту	36
4.2	Перелет одноступенчатого КА на геопереходную орбиту	36
4.3	Перелет двухступенчатого КА на геостационарную орбиту. . . .	37
4.4	Перелет КА с ДТБ на геостационарную орбиту	40
4.5	Перелет КА с ДТБ на геопереходную орбиту	44
5	Вычислительные основы решения краевых задач принципа максимума	47
5.1	Краевая задача принципа максимума	47
5.2	Построение начальных приближений	49
5.3	Вычислительная схема	52

5.4	Численное решение краевых задач	55
6	Оценка наилучшего распределения топлива по бакам	61
6.1	Первая упрощенная модель	62
6.2	Вторая упрощенная модель	64
6.3	Взаимность первой и второй модели	65
7	Простые методы построения траекторий, близких к экстре- мальным	69
7.1	Третья упрощенная модель	70
7.1.1	Численное решение	73
7.2	Четвертая упрощенная модель	75
7.2.1	Численное решение	76
8	Результаты	79
8.1	Экстремали Понтрягина	79
8.1.1	Угол наклона	79
8.1.2	Время перелета	84
8.1.3	Величина удельной тяги	86
8.1.4	Тяговооруженность	89
8.1.5	Распределение массы по бакам	96
8.2	“Простые” траектории и их сравнение с экстремалами	116
8.2.1	Направление вектора тяги	119
8.2.2	Изменение элементов орбиты	127
8.3	Замечание о довыведении КА	136
	Список литературы	139
A	Примеры экстремалей	149
A.1	Перелет на геостационарную орбиту	150
A.1.1	Одновитковый перелет одноступенчатого КА.	150
A.1.2	Двухвитковый перелет одноступенчатого КА.	152

А.1.3	Одновитковый перелет КА с ДТБ. Сброс ДТБ на пассивном участке.	155
А.1.4	Двухвитковый перелет КА с ДТБ. Сброс ДТБ на втором пассивном участке.	157
А.1.5	Одновитковый перелет двухступенчатого КА. Сброс ступени на пассивном участке.	160
А.1.6	Одновитковый перелет двухступенчатого КА. Сброс ступени на пассивном участке, оптимальное время перелета	163
А.1.7	Одновитковый перелет двухступенчатого КА. Сброс ступени на первом активном участке.	165
А.1.8	Одновитковый перелет двухступенчатого КА. Сброс ступени на первом активном участке, оптимальное время перелета.	168
А.1.9	Двухвитковый перелет двухступенчатого КА. Сброс ступени на втором активном участке	170
А.1.10	Двухвитковый перелет двухступенчатого КА. Сброс ступени на втором активном участке, оптимальное время перелета	174
А.1.11	Двухвитковый перелет двухступенчатого КА. Сброс ступени на втором пассивном участке.	177
А.1.12	Двухвитковый перелет двухступенчатого КА. Сброс на втором пассивном участке, оптимальное время перелета .	180
А.2	Перелет на геопереходную орбиту	184
А.2.1	Двухвитковый перелет КА с ДТБ. Сброс ДТБ на первом пассивном участке.	184
А.2.2	Двухвитковый перелет КА с ДТБ. Сброс ДТБ на втором активном участке	187
А.2.3	Двухвитковый перелет КА с ДТБ. Сброс ДТБ на втором пассивном участке.	192

Глава 1

Введение

В работе рассматриваются математические проблемы решения задач оптимального управления движением многоступенчатых космических аппаратов (КА) и КА, оснащенных сбрасываемым в процессе перелета дополнительным топливным баком (ДТБ). Управление движением КА осуществляется посредством вектора тяги реактивного двигателя (двигателей) ограниченной тяги (РДОТ), в частности, реактивного двигателя (двигателей) большой тяги (РДБТ) работающей в данный момент ступени КА. Характерной особенностью таких задач является скачкообразное изменение массы КА, происходящее в результате сброса отработавшей ступени или бака. Рассматриваемые в работе задачи являются сложными нелинейными задачами оптимального управления с разрывными фазовыми переменными. Они формализуются как задачи оптимального управления совокупностью динамических систем [25], на основе соответствующего принципа максимума их решение сводится к решению многоточечных краевых задач (краевых задач принципа максимума) [25].

Краевые задачи принципа максимума решаются численно методом стрельбы. Основной проблемой, являющейся серьезным препятствием на пути эффективного применения метода стрельбы, является отсутствие сходимости итерационного процесса. Для преодоления этой проблемы в работе осуществляется выбор эффективной вычислительной схемы и согласованный с

ней выбор хорошего начального приближения, основанный на решении серии вспомогательных задач [25].

В качестве примеров рассматриваются задачи оптимизации траекторий пространственного выведения одноступенчатого, двухступенчатого КА и КА с ДТБ с низкой круговой орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ) на геостационарную орбиту (ГСО) и задачи оптимизации траекторий пространственного выведения КА с ДТБ на геопереходную орбиту. В результате решения задач определяются траектории, удовлетворяющие условиям принципа максимума — экстремали Понтрягина.

Кроме того в работе рассматривается несколько упрощенных моделей. Решение оптимизационных задач в этих простых моделях позволяет качественно описать и оценить построенные экстремали Понтрягина.

Необходимость в решении рассматриваемых задач оптимального управления КА при максимально приближенных к практике космических полетов предположениях возникает, в частности, при системной оценке различных проектных вариантов в процессе разработки реальной технической системы управления КА. Вместе с тем эти задачи представляют, помимо практического, значительный теоретический интерес. Они требуют для своего решения синтеза методов оптимального управления, механики космического полета, небесной механики и численных методов.

Идея использования многоступенчатых ракет для космических полетов была впервые предложена еще К.Э. Циолковским в 1929 году в работе "Космические поезда". Первые задачи оптимизации многоступенчатых систем в достаточно упрощенных постановках были решены с помощью теории условного экстремума функций нескольких переменных. Результаты, полученные с помощью этой теории, систематизированы и развиты в работе Зенгера-Бредта [50].

Начало глубокому исследованию оптимизационных задач ракетодинамики многоступенчатых КА, основанному на вариационном исчислении, положила работа Д.Е. Охоцимского и Т.М. Энеева [66], написанная в 1957 году. Развитием этого подхода стали работы В.А. Троицкого, А.А. Болонкина,

В.А. Космодемьянского.

В работе В.А. Троицкого [76] рассматриваемая проблема формулируется как вариационная задача с разрывными правыми частями, так что на разных участках движения система описывается различными дифференциальными уравнениями. Это позволило, используя результаты работы [73], выписать необходимые условия оптимальности, включая условия в момент сброса ступени. В другой работе [77] того же автора задача оптимизации режимов движения многоступенчатых ракет рассматривается как вариационная задача с разрывными фазовыми координатами. Непосредственное использование методов вариационного исчисления позволило получить совокупность необходимых условий стационарности и сильного минимума функционала.

В работе А.А. Болонкина [9] предлагается решать задачу по этапам, этапами являются участки полета летательного аппарата под управлением отдельных ступеней. Исследуются не только необходимые, но и достаточные условия оптимальности. При этом, как и в работах В.А. Троицкого, число ступеней, количество топлива в каждой ступени и сбрасываемая масса предполагаются заданными, что соответствует заданию поверхности разрыва и величины скачка разрывной фазовой координаты. В работе отмечается, что решение задачи оптимизации сводится к краевой задаче, которую чаще всего решить можно только численно. Предлагается фактически использовать для этого метод стрельбы, который требует хорошего начального приближения. Но в статье ничего не говорится о способах выбора такого приближения и нет решенных примеров.

Интересные исследования, проведенные на основе методов классического вариационного исчисления, содержатся в работах В.А. Космодемьянского [53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60]. Рассматриваются полеты "составных ракет" в предположении, что двигатели последовательных ступеней работают без пауз на полную мощность. Оптимизируются времена отделения ступеней.

С появлением принципа максимума Л.С. Понтрягина встал вопрос о его применении к решению задач оптимального управления многоступенчатыми КА, которые отличаются от классических задач оптимального управления

разрывностью фазовых переменных. Целый ряд исследователей (Л.Т. Ащепков, В.В. Величенко, В.Г. Веретенников, В.А. Сеницын, В.П. Моисеенко, В.А. Медведев, В.Н. Розова), используя различные подходы, занимались этой проблемой.

В работах В.П. Моисеенко [64, 65] предлагается рассматривать скачкообразные изменения кусочно-непрерывных функций как пределы некоторых непрерывных изменений. С помощью вспомогательных управлений типа δ -функций Дирака исходные разрывные вариационные задачи сводятся к эквивалентным постановкам, "непрерывным по виду записи", для которых получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума, в которые входят и условия "скачка", соответствующие разрыву фазовых координат. В [64] решается задача о наборе заданной энергии в плоскопараллельном гравитационном поле при вертикальном подъеме.

В статье В.В. Величенко [12] рассматривается задача оптимального управления, которая задается на первом временном участке одной системой дифференциальных уравнений, а на втором другой. Эти системы могут иметь неодинаковые размерности, меняются так же управляющие функции и ограничения на их значения. Преемственность между системами обеспечивается выполнением условий, связывающих фазовые координаты первой системы в момент перехода с фазовыми координатами второй системы и сам момент перехода. Такая постановка задачи включает в себя задачи оптимального управления с разрывными фазовыми координатами. Рассматриваемая задача сводится к задаче с промежуточными условиями продолжением фазовых переменных и управляющих функций на весь временной интервал непрерывным образом. Используя результаты, полученные в [11, 13] для такой задачи выписывается принцип максимума на каждом из участков и условия, соответствующие моменту перехода от одной системы к другой.

Работа В.А. Медведева и В.Н. Розовой [62] развивает исследование [12]. В ней исследуется задача оптимального управления несколькими объектами с последовательным во времени режимом их работы. Начальное состояние каждого следующего объекта зависит от конечного состояния предыдущего.

Длительности интервалов времени работы каждого объекта могут быть как заданы, так и заранее не известны. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающие объекты, могут иметь неодинаковые размерности, могут так же меняться размерности управляющих функций и ограничения на их значения. В статье показано, что оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума на соответствующих интервалах времени задания систем и при этом в моменты перехода от одного объекта к другому имеют место дополнительные условия.

Переход от задачи оптимального управления с промежуточными условиями к задаче с параметрами рассматривается в работах Р.П. Федоренко [78, 79]. Этот подход применим и к задаче оптимального управления совокупностью динамических систем. Приемы, описанные в работах Р.П. Федоренко, позволяют свести решение систем дифференциальных уравнений краевой задачи принципа максимума на отдельных участках к решению объединенной системы дифференциальных уравнений этой краевой задачи на едином интервале. Введение в задачу с параметрами соответствующих дифференциальных связей сводит задачу оптимального управления с параметрами к задаче оптимального управления с терминальными ограничениями и позволяет использовать для ее решения стандартный алгоритм решения задач оптимального управления на основе принципа максимума.

В работах Л.Т. Ащепкова [6, 7, 8] на основе подхода, предложенного в [5], систематизируются и обобщаются результаты проведенных ранее исследований. Для настоящей работы интерес представляет в первую очередь получение необходимых условий оптимальности для "разрывных систем". Термин "разрывная система" служит собирательным наименованием большого класса моделей (составных, сложных, многоэтапных, с промежуточными условиями и т.д.).

Используемый в настоящей работе подход [25], состоящий в формализации рассматриваемой задачи как задачи оптимального управления совокупностью динамических систем с последующим решением краевой задачи принципа максимума, отличается от подхода [6, 7, 8] некоторыми деталями

ми формализации. Это связано с определенными удобствами единообразной формализации различных рассматриваемых в процессе решения задач, относящихся, вообще говоря, к различным классам задач оптимизации (подробнее об этом в § 5.2).

К концу 70-х годов XX века получение необходимых условий оптимальности в задачах оптимизации ступенчатых систем в целом утратило свою актуальность. На основе этих условий решение задач оптимального управления сводилось к решению краевых задач принципа максимума. Краевые задачи принципа максимума для задач оптимизации перелетов КА нелинейны во многих случаях имеют много решений. Их решение вызывало и вызывает серьезные трудности. В работах последних десятилетий основной акцент смещается с “как написать условия оптимальности” на “как **удобнее** написать условия оптимальности” (см., например, [20]) и, главное, “как использовать условия оптимальности для решения задачи”.

Одним из первых методов, который начали применять для численного решения краевых задач принципа максимума, был метод стрельбы. С использованием метода стрельбы к 70-ым годам удалось решить несколько задач. К концу 70-ых годов про метод стрельбы у специалистов сложилось мнение: этот метод наиболее точный и аккуратный, но “капризный”, главная проблема — наличие хорошего начального приближения. Без хорошего начального приближения метод стрельбы не работает.

В связи с этим началось серьезное исследование других возможных методов решения задач оптимального управления (см., например, [78]). При этом метод стрельбы и проблематика его использования для численного решения задач оптимального управления оказались отложенными на два десятилетия.

Возврат к использованию метода стрельбы при решении сложных задач оптимизации траекторий перелетов КА произошел в 90-ых годах. Основная идея этого возврата связана с введением определения вычислительной схемы метода стрельбы и может быть определена следующим образом: “если метод стрельбы не работает, значит выбрана не эффективная вычислительная схема; для решения задачи вычислительную схему надо изменить”. К на-

стоящему времени универсальной вычислительной процедуры, являющейся достаточно эффективной при решении различных задач, не создано и трудно ожидать ее появления. Однако удалось сформировать эффективный подход решения краевых задач принципа максимума на основе метода стрельбы. С использованием этого подхода впервые удалось решить серию различных задач оптимального управления движением КА [23, 43, 39, 40, 41, 37, 42, 36, 38]. Подробнее этот подход рассматривается в гл. 5.

Изучение проблем оптимизации траекторий движения КА остается актуальным и в настоящее время. Развитие математической теории оптимального управления и вычислительных методов, совершенствование вычислительной техники и программного обеспечения создают благоприятные возможности более глубокого проникновения в существо рассматриваемых здесь проблем.

Представленная работа суммирует и обобщает опыт исследований по рассматриваемым проблемам с 2006 по 2018 годы [30, 31, 32, 33].

Глава 2

Постановки задач

В первой главе рассматриваются постановки задач оптимизации плоских и пространственных траекторий перелетов одно-, двухступенчатых КА и КА с ДТБ с низкой круговой орбиты искусственного спутника Земли на геостационарную или геопереходную орбиту.

В качестве предпосылки к рассмотрению таких задач послужили следующие типовые схемы выведения КА на геостационарную орбиту. КА с разгонным блоком выводится на незамкнутую (баллистическую) траекторию ракетой-носителем. Дальнейшие маневры осуществляются с помощью разгонного блока. Первый раз маршевый двигатель разгонного блока запускается для выведения КА на низкую околоземную орбиту. Второй запуск двигательной установки происходит вблизи восходящего узла опорной орбиты. В случае одновиткового выведения (рис. 2.1, 2.2) это включение поднимает высоту апогея до геостационара и переводит КА на переходную орбиту. В случае двухвиткового выведения (рис. 2.3, 2.4) первое перицентрическое включение переводит аппарат на промежуточную орбиту, на переходную орбиту КА переводится после второго перицентрического включения. Сброс ДТБ происходит после полной выработки топлива и занимает определенное время (примерно равное две минуты). Этот сброс может производиться на активном участке (рис. 2.1, 2.3) или на протяженном пассивном участке (рис. 2.2, 2.4). После включения двигательной установки в апогее переходной

орбиты КА выводятся на геостационарную или на целевую (геопереходную) орбиту. В последнем случае разгонный блок сбрасывается после полной выработки топлива и выведение КА на геостационарную орбиту заканчивают двигатели самого КА.

2.1 Одноступенчатый КА

Пространственное движение центра масс рассматриваемого КА переменной массы с реактивным двигателем ограниченной тяги в центральном ньютоновском гравитационном поле одного притягивающего центра в вакууме в декартовой системе координат, связанной с центром Земли (ось Zz сонаправлена с осью вращения Земли и плоскость Zxy является экваториальной), описывается дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, & \dot{y} &= v, & \dot{z} &= w, & \dot{m} &= -\frac{P}{c}, \\ \dot{u} &= -\frac{\mu x}{r^3} + \frac{P_x}{m}, & \dot{v} &= -\frac{\mu y}{r^3} + \frac{P_y}{m}, & \dot{w} &= -\frac{\mu z}{r^3} + \frac{P_z}{m}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где x, y, z — координаты центра масс КА; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние от КА до центра Земли; u, v, w — компоненты вектора скорости КА; $\mu = 398601.19 \text{ км}^3/\text{с}^2$ — гравитационный параметр Земли; c — скорость истечения реактивной струи (постоянная величина), $c = P_{\text{уд}} \cdot g_3$, $P_{\text{уд}}$ — удельная тяга (заданный параметр), $g_3 = 9.80665 \text{ м/с}^2$ — гравитационное ускорение у поверхности Земли; m — безразмерная масса КА, $m(t) = M(t)/M(0)$, $M(0)$ — начальная масса КА, $P = g_3 n$ — величина управляющего вектора реактивной тяги \mathbf{P} (управления), $n = F/(M(0)g_3)$ — начальная тяговооружённость КА, F — величина тяги двигателя разгонного блока, $P_{\text{max}} = g_3 n$ — ограничение величины управляющего вектора реактивной тяги \mathbf{P} (управления); P_x, P_y, P_z — проекции \mathbf{P} на оси координат.

Управления предполагаются кусочно-непрерывными ограниченными функциями

$$P = \sqrt{(P_x)^2 + (P_y)^2 + (P_z)^2} \leq P_{\text{max}}. \quad (2.2)$$

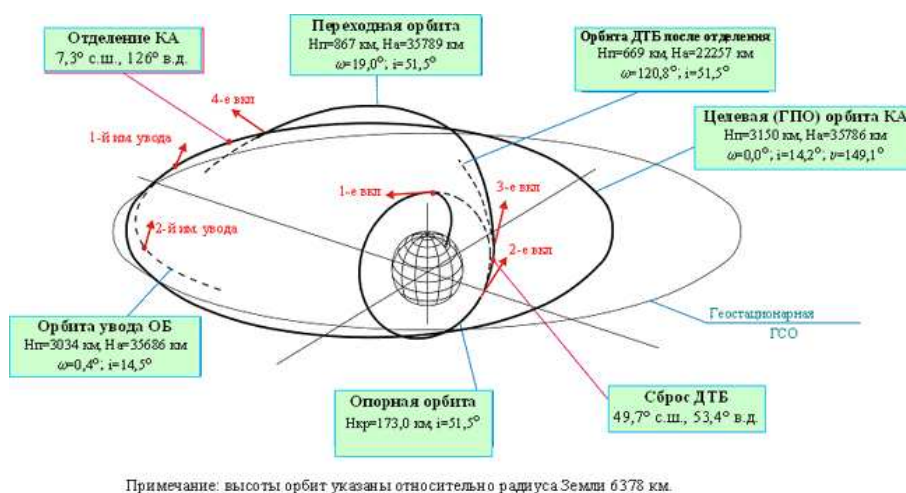


Рис. 2.1: Схема выведения КА "Арабсат-4б" на геопереходную орбиту. Одновитковый перелет, сброс ДТБ на активном участке.

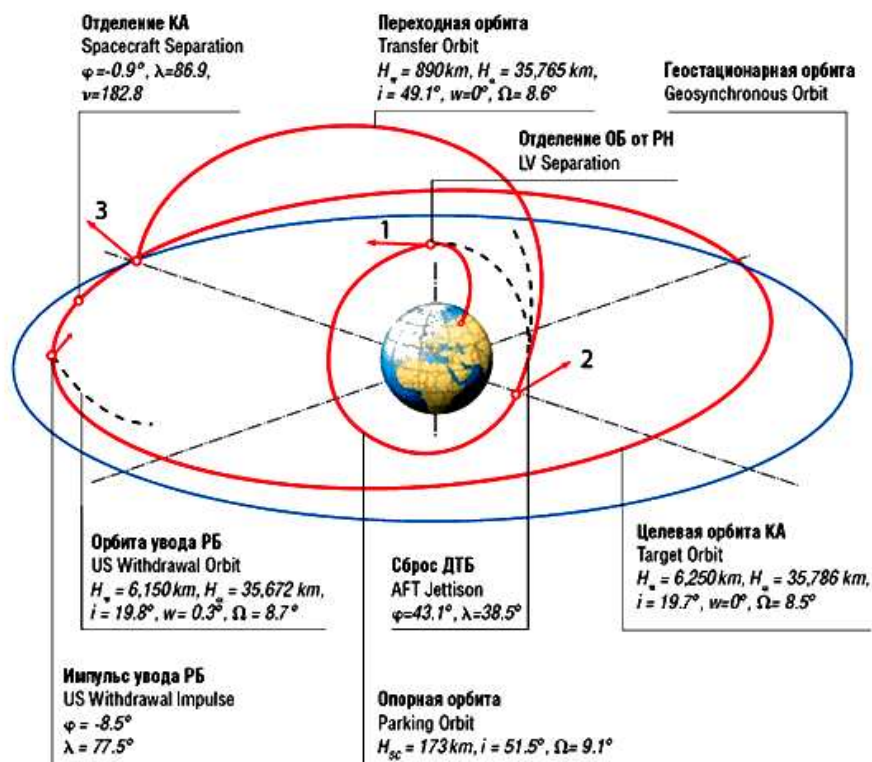


Рис. 2.2: Схема выведения КА "АМС-14" на геопереходную орбиту. Одновитковый перелет, сброс ДТБ на пассивном участке.

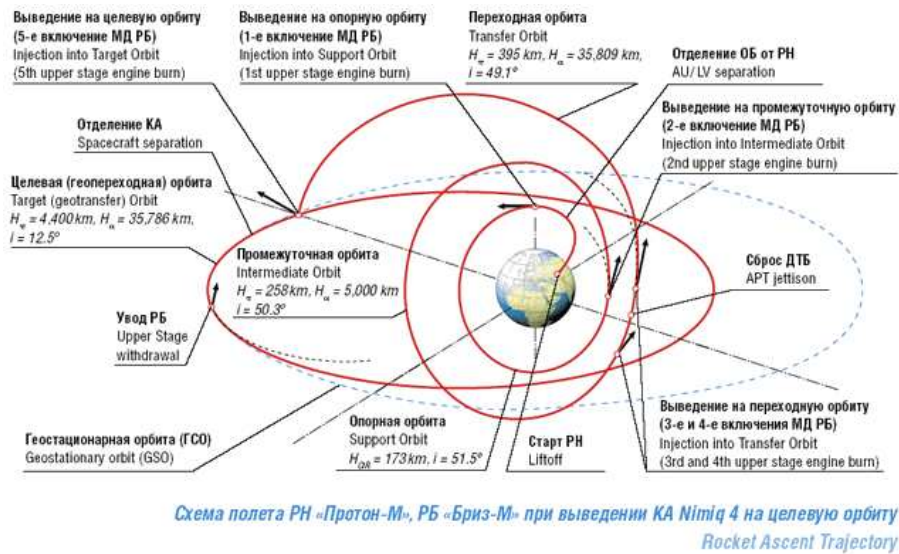


Рис. 2.3: Схема выведения КА "Nimiq-4" на геопереходную орбиту. Двухвитковый перелет, сброс ДТБ на активном участке.

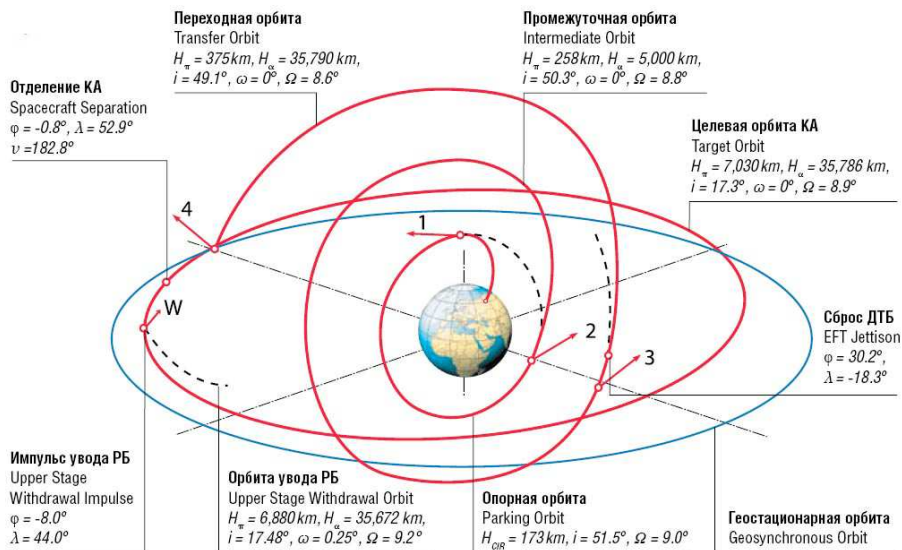


Рис. 2.4: Схема выведения "Сириус-4" на геопереходную орбиту. Двухвитковый перелет, сброс ДТБ на пассивном участке.

В начальный момент времени $t = 0$ КА находится на исходной круговой орбите высоты h_0 над поверхностью Земли. Плоскость этой орбиты проходит через центр Земли и определяется углом i_0 наклона к плоскости экватора $Zxу$ и долготой восходящего узла Ω_0 , отсчитываемой от оси Zx :

$$\begin{aligned}
 x^2(0) + y^2(0) + z^2(0) - (R_3 + h_0)^2 &= 0, \\
 x(0)u(0) + y(0)v(0) + z(0)w(0) &= 0, \\
 y(0)w(0) - z(0)v(0) - C_x &= 0, \\
 z(0)u(0) - x(0)w(0) - C_y &= 0, \\
 x(0)v(0) - y(0)u(0) - C_z &= 0, \\
 m(0) - 1 &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $C_0 = (\mu(R_3 + h_0))^{1/2}$ — величина вектора кинетического момента КА относительно центра Земли,

$$C_x = C_0 \sin i_0 \sin \Omega_0, \quad C_y = -C_0 \sin i_0 \cos \Omega_0, \quad C_z = C_0 \cos i_0.$$

Положение КА на исходной орбите заранее не фиксируется и определяется в результате решения задачи.

Рассматривается выведение КА на геостационарную орбиту — круговую орбиту высоты h_{GEO} , лежащую в плоскости экватора:

$$\begin{aligned}
 x^2(T) + y^2(T) - (R_3 + h_{GEO})^2 &= 0, \\
 u(T) + v_{кр}(h_T)y(T)/(R_3 + h_{GEO}) &= 0, \\
 v(T) - v_{кр}x(T)/(R_3 + h_{GEO}) &= 0, \\
 z(T) = 0, \quad w(T) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Общее время перелета ограничено

$$T \leq T_{\max}. \tag{2.5}$$

Далее это ограничение называется активным, если на полученном решении оно выполняется в виде равенства $T = T_{\max}$, и неактивным, если на полученном решении оно выполняется в виде строгого неравенства $T < T_{\max}$.

В задаче для одноступенчатого КА по окончании перелета происходит сброс двигателя и топливного бака; масса бака считается пропорциональной массе находившегося в нем топлива (коэффициент пропорциональности α), а масса двигателя — начальной тяговооруженности (коэффициент пропорциональности β) [15, 47]. Оставшаяся после сброса масса считается полезной

$$m_{\Pi} = m(T) - \alpha(1 - m(T)) - \beta n. \quad (2.6)$$

Максимизируется конечная (полезная) масса КА — масса, оставшаяся после сброса двигателя и топливного бака

$$-m_{\Pi} \rightarrow \inf. \quad (2.7)$$

Отметим, что масса двигателя фактически фиксирована, так как величина начальной тяговооруженности является заданной константой, а масса топлива определяется в результате решения. Причем предполагается, что его в точности хватает на выполнение маневра.

Кроме перелета на геостационарную орбиту рассматривается выведение КА на геопереходную, эллиптическую орбиту с радиусом апоцентра, равным радиусу геостационарной орбиты, и линией апсид, лежащей в плоскости геостационарной орбиты, совпадающей с плоскостью Zxy :

$$\begin{aligned} r_A - r_{GEO} &= 0, \\ u(T)C_{T_y} - v(T)C_{T_z} - \frac{\mu_3 z(T)}{R(T)} &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Второе условие соответствует равенству нулю компоненты z вектора Лапласа, вектора, который является первым интегралом уравнений движения и направлен из притягивающего центра в точку перигея орбиты. Выполнение этого требования означает, что перицентр орбиты лежит в плоскости Zxy , то есть в плоскости геостационарной орбиты.

Общая масса топлива в баке в этом случае считается известной и потому полезная масса КА задана

$$m_{\Pi} = m^*, \quad (2.9)$$

причем для выведения на геостационарную орбиту находящегося в баках топлива не хватает.

Минимизируется величина требуемого для дальнейшего выведения на геостационарную орбиту импульса скорости (то есть конечная орбита должна быть максимально "близка" к геостационарной орбите)

$$(\Delta V_A)^2 = V_A^2 \sin^2 i_T + (V_{GEO} - V_A \cos i_T)^2 \rightarrow \inf, \quad (2.10)$$

где r_A — радиус апоцентра конечной эллиптической орбиты, V_A — скорость в апоцентре конечной эллиптической орбиты, i_T — угол наклона плоскости конечной эллиптической орбиты к плоскости геостационарной орбиты, $V_{GEO} = \sqrt{\mu/r_{GEO}}$ — скорость на геостационарной орбите. Величины $r_A, V_A, \sin i_T, \cos i_T$ являются функциями фазовых координат в конечный момент времени и определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & V &= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \\ Q &= V^2 r / \mu, & \text{при } Q < 2 : & \quad a = r/2 - Q, \\ e &= \sqrt{(Q - 1)^2 + rQ \cos^2 \varphi / (\mu a)}, & \cos \varphi &= (xu + yv + zw) / rV, \\ r_A &= a(1 + e), \\ C_{T_x} &= yw - zv, & C_{T_y} &= zu - xw, & C_{T_z} &= xv - yu, \\ C_T &= \sqrt{C_{T_x}^2 + C_{T_y}^2 + C_{T_z}^2}, \\ \cos i_T &= C_{T_z} / C_T, & \sin i_T &= \sqrt{C_{T_x}^2 + C_{T_y}^2} / C_T, \\ V_A &= C_T / r_A. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Отметим, что одновременно с рассматриваемой задачей минимизации скорости довыведения (2.10) при заданной полезной массе (2.9) решается взаимная задача максимизации полезной массы при перелете на эллиптическую орбиту с заданной скоростью довыведения:

$$-m_{\Pi} \rightarrow \inf, \quad (\Delta V_A)^2 = V_A^2 \sin^2 i_T + (V_{GEO} - V_A \cos i_T)^2 = (\Delta V_A^*)^2. \quad (2.12)$$

2.2 Двухступенчатый КА

Задача оптимизации траектории перелета двухступенчатого КА на геостационарную орбиту отличается от задачи оптимизации траектории перелета одноступенчатого КА наличием двух участков. На первой части траектории управление КА осуществляется первой ступенью, на второй части — второй. Двигатели первой и второй ступени могут иметь разные характеристики: n_1 , n_2 — их тяговооруженности, c_1 , c_2 — скорости истечения. Начальная тяговооруженность второй ступени определяется отношением величины тяги двигательной системы второй ступени КА F_2 к оставшейся после сброса первой ступени массе M_1 : $n_2 = F_2 / (M_1 g_3)$. Предполагается, что ступени состоят из двигателей и топливных баков. Массы двигателей фактически фиксированы (пропорциональны заданным тяговооруженностям с заданным коэффициентом пропорциональности β). Массы баков пропорциональны (коэффициент пропорциональности α) массе находившегося в них топлива.

Если масса топлива в первой ступени задана и, следовательно, задана масса всей ступени, тогда сброс происходит в момент времени τ , соответствующий полной выработке топлива

$$m(\tau_-) = m_1^*. \quad (2.13)$$

Кроме того масса топлива в первой ступени может быть не задана, а определяться в результате решения задачи.

В момент сброса первой ступени выполняются соотношения:

$$\tau_- = \tau_+, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} x(\tau_-) &= x(\tau_+), & y(\tau_-) &= y(\tau_+), & z(\tau_-) &= z(\tau_+), \\ u(\tau_-) &= u(\tau_+), & v(\tau_-) &= v(\tau_+), & w(\tau_-) &= w(\tau_+). \end{aligned} \quad (2.15)$$

В (2.13), (2.14), (2.15) τ_- и τ_+ обозначают моменты окончания первой части траектории (до сброса первой ступени) и начала второй части траектории (после сброса первой ступени); эти моменты заранее не известны и определяются в результате решения задачи. Предполагается, что сброс происходит

мгновенно (2.14) и не меняет положение и скорость КА (2.14). Рассматривается два различных случая сброса ступени — на активном и на протяженном пассивном участках (см. далее § 4.3).

Относительная масса второй ступени — это масса, оставшаяся после выработки топлива и сброса первой ступени. Она определяется соотношением

$$m_1 = m(\tau_-) - \alpha(1 - m(\tau_-)) - \beta n_1. \quad (2.16)$$

Отметим, что в случае задания массы топлива в первой ступени, m_1 становится константой.

Для корректного учета величины тяги второй ступени производится обезразмеривание массы на втором участке

$$m(\tau_+) = 1. \quad (2.17)$$

По окончании перелета происходит сброс второй ступени

$$m_2 = m(T) - \alpha(1 - m(T)) - \beta n_2. \quad (2.18)$$

Конечная (полезная) масса в этом случае вычисляется по формуле

$$m_{\Pi} = m_1 \cdot m_2. \quad (2.19)$$

2.3 КА с ДТБ

В задаче оптимизации перелета КА с ДТБ предполагается, что сброс ДТБ занимает некоторое время, в течение которого происходит пассивный полет. Траектория перелета КА при этом состоит из трех участков: 1) $[0, \tau_{1-}]$ — полет до сброса ДТБ; 2) $[\tau_{1+}, \tau_{2-}]$ — пассивный полет, в течение которого происходит сброс ДТБ; 3) $[\tau_{2+}, T]$ — полет после сброса ДТБ, причем $\tau_{1-} = \tau_1 = \tau_{1+}$ и $\tau_{2-} = \tau_2 = \tau_{2+}$.

Сброс выполняется после полной выработки топлива из ДТБ:

$$m(\tau_{1-}) = m_1^*. \quad (2.20)$$

В моменты времени τ_1 и τ_2 положение и скорость КА не изменяются:

$$\begin{aligned} \tau_{1-} &= \tau_1 = \tau_{1+}, \\ x(\tau_{1-}) &= x(\tau_{1+}), \quad y(\tau_{1-}) = y(\tau_{1+}), \quad z(\tau_{1-}) = z(\tau_{1+}), \\ u(\tau_{1-}) &= u(\tau_{1+}), \quad v(\tau_{1-}) = v(\tau_{1+}), \quad w(\tau_{1-}) = w(\tau_{1+}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \tau_{2-} &= \tau_2 = \tau_{2+}, \\ x(\tau_{2-}) &= x(\tau_{2+}), \quad y(\tau_{2-}) = y(\tau_{2+}), \quad z(\tau_{2-}) = z(\tau_{2+}), \\ u(\tau_{2-}) &= u(\tau_{2+}), \quad v(\tau_{2-}) = v(\tau_{2+}), \quad w(\tau_{2-}) = w(\tau_{2+}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

На среднем участке уравнение для массы не рассматривается, остальные уравнения движения остаются прежними. Сброс бака занимает заданное время (в секундах)

$$\tau_2 - \tau_1 \geq 120. \quad (2.23)$$

Сухая масса бака пропорциональна массе находившегося в нем топлива (коэффициент пропорциональности α) [15, 47]

$$m(\tau_{2+}) = m_2^* = m_1^* - \alpha(1 - m_1^*). \quad (2.24)$$

Конечная (полезная) масса определяется соотношением

$$m_{\Pi} = m(T) - \alpha(m_2^* - m(T)) - \beta n. \quad (2.25)$$

Рассматривается два случая: величина m_1^* задана или величина m_1^* заранее не известна и определяется в процессе решения задачи (оптимизируется). В случае заданной величины m_1^* величина m_2^* (2.24) также является известной константой. В случае оптимизируемой массы топлива в ДТБ представим условие (2.24) в удобном для последующего анализа виде

$$m(\tau_{2+}) = m(\tau_{1-}) - \alpha(1 - m(\tau_{1-})). \quad (2.26)$$

Глава 3

Необходимые условия ОПТИМАЛЬНОСТИ

3.1 Одноступенчатый КА

Задача оптимизации перелета одноступенчатого КА является классической задачей оптимального управления и решается на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина [2, 3, 4, 5, 16, 17, 18, 19, 67, 72].

Функция Понтрягина имеет вид

$$H = p_x u + p_y v + p_z w + p_m \left(-\frac{P}{c} \right) + \\ + p_u \left(-\frac{\mu x}{r^3} + \frac{P_x}{m} \right) + p_v \left(-\frac{\mu y}{r^3} + \frac{P_y}{m} \right) + p_w \left(-\frac{\mu z}{r^3} + \frac{P_z}{m} \right), \quad (3.1)$$

терминант

$$l = l_0 + l_T, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned}
l_0 = & \lambda_r (x^2(0) + y^2(0) + z^2(0) - (R_3 + h_0)^2) + \\
& + \lambda_{kr} (x(0)u(0) + y(0)v(0) + z(0)w(0)) + \lambda_{C_x} (y(0)w(0) - z(0)v(0) - C_{0x}) + \\
& + \lambda_{C_y} (z(0)u(0) - x(0)w(0) - C_{0y}) + \lambda_{C_z} (x(0)v(0) - y(0)u(0) - C_{0z}) + \\
& + \lambda_m (m(0) - 1);
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
l_T = & \lambda_{Tr} (x^2(T) + y^2(T) - (R_3 + h_{GEO})^2) + \lambda_{Tz} (z(T)) + \\
& + \lambda_{Tu} (u(T) + v_{кр}y(T)/(R_3 + h_{GEO})) + \\
& + \lambda_{Tv} (v(T) - v_{кр}x(T)/(R_3 + h_{GEO})) + \lambda_{Tw} (w(T)) + \lambda_T (T - T_{\max}) - \lambda_0 m_{\Pi}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

— в случае выведения КА на геостационарную орбиту и

$$\begin{aligned}
l_T = & \lambda_{Ta} (r_A - R_{GEO}) + \lambda_{To} \left(u(T)C_{Ty} - v(T)C_{Tz} - \frac{\mu z(T)}{R(T)} \right) + \\
& \lambda_{Tm} (m_T^* - m_{\Pi}) + \lambda_T (T - T_{\max}) + \lambda_0 (V_A^2 \sin^2 i_T + (V_{GEO} - V_A \cos i_T)^2)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

— в случае выведения КА на геопереходную орбиту.

В (3.1)–(3.5) функции $p_x, p_y, p_z, p_m, p_u, p_v, p_w$ — сопряженные переменные (функциональные множители Лагранжа), λ_i ($i = r, kr, C_x, C_y, C_z, m, Tr, Tz, Tu, Tv, Tw, Ta, To, T, 0$) — числовые множители Лагранжа.

Необходимые условия оптимальности имеют следующий вид.

а) Уравнения Эйлера–Лагранжа (сопряженная система уравнений):

$$\begin{aligned}
\dot{p}_x = & \frac{p_u \mu}{r^3} - \frac{3\mu x (p_u x + p_v y + p_w z)}{r^5}, & \dot{p}_u = & -p_x, \\
\dot{p}_y = & \frac{p_v \mu}{r^3} - \frac{3\mu y (p_u x + p_v y + p_w z)}{r^5}, & \dot{p}_v = & -p_y, \\
\dot{p}_z = & \frac{p_w \mu}{r^3} - \frac{3\mu z (p_u x + p_v y + p_w z)}{r^5}, & \dot{p}_w = & -p_z, \\
\dot{p}_m = & (P_x p_u + P_y p_v + P_z p_w) / m^2.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

б) Условия оптимальности по управлениям P_x, P_y, P_z

$$\begin{aligned} \{P_x, P_y, P_z\}_{opt} &= \arg \operatorname{abs} \max_{0 \leq P \leq P_{\max}} H(\dots, P_x, P_y, P_z, \dots) \equiv \\ &\equiv \arg \operatorname{abs} \max_{0 \leq P \leq P_{\max}} \left[p_u \frac{P_x}{m} + p_v \frac{P_y}{m} + p_w \frac{P_z}{m} - p_m \frac{P}{c} \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для удобного анализа полученных условий оптимальности введем направляющие косинусы вектора P $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, тогда

$$P_x = P \cos \alpha, \quad P_y = P \cos \beta, \quad P_z = P \cos \gamma,$$

и условие оптимальности превращается в следующее

$$\begin{aligned} &\{P, \alpha, \beta, \gamma\}_{opt} = \\ &= \arg \operatorname{abs} \max \left[P \left(\frac{p_u \cos \alpha + p_v \cos \beta + p_w \cos \gamma}{m} - \frac{p_m}{c} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Величину $(p_u \cos \alpha + p_v \cos \beta + p_w \cos \gamma)$ — можно рассматривать как скалярное произведение вектора $\mathbf{p} = \{p_u, p_v, p_w\}$ и единичного вектора $\mathbf{e} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$. Скалярное произведение достигнет максимального значения, когда вектора сонаправлены:

$$\cos \alpha_{opt} = \frac{p_u}{\rho}, \quad \cos \beta_{opt} = \frac{p_v}{\rho}, \quad \cos \gamma_{opt} = \frac{p_w}{\rho}, \quad (3.9)$$

где $\rho = |\mathbf{p}| = \sqrt{p_u^2 + p_v^2 + p_w^2} \neq 0$ и потому условия оптимальности могут быть записаны в виде

$$P_x = P_{opt} \frac{p_u}{\rho}, \quad P_y = P_{opt} \frac{p_v}{\rho}, \quad P_z = P_{opt} \frac{p_w}{\rho}, \quad P_{opt} = \begin{cases} P_{\max}, & \chi > 0, \\ 0, & \chi < 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

где

$$\chi \equiv \left(\frac{\rho}{m} - \frac{p_m}{c} \right) \quad (3.11)$$

— функция переключения управления P_{opt} .

Заметим, что при $\chi = 0$ и при $\rho = 0$, $\chi > 0$ управления P_x , P_y , P_z из условий оптимальности однозначно не определяются. Если при этом функции ρ и χ обращаются в ноль лишь в отдельных точках, то управления в этих точках могут быть получены их продолжением по непрерывности — слева или справа. Если же функции ρ и χ обращаются в ноль на целых отрезках времени, то определение соответствующих этому случаю особых управлений требует выходящих за рамки принципа максимума дополнительных исследований. В представленной работе эти исследования не проводятся.

в) Условия трансверсальности по фазовым переменным при $t = 0$:

$$\begin{aligned}
 p_x(0) &= 2\lambda_r x(0) + \lambda_{kr} u(0) - \lambda_{C_y} w(0) + \lambda_{C_z} v(0), \\
 p_y(0) &= 2\lambda_r y(0) + \lambda_{kr} v(0) + \lambda_{C_x} w(0) - \lambda_{C_z} u(0), \\
 p_z(0) &= 2\lambda_r z(0) + \lambda_{kr} w(0) - \lambda_{C_x} v(0) + \lambda_{C_y} u(0), \\
 p_u(0) &= \lambda_{kr} x(0) + \lambda_{C_y} z(0) - \lambda_{C_z} y(0), \\
 p_v(0) &= \lambda_{kr} y(0) - \lambda_{C_x} z(0) + \lambda_{C_z} x(0), \\
 p_w(0) &= \lambda_{kr} z(0) + \lambda_{C_x} y(0) - \lambda_{C_y} x(0), \\
 p_m(0) &= \lambda_m.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

При $t = T$ в задаче перелета на геостационарную орбиту:

$$\begin{aligned}
 p_x(T) &= -2\lambda_{Tr} x(T) + \lambda_{Tv} v_{кр}(h_{GEO}) / (R_3 + h_{GEO}), & p_u(T) &= -\lambda_{Tu}, \\
 p_y(T) &= -2\lambda_{Tr} y(T) - \lambda_{Tu} v_{кр}(h_{GEO}) / (R_3 + h_{GEO}), & p_v(T) &= -\lambda_{Tv}, \\
 p_z(T) &= -\lambda_{Tz}, & p_w(T) &= -\lambda_{Tw},
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$p_m(T) = (1 + \alpha)\lambda_0. \tag{3.14}$$

Из условий трансверсальности по фазовым переменным в конечный момент времени следует

$$\left(p_x(T) + p_v(T) \frac{v_{кр}(h_T)}{R_3 + h_T} \right) y(T) - \left(p_y(T) - p_u(T) \frac{v_{кр}(h_T)}{R_3 + h_T} \right) x(T) = 0. \tag{3.15}$$

В задаче перелета на геопереходную орбиту условия трансверсальности представим в формальном виде:

$$p_j(T) = -\frac{\partial l}{\partial j(T)}, \quad j = x, y, z, u, v, w, \tag{3.16}$$

$$p_m(T) = (1 + \alpha)\lambda_{Tm}. \quad (3.17)$$

так как входящие в них производные достаточно громоздки. К вопросу вычисления и учета этих производных мы вернемся дальше при описании соответствующей вычислительной схемы метода стрельбы (см. §5.4).

г)Условие стационарности

$$H(T) = \lambda_T. \quad (3.18)$$

д)Условие дополняющей нежесткости

$$\lambda_T(T - T_{\max}) = 0. \quad (3.19)$$

е)Условия неотрицательности:

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_T \geq 0. \quad (3.20)$$

ж)Множители Лагранжа НЕ Равны Одновременно Нулю (условие НЕРОН).

з)Множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного сомножителя. В решаемых задачах в качестве условия нормировки использовалось условие

$$p_u^2(0) + p_v^2(0) + p_w^2(0) = 1. \quad (3.21)$$

Отметим, что в случае рассмотрения задачи максимизации полезной массы при заданной скорости довыведения (2.1), (2.2), (2.3), (2.5), (2.8), (2.12) в терминанте (3.5) фактически изменяется только обозначение множителей Лагранжа: λ_{Tm} становится множителем при функционале (который традиционно обозначается через λ_0), константа m_T^* из терминанта исключается, множитель λ_0 заменяется множителем λ_{TV} и добавляется константа ΔV_A^* . Главное изменение условий оптимальности — в условиях неотрицательности вместо множителя при величине скорости довыведения присутствует множитель при полезной массе. Учитывая, что на полученных траекториях оба

эти множителя неотрицательны, каждое полученное решение удовлетворяет системе необходимых условий оптимальности в обеих задачах и, потому, является экстремалью и в задаче минимизации скорости довыведения (2.10) при заданной полезной массе (2.9), и в задаче максимизации полезной массы при перелете на эллиптическую орбиту с заданной скоростью довыведения (2.12).

В дальнейшем анализ краевой задачи и ее решение будет описываться для одного варианта постановки, при анализе полученных результатов будут использоваться оба варианта.

3.2 Двухступенчатый КА

Задачи оптимизации перелетов двухступенчатых КА отличаются от задач, традиционно рассматриваемых в курсах оптимального управления, разрывностью фазовых переменных (массы КА). Они формализуются как задачи оптимального управления совокупностью динамических систем и решаются на основе соответствующего принципа максимума [25].

Траектории в задачах состоят из двух участков: 1) $[0, \tau_-]$ — полет до сброса первой ступени; 2) $[\tau_+, T]$ — полет после сброса, причем $\tau_- = \tau_+$ (2.14).

На каждом из участков траекторий функции Понтрягина имеют вид (3.1), и, следовательно, системы уравнений Эйлера–Лагранжа совпадают с (3.6), а условия оптимальности с (3.10). Отметим, что для двухступенчатого КА в качестве c и P_{\max} в этих условиях используются на первом участке траектории c_1 и P_{\max}^1 , а на втором — c_2 и P_{\max}^2 .

Терминанты задач имеют вид:

$$l = l_0 + l_\tau + l_T + \lambda_{\tau m}^- (m(\tau_-) - m_1^*) + \lambda_{\tau m}^+ (m(\tau_+) - 1) \quad (3.22)$$

— в задаче оптимизации перелета двухступенчатого КА с заданным количеством топлива в первой ступени,

$$l = l_0 + l_\tau + l_T + \lambda_{\tau m}^+ (m(\tau_+) - 1) \quad (3.23)$$

— в задаче оптимизации перелета двухступенчатого КА с заданным количеством топлива в первой ступени. В (3.22), (3.23) l_0 и l_T определяются формулами (3.3) и (3.4), величина m_{Π} входящая в l_T определяется соотношением (2.19),

$$\begin{aligned} l_{\tau} = & \lambda_{\tau}(\tau_{-} - \tau_{+}) + \lambda_{\tau x}(x(\tau_{-}) - x(\tau_{+})) + \lambda_{\tau y}(y(\tau_{-}) - y(\tau_{+})) + \\ & + \lambda_{\tau z}(z(\tau_{-}) - z(\tau_{+})) + \lambda_{\tau u}(u(\tau_{-}) - u(\tau_{+})) + \\ & + \lambda_{\tau v}(v(\tau_{-}) - v(\tau_{+})) + \lambda_{\tau w}(w(\tau_{-}) - w(\tau_{+})), \end{aligned} \quad (3.24)$$

где $\lambda_{\tau}, \dots, \lambda_{\tau m}$ — неизвестные числовые множители Лагранжа.

В этих задачах условия трансверсальности в начальный момент времени совпадают с (3.12), условия трансверсальности и стационарности в конечный момент времени совпадают с (3.13), (3.18) и кроме того выполняются условия:

$$\begin{aligned} p_x(\tau_{-}) = -\lambda_{\tau x} = p_x(\tau_{+}), \quad p_y(\tau_{-}) = -\lambda_{\tau y} = p_y(\tau_{+}), \\ p_z(\tau_{-}) = -\lambda_{\tau z} = p_z(\tau_{+}), \quad p_u(\tau_{-}) = -\lambda_{\tau u} = p_u(\tau_{+}), \\ p_v(\tau_{-}) = -\lambda_{\tau v} = p_v(\tau_{+}), \quad p_w(\tau_{-}) = -\lambda_{\tau w} = p_w(\tau_{+}), \\ H(\tau_{-}) = \lambda_{\tau}, \quad H(\tau_{+}) = \lambda_{\tau}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Из (3.25) следует, что сопряженные переменные $p_x, p_y, p_z, p_u, p_v, p_w$ и функция Понтрягина H в момент времени τ непрерывны.

В задаче оптимизации траекторий перелета двухступенчатого КА с заданной массой топлива в первой ступени также выполняются условия:

$$p_m(\tau_{-}) = -\lambda_{\tau m}^{-}, \quad p_m(\tau_{+}) = \lambda_{\tau m}^{+}, \quad p_m(T) = \lambda_0(1 + \alpha)m_1; \quad (3.26)$$

в задаче оптимизации траекторий перелета двухступенчатого КА с заданной массой топлива в первой ступени — условия:

$$\begin{aligned} p_m(\tau_{-}) = \lambda_0(1 + \alpha)(m(T) - \alpha(1 - m(T)) - \beta n_2), \quad p_m(\tau_{+}) = \lambda_{\tau m}^{+}, \\ p_m(T) = \lambda_0(1 + \alpha)(m(\tau_{-}) - \alpha(1 - m(\tau_{-})) - \beta n_1). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Откуда следует

$$p_m(\tau_{-}) \cdot m_1 - p_m(T) \cdot m_2 = 0. \quad (3.28)$$

Условия г)–ж) остаются неизменными.

3.3 КА с ДТБ

Задачи оптимизации перелетов КА с ДТБ рассматриваются как задачи оптимального управления совокупностью динамических систем. Траектория состоит из трех участков: 1) $[0, \tau_{1-}]$ — полет до сброса ДТБ; 2) $[\tau_{1+}, \tau_{2-}]$ — пассивный полет, в течение которого происходит сброс ДТБ; 3) $[\tau_{2+}, T]$ — полет после сброса ДТБ, причем $\tau_{1-} = \tau_{1+}$ и $\tau_{2-} = \tau_{2+}$.

На первом и последнем участке траектории функции Понтрягина имеют вид (3.1), и, следовательно, системы уравнений Эйлера–Лагранжа совпадают с (3.6), а условия оптимальности с (3.10). На втором участке управления в уравнениях движения равны нулю и уравнение для массы отсутствует; система уравнений Эйлера–Лагранжа отличается от (3.6) отсутствием уравнения для p_m .

Терминант задачи в случае заданной величины m_1^* имеет вид

$$l = l_0 + l_1 + l_2 + \lambda_\tau (\tau_{1+} - \tau_{2-} + 120) + \lambda_{1m} (m(\tau_{1-}) - m_1^*) + \lambda_{2m} (m(\tau_{2+}) - m_2^*) + l_T, \quad (3.29)$$

где l_0 определяются формулами (3.3), l_T — формулами (3.4) при выведении КА на ГСО и (3.5) при выведении КА на ГПО,

$$\begin{aligned} l_1 = & \lambda_{1\tau} (\tau_{1-} - \tau_{1+}) + \lambda_{1x} (x(\tau_{1-}) - x(\tau_{1+})) + \\ & + \lambda_{1y} (y(\tau_{1-}) - y(\tau_{1+})) + \lambda_{1z} (z(\tau_{1-}) - z(\tau_{1+})) + \lambda_{1u} (u(\tau_{1-}) - u(\tau_{1+})) + \\ & + \lambda_{1v} (v(\tau_{1-}) - v(\tau_{1+})) + \lambda_{1w} (w(\tau_{1-}) - w(\tau_{1+})), \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} l_2 = & \lambda_{2\tau} (\tau_{2-} - \tau_{2+}) + \lambda_{2x} (x(\tau_{2-}) - x(\tau_{2+})) + \\ & + \lambda_{2y} (y(\tau_{2-}) - y(\tau_{2+})) + \lambda_{2z} (z(\tau_{2-}) - z(\tau_{2+})) + \lambda_{2u} (u(\tau_{2-}) - u(\tau_{2+})) + \\ & + \lambda_{2v} (v(\tau_{2-}) - v(\tau_{2+})) + \lambda_{2w} (w(\tau_{2-}) - w(\tau_{2+})). \end{aligned} \quad (3.31)$$

В (3.29)–(3.31) $\lambda_\tau, \lambda_{1m}, \lambda_{2m}, \lambda_{1\tau}, \dots, \lambda_{1w}, \lambda_{2\tau}, \dots, \lambda_{2w}$ — числовые множители Лагранжа.

Условия трансверсальности по фазовым переменным при $t = 0$ совпадают с (3.12), при $t = T$ совпадают с (3.13), (3.14) при выведении на ГСО и с (3.16), (3.17) при выведении на ГПО;

при $t = \tau_1$:

$$\begin{aligned} p_x(\tau_{1-}) &= -\lambda_{1x} = p_x(\tau_{1+}), & p_y(\tau_{1-}) &= -\lambda_{1y} = p_y(\tau_{1+}), \\ p_z(\tau_{1-}) &= -\lambda_{1z} = p_z(\tau_{1+}), & p_u(\tau_{1-}) &= -\lambda_{1u} = p_u(\tau_{1+}), \\ p_v(\tau_{1-}) &= -\lambda_{1v} = p_v(\tau_{1+}), & p_w(\tau_{1-}) &= -\lambda_{1w} = p_w(\tau_{1+}); \end{aligned} \quad (3.32)$$

при $t = \tau_2$:

$$\begin{aligned} p_x(\tau_{2-}) &= -\lambda_{2x} = p_x(\tau_{2+}), & p_y(\tau_{2-}) &= -\lambda_{2y} = p_y(\tau_{2+}), \\ p_z(\tau_{2-}) &= -\lambda_{2z} = p_z(\tau_{2+}), & p_u(\tau_{2-}) &= -\lambda_{2u} = p_u(\tau_{2+}), \\ p_v(\tau_{2-}) &= -\lambda_{2v} = p_v(\tau_{2+}), & p_w(\tau_{2-}) &= -\lambda_{2w} = p_w(\tau_{2+}); \end{aligned} \quad (3.33)$$

и

$$p_m(\tau_{1-}) = -\lambda_{1m}, \quad p_m(\tau_{2+}) = \lambda_{2m}. \quad (3.34)$$

г) Условия стационарности:

$$\begin{aligned} H(\tau_{1-}) &= \lambda_{1\tau}, & H(\tau_{1+}) &= \lambda_{1\tau} + \lambda_\tau, \\ H(\tau_{2-}) &= \lambda_{2\tau} + \lambda_\tau, & H(\tau_{2+}) &= \lambda_{2\tau}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

при $t = T$ совпадает с (3.18).

д) Условия дополняющей нежесткости:

дополнительно к условиям (3.19) выполняется условие

$$\lambda_\tau(\tau_{1+} - \tau_{2-} + 120) = 0. \quad (3.36)$$

е) Условия неотрицательности:

дополнительно к условиям (3.20) выполняется условие

$$\lambda_\tau \geq 0. \quad (3.37)$$

Условия ж) и з) остаются неизменными.

В случае оптимизируемой величины m_1^* терминант задачи имеет вид

$$l = l_0 + l_1 + l_2 + \lambda_\tau(\tau_{1+} - \tau_{2-} + 120) + \lambda_{m\tau} (m(\tau_{2+}) - m(\tau_{1-}) + \alpha(1 - m(\tau_{1-}))) + l_T, \quad (3.38)$$

где l_0 , l_1 , l_2 и l_T определяются формулами (3.3), (3.30), (3.31) и (3.5) соответственно (величина m_π в l_T определяется соотношением (2.25)).

Отличие случая оптимизируемой от случая фиксированной величины m_1^* состоит в условиях трансверсальности для величины p_m . Условия (3.34) заменяются соотношениями:

$$p_m(\tau_{1-}) = (1 + \alpha)\lambda_{\tau m}, \quad p_m(\tau_{2+}) = \lambda_{\tau m} + \alpha\lambda_0 \quad (3.39)$$

при выведении КА на ГСО или

$$p_m(\tau_{1-}) = (1 + \alpha)\lambda_{\tau m}, \quad p_m(\tau_{2+}) = \lambda_{\tau m} + \alpha\lambda_{Tm} \quad (3.40)$$

при выведении КА на ГПО. Откуда, с учетом условия трансверсальности (3.14) или (3.17), следует условие оптимальности величины m_1^*

$$(1 + \alpha)p_m(\tau_{2+}) - p_m(\tau_{1-}) - \alpha p_m(T) = 0. \quad (3.41)$$

Глава 4

Краевые задачи принципа максимума

Во всех постановках задач присутствуют условия $H(T) = \lambda_T$ (условие стационарности), $\lambda_T(T - T_{\max}) = 0$ (условие дополняющей нежесткости) и $\lambda_T \geq 0$ (условие неотрицательности). Это означает, что каждый раз рассматривается две отдельные задачи:

- 1) задача с неактивным ограничением времени, в этом случае из условия дополняющей нежесткости получаем $\lambda_T = 0$ и, следовательно,

$$H(T) = 0, \quad (4.1)$$

условие $T \leq T_{\max}$ является проверочным,

- 2) задача с активным ограничением времени, в этом случае используется условие

$$T = T_{\max}, \quad (4.2)$$

а условие $H(T) \geq 0$ используется как проверочное.

4.1 Перелет одноступенчатого КА на геостационарную орбиту

Решение задачи (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.7), на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина сводится к решению краевой задачи (2.1), (2.3), (2.4), (3.6), (3.10), (3.12), (3.13), (3.18), (3.19), (3.20), (3.21). После подстановки управлений (3.10) в (2.1) и (3.6) получается система дифференциальных уравнений краевой задачи, а система условий (2.3), (2.4), (3.12), (3.13), (3.14), (3.18), (3.19), (3.21) будет совокупностью краевых условий.

Неизвестными в краевой задаче являются 14 постоянных интегрирования, общее время перелета T и числовые множители Лагранжа λ_0 , λ_i ($i = r, kr, C_x, C_y, C_z, m$), λ_{Tj} ($j = r, z, u, v, w$), λ_T — всего 28 неизвестных. Для их определения имеется 28 условий — 6 начальных условий (2.3); 5 конечных условий (2.4); 14 условий трансверсальности (3.12), (3.13), (3.14); условие стационарности (3.18); условие дополняющей нежесткости (3.19) и условие нормировки (3.21). Условия неотрицательности (3.20) и ограничение на время перелета (2.5) являются проверочными.

4.2 Перелет одноступенчатого КА на геопереходную орбиту

На основе принципа максимума решение задачи оптимального управления (2.1), (2.2), (2.3), (2.5), (2.8), (2.9), (2.10) сводится к решению краевой задачи (2.1), (2.3), (2.8), (2.9), (3.6), (3.10), (3.12), (3.16), (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), (3.21). После подстановки управлений P_x , P_y , P_z из условий оптимальности (3.10) в (2.1) и (3.6) система дифференциальных уравнений замыкается. Условия (2.3), (2.8), (2.9), (3.12), (3.16), (3.17), (3.18), (3.19), (3.21) представляют собой совокупность краевых условий.

Неизвестными в краевой задаче являются 14 постоянных интегрирования, общее время перелета T и числовые множители Лагранжа λ_0 , λ_i

$(i = r, kr, C_x, C_y, C_z, m)$, λ_{Tj} ($j = a, o, m$), λ_T — всего 26 неизвестных. Для их определения имеется 26 условий — 6 начальных условий (2.3); 3 конечных условия (2.8), (2.9); 14 условий трансверсальности (3.12), (3.16); условие стационарности (3.18); условие дополняющей нежесткости (3.19) и условие нормировки (3.21). Условия неотрицательности (3.20) и ограничение на время перелета (2.5) являются проверочными.

4.3 Перелет двухступенчатого КА на геостационарную орбиту.

Рассмотрим сначала случай заданной массы первой ступени.

Решение задачи (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.7), (2.13), (2.14), (2.15), (2.17) оптимального управления совокупностью динамических систем сводится на основе соответствующего принципа максимума к решению многоточечной краевой задачи (2.1), (2.3), (2.4), (2.13), (2.14), (2.15), (2.17), (3.6), (3.10), (3.12), (3.13), (3.18), (3.19), (3.21), (3.25), (3.26). После подстановки управлений из условий оптимальности (3.10) в (2.1) и (3.6) системы дифференциальных уравнений замыкаются.

Неизвестными в краевой задаче являются 14 постоянных интегрирования на первом участке и 14 на втором, момент окончания первого участка, момент начала второго участка, момент окончания перелета и числовые множители Лагранжа λ_0 , λ_i ($i = r, kr, C_x, C_y, C_z, m$), λ_τ , $\lambda_{\tau j}$ ($j = x, y, z, u, v, w$), $\lambda_{\tau m}^-$, $\lambda_{\tau m}^+$, λ_{Tk} ($k = r, u, v, w, z$), λ_T — всего $14+14+3+1+6+1+6+2+5+1=53$ неизвестных. Для их определения имеется 53 условия — 6 начальных условий (2.3); 9 промежуточных условий (2.13), (2.14), (2.15), (2.17); 5 конечных условий (2.4); 28 условий трансверсальности и 3 условия стационарности (3.12), (3.13), (3.18), (3.25), (3.26), условие дополняющей нежесткости (3.19); условие нормировки (3.21). Условия (2.5), (3.20) являются проверочными.

Фазовые переменные $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$, в том числе и в момент τ стыковки участков, непрерывны. Анализ условий трансверсально-

сти и стационарности (3.25) показывает, что сопряженные переменные $p_x(t)$, $p_y(t)$, $p_z(t)$, $p_u(t)$, $p_v(t)$, $p_w(t)$ и функция Понтрягина $H(t)$ на отрезке $[0, T]$ также непрерывны. Это позволяет исключить из рассмотрения числовые множители λ_τ , $\lambda_{\tau i}$ ($i = x, y, z, u, v, w$). С учетом условий непрерывности и явного вида функций Понтрягина условие $H(\tau_-) = H(\tau_+)$ упрощается

$$\begin{aligned} p_u(\tau) \frac{P_x^1(\tau_-)}{m(\tau_-)} + p_v(\tau) \frac{P_y^1(\tau_-)}{m(\tau_-)} + p_w(\tau) \frac{P_z^1(\tau_-)}{m(\tau_-)} - p_m(\tau_-) \frac{P^1(\tau_-)}{c_1} = \\ = p_u(\tau) \frac{P_x^2(\tau_+)}{m(\tau_+)} + p_v(\tau) \frac{P_y^2(\tau_+)}{m(\tau_+)} + p_w(\tau) \frac{P_z^2(\tau_+)}{m(\tau_+)} - p_m(\tau_+) \frac{P^2(\tau_+)}{c_2}. \end{aligned}$$

После подстановки в эту формулу оптимальных управлений (3.10) окончательно получим

$$P^1(\tau_-) \left(\frac{\rho(\tau)}{m(\tau_-)} - \frac{p_m(\tau_-)}{c_1} \right) = P^2(\tau_+) \left(\frac{\rho(\tau)}{m(\tau_+)} - \frac{p_m(\tau_+)}{c_2} \right). \quad (4.3)$$

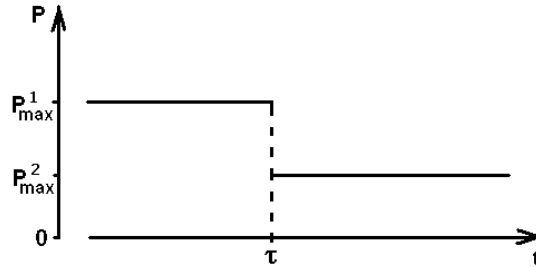


Рис. 4.1: Сброс ступени на "активном" участке.

Если $\chi(\tau_-) > 0$, то $\chi(\tau_+) > 0$ и этот случай соответствует сбросу ступени на активном участке (рис. 4.1). С учетом проведенного обезразмеривания $m(\tau_+) = 1$ (2.17) из условия (4.3) однозначно определяется величина

$$p_m(\tau_+) = c_2 \cdot \left(\rho(\tau) - \frac{P_{\max}^1 \chi(\tau_-)}{P_{\max}^2} \right). \quad (4.4)$$

Если $\chi(\tau_-) \leq 0$, то $\chi(\tau_+) \leq 0$ и этот случай соответствует сбросу ступени на протяженном пассивном участке (рис. 4.2). Величина $p_m(\tau_+)$ при

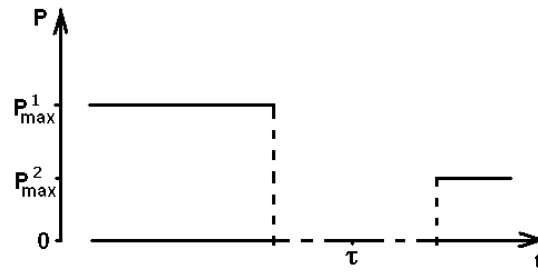


Рис. 4.2: Сброс ступени на протяженном пассивном участке.

этом однозначно не определяются. Неопределенность момента сброса не существенна: величина τ_- может быть задана любым способом (например, в середине пассивного участка) — все эти способы (при выполнении условий $\chi(\tau_-) \leq 0$ и $\chi(\tau_+) \leq 0$) эквивалентны. Неопределенность величины $p_m(\tau_+)$ ранее в работе [49] называлась случаем неустранимой неопределенности. В отличие от работы [49] эта неопределенность будет устранена при решении краевой задачи принципа максимума (см. §5.4).

Случай оптимизируемой массы первой ступени отличается от случая заданной массы первой ступени отсутствием в постановке задачи условия (2.13) и, как следствие, соответствующего этому условию множителя Лагранжа $\lambda_{\tau m}^-$. Таким образом в этом случае в краевой задаче 52 неизвестных: 14 постоянных интегрирования на первом участке и 14 на втором, момент окончания первого участка, момент начала второго участка, момент окончания перелета и числовые множители Лагранжа λ_0 , λ_i ($i = r, kr, C_x, C_y, C_z, m$), λ_τ , $\lambda_{\tau j}$ ($j = x, y, z, u, v, w$), $\lambda_{\tau m}^+$, $\lambda_{T k}$ ($k = r, u, v, w, z$), λ_T .

Для определения этих неизвестных в краевой задаче имеется 52 условия — 6 начальных условий (2.3); 8 промежуточных условий (2.14), (2.15), (2.17); 5 конечных условий (2.4); 28 условий трансверсальности и 3 условия стационарности (3.12), (3.13), (3.18), (3.25), (3.27), условие дополняющей нежесткости (3.19); условие нормировки (3.21). Условия (2.5), (3.20) являются проверочными.

Также как и в случае фиксированности массы первой ступени, непре-

рывность фазовых (кроме m) и сопряженных (кроме p_m) переменных, учет явного вида функций Понтрягина и условий оптимальности позволяет получить условие (4.3) и проанализировать случаи сброса ступени на активном и пассивном участках.

Итак, основное отличие краевой задачи оптимизации перелета двухступенчатого КА при оптимизируемой массе первой ступени от соответствующей задачи при заданной массе первой ступени — замена условия (2.13) условием (3.28).

4.4 Перелет КА с ДТБ на геостационарную орбиту

Рассмотрим сначала случай фиксированности массы топлива в ДТБ.

Задача (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.7), (2.21), (2.22), (2.20), (2.24), (2.23), (2.25) является задачей оптимального управления совокупностью динамических систем и решается на основе соответствующего принципа максимума, который сводит решение этой задачи к решению многоточечной краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1), (3.6) на трех участках. Подстановка управлений (3.10) в (2.1) и (3.6) замыкает системы дифференциальных уравнений.

Неизвестными в краевой задаче являются 14 постоянных интегрирования на первом участке, 12 на втором и 14 на третьем; момент окончания первого участка τ_{1-} ; момент начала второго участка τ_{1+} ; момент окончания второго участка τ_{2-} ; момент начала третьего участка τ_{2+} ; момент окончания перелета T и числовые множители Лагранжа λ_0 , λ_i ($i = r, kr, C_x, C_y, C_z, m$), λ_{1j} и λ_{2j} ($j = x, y, z, u, v, w, m, \tau$), λ_τ , λ_{Tk} ($k = r, z, u, v, w$), λ_T — всего $14 + 12 + 14 + 5 + 1 + 6 + 2 \cdot 8 + 1 + 5 + 1 = 75$ неизвестных. Для их определения имеется 75 условий — 6 начальных условий (2.3); 8 промежуточных условий (2.20), (2.21); 8 промежуточных условий (2.22), (2.24); 5 конечных условий (2.4); 40 условий трансверсальности (3.12), (3.32), (3.33), (3.34), (3.13), (3.14);

5 условий стационарности (3.18), (3.35); 2 условия дополняющей нежесткости (3.19), (3.36); условие нормировки (3.21). Условия (2.5), (2.23), (3.20), (3.37) являются проверочными.

Фазовые переменные $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ в моменты τ_1 и τ_2 стыковки участков непрерывны (2.21), (2.22). В силу условий трансверсальности (3.32), (3.33) сопряженные переменные $p_x(t)$, $p_y(t)$, $p_z(t)$, $p_u(t)$, $p_v(t)$, $p_w(t)$ также непрерывны. Это позволяет исключить из рассмотрения числовые множители $\lambda_{1x}, \dots, \lambda_{1w}$, $\lambda_{2x}, \dots, \lambda_{2w}$. Вопрос о возможности разрывов первого рода у сопряженной переменной $p_m(t)$ в моменты перехода с участка на участок в данной постановке задачи не стоит: на участке сброса ДТБ функции $m(t)$ и $p_m(t)$ просто не рассматриваются.

Заметим, что системы дифференциальных уравнений краевой задачи автономны (правые части этих систем не зависят от времени явно). Поэтому функции $H(t)$ постоянны на решениях этих систем. Это означает, что $H(\tau_{1+}) = H(\tau_{2-})$. Распишем последнее равенство подробнее

$$\begin{aligned} & p_x(\tau_{1+})u(\tau_{1+}) + p_y(\tau_{1+})v(\tau_{1+}) + p_z(\tau_{1+})w(\tau_{1+}) + \\ & + p_u(\tau_{1+}) \left(-\frac{\mu x(\tau_{1+})}{r^3(\tau_{1+})} \right) + p_v(\tau_{1+}) \left(-\frac{\mu y(\tau_{1+})}{r^3(\tau_{1+})} \right) + p_w(\tau_{1+}) \left(-\frac{\mu z(\tau_{1+})}{r^3(\tau_{1+})} \right) = \\ & = p_x(\tau_{2-})u(\tau_{2-}) + p_y(\tau_{2-})v(\tau_{2-}) + p_z(\tau_{2-})w(\tau_{2-}) + \\ & + p_u(\tau_{2-}) \left(-\frac{\mu x(\tau_{2-})}{r^3(\tau_{2-})} \right) + p_v(\tau_{2-}) \left(-\frac{\mu y(\tau_{2-})}{r^3(\tau_{2-})} \right) + p_w(\tau_{2-}) \left(-\frac{\mu z(\tau_{2-})}{r^3(\tau_{2-})} \right). \end{aligned}$$

Учитывая непрерывность в моменты стыковки участков фазовых и сопряженных переменных, входящих в равенство, получим

$$\begin{aligned} & p_x(\tau_{1-})u(\tau_{1-}) + p_y(\tau_{1-})v(\tau_{1-}) + p_z(\tau_{1-})w(\tau_{1-}) + \\ & + p_u(\tau_{1-}) \left(-\frac{\mu x(\tau_{1-})}{r^3(\tau_{1-})} \right) + p_v(\tau_{1-}) \left(-\frac{\mu y(\tau_{1-})}{r^3(\tau_{1-})} \right) + p_w(\tau_{1-}) \left(-\frac{\mu z(\tau_{1-})}{r^3(\tau_{1-})} \right) = \\ & = p_x(\tau_{2+})u(\tau_{2+}) + p_y(\tau_{2+})v(\tau_{2+}) + p_z(\tau_{2+})w(\tau_{2+}) + \\ & + p_u(\tau_{2+}) \left(-\frac{\mu x(\tau_{2+})}{r^3(\tau_{2+})} \right) + p_v(\tau_{2+}) \left(-\frac{\mu y(\tau_{2+})}{r^3(\tau_{2+})} \right) + p_w(\tau_{2+}) \left(-\frac{\mu z(\tau_{2+})}{r^3(\tau_{2+})} \right). \end{aligned}$$

Из условия стационарности (3.35) следует $\lambda_{1\tau} = \lambda_{2\tau}$ и $H(\tau_{1-}) = H(\tau_{2+})$.

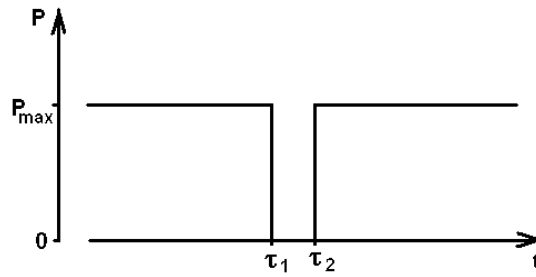


Рис. 4.3: Сброс ДТБ на "активном" участке.

Все вышесказанное позволяет выписать условие, связывающее значение тяги в конце первого и в начале третьего участка траектории

$$P(\tau_{1-}) \left(\frac{\rho(\tau_{1-})}{m_1} - \frac{p_m(\tau_{1-})}{c} \right) = P(\tau_{2+}) \left(\frac{\rho(\tau_{2+})}{m_2} - \frac{p_m(\tau_{2+})}{c} \right). \quad (4.5)$$

Учитывая (4.5), проведем анализ условия (3.36). В соответствии с общей методикой решения задач с неравенствами, отдельно рассматривается случаи активного и пассивного ограничения (2.23). Это означает, что каждый раз рассматривается две отдельные задачи:

- 1) $\lambda_\tau > 0$, $\tau_{2+} - \tau_{1-} = 120$ с,
- 2) $\lambda_\tau = 0$, $\tau_{2+} - \tau_{1-} \geq 120$ с.

Первый случай: сброс ДТБ выполняется фактически на активном участке полета (см. рис. 4.3), то есть после сброса бака двигатель сразу включается ($P(\tau_{1-}) = P_{\max}$, $\chi(\tau_{1-}) > 0$, $P(\tau_{2+}) = P_{\max}$, $\chi(\tau_{2+}) > 0$). При этом условие (4.5) позволяет выразить величину $p_m(\tau_{2+})$:

$$p_m(\tau_{2+}) = p_m(\tau_{1-}) + \frac{\rho(\tau_{2+})c}{m_2} - \frac{\rho(\tau_{1-})c}{m_1}. \quad (4.6)$$

Второй случай: сброс ДТБ выполняется на протяженном пассивном участке (см. рис. 4.4), то есть после сброса бака пассивный полет продолжается ($P(\tau_{1-}) = P_{\max}$, $\chi(\tau_{1-}) \leq 0$, $P(\tau_{2+}) = 0$, $\chi(\tau_{2+}) \leq 0$).

При сбросе ДТБ на протяженном пассивном участке моменты τ_1 и τ_2 можно определить различными эквивалентными способами. Во-первых,

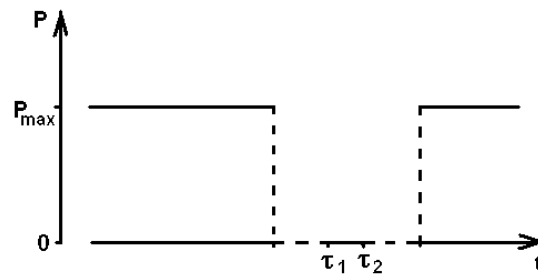


Рис. 4.4: Сброс ДТБ на протяженном пассивном участке.

можно считать, что сброс ДТБ занимает заданное время (например, 120 секунд). Масса КА после окончания сброса однозначно определяется соотношением (2.24), величина $p_m(\tau_{2+})$ не известна и включается в число параметров пристрелки. От выбора этой величины зависит момент включения двигательной установки. Такой способ и использовался при построении вычислительной схемы (см. стр. 60 и §А.1.3, §А.1.4, §А.2.1, §А.2.3). Во-вторых, можно считать, что сброс ДТБ занимает все время пассивного полета. Тогда момент τ_{2+} определяется как точка переключения и в этот момент времени условие $\chi(\tau_{2+}) = 0$ позволяет выразить величину $p_m(\tau_{2+}) = \rho(\tau_{2+})c/m(\tau_{2+})$.

Проведенный выше анализ применим ко всем рассматриваемым далее задачам перелета КА с ДТБ.

В случае оптимизируемой массы топлива в ДТБ задача (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.7), (2.21), (2.22), (2.26), (2.23), (2.25) является также задачей оптимального управления совокупностью динамических систем. Главное отличие этой задачи от предыдущей в отсутствии в постановке задачи условия (2.20) и, как следствие, использование условия (2.24) в виде (2.26). Неизвестными краевой задачи будут 14 постоянных интегрирования на первом участке, 12 на втором и 14 на третьем; момент окончания первого участка τ_{1-} ; момент начала второго участка τ_{1+} ; момент окончания второго участка τ_{2-} ; момент начала третьего участка τ_{2+} ; момент окончания перелета T и числовые множители Лагранжа λ_0 , λ_i ($i = r, kr, C_x, C_y, C_z, m$), λ_{1j} и λ_{2j} ($j = x, y, z, u, v, w, \tau$), $\lambda_{m\tau}$, λ_τ , λ_{Tk} ($k = r, z, u, v, w$), λ_T — все-

го $14 + 12 + 14 + 5 + 1 + 6 + 2 \cdot 7 + 2 + 5 + 1 = 74$ неизвестных. Для их определения имеется 74 условия — 6 начальных условий (2.3); 7 промежуточных условий (2.21); 7 промежуточных условий (2.22); условие (2.26); 5 конечных условий (2.4); 40 условий трансверсальности (3.12), (3.32), (3.33), (3.39), (3.14), (3.13); 5 условий стационарности (3.18), (3.35); 2 условия дополняющей нежесткости (3.19), (3.36); условие нормировки (3.21). Условия (2.5), (2.23), (3.20), (3.37) являются проверочными.

4.5 Перелет КА с ДТБ на геопереходную орбиту

Как и в случае перелета на ГСО, рассмотрим сначала случай фиксированности массы топлива в ДТБ.

Решение на основе принципа максимума задачи оптимального управления совокупностью динамических систем (2.1), (2.2), (2.3), (2.5), (2.8), (2.9), (2.10), (2.20), (2.21), (2.22), (2.23), (2.24), (2.25) сводится к решению многоточечной краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений на трех участках. На первом и последнем участке системы дифференциальных уравнений получаются после подстановки управлений из условий оптимальности (3.10) в (2.1), (3.6). На среднем участке система отличается от (2.1), (3.6) нулевыми управлениями (полет пассивный) и отсутствием уравнений для массы и соответствующей ей сопряженной переменной.

Неизвестными в краевой задаче являются 14 постоянных интегрирования на первом участке, 12 на втором и 14 на третьем; момент окончания первого участка τ_{1-} ; момент начала второго участка τ_{1+} ; момент окончания второго участка τ_{2-} ; момент начала третьего участка τ_{2+} ; момент окончания перелета T и числовые множители Лагранжа λ_0 , λ_i ($i = r, kr, C_x, C_y, C_z, m$), λ_{1j} и λ_{2j} ($j = x, y, z, u, v, w, t, \tau$), λ_τ , λ_{Tk} ($k = a, o, m$), λ_T — всего $14 + 12 + 14 + 5 + 1 + 6 + 2 \cdot 8 + 1 + 3 + 1 = 73$ неизвестных. Для их определения имеется 73 условия — 6 начальных условий (2.3); 8 промежуточных условий

(2.20), (2.21); 8 промежуточных условий (2.22), (2.24); 3 конечных условия (2.9), (2.8); 40 условий трансверсальности (3.12), (3.32), (3.33), (3.34), (3.16); 5 условий стационарности (3.18), (3.35); 2 условия дополняющей нежесткости (3.19), (3.36) и условие нормировки (3.21). Условия (2.5), (2.23), (3.20), (3.37) являются проверочными.

Отличие этой задачи от задачи перелета на ГСО в условиях при $t = T$.

В случае оптимизируемой массы топлива в ДТБ задача (2.1), (2.2), (2.3), (2.5), (2.8), (2.9), (2.10), (2.21), (2.22), (2.26), (2.23), (2.25) является задачей оптимального управления совокупностью динамических систем. Главное отличие этой задачи от предыдущей в отсутствии в постановке задачи условия (2.20) и, как следствие, использование условия (2.24) в виде (2.26). А отличие от задачи оптимизации перелета на ГСО с оптимизируемой массой топлива в ДТБ в конечных условиях и функционале.

Неизвестными краевой задачи будут 14 постоянных интегрирования на первом участке, 12 на втором и 14 на третьем; момент окончания первого участка τ_{1-} ; момент начала второго участка τ_{1+} ; момент окончания второго участка τ_{2-} ; момент начала третьего участка τ_{2+} ; момент окончания перелета T и числовые множители Лагранжа λ_0 , λ_i ($i = r, kr, C_x, C_y, C_z, m$), λ_{1j} и λ_{2j} ($j = x, y, z, u, v, w, \tau$), $\lambda_{m\tau}$, λ_τ , λ_{Tk} ($k = a, o, m$), λ_T — всего $14 + 12 + 14 + 5 + 1 + 6 + 2 \cdot 7 + 2 + 3 + 1 = 72$ неизвестных. Для их определения имеется 72 условия — 6 начальных условий (2.3); 7 промежуточных условий (2.21); 7 промежуточных условий (2.22); условие (2.26); 3 конечных условия (2.9), (2.8); 40 условий трансверсальности (3.12), (3.32), (3.33), (3.40), (3.17), (3.16); 5 условий стационарности (3.18), (3.35); 2 условия дополняющей нежесткости (3.19), (3.36); условие нормировки (3.21). Условия (2.5), (2.23), (3.20), (3.37) являются проверочными.

Глава 5

Вычислительные основы решения краевых задач принципа максимума

5.1 Краевая задача принципа максимума

Основная трудность решения задачи оптимального управления на основе принципа максимума заключается в решении краевой задачи. Краевая задача принципа максимума для задач ракетодинамики нелинейна, ее система дифференциальных уравнений, записанная в форме Коши, имеет высокую размерность и, как правило, разрывные в не известные заранее моменты времени правые части, а структура краевой задачи в целом может оказаться далеко не простой, что связано с особенностями структуры исходной задачи оптимального управления — видом управляемой динамической системы, функционала, ограничений на управления, терминальных, промежуточных, смешанных и фазовых ограничений. В общем случае краевая задача может быть решена лишь численно с использованием ЭВМ. Ее решение требует преодоления как нетривиальных вычислительных трудностей, так и остающихся обычно за пределами численного решения общетеоретических трудностей, связанных с исследованием существования и единственности решения, в том

числе с исследованием режимов особых управлений и оценкой их оптимальности, с исследованием возможности аномального случая (случая обращения в ноль множителя Лагранжа при функционале: $\lambda_0 = 0$), а также исследованием локальной и/или абсолютной оптимальности полученного решения или оценкой его близости к оптимальному [10, 61, 63, 79, 80, 81].

Не будет преувеличением сказать, что однозначно приводящие к успеху алгоритмы численного решения нелинейных краевых задач принципа максимума в настоящее время отсутствуют и успех численного решения этих краевых задач определяется в значительной степени индивидуальным искусством исследователя и опытом решения такого рода задач.

Одним из основных методов численного решения краевых задач принципа максимума является метод стрельбы [1, 10, 22, 28, 63, 79, 80, 81]. Метод стрельбы состоит в сведении решения краевой задачи к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Для этого вводится вектор параметров пристрелки — набор параметров, позволяющий решить задачу Коши на требуемых интервалах времени, и вектор-функция невязок, вычисляемая в результате решения сформированной задачи Коши. Совокупная структура вектора параметров пристрелки и вектор-функции невязок называется вычислительной схемой метода стрельбы.

Для решения краевой задачи необходимо определить корень системы нелинейных алгебраических уравнений — вектор параметров пристрелки, обращающий в ноль вектор-функцию невязок. Метод стрельбы требует наличия хорошо адаптированных к рассматриваемому классу задач:

- 1) метода численного решения входящей составной частью в метод стрельбы задачи Коши, который должен обеспечивать необходимую точность и скорость вычислений;
- 2) метода численного решения системы линейных алгебраических уравнений для приращений аргументов вектор-функции невязок, необходимого при решении системы алгебраических уравнений для составляющих

вектор-функции невязок (метод предполагает наличие алгоритма численного построения хорошо обусловленной матрицы Якоби);

- 3) метода выбора хорошего начального приближения при подборе недостающих для решения задач Коши начальных условий или определяющих их составляющих вектора параметров пристрелки.

Накопленный опыт решения краевых задач принципа максимума показал, что для успешного решения задачи необходимо осуществить выбор эффективной вычислительной схемы метода стрельбы и, одновременно, хорошего начального приближения. Поэтому одним из возможных направлений исследований при численном решении краевых задач принципа максимума является изменение, в случае ее неэффективности, традиционной вычислительной схемы.

Напомним, что в вычислительной схеме классического метода стрельбы (классической вычислительной схеме метода стрельбы), в отличие от неклассической (модифицированной) вычислительной схемы метода стрельбы, вектор параметров пристрелки задается на одном конце траектории, а вектор-функции невязок — на другом. Очевидно, что выбор вычислительной схемы метода стрельбы (в том числе и для классической вычислительной схемы метода стрельбы) может быть сделан неединственным способом. Принципиально важно, что выбор начального приближения должен осуществляться во взаимосвязи с выбором вычислительной схемы метода стрельбы, поскольку начальное приближение, хорошее для одной вычислительной схемы, может оказаться плохим для другой.

5.2 Построение начальных приближений

Для выбора хорошего начального приближения используется способ, состоящий в формировании последовательности задач и алгоритмов перехода от

решения одной задачи к другой (ранее, в том или ином виде, он использовался при решении задач в [21, 25]). Схема последовательности рассмотренных в работе задач и переходов от одной к другой представлена на рис. 5.1.

На первом этапе в качестве вспомогательной задачи рассматривается задача оптимизации плоского перелета между круговыми орбитами в импульсной постановке. Для удобства дальнейшего использования эта задача формализуется как задача условной оптимизации на пространстве решений системы дифференциальных уравнений пассивного движения КА и решается на основе системы необходимых условий оптимальности — принципа Лагранжа [24]. Наличие аналитического решения (эллипса Гомана, см., например, [48, § 4.08]) в случае задачи максимизации конечной массы упрощает проблему решения краевой задачи.

На втором этапе рассматривается задача оптимизации плоского перелета одноступенчатого КА на геостационарную орбиту. Идея использования решения задачи импульсной постановки в качестве начального приближения решения задачи неимпульсной постановки не нова. Общая проблема такого перехода, и именно этот пример подробно описаны в [26, 27]. Кроме одновитковых траекторий в работе рассматриваются и двухвитковые траектории. Алгоритм использования решения задачи импульсной постановки в качестве начального приближения при построении многовитковых траекторий предложен в [35, 71].

На третьем этапе с помощью метода продолжения решения по параметру осуществляется переход к задаче оптимизации пространственных перелетов. В качестве параметра продолжения используется угол i_0 , задающий наклон начальной орбиты.

На четвертом этапе выполняется переход к решению задач оптимизации перелетов КА с ДТБ и двухступенчатого КА на геостационар. Полученный ранее перелет одноступенчатого КА при нулевых коэффициентах пропорциональности α между массой топлива в баке и массой самого бака и β между тяговооруженностью двигателя и его массой является также решением задачи оптимизации перелета КА с ДТБ (со сбросом ДТБ на протяжен-

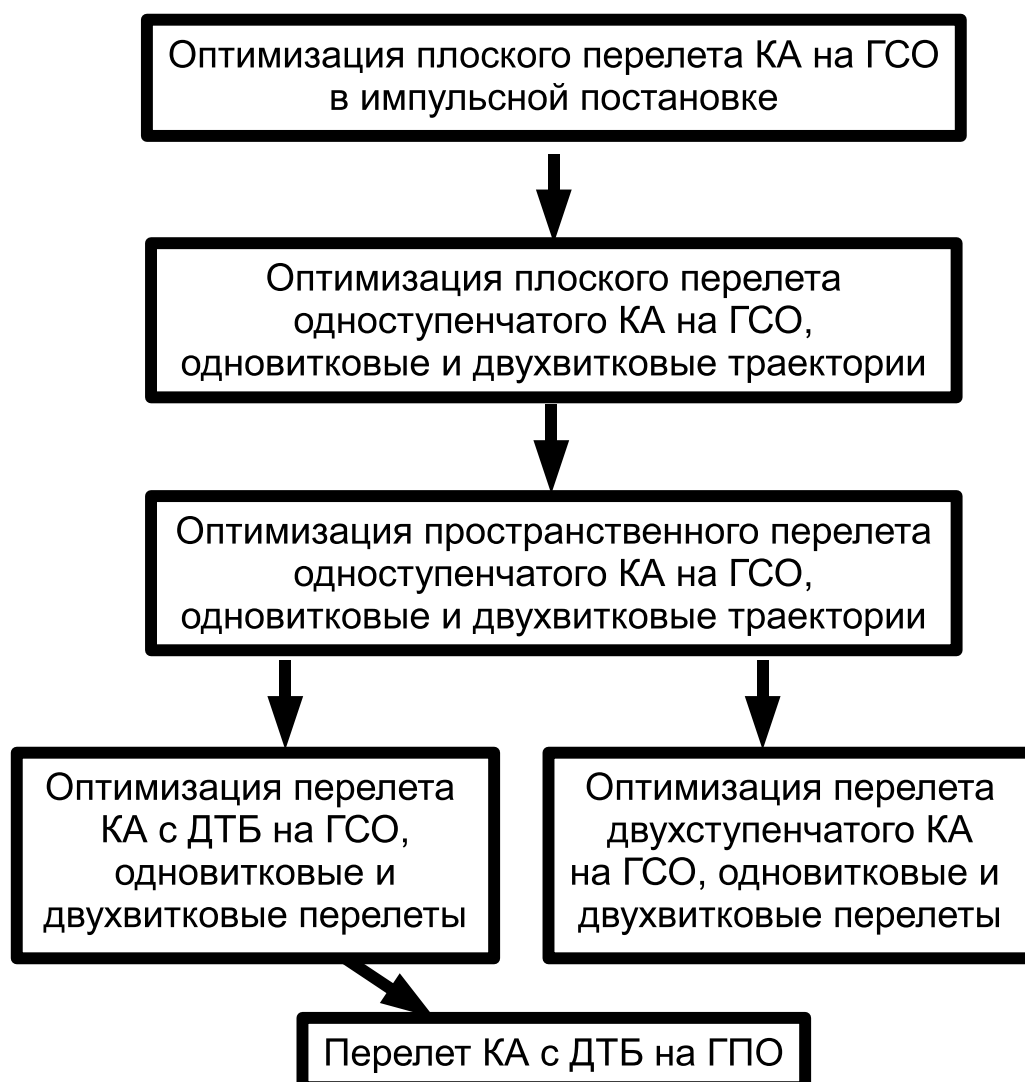


Рис. 5.1: Схема переходов в последовательности рассмотренных задач

ном пассивном участке) и двухступенчатого КА (при специально выбранном соотношении тяговооруженности ступеней). В самом деле, пусть величина m_1^* оптимизируется и сброс ДТБ осуществляется на протяженном пассивном участке. Тогда условия краевой задачи оптимизации перелета КА с ДТБ при $\alpha = 0$ переходят в условия краевой задачи оптимизации перелета одноступенчатого КА: условие (2.26), определяющее скачок массы при сбросе ДТБ, переходит в условие непрерывности, величина полезной массы КА с ДТБ (2.25) совпадает с (2.6), условия (3.32), (3.33), (3.39) переходят в условия непрерывности сопряженных переменных в моменты τ_1 и τ_2 . Аналогично для краевой задачи оптимизации перелета двухступенчатого КА при $\alpha = 0$, $\beta = 0$ величина полезной массы двухступенчатого КА (2.19) с учетом проведенного обезразмеривания (2.17) совпадает с (2.6), деление массы КА на втором участке на m_1 (повторное обезразмеривание) приводит к умножению сопряженной переменной p_m на этом участке на ту же самую величину m_1 (3.28), поэтому при $n_2 = n_1/m_1$, $c_2 = c_1$ краевые задачи оптимизации перелетов одноступенчатого КА и двухступенчатого КА совпадают (решение одной из них автоматически определяет решение другой).

Решения для требуемых значений параметров α и β получаются с использованием метода продолжения решения по параметру.

На пятом этапе, с использованием метода продолжения решения по параметру, выполняется переход к задаче перелета на геопереходную орбиту. Постепенно уменьшая количество топлива в баке (в баках) можно получить решение для любой заданной полезной массы и для любого распределения топлива по бакам.

5.3 Вычислительная схема

В данной работе используется вычислительная схема решения, в общем случае многоточечных, краевых задач принципа максимума при оптимизации перелетов КА различных конструкций, соответствующая способу выбора начального приближения. Характерные особенности этой вычислительной схе-

мы следующие:

- 1) вся траектория разбивается на фиксированную последовательность активных и пассивных участков;
- 2) в вектор параметров пристрелки дополнительно включаются все фазовые и сопряженные переменные в точках переключения тяги, а также продолжительность активных и пассивных участков (используется аналог метода многоточечной пристрелки), а в вектор-функцию невязок — соответствующие этим новым параметрам пристрелки условия стыковки участков траектории и условия переключения тяги;
- 3) при интегрировании задачи Коши считается, что на активных участках тяга всюду включена, а на пассивных — выключена, то есть управление по величине тяги задается, а не выбирается из условия оптимальности.

Такая схема позволяет избежать разрывов частных производных вектор-функции невязок по начальным значениям сопряженных переменных в случае возможных перестроек структуры траектории и избавляет от необходимости численного определения точек переключения тяги. При этом вычислительная ошибка определения нулей функции переключения переносится в погрешность определения нулей вектор-функции невязок и не накапливается при решении задачи Коши. Задача Коши решается на участках между точками переключения тяги отдельно, а не на всей протяженности перелета сразу. Глобальная вычислительная ошибка метода решения задачи Коши, накапливаемая на каждом участке, также переносится в погрешность определения нулей вектор-функции невязок, а не продолжает накапливаться при интегрировании последующих участков. Все это позволяет уменьшить вычислительную ошибку (одну вычислительную погрешность разделить на несколько меньших) и получить достаточную для сходимости метода Ньютона точность вычисления компонент вектор-функции невязок.

Недостатком такого подхода является то, что в используемой вычислительной схеме фактически фиксируется структура траектории. На определенном в результате решении необходимо дополнительно проверить выполнение условия оптимальности по величине тяги на каждом из участков. В случае его выполнения полученная траектория является экстремалью, иначе полученная траектория экстремалью не является и для определения экстремали необходимо либо попробовать выбрать более удачное начальное приближение, либо изменить структуру траекторий и начать решение краевой задачи заново.

Размерность вектора параметров пристрелки и вектор-функции невязок при использовании предложенной вычислительной схемы возрастает в несколько раз. Следует, однако, отметить, что матрица производных имеет блочный вид. При ее построении необходимо решать задачу Коши всего несколько раз на каждом участке. Количество переменных, для которых требуется найти начальное приближение, увеличилось, что казалось бы должно усложнить задачу, так как требуется "угадать" большее количество величин. Однако в нашем случае это оказывается преимуществом, так как одновременно предлагается способ построения начального приближения на основании решения аналогичной, но более простой задачи. В силу того, что начальное приближение строится не только для момента старта и момента сброса первой ступени или дополнительного топливного бака, но и для всех точек переключения тяги, решение задачи предыдущего этапа используется более полно. При этом значения фазовых и сопряженных переменных при построении начального приближения берутся равными соответствующим значениям фазовых и сопряженных переменных первоначальной задачи без каких-либо изменений. Таким образом удастся решить самую сложную проблему — проблему построения начального приближения.

В целом же в работе одновременно решаются взаимосвязанные проблемы выбора эффективной вычислительной схемы и выбора хорошего начального приближения, то есть такой вычислительной схемы и такого начального приближения, которые позволяют решить поставленные задачи.

5.4 Численное решение краевых задач

Задачи Коши во всех рассматриваемых задачах интегрировались на участках непрерывности управления в положительном времени¹ по порядку их следования (последовательно, на активных и на пассивных участках). Для использования такой последовательной вычислительной схемы необходимо определить способ задания значений для решения задач Коши на каждом из участков.

Во всех рассматриваемых задачах для однозначного определения начальных условий использовалось 6 величин. Положение КА в начальный момент времени задавалось посредством угла φ , отсчитываемого от восходящего узла в направлении движения КА по орбите. Для определения положения и скорости КА в начальный момент времени вводится расположенная в плоскости исходной орбиты ортогональная система координат $\mathbf{e}_1 = (\cos \Omega_0, -\sin \Omega_0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (\cos i_0 \sin \Omega_0, \cos i_0 \cos \Omega_0, -\sin i_0)$. С использованием этой системы координат положение и скорость КА в начальный момент определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= (x(0), y(0), z(0)) = (R_3 + h_0)(\cos \varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_2), \\ \mathbf{v}(0) &= (u(0), v(0), w(0)) = v_{\text{кр}}(h_0)(-\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Начальные условия $p_i(0)$ ($i = x, y, z, u, v, w$) возможно определять из соотношения (3.12) в результате задания множителей λ_i , ($i = r, kr, C_x, C_y, C_z$). В работе, как и в [23], для определения этих величин использовался прием позволяющий придать множителям Лагранжа "геометрический смысл" и уменьшить число задаваемых множителей на единицу.

Соотношения (3.12) записывались в векторной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_r(0) &= 2\lambda_r \mathbf{r} + \lambda_{kr} \mathbf{v} - \lambda_c \times \mathbf{v}, \\ \mathbf{p}_v(0) &= \lambda_{kr} \mathbf{r} + \lambda_c \times \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

¹Под решением задачи Коши в положительном времени в работе понимается решение задачи Коши от меньших значений времени к большим. Например, при использовании вычислительной схемы метода стрельбы "встречный просчет" [24] задача Коши решалась в двух направлениях — от начала траектории к середине (в положительном времени) и от конца траектории к середине (в отрицательном времени).

где $\mathbf{p}_r = (p_x, p_y, p_z)$, $\mathbf{p}_v = (p_u, p_v, p_w)$, $\lambda_C = (\lambda_{C_x}, \lambda_{C_y}, \lambda_{C_z})$.

В точке старта КА с исходной круговой орбиты вводится еще один ортонормированный базис:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}(0)}{(R_3 + h_0)}, \quad \mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{v}_{\text{кр}}(h_0)}{v_{\text{кр}}(h_0)}, \quad \mathbf{e}_c = \frac{\mathbf{C}_0}{C_0}.$$

Пусть в новом базисе вектор λ_C имеет вид

$$\lambda_C = \lambda_{cr}\mathbf{e}_r + \lambda_{cv}\mathbf{e}_v + \lambda_{cc}\mathbf{e}_c.$$

Тогда равенства (5.2) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_r(0) &= (2\lambda_r(R_3 + h_0) - \lambda_{cc}v_{\text{кр}}(h_0))\mathbf{e}_r + \lambda_{kr}v_{\text{кр}}(h_0)\mathbf{e}_v + \lambda_{cr}v_{\text{кр}}(h_0)\mathbf{e}_c, \\ \mathbf{p}_v(0) &= \lambda_{kr}(R_3 + h_0)\mathbf{e}_r + \lambda_{cc}(R_3 + h_0)\mathbf{e}_v + \lambda_{cv}(R_3 + h_0)\mathbf{e}_c. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Из условий оптимальности (3.10) и условия нормировки (3.21) следует, что вектор $\mathbf{p}_v(0)$ сонаправлен с вектором тяги и имеет длину равную 1. Это означает, что его можно представить в виде:

$$\mathbf{p}_v(0) = \cos \alpha_0 \cos \alpha_{\text{тр}}\mathbf{e}_r + \sin \alpha_0 \cos \alpha_{\text{тр}}\mathbf{e}_v + \sin \alpha_{\text{тр}}\mathbf{e}_c, \quad (5.4)$$

где α_0 — угол между проекцией вектора тяги на плоскость исходной орбиты и $\mathbf{r}(0)$, отсчитываемый от $\mathbf{r}(0)$ с положительным направлением отсчета в сторону движения КА по орбите ($\alpha_0 \in [0, 2\pi)$), $\alpha_{\text{тр}}$ — угол между плоскостью исходной орбиты и вектором тяги, отсчитываемый от плоскости орбиты с положительным направлением отсчета в сторону \mathbf{C}_0 ($\alpha_{\text{тр}} \in [-\pi/2, \pi/2]$).

Сравнение формул (5.3) и (5.4) позволяет записать:

$$\lambda_{kr} = \frac{\cos \alpha_0 \cos \alpha_{\text{тр}}}{R_3 + h_0}, \quad \lambda_{cc} = \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_{\text{тр}}}{R_3 + h_0}, \quad \lambda_{cv} = -\frac{\sin \alpha_{\text{тр}}}{R_3 + h_0}. \quad (5.5)$$

Из (5.4) следует, что для определения начальных значений $p_u(0)$, $p_v(0)$, $p_w(0)$ достаточно задания углов α_0 и $\alpha_{\text{тр}}$ и определяющих векторы \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_v , \mathbf{e}_c угла φ . В свою очередь из (5.3) следует, что для определения начальных значений $p_x(0)$, $p_y(0)$, $p_z(0)$ при уже определенных множителях (5.5) достаточно задания множителей λ_r и λ_{cr} .

Итак, величины φ , α_0 , $\alpha_{\text{тр}}$, λ_r , λ_{cr} и $p_m(0)$ позволяющие с учетом используемого условия нормировки (3.21) определить значения фазовых и сопряженных переменных в начальный момент времени использовались во всех рассматриваемых задачах в качестве первых 6 параметров пристрелки.

Заметим, что включение всех значений фазовых и сопряженных переменных в начальный момент времени в вектор параметров пристрелки и соответствующих им условий в вектор–функцию невязок (аналогично [35, 71]) лишь незначительно ухудшает скорость сходимости итерационного метода.

При выведении КА на ГСО в число компонент вектор–функции невязок включались пять условий (2.4) и следствие условий трансверсальности (3.15).

При выведении КА на ГПО условия трансверсальности (3.16) получаются достаточно громоздкими, их детальный анализ и получение следствий затруднено. Поэтому 3 множителя Лагранжа λ_{T_a} , λ_{T_o} , λ_0 также включались в число параметров пристрелки, а в число компонент вектор–функции невязок включались 3 условия (2.8), (2.9) и все 6 условий трансверсальности (3.16).

В работе исследовались одновитковые и двухвитковые траектории (см. рис. 5.2, 5.3) перелетов одноступенчатых КА, двухступенчатых КА и КА с ДТБ.

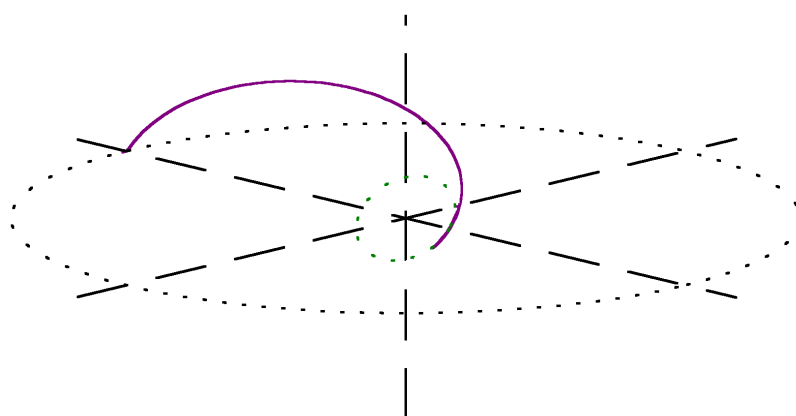


Рис. 5.2: Одновитковый перелет.

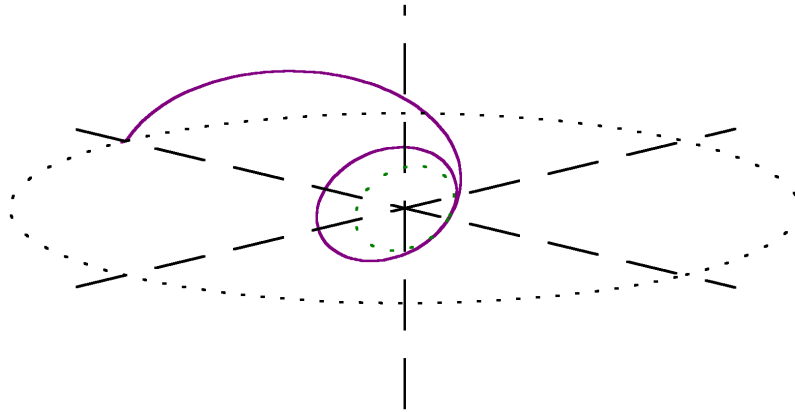


Рис. 5.3: Двухвитковый перелет

Как отмечалось в предыдущем параграфе, к параметрам пристрелки добавлялись продолжительности каждого из активных и пассивных участков и по 12 значений фазовых (кроме m) и сопряженных (кроме p_m) переменных в каждой точке переключения:

$$j(t_+), \quad p_j(t_+), \quad (j = x, y, z, u, v, w). \quad (5.6)$$

Каждая точка переключения добавляла в число компонент вектор-функции невязок 12 условий непрерывности фазовых (кроме m) и сопряженных (кроме p_m) переменных и условие обращения в ноль функции переключения:

$$j(t_+) - j(t_-) = 0, \quad p_j(t_+) - p_j(t_-) = 0, \quad (j = x, y, z, u, v, w), \quad \chi(t_-) = 0. \quad (5.7)$$

В точках переключения функция $m(t)$ считалась непрерывной, а функция $p_m(t)$ бралась разрывной (величина $p_m(t_+)$ вычислялась из условия $\chi(t_+) = 0$). Разумеется, в случае обращения в ноль соответствующих компонент вектор-функции невязок, функция $p_m(t)$ также становилась непрерывной в точках переключения.

В случае одноступенчатого и двухступенчатого КА это увеличивало число параметров пристрелки на $2 \cdot 12 + 3$ и компонент вектор-функции невязок на

2·13 в случае одновитковой траектории и на 4·12 + 5, 4·13 соответственно в случае двухвитковой.

В случае задачи с активным ограничением времени перелета (см. начало главы 4) в число компонент вектор-функции невязок включалось условие $T = T_{\max}$, а в случае задачи с пассивным ограничением времени перелета — условие $H(T) = 0$.

Попытка использования другой вычислительной схемы со включением в вектор параметров пристрелки значения $p_m(t_+)$ в точке переключения, условия непрерывности $p_m(t_+) - p_m(t_-) = 0$ в число компонент вектор-функции невязок и заменой компоненты $\chi(t_-) = 0$ на $H(t_+) - H(t_-) = 0$ приводит к резкому ухудшению сходимости итерационного метода Ньютона.

При решении задач оптимизации перелета двухступенчатого КА при сбросе ступени на активном участке протяженность соответствующего сбросу активного участка заменялась протяженностями активных участков до и после сброса первой ступени, а при сбросе ступени на пассивном участке к числу неизвестных параметров пристрелки добавлялась величина $p_m(\tau_+)$. В вектор-функцию невязок включалась компонента, соответствующая условию (2.13) в случае заданной массы первой ступени и условию (3.28) в случае оптимизируемой массы первой ступени.

В случае перелета КА с ДТБ при фиксированности массы топлива в ДТБ и сбросе ДТБ на активном участке протяженности активных участков до и после сброса включались в число параметров пристрелки, протяженность пассивного участка, соответствующего сбросу ДТБ, известна и, потому, в число параметров пристрелки не включалась. В число компонент вектор-функции невязок включается условие (2.13). Значения фазовых (кроме m) и сопряженных (кроме p_m) переменных в моменты τ_1 и τ_2 определялись по непрерывности:

$$j(\tau_{1+}) = j(\tau_{1-}), \quad p_j(\tau_{1+}) = p_j(\tau_{1-}) \quad (j = x, y, z, u, v, w);$$

величина $m(\tau_{2+})$ определялась соотношением (2.24), а величина $p_m(\tau_{2+})$ — соотношением (4.6).

В случае сброса ДТБ на протяженном пассивном участке, моменты τ_1 и τ_2 выбирались каким-либо заданным образом. К числу неизвестных параметров пристрелки добавлялась величина $p_m(\tau_{2+})$, а в вектор-функцию невязок включалась компонента, соответствующая условию (2.13) при фиксированной массе топлива в ДТБ или компонента, соответствующая условию оптимальности величины m_1^* (3.41) при оптимизации массы топлива в ДТБ.

Случай перелета КА с ДТБ при оптимизации массы топлива в ДТБ и сбросе ДТБ на активном участке, отличается от случая заданности величины m_1^* при сбросе на активном участке тем, что вычислительной схеме условие (2.13), следует заменить условием (3.41). Однако, как показали вычисления, такая вычислительная схема не функциональна: при определении наилучшей величины m_1^* оказывается большой разброс. Поэтому оптимизация величины m_1^* осуществлялась фактически методом декомпозиции — решалась задача с заданной величиной m_1^* и вычислялись левая часть условия (3.41). Затем у полученной зависимости находился корень — такая величина m_1^* , что условие (3.41) удовлетворялось с допустимой погрешностью.

Глава 6

Оценка наилучшего распределения топлива по бакам

В этой главе рассматриваются простые задачи оптимизации, полученные в результате максимально возможного упрощения задач оптимизации перелетов КА с ДТБ.

Используемые обозначения:

$c = P_{уд} \cdot g_3$ — скорость истечения реактивной струи (постоянная величина);

ΔV_{abs} — характеристическая скорость маневра;

$m_{п}$ — полезная масса;

α — коэффициент пропорциональности массы бака и массы находящегося в нем топлива;

β — коэффициент пропорциональности массы двигателя и тяговооруженности КА;

n — тяговооруженность КА;

$m_0 = 1$ — начальная масса КА.

Предполагается, что все топливо распределено по двум бакам — основному и дополнительному: масса топлива в первом (дополнительном) баке — m_1 , ΔV_1 — соответствующая ему характеристическая скорость; масса топлива во

втором (основном) баке — m_2 , ΔV_2 — соответствующая ему характеристическая скорость.

6.1 Первая упрощенная модель

Величина ΔV_{abs} задана. Тогда:

$$\Delta V_1 = -c \ln(1 - m_1) \quad (\text{явно учитывается, что } m_0 = 1);$$

$1 - m_1$ — масса КА после отработки топлива из первого бака;

$$m_1^* = (1 - m_1) - \alpha m_1 \quad \text{— масса КА после сброса ДТБ};$$

$$\Delta V_2 = \Delta V_{abs} - \Delta V_1 \geq 0;$$

$m_2^* = m_1^* \cdot e^{-\Delta V_2/c}$ — масса КА после отработки топлива из второго бака;

$$m_{\Pi} = m_2^* - \alpha(m_1^* - m_2^*) - \beta n.$$

Требуется исследовать зависимость m_{Π} от m_1 : найти максимум и зависимость m_1^{opt} от параметров задачи α , β , c , n , ΔV_{abs} .

Решение.

Выразим явным образом m_{Π} через m_1 :

$$m_{\Pi} = (1 + \alpha)m_2^* - \alpha m_1^* - \beta n,$$

$$m_1^* = m_0 - (1 + \alpha)m_1,$$

$$m_2^* = m_1^* e^{-\frac{\Delta V_2}{c}},$$

где $\Delta V_2 = \Delta V - \Delta V_1 = \Delta V + c \ln(m_0 - m_1)$;

$$m_2^* = \frac{(m_0 - (1 + \alpha)m_1)e^{-\frac{\Delta V}{c}}}{m_0 - m_1}.$$

Окончательно:

$$m_{\Pi} = (m_0 - (1 + \alpha)m_1) \left(\frac{1 + \alpha}{m_0 - m_1} e^{-\frac{\Delta V}{c}} - \alpha \right) - \beta n.$$

Если $m_1 = 0$, то $\Delta V_1 = 0$ и

$$m_{\Pi} = m_0 \left(\frac{1 + \alpha}{m_0} e^{-\frac{\Delta V}{c}} - \alpha \right) - \beta n.$$

Если m_1 достигает своего максимального значения, заведомо не превосходящего m_0 (КА не может состоять только из топлива), тогда $\Delta V = \Delta V_1$ и $\Delta V_2 = 0$. Это означает, что $m_2^* = m_1^*$ и $m_{\Pi} = m_1^* - \beta n$. Вычислим в рассматриваемом случае m_1^* .

$$\Delta V = \Delta V_1 = -c \ln(m_0 - m_1)$$

$$m_1 = m_0 - e^{-\frac{\Delta V}{c}}$$

$$m_1^* = (1 + \alpha)e^{-\frac{\Delta V}{c}} - \alpha m_0$$

$$m_{\Pi} = (1 + \alpha)e^{-\frac{\Delta V}{c}} - \alpha m_0 - \beta n.$$

Это означает, что m_{Π} принимает одинаковые значения на концах рассматриваемого отрезка. С учетом того, что функция непрерывна и всюду дифференцируема на этом отрезке, можно утверждать, что найдется по крайней мере одна точка, лежащая внутри отрезка, в которой производная функции обратиться в ноль (теорема Ролля).

Вычислим производную функции $m_{\Pi}(m_1)$ и ее вторую производную.

$$m'_{\Pi} = -(1 + \alpha) \left(\frac{1 + \alpha}{m_0 - m_1} e^{-\frac{\Delta V}{c}} - \alpha \right) + (m_0 - (1 + \alpha)m_1) \frac{1 + \alpha}{(m_0 - m_1)^2} e^{-\frac{\Delta V}{c}},$$

$$m''_{\Pi} = -\frac{2\alpha m_0}{(m_0 - m_1)^3} e^{-\frac{\Delta V}{c}} (1 + \alpha),$$

Вторая производная на рассматриваемом отрезке отрицательна, то есть первая производная всюду строго убывает и, как было показано раньше, хотя бы в одной точке обращается в ноль. Значит точка экстремума существует, причем только одна, и в этой точке m_{Π} достигает своего максимума.

Из условия $m'_{\Pi} = 0$ следует, что

$$m_1^{opt} = \frac{2 + e^{-\Delta V/c} - \sqrt{4e^{-\Delta V/c} + e^{-2\Delta V/c}}}{2}.$$

Отметим, что эта величина зависит только от суммарной характеристической скорости ΔV .

6.2 Вторая упрощенная модель

Величина $m_T = m_1 + m_2$ (полная масса топлива) задана. Тогда:

$$\Delta V_1 = -c \ln(1 - m_1) \quad (\text{явно учитывается, что } m_0 = 1);$$

$1 - m_1$ — масса КА после отработки топлива из первого бака;

$$m_1^* = (1 - m_1) - \alpha m_1 \quad \text{— масса КА после сброса ДТБ};$$

$$m_2 = m_T - m_1$$

$m_2^* = m_1^* - m_2$ — масса КА после отработки топлива из второго бака;

$$\Delta V_2 = c(\ln(m_1^*) - \ln(m_2^*));$$

$$\Delta V_{abs} = \Delta V_1 + \Delta V_2.$$

Требуется исследовать зависимость ΔV_{abs} от m_1 : найти максимум и зависимость m_1^{opt} от параметров задачи α, β, c, n, m_T .

Решение.

Выразим явным образом ΔV_{abs} через m_1 :

$$\Delta V_1 = -c(\ln(m_0 - m) - \ln m_0),$$

$$m_1^* = m_0 - (1 + \alpha)m_1,$$

$$m_2 = m_T - m_1,$$

$$m_2^* = m_0 - (1 + \alpha)m_1 - (m_T - m_1) = m_0 - \alpha m_1 - m_T,$$

$$\Delta V_2 = c(\ln(m_0 - (1 + \alpha)m_1) - \ln(m_0 - \alpha m_1 - m_T)),$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = c \ln \left(\frac{m_0(m_0 - (1 + \alpha)m_1)}{(m_0 - m_1)(m_0 - \alpha m_1 - m_T)} \right).$$

Заметим, что при $m_1 = 0$ и при $m_1 = m_T$ значения ΔV совпадают:

$$\Delta V(0) = c \ln \frac{m_0(m_0 - 0)}{(m_0 - 0)(m_0 - m_T)} = c \ln \frac{1}{1 - m_T},$$

$$\Delta V(m_T) = c \ln \frac{m_0(m_0 - (1 + \alpha)m_T)}{(m_0 - m_T)(m_0 - \alpha m_T - m_T)} = c \ln \frac{1}{1 - m_T}.$$

Поэтому по теореме Ролля при $m_1 \in [0, m_T]$ существуют точки обращения производной в ноль.

Так как c — положительная константа, не равная нулю, и $\ln(x)$ — монотонно-возрастающая функция, то экстремум величины ΔV соответствует экстремуму величины

$$\frac{m_0(m_0 - (1 + \alpha)m_1)}{(m_0 - m_1)(m_0 - \alpha m_1 - m_T)}. \quad (6.1)$$

Первая производная этой величины, с учетом того что $m_0 = 1$ и m_T — заданная константа, имеет вид:

$$\frac{\alpha((1 + \alpha)m_1^2 - 2m_1 + m_T)}{(1 - m_1)^2(1 - \alpha m_1 - m_T)^2}. \quad (6.2)$$

Знаменатель (6.2) при $m_1 \in [0, m_T]$ в ноль не обращается так как

$$0 < m_{\Pi} = m_0 - m_T - \alpha m_T - \beta n < m_0 - m_T - \alpha m_1 < m_0 - m_1$$

и, потому, строго положителен. Числитель (6.2) при $\alpha = 0$ является тождественным нулем. При $\alpha \neq 0$ числитель является квадратным трехчленом относительно m_1 с положительным коэффициентом при m_1^2 . У числителя имеется два корня:

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - (1 + \alpha)m_T}}{1 + \alpha}.$$

Левее меньшего корня и правее большего корня первая производная положительна, а между корнями отрицательна. Так как корень

$$\frac{1 + \sqrt{1 - (1 + \alpha)m_T}}{1 + \alpha} > m_T,$$

то абсолютный максимум величины (6.1) достигается при

$$m_1^{opt} = \frac{1 - \sqrt{1 - (1 + \alpha)m_T}}{1 + \alpha}. \quad (6.3)$$

6.3 Взаимность первой и второй модели

Сформулируем обе задачи как гладкие задачи с ограничениями типа неравенств.

Первая задача:

$$m_{\text{II}} \rightarrow \max,$$

$$\Delta V \geq \Delta V_*.$$

Ограничение $\Delta V \geq \Delta V_*$ существенно. В самом деле, при $0 \leq \Delta V \leq \Delta V_{\max}$ решением задачи является $\Delta V = 0$, $m_1 = 0$, $m_2 = 0$.

Считая $m_0 = 1$ и обозначив через m_1 массу топлива в дополнительном топливном баке, m_2 массу топлива в основном топливном баке, выпишем формулы для m_{II} и ΔV :

$$m_{\text{II}} = 1 - m_1 - \alpha m_1 - m_2 - \alpha m_2 - \beta n, \quad (6.4)$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2, \quad \Delta V_1 = -c \ln(1 - m_1), \quad \Delta V_2 = c \ln \frac{1 - m_1 - \alpha m_1}{1 - m_1 - \alpha m_1 - m_2}. \quad (6.5)$$

Окончательно получим:

$$m_{\text{II}} = 1 - m_1 - \alpha m_1 - m_2 - \alpha m_2 - \beta n \rightarrow \max,$$

$$\Delta V = -c \ln(1 - m_1) + c \ln \frac{1 - m_1 - \alpha m_1}{1 - m_1 - \alpha m_1 - m_2} \geq \Delta V_*.$$

Вторая задача:

$$\Delta V \rightarrow \max,$$

$$m_{\text{II}} \geq m_*.$$

Распишем это подробнее

$$\Delta V = -c \ln(1 - m_1) + c \ln \frac{1 - m_1 - \alpha m_1}{1 - m_1 - \alpha m_1 - m_2} \rightarrow \max,$$

$$m_{\text{II}} = 1 - m_1 - \alpha m_1 - m_2 - \alpha m_2 - \beta n \geq m_*.$$

Эти две задачи взаимны: при соответствующем друг-другу выборе величин ограничений V_* и m_* решение одной задачи дает и решение другой. В самом деле функции Лагранжа первой и второй задачи имеют вид:

$$\mathcal{L}^1 = \lambda_m^1 m_{\text{II}} + \lambda_V^1 (\Delta V - \Delta V_*),$$

$$\mathcal{L}^2 = \lambda_m^2 (m_{\Pi} - m_*) + \lambda_V^2 \Delta V,$$

где m_{Π} в обоих случаях имеет вид (6.4), а ΔV — вид (6.5). Множители Лагранжа в силу условия согласования знаков имеют вид $\lambda_m^1 \leq 0$, $\lambda_m^2 \leq 0$, $\lambda_V^1 \leq 0$, $\lambda_V^2 \leq 0$. Поэтому, если удалось определить решение первой задачи: значения m_1 , m_2 , ΔV_1 , ΔV_2 и множители Лагранжа λ_m^1 , λ_V^1 , то при ограничении $\Delta V_{max} = \Delta V_1 + \Delta V_2$ и множителях Лагранжа $\lambda_m^2 = \lambda_m^1$, $\lambda_V^2 = \lambda_V^1$ величины m_1 , m_2 , ΔV_1 , ΔV_2 также дадут решение второй задачи и наоборот.

Таким образом, в силу существования и единственности решений в первой и второй задачах (см. §5.1, §5.2) эти решения совпадают.

Глава 7

Простые методы построения траекторий, близких к экстремальным

В этой главе рассматриваются две задачи оптимизации, решения которых оказываются с одной стороны достаточно близкими по функционалу к решениям исходной задачи оптимального управления, а с другой решения этих задач получаются значительно легче.

Общей особенностью для двух следующих упрощенных моделей является известная структура искомой траектории — а именно известная последовательность активных и пассивных участков. На рис. 7.1 приведены типичные зависимости величины тяги от времени перелета при сбросе ДТБ на активном (сверху) и на протяженном пассивном (снизу) участках.

Основное отличие рассматриваемых в этой главе двух упрощенных моделей от упрощенных моделей гл. 6 состоит в том, что в первой и второй упрощенных моделях траекторная составляющая была исключена из рассмотрения полностью. В третьей же и четвертой она учитывается: на активных участках траектории из эмпирических соображений выбираются относительно простые законы управления, и с использованием этих законов управления осуществляется перелет КА с исходной низкой круговой орбиты

ИСЗ на целевую орбиту.

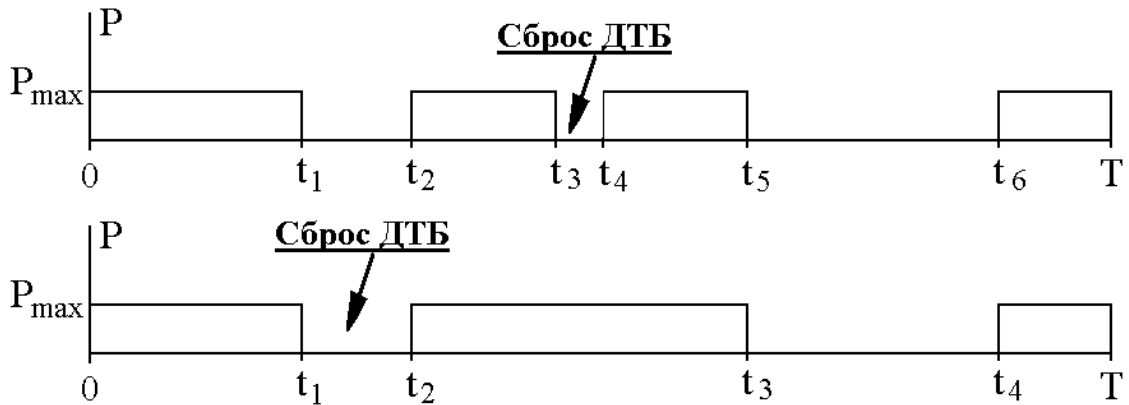


Рис. 7.1: Сброс ДТБ на активном и на протяжённом пассивном участках

7.1 Третья упрощенная модель

В результате анализа экстремалей Понтрягина было отмечено, что на первых перицентрических активных участках КА разгоняется и осуществляется подъем апоцентра. На последнем апоцентрическом активном участке осуществляется поворот плоскости орбиты, радиальная составляющая вектора тяги при этом достаточно близка к нулю.

С учетом этих особенностей, была сформирована следующая оптимизационная задача.

На начальных перицентрических участках предполагалось, что тяга реактивного двигателя КА сонаправлена со скоростью и система дифференциальных уравнений движения КА на таких участках имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= u, & \dot{y} &= v, & \dot{z} &= w, & \dot{m} &= -\frac{P_{\max}}{c}, \\
 \dot{u} &= -\frac{\mu x}{r^3} + \frac{P_{\max}}{m} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \\
 \dot{v} &= -\frac{\mu y}{r^3} + \frac{P_{\max}}{m} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \\
 \dot{w} &= -\frac{\mu z}{r^3} + \frac{P_{\max}}{m} \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}},
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

На последнем апоцентрическом участке предполагалось, что тяга реактивного двигателя КА лежит в плоскости, определяемой векторами $\{u, v, w\}$ и $\{y \cdot w - z \cdot v, z \cdot x - x \cdot w, x \cdot v - y \cdot u\}$, и задается углом α :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, & \dot{y} &= v, & \dot{z} &= w, & \dot{m} &= -\frac{P_{\max}}{c}, \\ \dot{u} &= -\frac{\mu x}{r^3} + \frac{P_{\max}}{m} e_x, & \dot{v} &= -\frac{\mu y}{r^3} + \frac{P_{\max}}{m} e_y, & \dot{w} &= -\frac{\mu z}{r^3} + \frac{P_{\max}}{m} e_z, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где величины $\{e_x, e_y, e_z\}$ определяются формулами:

$$c_x = y \cdot w - z \cdot v, \quad c_y = z \cdot x - x \cdot w, \quad c_z = x \cdot v - y \cdot u,$$

$$|C| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}, \quad |V| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2},$$

$$e_x = \frac{u}{|V|} \cos \alpha + \frac{c_x}{|C|} \sin \alpha, \quad e_y = \frac{v}{|V|} \cos \alpha + \frac{c_y}{|C|} \sin \alpha, \quad e_z = \frac{w}{|V|} \cos \alpha + \frac{c_z}{|C|} \sin \alpha.$$

На пассивных участках система дифференциальных уравнений движения КА имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, & \dot{y} &= v, & \dot{z} &= w, & \dot{m} &= 0, \\ \dot{u} &= -\frac{\mu x}{r^3}, & \dot{v} &= -\frac{\mu y}{r^3}, & \dot{w} &= -\frac{\mu z}{r^3}; \end{aligned} \quad (7.3)$$

Подобное разделение участков на перицентрические и апоцентрические рассматривалось ранее в [34].

В начальный момент времени $t = 0$ КА находится на исходной круговой орбите высоты h_0 над поверхностью Земли (2.3). Положение КА на исходной орбите заранее не фиксируется и определяется в результате решения задачи.

В моменты t_k ($k = 1, \dots, 6$ при сбросе ДТБ на активном участке и $k = 1, \dots, 4$ при сбросе ДТБ на протяженном пассивном, см. рис. 7.1) стыковки активных и пассивных участков положение и скорость КА не изменяется:

$$\begin{aligned} x(t_{k+}) - x(t_{k-}) &= 0, & y(t_{k+}) - y(t_{k-}) &= 0, & z(t_{k+}) - z(t_{k-}) &= 0, \\ u(t_{k+}) - u(t_{k-}) &= 0, & v(t_{k+}) - v(t_{k-}) &= 0, & w(t_{k+}) - w(t_{k-}) &= 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$t_{k+} - t_{k-} = 0.$$

В эти моменты (кроме участка сброса ДТБ) масса КА непрерывна:

$$m(t_{k-}) = m(t_{k+}). \quad (7.5)$$

Если сброс ДТБ осуществляется на активном участке, протяженность участка сброса считается фиксированной. Сброс выполняется после полной выработки топлива из ДТБ, сухая масса бака пропорциональна массе находившегося в нем топлива (коэффициент пропорциональности α) [15, 47]

$$m_2^* = m_1^* - \alpha(1 - m_1^*),$$

где m_1^* — масса КА до сброса ДТБ, m_2^* — после.

Конечная (полезная) масса определяется соотношением

$$m_{\Pi} = m(T) - \alpha(m_2^* - m(T)) - \beta n. \quad (7.6)$$

Например, в случае сброса на втором перицентрическом активном участке (см. верхний рис. 7.1) в число ограничений рассматриваемой задачи включаются условия

$$t_{4-} - t_{3+} = 120 \text{ с}, \quad (7.7)$$

$$m_1^* = m(t_{3-}), \quad (7.8)$$

$$m(t_{4+}) = m_2^* = m_1^* - \alpha(1 - m_1^*). \quad (7.9)$$

Рассматривается выведение КА на целевую орбиту — эллиптическую орбиту с радиусом апоцентра, равным радиусу геостационарной орбиты, и линией апсид, лежащей в плоскости геостационарной орбиты, совпадающей с плоскостью Zxy

$$\begin{aligned} r_A - r_{GEO} &= 0, \\ u(T)C_{T_y} - v(T)C_{T_z} - \frac{\mu_3 z(T)}{R(T)} &= 0, \\ \Delta V_A - \Delta V_A^* &= 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Условия (7.10) соответствуют краевым условиям исходной задачи (2.8), величина импульса довыведения ΔV_A (2.10) считается известной величиной. Второе условие соответствует равенству нулю z -ой компоненты вектора Лапласа, вектора, который является первым интегралом уравнений движения и направлен из притягивающего центра в точку перигея орбиты. Выполнение этого требования означает, что перицентр орбиты лежит в плоскости Zxy , то

есть в плоскости геостационарной орбиты. Все входящие в (7.10) величины определяются соотношениями (2.11).

Максимизируется полезная масса КА:

$$m_{\Pi} \rightarrow \max. \quad (7.11)$$

7.1.1 Численное решение

Траектория перелета КА в третьей упрощенной модели полностью определяется следующим набором величин: φ_0 — угловое положение КА на начальной круговой орбите, Δt_k — протяженности всех активных и пассивных участков и α — угол, определяющий направление тяги на последнем активном участке. Если сброс ДТБ происходит на активном участке, то протяженность участка сброса считается известной.

Эти величины надо выбрать так, чтобы удовлетворить условиям (7.10) и максимизировать функционал (7.11).

Решение рассматриваемой конечномерной задачи максимизации с ограничениями типа равенства сводится к решению конечномерной задачи максимизации без ограничений выделением зависимых и независимых переменных.

Зависимые переменные определяются в результате решения системы нелинейных алгебраических уравнений при заданных значениях независимых переменных как параметров задачи. По независимым переменным проводится максимизация функционала.

К числу зависимых переменных относится величина φ_0 — ее изменение позволяет обратить в ноль вторую компоненту (7.10) без изменения двух оставшихся компонент (7.10) и функционала (7.11). Также к числу зависимых переменных относится протяженность второго перицентрического активного участка (при сбросе ДТБ на протяженном пассивном участке) или последней его части (при сбросе ДТБ на втором перицентрическом активном участке) — эта величина оказывает преимущественное влияние на первую компоненту (7.10), и протяженность апоцентрического активного участка — эта величина оказывает преимущественное влияние на третью компоненту (7.10).

Например, при сбросе ДТБ на втором перицентрическом активном участке при не заданном заранее распределении массы топлива в основном и дополнительном баках величины φ_0 , Δt_5 и Δt_7 считаются зависимыми, величина $\Delta t_4 = t_4 - t_3$ считается известной (7.7), а величины Δt_1 , Δt_2 , Δt_3 , Δt_6 , α считаются свободными. В случае, если масса топлива в дополнительном топливном баке задана, величина Δt_3 переходит из числа свободных в зависимые и для ее определения в число компонент вектор-функции невязок включается условие

$$m(t_3) - m_1^* = 0.$$

Задача минимизации по свободным переменным решалась в два этапа. На первом этапе использовался метод покоординатного спуска. Этот метод для рассматриваемой задачи достаточно быстро переводит любое допустимое начальное приближение в окрестность искомого экстремума. Уточнение решения проводилось градиентным методом с приближенным определением наилучшей величины смещения по градиенту в результате одномерной оптимизации.

При решении задачи в качестве начального приближения использовалась траектория плоского перелета при примерно равной протяженности первого и второго перицентрических участков с общей продолжительностью соответствующей времени реализации разгонного перицентрического импульса и некоторой протяженности апоцентрического участка. Протяженности пассивных участков были выбраны так, чтобы второй активный участок находился примерно в окрестности перигея, а последний — апогея. Протяженность апоцентрического участка была выбрана не слишком большой, чтобы при таком участке КА гарантированно не смог выйти на геостационарную орбиту, но и не слишком малой, чтобы этот участок не выродился в нулевой при компенсации ошибок выбора протяженностей перицентрических участков.

На первом этапе решалась взаимная задача минимизации величины импульса довыведения при заданной полезной массе. Затем выбиралась заданная величина импульса довыведения, и решалась задача максимизации полезной массы по свободным переменным.

7.2 Четвертая упрощенная модель

При рассмотрении четвертой упрощенной модели было решено отказаться от выбора управления на активных участках в зависимости от их типа. И на перицентрических, и на апоцентрическом активных участках направление тяги определялось углом тангажа θ , который отсчитывается от плоскости геостационарной орбиты, и углом рыскания ϕ , который отсчитывается в плоскости геостационарной орбиты от оси Ox в сторону Oy . Считалось, что угол тангажа и угол рыскания изменяются по линейному закону.

$$\phi(t) = a_k(t - t_k) + b_k, \quad \theta(t) = c_k(t - t_k) + d_k,$$

где $k = 0, 2, 4$. Параметры этих законов определялись в результате решения задачи конечномерной оптимизации.

Система дифференциальных уравнений движения КА на пассивных участках совпадает с (7.3), а на активных имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, & \dot{y} &= v, & \dot{z} &= w, & \dot{m} &= -\frac{P_{\max}}{c}, \\ \dot{u} &= -\frac{\mu x}{r^3} + P_{\max} \frac{\cos \varphi \cos \theta}{m}, \\ \dot{v} &= -\frac{\mu y}{r^3} + P_{\max} \frac{\sin \varphi \cos \theta}{m}, \\ \dot{w} &= -\frac{\mu z}{r^3} + P_{\max} \frac{\sin \theta}{m} \end{aligned} \tag{7.12}$$

В начальный момент времени $t = 0$ КА находится на исходной круговой орбите высоты h_0 над поверхностью Земли (2.3). Положение КА на исходной орбите заранее не фиксируется и определяется в результате решения задачи.

В моменты t_k (k — нечетное) окончания активных участков выполняются условия непрерывности положения и скорости КА (7.4), если t_k не является моментом начала сброса ДТБ, то масса КА также непрерывна (7.5).

В моменты t_k (k — четное) начала активных участков выполняются условия непрерывности положения и скорости КА (7.4), если t_k не является моментом окончания сброса ДТБ, то масса КА также непрерывна (7.5).

Рассматривается выведение КА на целевую орбиту — эллиптическую орбиту с радиусом апоцентра, равным радиусу геостационарной орбиты, и линией апсид, лежащей в плоскости геостационарной орбиты, совпадающей с плоскостью Zxy (7.10).

Условия сброса ДТБ и вычисление полезной массы определяется аналогично предыдущей задаче.

7.2.1 Численное решение

Траектория перелета КА в четвертой упрощенной модели полностью определяется следующим набором величин: φ_0 — угловое положение КА на начальной круговой орбите, Δt_k — протяженности всех активных и пассивных участков (кроме участка сброса ДТБ в случае, если он происходит на активном участке), $a_k, b_k = \phi(t_k), c_k, d_k = \theta(t_k), k = 0, 2, 4$ (при сбросе ДТБ на протяженном пассивном участке) или $k = 0, 2, 4, 6$ (при сбросе ДТБ на активном участке).

Как и в предыдущем случае, рассматриваемая задача является конечномерной задачей максимизации. Ее решение сводится к решению конечномерной задачи максимизации без ограничений выделением зависимых и независимых переменных. К числу зависимых переменных относятся величины: φ_0 , протяженность второго перицентрического активного участка (при сбросе ДТБ на протяженном пассивном участке) или последней его части (при сбросе ДТБ на втором перицентрическом активном участке), и протяженность последнего (апоцентрического) активного участка. В случае, если масса топлива в дополнительном топливном баке считается известной, продолжительность активного участка до сброса также включается в число зависимых переменных. Остальные переменные считаются свободными.

Рассмотрим это разделение подробнее на примере задачи оптимизации траектории со сбросом ДТБ на втором перицентрическом активном участке при не заданном заранее распределении массы топлива в основном и дополнительном баках. Величины $\varphi_0, \Delta t_5$ и Δt_7 считаются зависимыми, величина

$\Delta t_4 = t_4 - t_3$ считается известной (7.7)), а величины $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \Delta t_6, a_k, b_k, c_k, d_k, k = 0, 2, 4, 6$ — свободными.

Зависимые переменные определяются в результате решения системы нелинейных алгебраических уравнений при выбранных значениях свободных переменных как параметрах задачи. По свободным переменным проводится минимизация функционала задачи.

При решении задачи в качестве начального приближения использовалась траектория плоского перелета при примерно равной протяженности первого и второго перицентрических участков с общей продолжительностью соответствующей времени реализации разгонного перицентрического импульса и некоторой протяженности апоцентрического участка. Протяженности пассивных участков были выбраны так, чтобы второй активный участок находился примерно в окрестности перигея, а последний — апогея. Протяженность апоцентрического участка была выбрана не слишком большой, чтобы при таком участке КА гарантированно не смог выйти на геостационарную орбиту, но и не слишком малой, чтобы этот участок не выродился в нулевой при компенсации ошибок выбора протяженностей перицентрических участков. Величины a_k, b_k, c_k, d_k определялись так, чтобы тяга в начале и конце каждого активного участка была сонаправлена со скоростью.

На первом этапе решалась взаимная задача минимизации величины импульса довыведения при заданной полезной массе. Затем выбиралась заданная величина импульса довыведения, и решалась задача максимизации полезной массы по свободным переменным.

Также, для ускорения процесса сходимости, в качестве начального приближения рассматривалось решение задачи в третьей простой модели.

Глава 8

Результаты

В результате проведенных исследований поставленные задачи удалось решить — построить экстремали Понтрягина для широкого диапазона параметров задач. Представленные далее результаты соответствуют перелетам одноступенчатых КА, двухступенчатых КА и КА с ДТБ с низкой круговой орбиты ИСЗ ($h_0 = 200$ км) на геостационарную орбиту ($R_{GSO} = R_з + h_{GSO} = 42164$ км) и геопереходную орбиту. В качестве основного набора параметров при сравнении различных траекторий используются величины $\beta = 0,01$ [46, стр. 46], $P_{уд} = 350$ с, $i_0 = 0,9$ рад, $\tau_2 - \tau_1 = 120$ с, $T_{max} = 5$ часов для одновитковых траекторий и $T_{max} = 7,5$ часов для двухвитковых траекторий. Примеры рассчитанных экстремалей приводятся в приложении А.

8.1 Экстремали Понтрягина

8.1.1 Угол наклона

На рис. 8.1—8.6 представлены типичные зависимости полезной массы $m_{п}$ при выведении КА на ГСО, импульса довыведения ΔV_A при выведении КА на ГПО и продолжительности активных участков от угла i_0 наклона исходной орбиты к плоскости экватора.

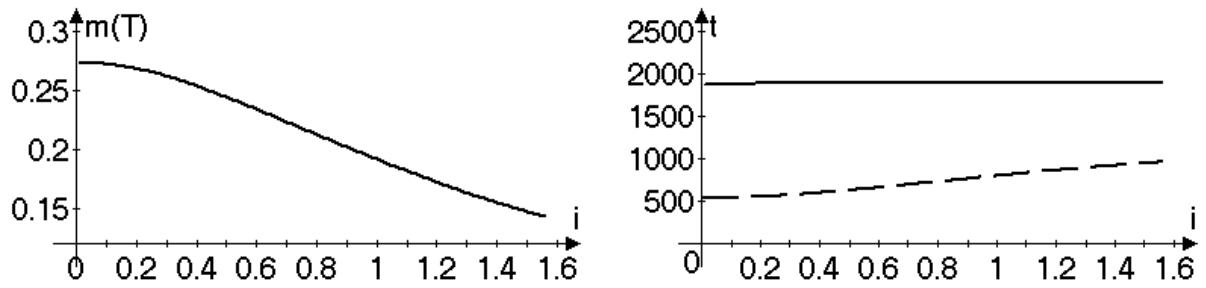


Рис. 8.1: Одновитковый перелет КА с ДТБ на ГСО. Сброс бака на пассивном участке.

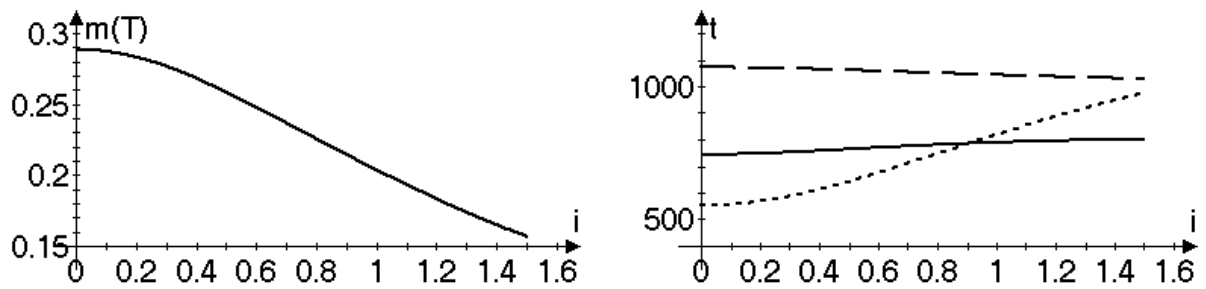


Рис. 8.2: Двухвитковый перелет КА с ДТБ на ГСО. Сброс бака на втором пассивном участке.

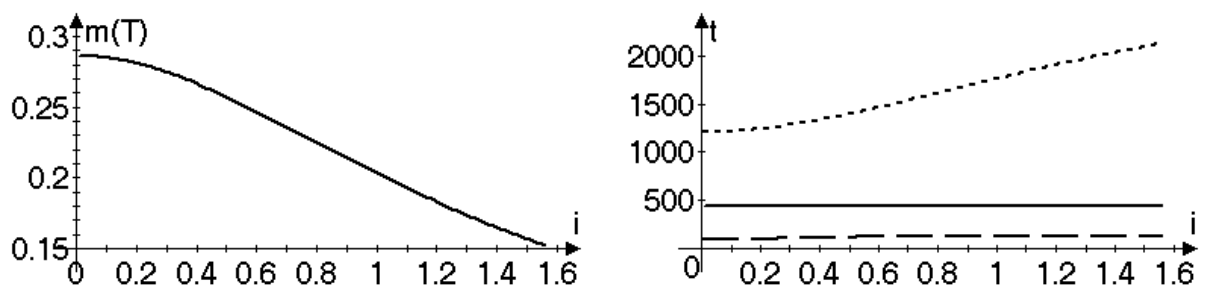


Рис. 8.3: Одновитковый перелет двухступенчатого КА на ГСО. Сброс ступени при $m_1^* = 0,5$ на первом активном участке.

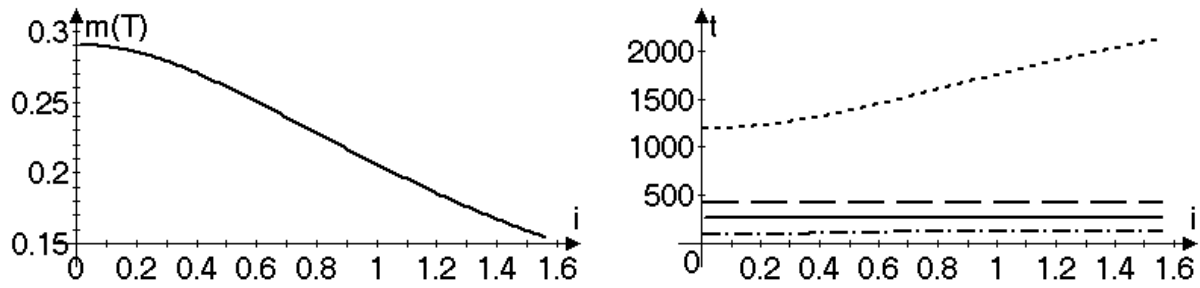


Рис. 8.4: Двухвитковый перелет двухступенчатого КА на ГСО. Сброс ступени при $m_1^* = 0,5$ на втором активном участке.

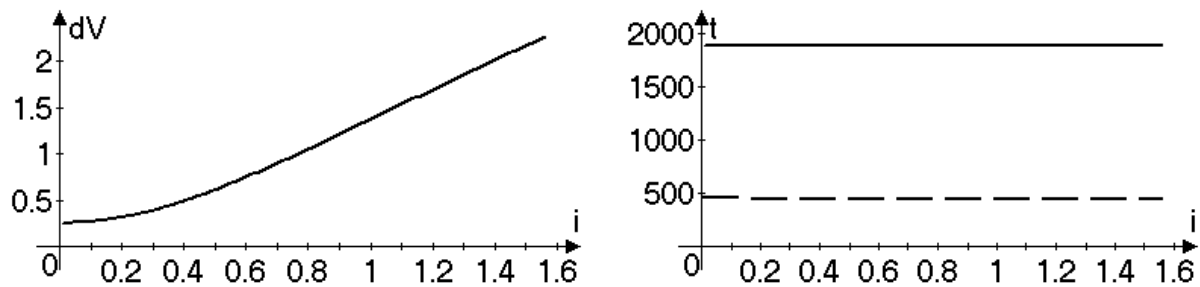


Рис. 8.5: Одновитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Сброс бака на пассивном участке.

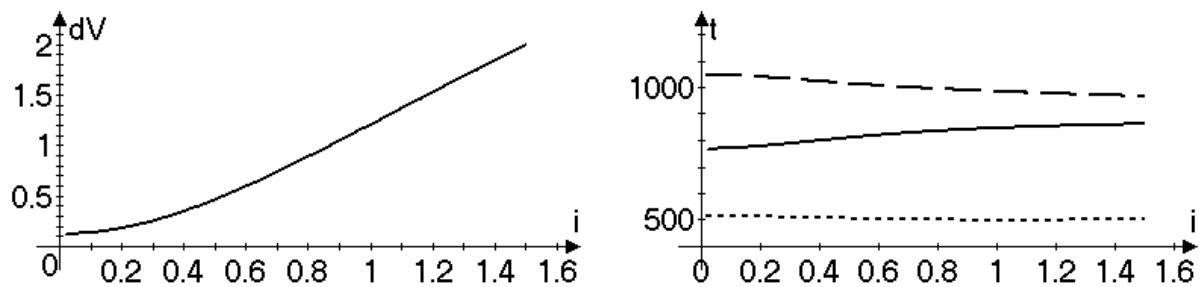


Рис. 8.6: Двухвитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Сброс бака на втором пассивном участке.

На рис. 8.1 представлены зависимости полезной массы и протяженностей активных участков от угла i_0 наклона начальной круговой орбиты к плоскости экватора при одновитковом выведении КА с ДТБ на ГСО со сбросом бака на пассивном участке, тяговооруженности $n = 0, 1$, удельной тяге $P_{уд} = 350$ с, продолжительности перелета $T_{max} = 5$ часов. Сплошная линия на правом рисунке соответствует продолжительности первого, а пунктир — второго (последнего) активного участка.

На рис. 8.2 представлены зависимости полезной массы и протяженностей активных участков от угла i_0 при двухвитковом выведении КА с ДТБ на ГСО со сбросом бака на втором пассивном участке, тяговооруженности $n = 0, 1$, удельной тяге $P_{уд} = 350$ с, продолжительности перелета $T_{max} = 7,5$ часов. Сплошная линия на правом рисунке соответствует продолжительности первого, длинный пунктир — второго, короткий пунктир — последнего активного участка.

На рис. 8.3 представлены зависимости полезной массы и протяженностей активных участков от угла i_0 при одновитковом выведении двухступенчатого КА на ГСО, тяговооруженности первой ступени $n_1 = 0,4$, тяговооруженности второй ступени $n_2 = 0,1$, удельных тягах $P_{уд}^1 = P_{уд}^2 = 350$ с, продолжительности перелета $T_{max} = 5$ часов, сбросе бака на первом активном участке при $m_1^* = 0,5$. Сплошная горизонтальная линия соответствует продолжительности активного участка до сброса ступени, она постоянна, так как задана масса топлива в ступени (посредством величины m_1^*) и тяговооруженность n_1 . Длинный пунктир соответствует продолжительности активного участка после сброса ступени, короткий пунктир — последнего активного участка.

На рис. 8.4 представлены зависимости полезной массы и протяженностей активных участков от угла i_0 при двухвитковом выведении двухступенчатого КА на ГСО, тяговооруженности первой ступени $n_1 = 0,25$, тяговооруженности второй ступени $n_2 = 0,1$, удельных тягах $P_{уд}^1 = P_{уд}^2 = 350$ с, продолжительности перелета $T_{max} = 7,5$ часов, сбросе бака на втором активном участке при $m_1^* = 0,5$. Сплошная линия соответствует продолжительности

первого активного участка, длинный пунктир — продолжительности второго активного участка до сброса ступени, штрих-пунктир — продолжительности второго активного участка после сброса ступени и короткий пунктир — последнего активного участка.

На рис. 8.5 представлены зависимости импульса довыведения ΔV_A и протяженностей активных участков от угла i_0 при одновитковом выведении КА с ДТБ на ГПО, тяговооруженности $n = 0, 1$, удельной тяге $P_{уд} = 350$ с, продолжительности перелета $T_{max} = 5$ часов, сбросе ДТБ на пассивном участке и полезной массе $m_{п} = 0,3$. Сплошная линия соответствует продолжительности первого активного участка, пунктир — второго (последнего) активного участка.

На рис. 8.6 представлены зависимости импульса довыведения ΔV_A и протяженностей активных участков от угла i_0 при двухвитковом выведении КА с ДТБ на ГПО, тяговооруженности $n = 0, 1$, удельной тяге $P_{уд} = 350$ с, продолжительности перелета $T_{max} = 7,5$ часов, сбросе ДТБ на втором пассивном участке и полезной массе $m_{п} = 0,3$. Сплошная линия соответствует продолжительности первого активного участка, длинный пунктир — второго, короткий пунктир — последнего активного участка.

Как и следовало ожидать, для данного типа траекторий увеличение угла наклона влечет за собой уменьшение конечной массы КА при выведении на ГСО и увеличение величины импульса довыведения ΔV_A при выведении на ГПО. Следует отметить, что протяженности активных участков, соответствующих первому импульсу, практически постоянны. Уменьшение массы КА на геостационаре связано с увеличением продолжительности последнего активного участка. При выведении на геопереходную орбиту, в силу фиксированности массы, последний активный участок также практически постоянен, что и приводит к увеличению величины ΔV_A .

При последующем анализе угол наклона исходной орбиты берется равным $0,9$ рад — эта величина близка к наклонению орбит, используемых при запусках КА (см., например, рис. 2.1–2.4).

8.1.2 Время перелета

На рис. 8.7–8.9 представлены типичные зависимости полезной массы $m_{\text{п}}$ при выведении КА на ГСО и величины импульса довыведения $\Delta V_{\text{д}}$ при выведении КА на ГПО от ограничения продолжительности перелета T_{max} . Эти графики соответствуют одновитковым и двухвитковым экстремалиям при $i_0 = 0,9$ рад, $P_{\text{уд}} = 350$ с.

Рис. 8.7 и рис. 8.8 соответствуют перелету КА с ДТБ со сбросом бака на главном (единственном для одновитковой экстремали и втором для двухвитковой экстремали) пассивном участке. Начальная тяговооруженность КА берется величиной $n = 0,1$. При выведении на ГПО (рис. 8.8) полезная масса берется величиной $m_{\text{п}} = 0,3$.

Рис. 8.9 соответствует перелету двухступенчатого КА. Масса топлива первой ступени для представленных перелетов задана и момент ее сброса определяется условием (2.13) при $m_1^* = 0,5$. Для одновитковой экстремали тяговооруженности выбраны величинами $n_1 = 0,4$, $n_2 = 0,1$; для двухвитковой — величинами $n_1 = 0,25$, $n_2 = 0,1$.

На каждом из рис. 8.7–8.9 приведены по два семейства экстремалей — одновитковых и двухвитковых. Видно, что полезная масса для каждого семейства экстремалей монотонно возрастает, а величина $\Delta V_{\text{д}}$ — монотонно убывает при $T_{\text{max}} \leq T_*$. Выделенные точки T_* соответствуют экстремалиям при $\lambda_T = 0$. При $T_{\text{max}} > T_*$ ограничение $T \leq T_{\text{max}}$ неактивно, экстремаль перелета и, следовательно, функционал при этом не изменяются. На рисунках этот постоянный участок выделяется пунктиром.

Для КА с ДТБ точки пересечения графиков, соответствующих одновитковому и двухвитковому перелетам определяют границы величин ограничений T_{max} : при меньших значениях лучшее значение функционала (большая полезная масса или меньший импульс довыведения) оказывается на экстремалиях одновиткового перелета, при больших — двухвиткового. Подробнее о многовитковых перелетах при различных ограничениях времени перелета см. [35, 70, 71]. В качестве основных величин ограничений протяженности пе-

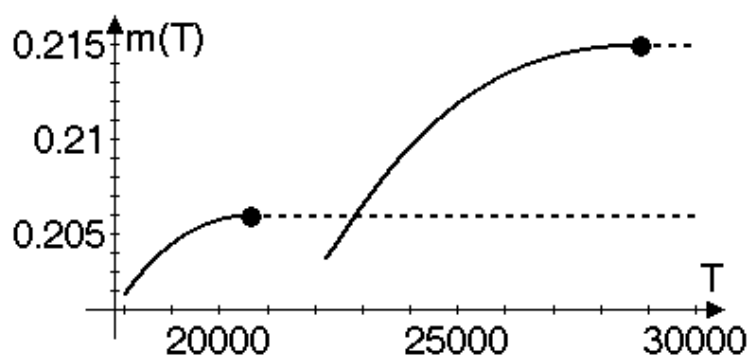


Рис. 8.7: Зависимости полезной массы $m_{\text{п}}$ от времени перелета при выведении КА с ДТБ на ГСО для одновиткового (ниже и левее) и двухвиткового (выше и правее) траекторий.

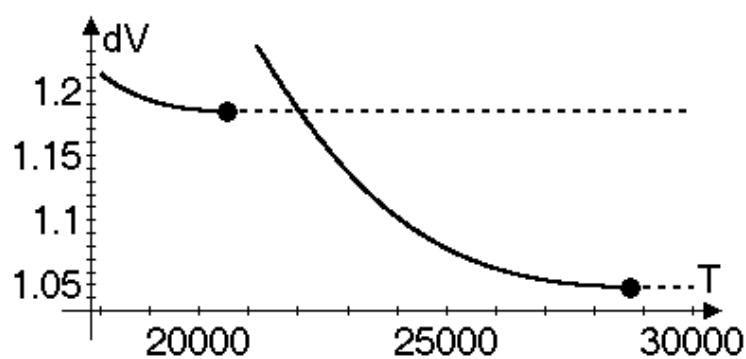


Рис. 8.8: Зависимости величины импульса довыведения ΔV_A от времени перелета при выведении КА с ДТБ на ГПО для одновиткового (выше и левее) и двухвиткового (ниже и правее) траекторий.

релета для корректного сравнения экстремалей между собой выбраны продолжительности 5 часов для одновиткового и 7,5 часов для двухвиткового перелета.

8.1.3 Величина удельной тяги

На рис. 8.10–8.15 приведены зависимости полезной массы КА, импульса довыведения и протяженностей активных участков от величины удельной тяги. На правых частях этих рисунков сплошной линией обозначена протяженность первого активного участка, коротким пунктиром — последнего, для двухвитковых экстремалей длинным пунктиром обозначена протяженность второго активного участка.

На рис. 8.10 и рис. 8.11 приведены зависимости импульса довыведения ΔV_A и продолжительностей активных участков от удельной тяги для одновиткового и двухвиткового перелета КА с ДТБ на геопереходную орбиту при $n = 0, 1$. Сброс бака осуществляется на главном пассивном участке (единственном для одновитковой траектории и втором для двухвитковой). Величина полезной массы на геопереходной орбите выбрана $m_{\text{п}} = 0,30$ для одновиткового перелета и $m_{\text{п}} = 0,32$ для двухвиткового. Различный выбор полезной массы для этих перелетов связан с существованием решений во всем рассматриваемом диапазоне удельных тяг: $P_{\text{уд}} \in [250 \text{ с}; 450 \text{ с}]$.

На рис. 8.12 и рис. 8.13 приведены зависимости полезной массы и продолжительностей активных участков от удельной тяги для одновиткового и двухвиткового перелета КА с ДТБ на геостационарную орбиту при $n = 0, 1$ и сбросе бака на главном пассивном участке.

На рис. 8.14 и рис. 8.15 приведены зависимости полезной массы и продолжительностей активных участков от удельной тяги для одновиткового и двухвиткового перелета двухступенчатого КА на геостационарную орбиту при $n_1 = 0,4$ для одновиткового перелета, $n_1 = 0,25$ для двухвиткового перелета, $n_2 = 0,1$ и сбросе ступени на пассивном участке.

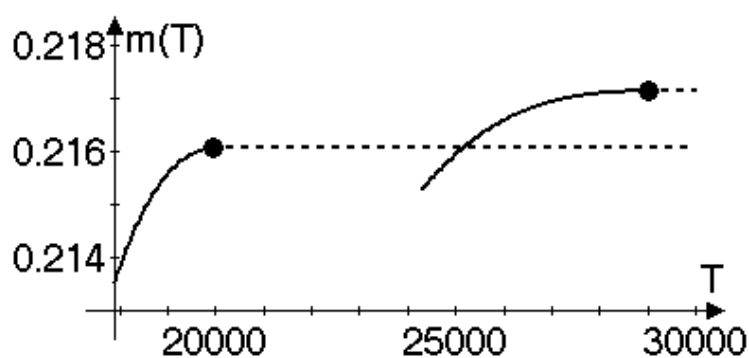


Рис. 8.9: Зависимости полезной массы $m_{\text{п}}$ от времени перелета при выведении двухступенчатого КА на ГСО для одновиткового (ниже и левее) и двухвиткового (выше и правее) траекторий.

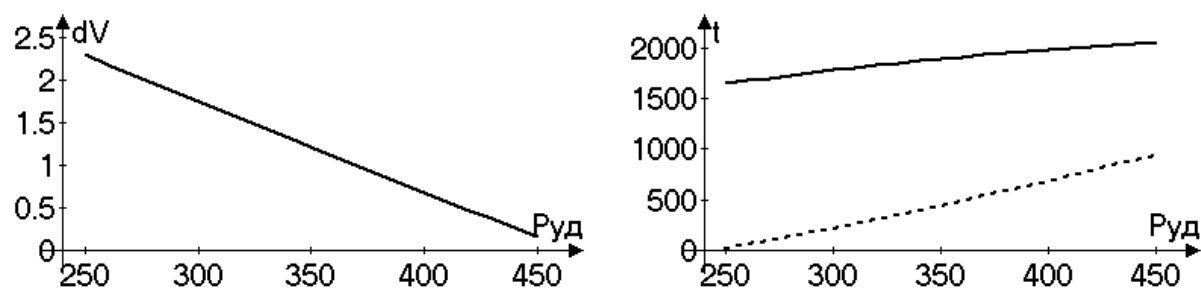


Рис. 8.10: Одновитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Сброс бака на пассивном участке.

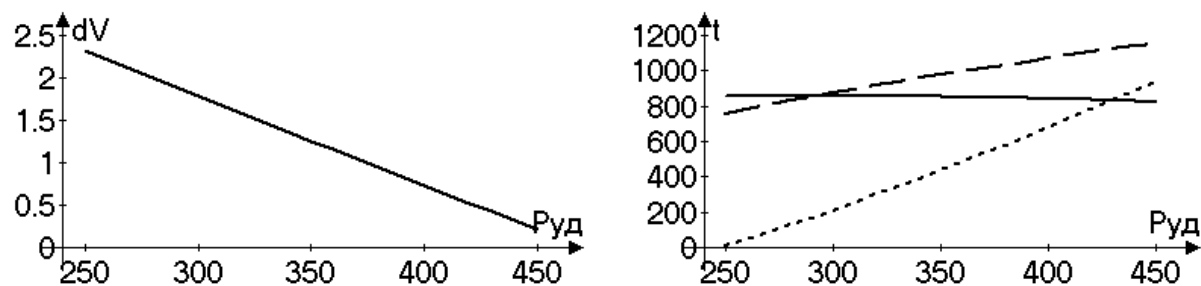


Рис. 8.11: Двухвитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Сброс бака на втором пассивном участке.

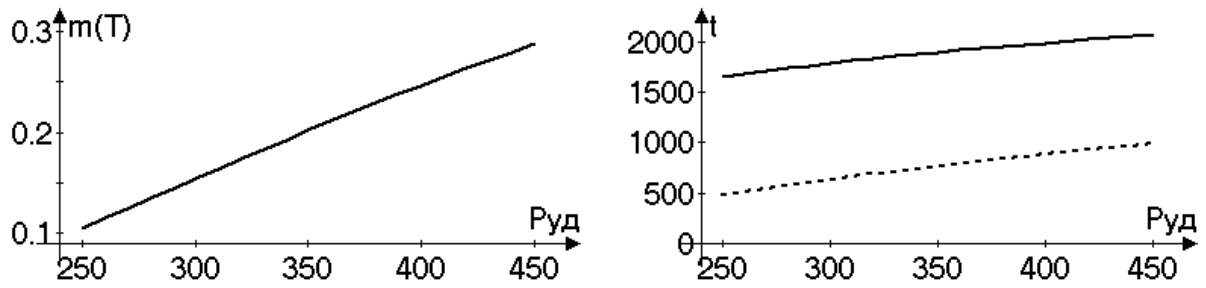


Рис. 8.12: Одновитковый перелет КА с ДТБ на ГСО. Сброс бака на пассивном участке.

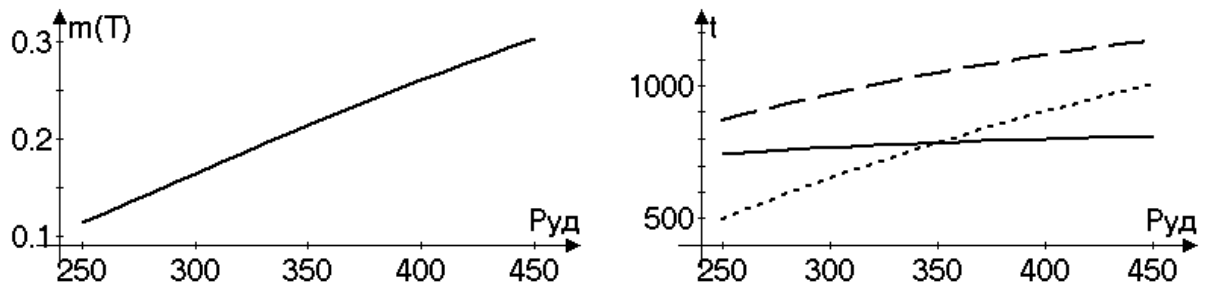


Рис. 8.13: Двухвитковый перелет КА с ДТБ на ГСО. Сброс бака на втором пассивном участке.

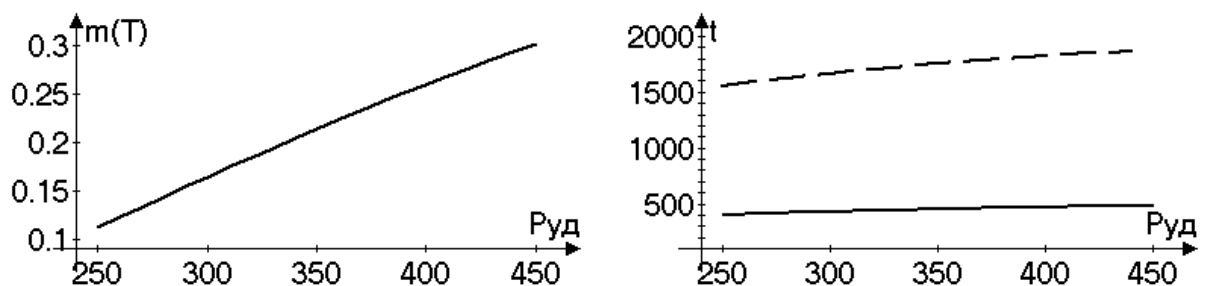


Рис. 8.14: Одновитковый перелет двухступенчатого КА на ГСО. Сброс бака на пассивном участке.

Отметим общие особенности приведенных зависимостей: они близки к линейным (это отмечалось ранее в [45]).

Величина импульса довыведения ΔV_A монотонно убывает, а полезная масса m_{Π} монотонно возрастает для всех рассмотренных перелетов. Так как при увеличении удельной тяги расход массы уменьшается, то уменьшается и ускорение, создаваемое реактивным двигателем, что приводит к необходимости увеличения активных участков. Наиболее наглядно это видно на примере последнего активного участка, обозначенного на всех рисунках коротким пунктиром.

Протяженность первого участка на всех рисунках представлена сплошной линией. Для одновитковых перелетов КА (рис. 8.10, 8.12 и 8.14) протяженность первого участка возрастает, а для двухвитковых (рис. 8.11, 8.13 и 8.15) — близка к постоянной.

8.1.4 Тяговооруженность

Типичные зависимости полезной массы и импульса довыведения от тяговооруженности представлены на рис. 8.16–8.21.

На рис. 8.16 приведены типичные зависимости импульса довыведения (слева) и полезной массы (справа) от тяговооруженности для одновитковых (сплошная линия) и двухвитковых (пунктирная линия) перелетов КА с ДТБ на ГПО (слева) и ГСО (справа). При выведении на ГПО полезная масса КА берется величиной $m_{\Pi} = 0,3$.

На рис. 8.17–8.20 приведены типичные зависимости полезной массы от тяговооруженностей первой и второй ступеней для одновитковых (рис. 8.17, 8.18) и двухвитковых (рис. 8.19, 8.20) перелетов двухступенчатых КА на ГСО. Как уже отмечалось, время перелета на одновитковых траекториях ограничивается величиной $T_{\max} = 5$ часов (рис. 8.17), а на двухвитковых — величиной $T_{\max} = 7,5$ часов (рис. 8.19), также приводятся зависимости для одно- и двухвитковых траекторий с не ограниченным заранее временем перелета (рис. 8.18, 8.20). Зависимости приводятся для случая

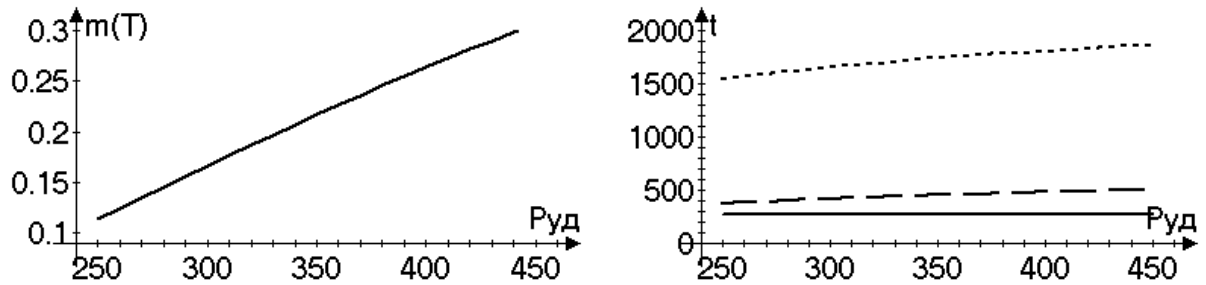


Рис. 8.15: Двухвитковый перелет двухступенчатого КА на ГСО. Сброс бака на втором пассивном участке.

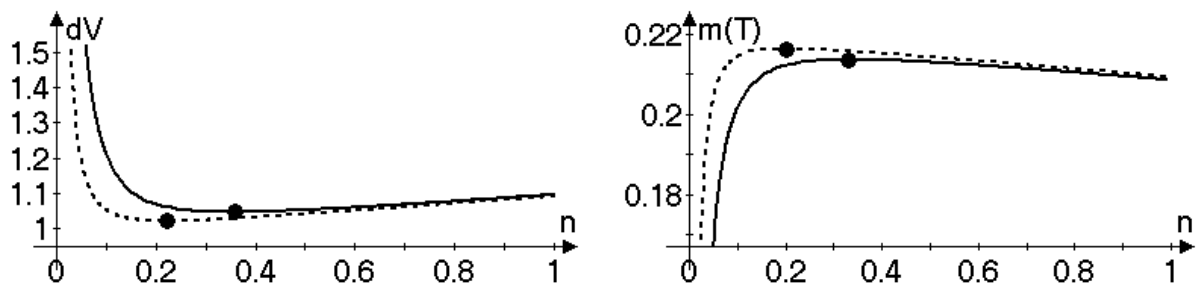


Рис. 8.16: Типичные зависимости полезной массы и импульса довыведения от тяговооруженности при перелетах КА с ДТБ на ГПО и ГСО.

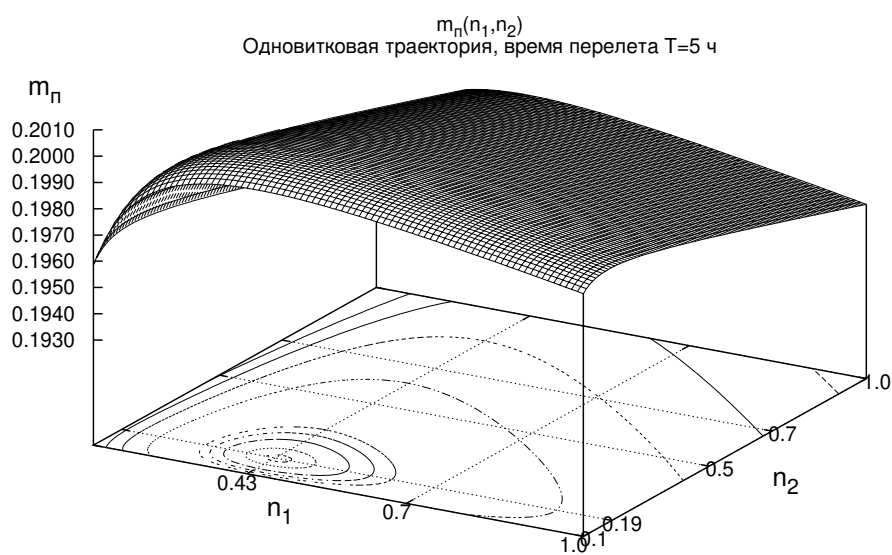


Рис. 8.17: Зависимость полезной массы m_{Π} от тяговооруженностей первой и второй ступеней для одновитковых перелетов КА на геостационар при $T = 5$ ч, $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.01$ и сбросе ступени главным пассивном участке.

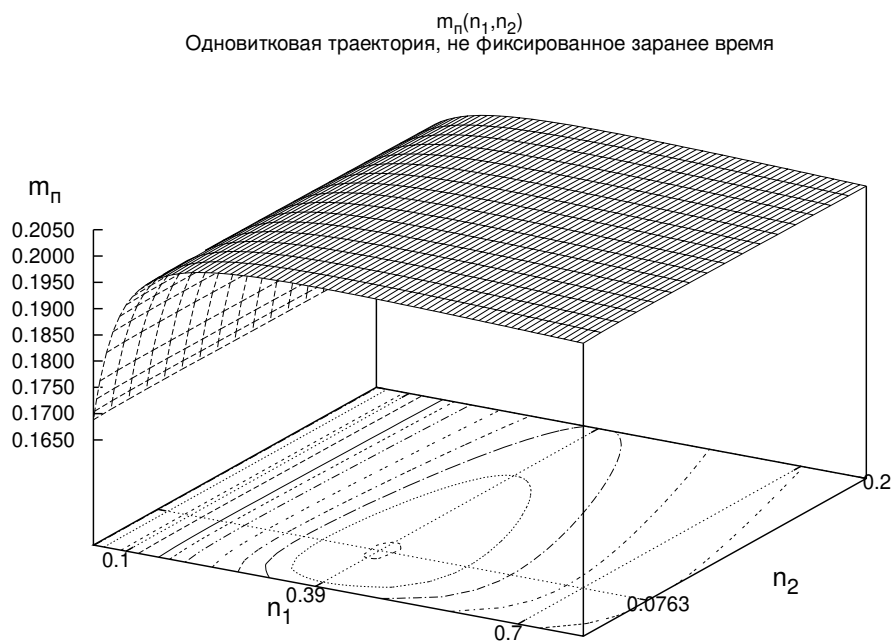


Рис. 8.18: Зависимость полезной массы m_{Π} от тяговооруженностей первой и второй ступеней для одновитковых перелетов КА на геостационар при не фиксированном заранее времени перелета, $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.01$ и сбросе ступени главном пассивном участке.

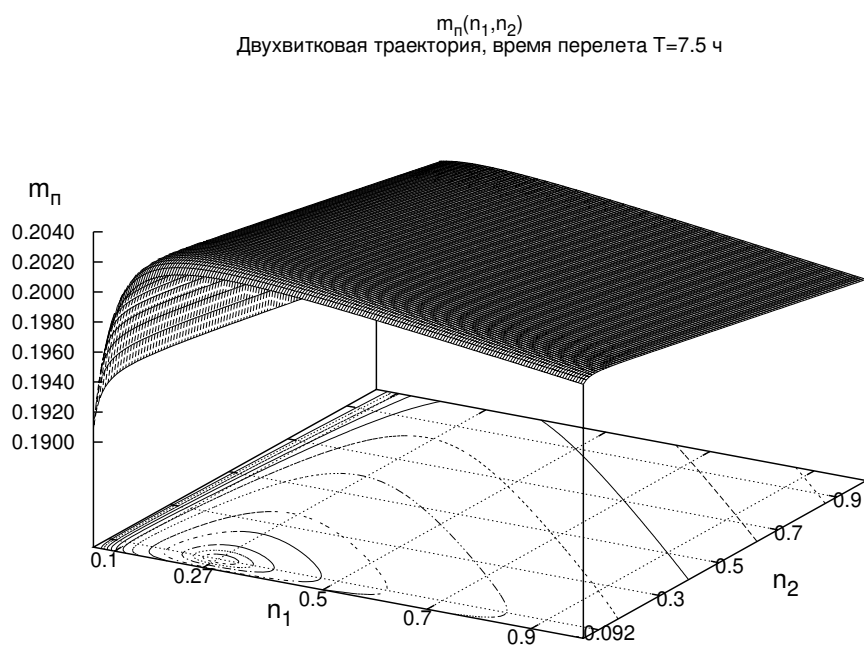


Рис. 8.19: Зависимость полезной массы m_{Π} от тяговооруженностей первой и второй ступеней для двухвитковых перелетов КА на геостационар при $T = 7.5$ ч, $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.01$ и сбросе ступени главном пассивном участке.

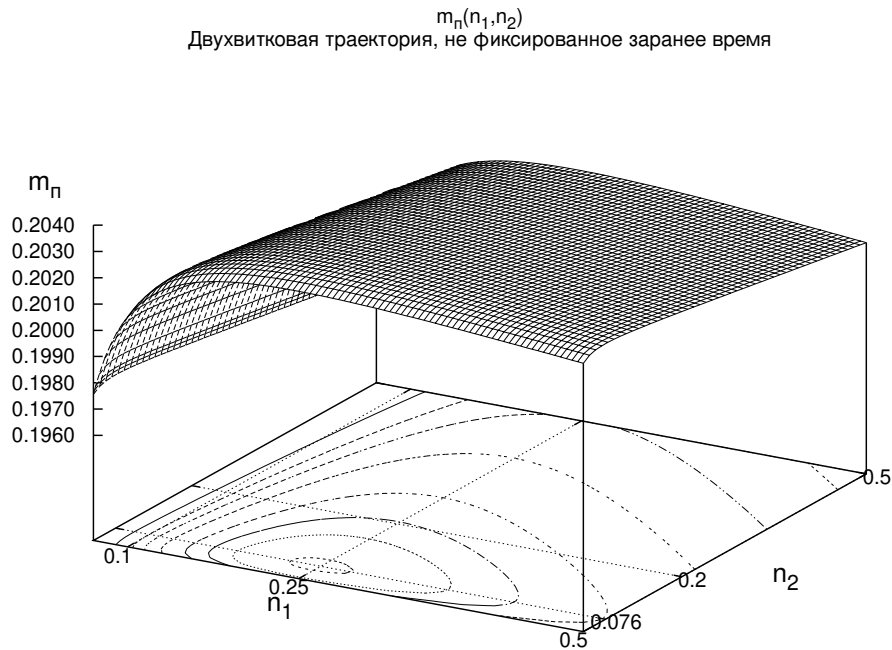


Рис. 8.20: Зависимость полезной массы m_n от тяговооруженностей первой и второй ступеней для двухвитковых перелетов КА на геостационар при не фиксированном заранее времени перелета, $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.01$ и сбросе ступени главном пассивном участке.

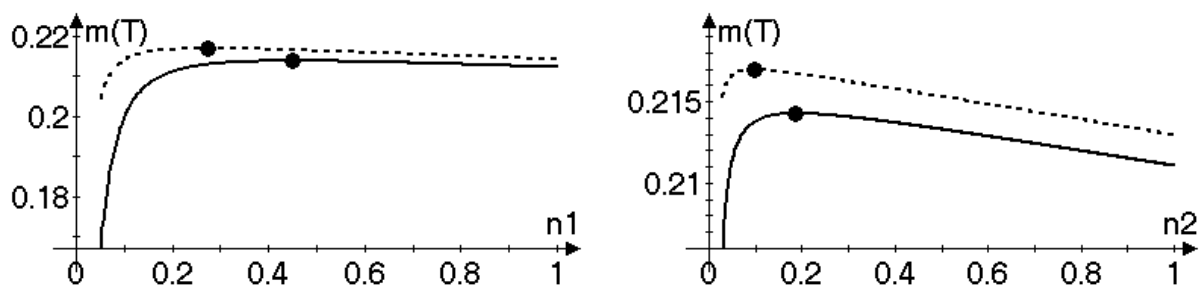


Рис. 8.21: Типичные зависимости полезной массы от тяговооруженностей первой и второй ступеней.

сброса ступени на главном пассивном участке при $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.01$ и удельной тяги $P_{уд} = 350$ с.

На рис. 8.21 приведены типичные зависимости полезной массы от тяговооруженностей первой (слева) и второй (справа) ступеней для одновитковых (сплошная линия) и двухвитковых (пунктирная линия) перелетов двухступенчатых КА на ГСО. Масса первой ступени считается фиксированной и соответствует $m_1^* = 0,5$. Точками на рисунках выделены тяговооруженности, соответствующие наилучшим значениям функционала. Можно сказать, что рис. 8.21 аналогичны сечениям поверхностей рис. 8.17–8.20 плоскостями, параллельными осям координат n_1 и n_2 .

Наличие наилучших тяговооруженностей обусловлено компромиссом между гравитационными потерями массы и массой сбрасываемого двигателя: при больших тяговооруженностях гравитационные потери малы, и полезная масса в зависимости от тяговооруженности убывает почти линейно; при малых тяговооруженностях масса сбрасываемого двигателя мала, главную роль играют гравитационные потери массы.

Отметим зависимость наилучшей тяговооруженности от величины β : увеличение β приводит к уменьшению наилучшей тяговооруженности (при неограниченном заранее времени перелета и числе допустимых оборотов наилучшая тяговооруженность с увеличением β стремится к нулю), уменьшение β до нуля увеличивает наилучшую тяговооруженность до бесконечности (случай импульсного перелета).

Отметим, что для свободного времени перелета наилучшие тяговооруженности первой ступени отличаются примерно в два раза — по числу активных участков, а наилучшие тяговооруженности второй ступени при одно- и двухвитковом выведении примерно равны (см. §А.1.5—§А.1.8 для одновитковых перелетов и §А.1.9—§А.1.12 для двухвитковых). Значительное отличие тяговооруженностей второй ступени в случае ограниченного и не ограниченного заранее времени перелета (ср., например, §А.1.5—§А.1.6, §А.1.7—§А.1.8, §А.1.9—§А.1.10, §А.1.11—§А.1.12) связано с разной характеристической скоростью маневра выведения КА на ГСО на последнем активном участке.

8.1.5 Распределение массы по бакам

На рис. 8.22–8.45 представлены зависимости функционала (полезной массы, величины импульса довыведения) от распределения топлива по бакам. На этих рисунках сплошная линия соответствует экстремалиям с протяженностью сброса ДТБ 2 минуты, короткий пунктир — протяженности сброса ДТБ 1 с (случай, используемый в качестве приближения мгновенного сброса), длинный пунктир — сбросу ДТБ на протяженном пассивном участке.

Первые 12 рисунков посвящены одновитковым, а следующие 12 рисунков — двухвитковым перелетам. Рисунки соответствуют перелетам КА на ГПО и на ГСО при тяговооруженности $n = 0,1$ и $\alpha = 0,02, 0,05, 0,08$ для одновитковых и двухвитковых траекторий, тяговооруженности $n = 0,35$ и $\alpha = 0,05$ для одновитковых, тяговооруженности $n = 0,20$ и $\alpha = 0,05$ для двухвитковых траекторий.

При сравнении полученных графиков следует учесть, что:
— чем быстрее происходит сброс двигателя на активном участке, тем меньше нарушается условие оптимальности;
— чем меньше коэффициент α тем меньше оказывает влияние на функционал неоптимальность выбора массы ДТБ — на первый план выходит неоптимальность принудительного выключения двигателя на активном участке.

Первому утверждению соответствует в целом одинаковое поведение кривых сброса за 1 с при всех α (на всех приведенных рисунках).

Сравнение между собой рисунков 8.22–8.24, 8.25–8.27, 8.28–8.30, 8.34–8.36, 8.37–8.39, 8.40–8.42 показывает, что зависимости функционала при сбросе ДТБ за 2 минуты на первом активном участке для одновитковых и первом и втором активных участках для двухвитковых перелетов отличаются от соответствующих зависимостей при сбросе ДТБ за 1 с тем больше, чем меньше α . При $\alpha = 0,02$ на этих участках для сбросов за 1 с и 2 мин даже отличается выпуклость графиков.

Практически точное совпадение кривых сброса за 1 с и за 2 мин на последнем участке объясняется малыми гравитационными потерями при апо-

центрическом включении двигателя.

Наилучшему сбросу за 1 с в общем случае соответствует сброс на активном участке (на всех рисунках экстремум короткого пунктира отличается от сброса на пассивном участке). Наилучшему сбросу за 2 мин при малом α соответствует сброс на пассивном участке (вне зависимости от величины $m_{\text{п}}$ при выведении на ГПО) — см. рис. 8.22, 8.25, 8.28, 8.34, 8.37, 8.40.

При увеличении α существенную роль играет удаление наилучшей точки мгновенного сброса от сброса на пассивном участке. Если они оказались достаточно близки наилучшая масса ДТБ соответствует оптимальному сбросу на пассивном участке, если же они достаточно далеки — наилучший сброс на активном участке. В случае $\alpha = 0,05$ для одновитковых перелетов КА на ГПО при $m_{\text{п}} = 0,3$ (рис. 8.23 и рис. 8.31) наилучший сброс ДТБ соответствует активному участку, а при $m_{\text{п}} = 0,25$ (рис. 8.26 и рис. 8.32) и при выведении на ГСО (рис. 8.29 и рис. 8.33) наилучший сброс ДТБ соответствует протяженному пассивному участку; в случае $\alpha = 0,08$ для одновитковых перелетов КА на ГПО при $m_{\text{п}} = 0,3$ (рис. 8.24) и $m_{\text{п}} = 0,25$ (рис. 8.27) наилучший сброс ДТБ соответствует активному участку, а при выведении на ГСО (рис. 8.30) — протяженному пассивному участку.

Для двухвитковых перелетов при $\alpha = 0,02$ величина $m_{\text{п}}$ и, соответственно, точка наилучшего мгновенного сброса ДТБ определяют, какому именно — первому или второму — пассивному участку соответствует наилучший протяженный сброс ДТБ. Так при $m_{\text{п}} = 0,4$ (рис. 8.34) наилучший сброс ДТБ соответствует первому активному участку, а при $m_{\text{п}} = 0,30$ (рис. 8.37) и выведении КА на ГСО (рис. 8.40) — второму.

Для $m_{\text{п}} = 0,4$ при $\alpha = 0,05$ и $\alpha = 0,08$, как и при $\alpha = 0,02$, наилучший сброс ДТБ соответствует первому пассивному участку (рис. 8.35, 8.36); для $m_{\text{п}} = 0,3$ при $\alpha = 0,05$ и $\alpha = 0,08$, наилучший сброс ДТБ соответствует активному участку (рис. 8.38, 8.39) а при выведении на ГСО (рис. 8.41, 8.42) — второму пассивному участку.

Отметим, что увеличение α до 0,08 сближает, по сравнению с меньшими значениями α , точки наилучшего мгновенного и протяженного сброса ДТБ.

Остановимся на различных сбросах ДТБ на пассивном участке. При сбросе ДТБ на главном пассивном участке левая часть графика (левее наилучшей точки) изображена в виде небольшого хвостика. При таком сбросе уменьшение массы ДТБ приводит к невозможности реализовать импульс в апоцентре и последующую компенсацию этого на апоцентрическом участке, что приводит к сильному ухудшению функционала и плохой сходимости итерационного метода. Монотонное ухудшение функционала в правой части графика (правее наилучшей точки) связано с тем, что увеличение массы ДТБ приводит к неэффективному перерасходу топлива на перицентрическом участке на изменение наклона и поднятие перицентра.

Для двухвитковой траектории сброс на первом пассивном участке приводит к возможности перераспределить продолжительности первого и второго активных участков при сравнительно малом изменении функционала.

При сбросе ДТБ на первом пассивном участке двухвитковой траектории левая часть графика (левее наилучшей точки) также изображена в виде короткого хвостика. Это связано с тем, что уменьшение первого активного участка уменьшает время движения по переходной эллиптической орбите и начиная с некоторого значения массы ДТБ ограничение времени перелета $T_{\max} = 7,5$ ч перестает быть активным. Крайняя левая изображенная точка на каждом из рисунков 8.37–8.45 как раз и соответствует этому предельному значению.

Отметим еще одно различие сброса ДТБ на первом и втором активном участке двухвитковой траектории. Кривые сброса за 1 с на первом и втором активном участках стыкуются практически вплотную; кривые сброса за 2 мин на первом и втором активном участках не стыкуются — точки окончания одного семейства отстоят от точек начала другого семейства на расстояние, никак не обусловленное точностью расчетов; кривая сброса на протяженном пассивном участке хорошо ложится в диапазон отсутствия решений при сбросе ДТБ за 2 мин, но наилучший сброс не соответствует кривой сброса за 1 с (см. рис. 8.46).

И кривые сброса за 1 с, и за 2 мин на втором и третьем активном участках

подходят практически вплотную друг к другу и к точке оптимального сброса на главном пассивном участке (см. рис. 8.47).

На экстремальных с тяговооруженностью $n = 0,35$ для одновитковой и $n = 0,2$ для двухвитковой траектории значения функционала при сбросе ДТБ за 1 с и за 2 мин различаются меньше, чем при тяговооруженности $n = 0,1$ (см. рис. 8.23 и 8.31, 8.26 и 8.32, 8.29 и 8.33, 8.35 и 8.43, 8.38 и 8.44, 8.41 и 8.45) и визуально общее поведение ближе к поведению зависимостей при $n = 0,1$, $\alpha = 0,08$.

Наконец, проведем сравнение наилучших "быстрых" сбросов ДТБ при различных параметрах, определенных в результате решения краевых задач принципа максимума и результатов, полученных в результате анализа простых моделей.

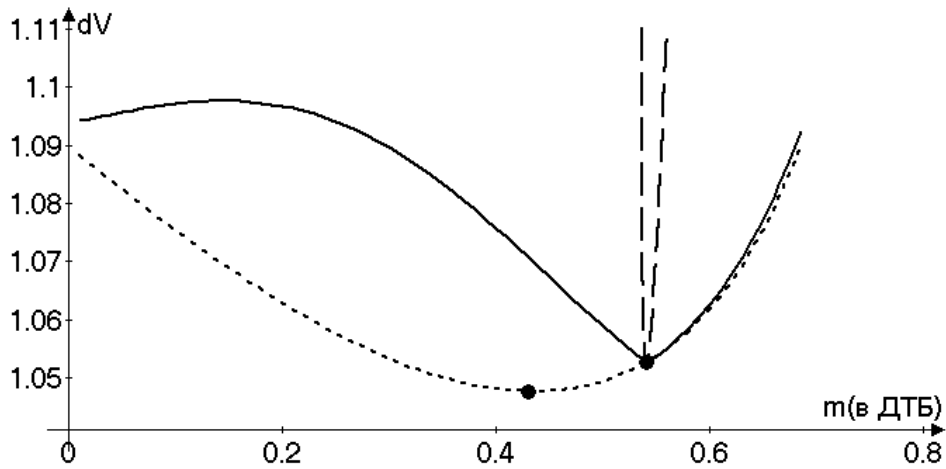


Рис. 8.22: Одновитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Зависимость величины импульса довыведения от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$, $m_{\text{п}} = 0.30$ и $\alpha = 0,02$.

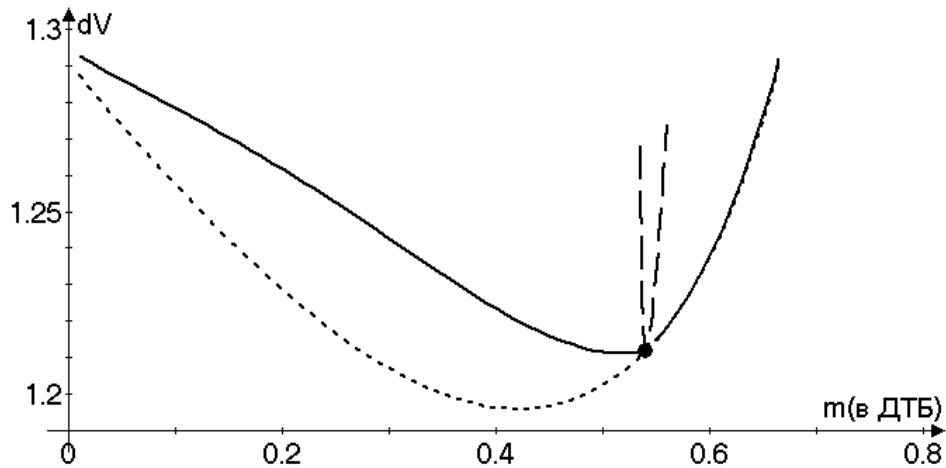


Рис. 8.23: Одновитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Зависимость величины импульса довыведения от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$, $m_{\text{п}} = 0.30$ и $\alpha = 0,05$.

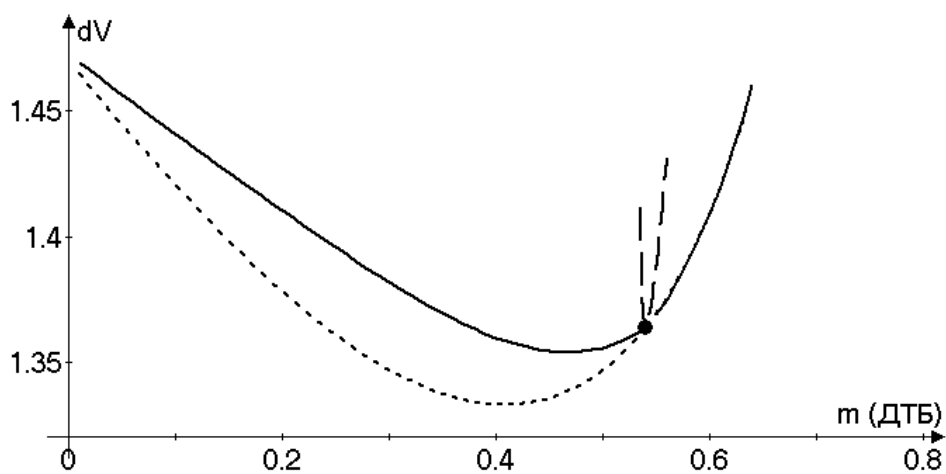


Рис. 8.24: Одновитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Зависимость величины импульса довыведения от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$, $m_{\text{п}} = 0.30$ и $\alpha = 0,08$.

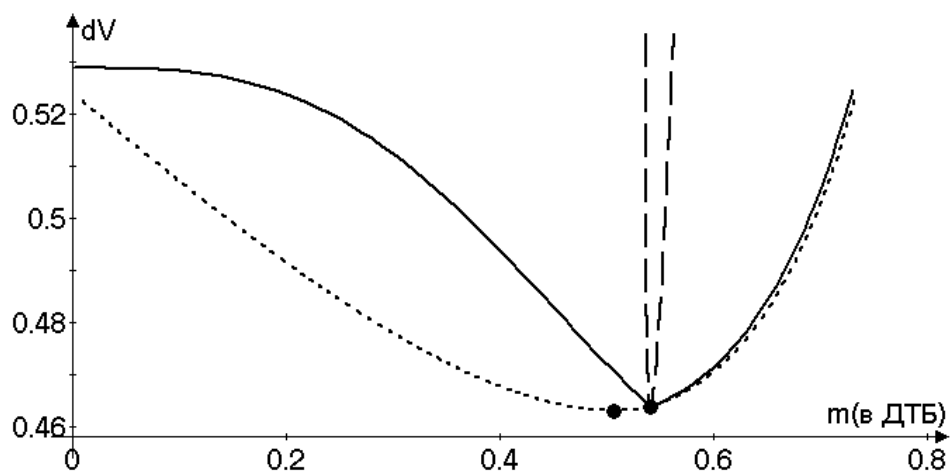


Рис. 8.25: Одновитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Зависимость величины импульса довыведения от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$, $m_{\text{п}} = 0.25$ и $\alpha = 0,02$.

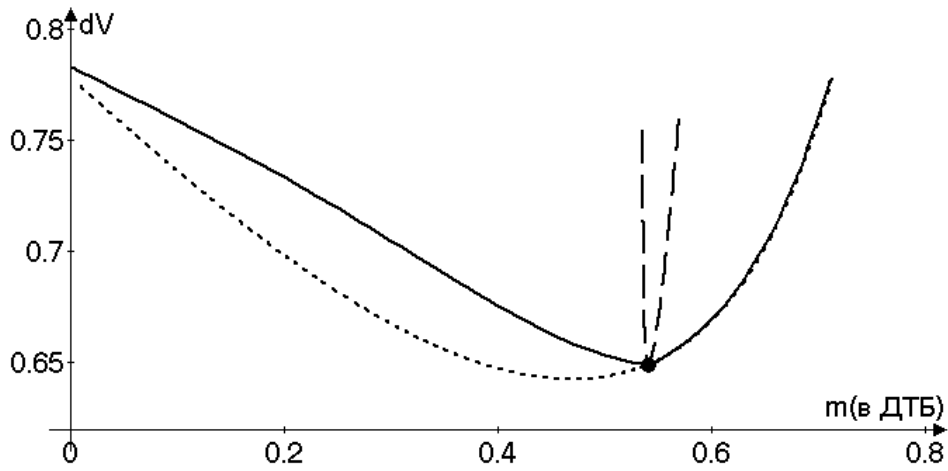


Рис. 8.26: Одновитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Зависимость величины импульса довыведения от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$, $m_{\text{п}} = 0.25$ и $\alpha = 0,05$.

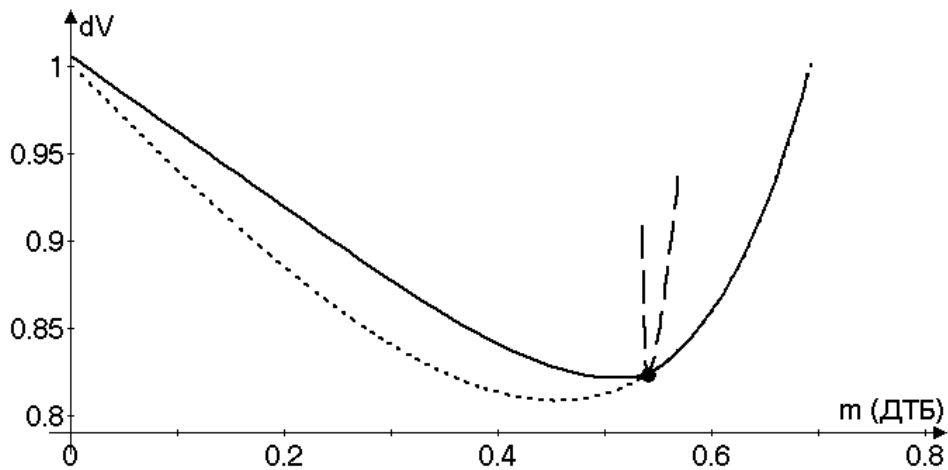


Рис. 8.27: Одновитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Зависимость величины импульса довыведения от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$, $m_{\text{п}} = 0.25$ и $\alpha = 0,08$.

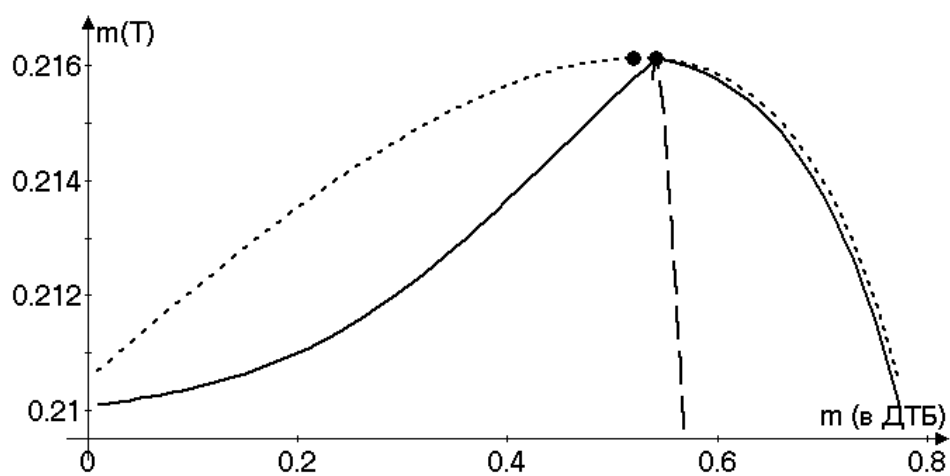


Рис. 8.28: Одновитковый перелет КА с ДТБ на ГСО. Зависимость полезной массы от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$ и $\alpha = 0,02$.

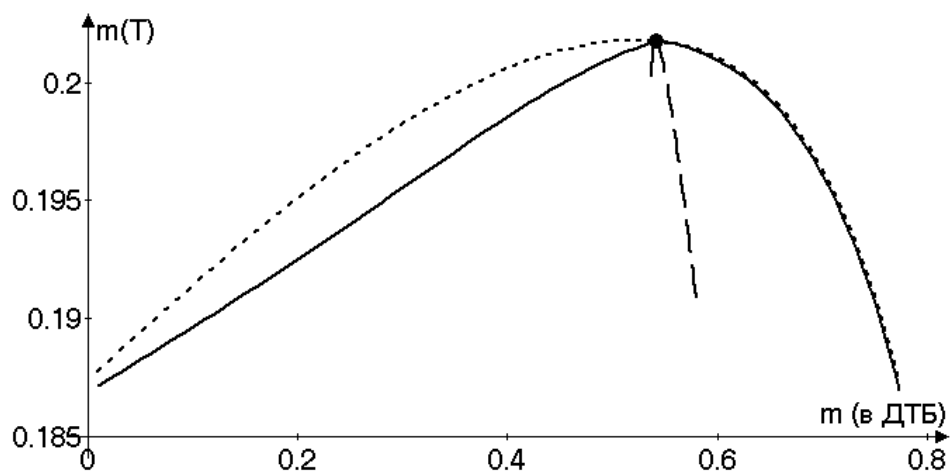


Рис. 8.29: Одновитковый перелет КА с ДТБ на ГСО. Зависимость полезной массы от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$ и $\alpha = 0,05$.

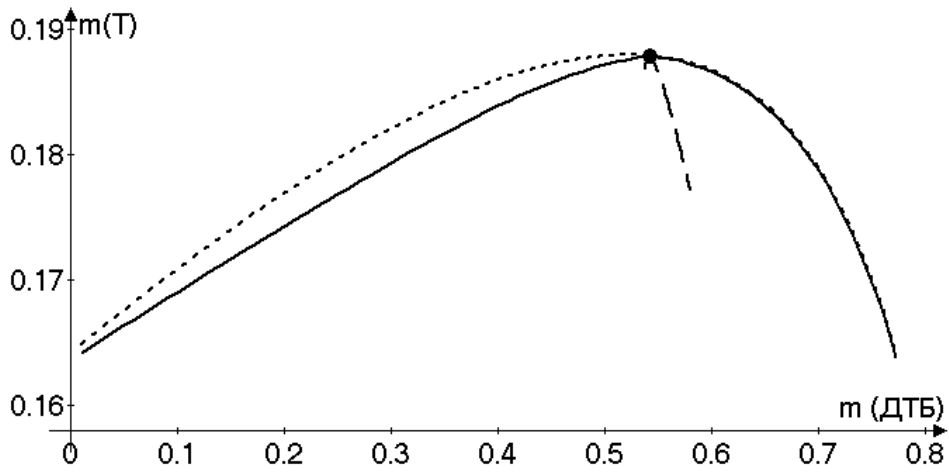


Рис. 8.30: Одновитковый перелет КА с ДТБ на ГСО. Зависимость полезной массы от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$ и $\alpha = 0,08$.

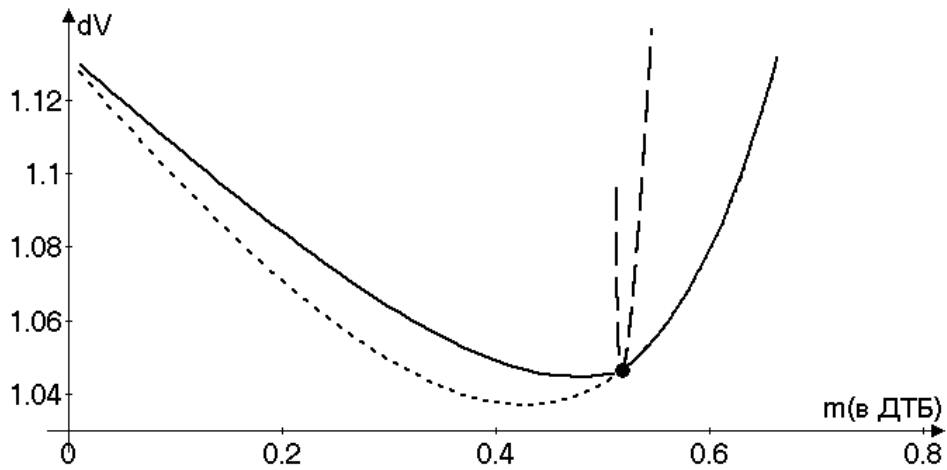


Рис. 8.31: Одновитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Зависимость величины импульса довыведения от массы топлива в ДТБ при $n = 0.35$, $m_{\text{П}} = 0.30$ и $\alpha = 0,05$.

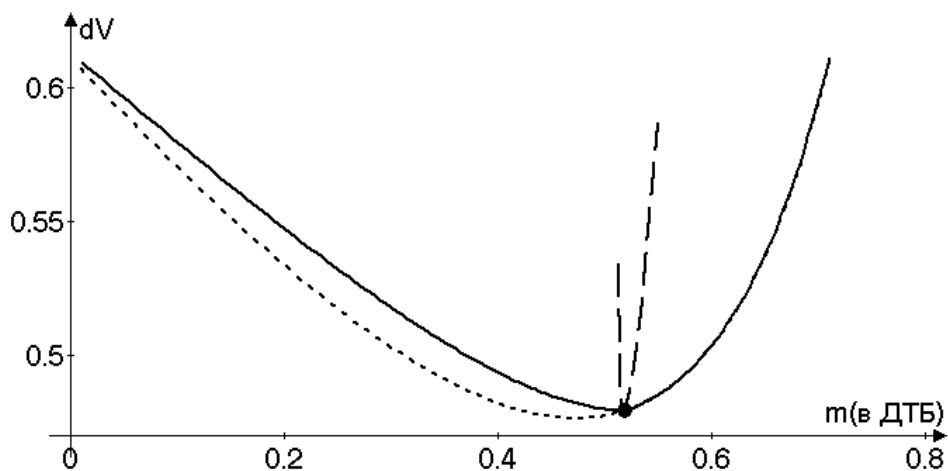


Рис. 8.32: Одновитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Зависимость величины импульса довыведения от массы топлива в ДТБ при $n = 0.35$, $m_{\text{П}} = 0.25$ и $\alpha = 0,05$.

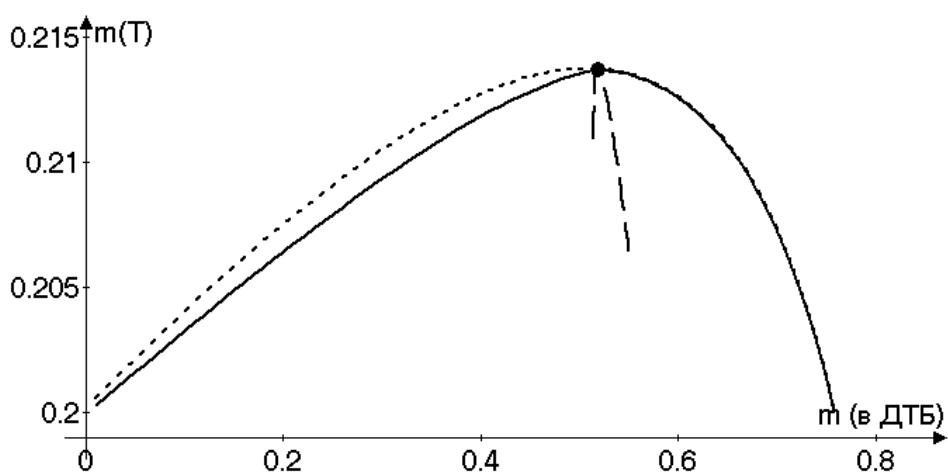


Рис. 8.33: Одновитковый перелет КА с ДТБ на ГСО. Зависимость полезной массы от массы топлива в ДТБ при $n = 0.35$ и $\alpha = 0,05$.

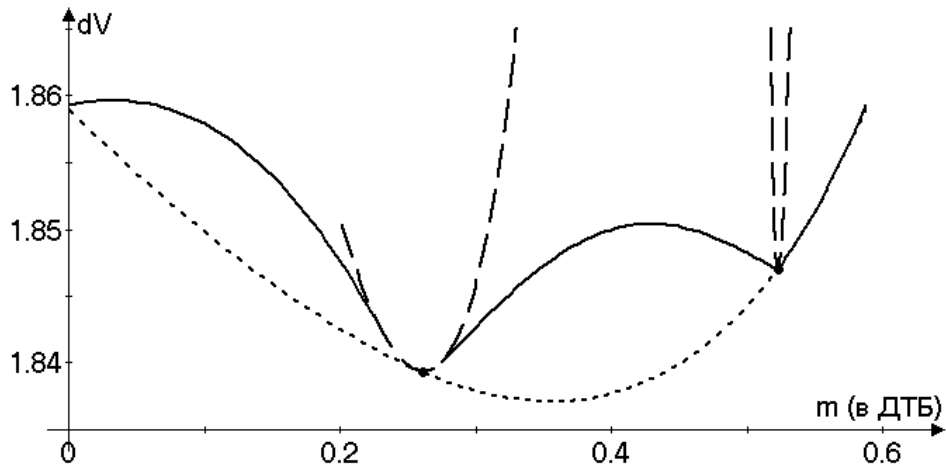


Рис. 8.34: Двухвитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Зависимость величины импульса довыведения от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$, $m_{\text{п}} = 0.40$ и $\alpha = 0,02$.

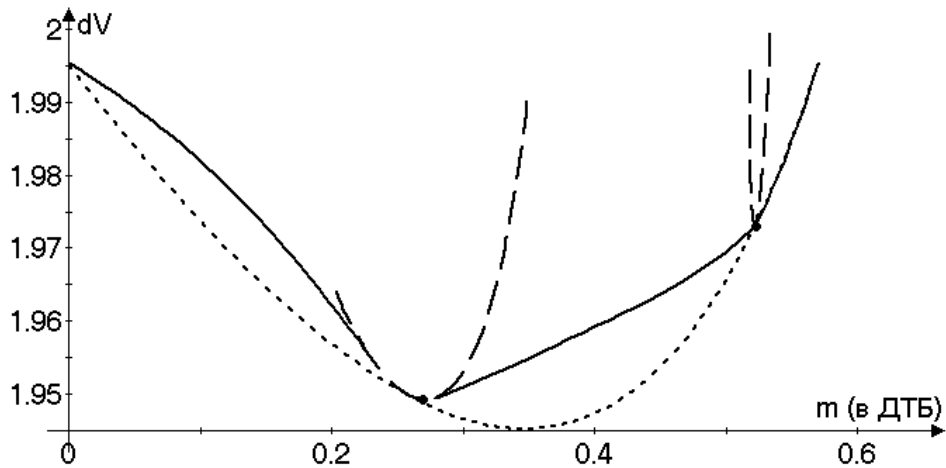


Рис. 8.35: Двухвитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Зависимость величины импульса довыведения от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$, $m_{\text{п}} = 0.40$ и $\alpha = 0,05$.

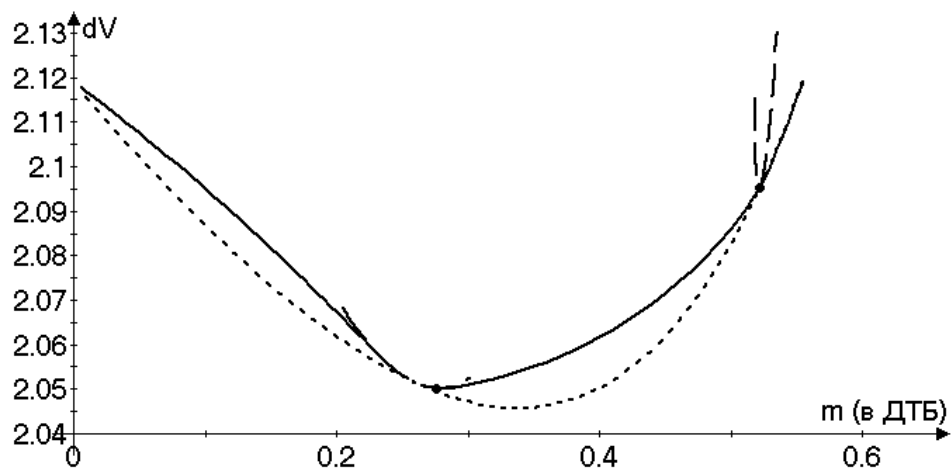


Рис. 8.36: Двухвитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Зависимость величины импульса довыведения от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$, $m_{\text{п}} = 0.40$ и $\alpha = 0,08$.

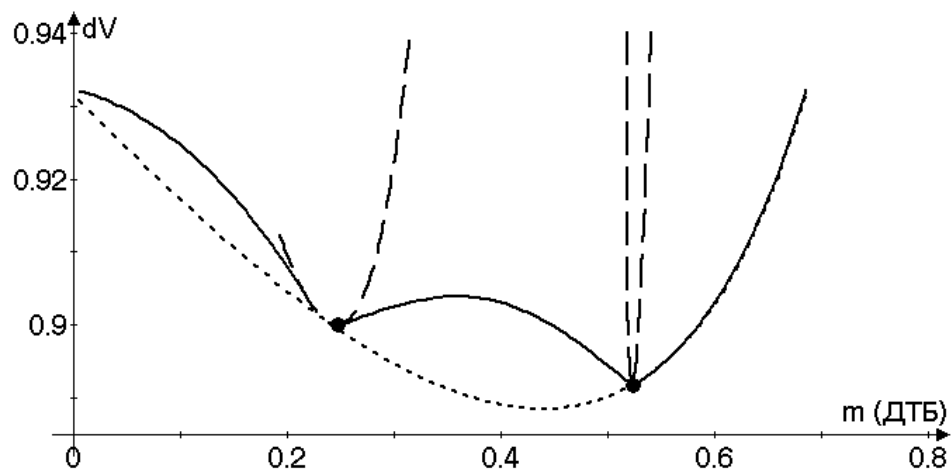


Рис. 8.37: Двухвитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Зависимость величины импульса довыведения от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$, $m_{\text{п}} = 0.30$ и $\alpha = 0,02$.

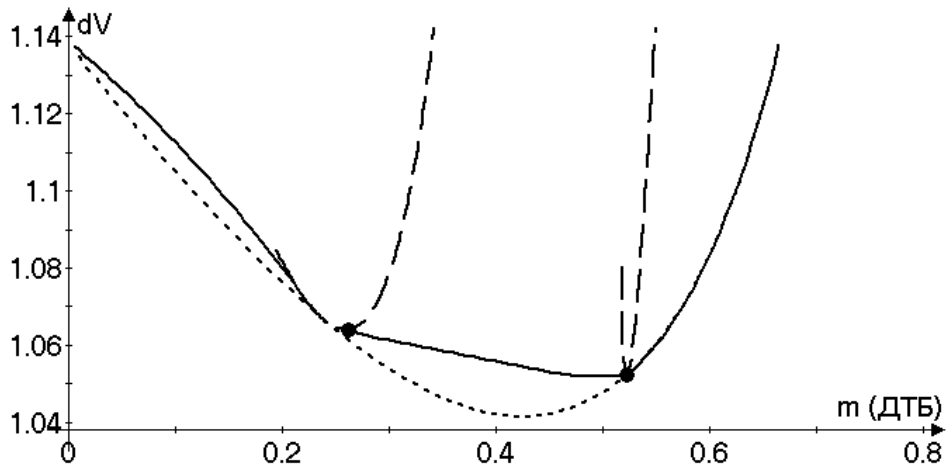


Рис. 8.38: Двухвитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Зависимость величины импульса довыведения от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$, $m_{\text{п}} = 0.30$ и $\alpha = 0,05$.

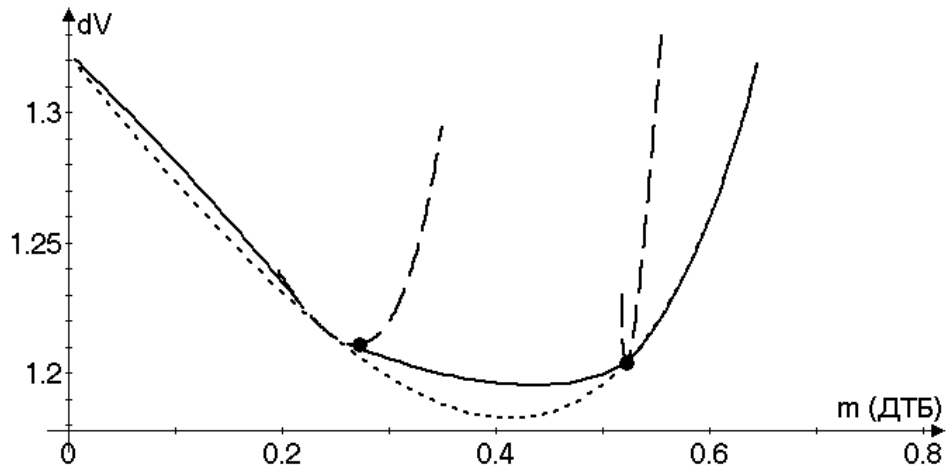


Рис. 8.39: Двухвитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Зависимость величины импульса довыведения от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$, $m_{\text{п}} = 0.30$ и $\alpha = 0,08$.

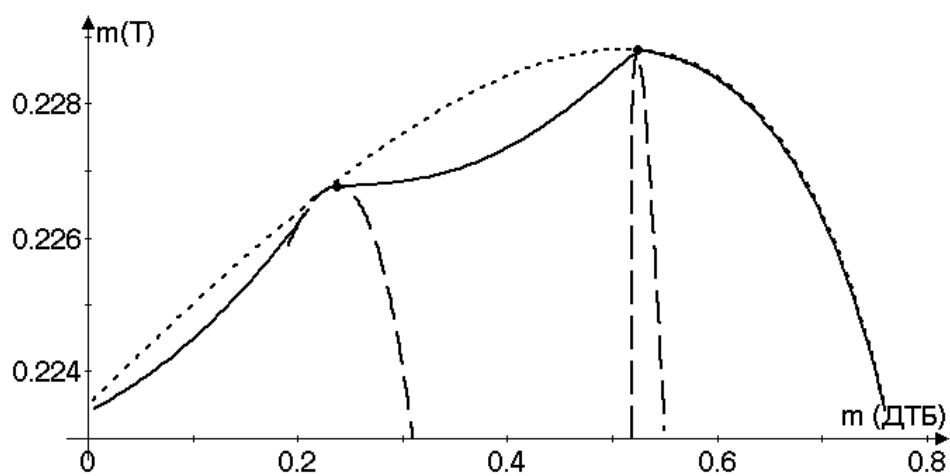


Рис. 8.40: Двухвитковый перелет КА с ДТБ на ГСО. Зависимость полезной массы от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$ и $\alpha = 0,02$.

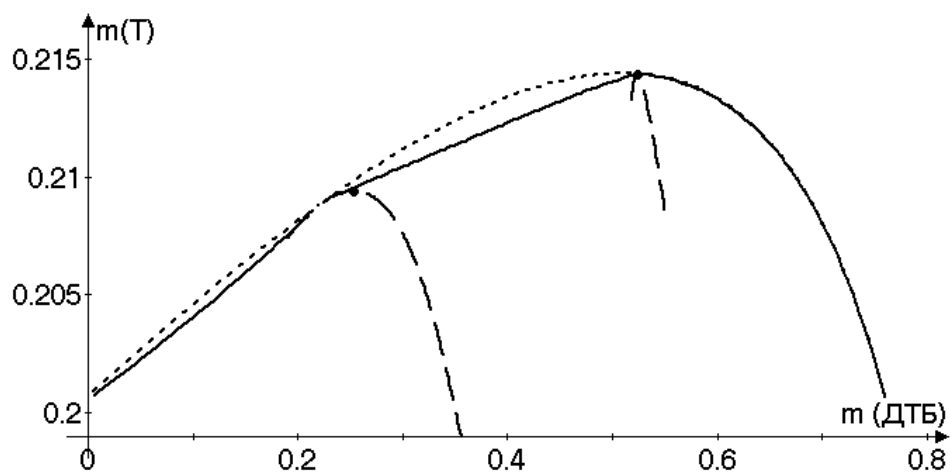


Рис. 8.41: Двухвитковый перелет КА с ДТБ на ГСО. Зависимость полезной массы от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$ и $\alpha = 0,05$.

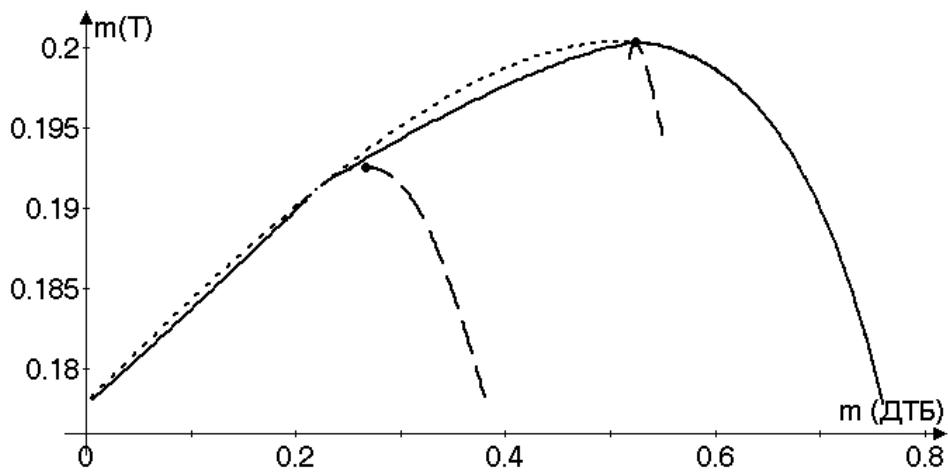


Рис. 8.42: Двухвитковый перелет КА с ДТБ на ГСО. Зависимость полезной массы от массы топлива в ДТБ при $n = 0.1$, $m_{\text{п}} = 0.30$ и $\alpha = 0,08$.

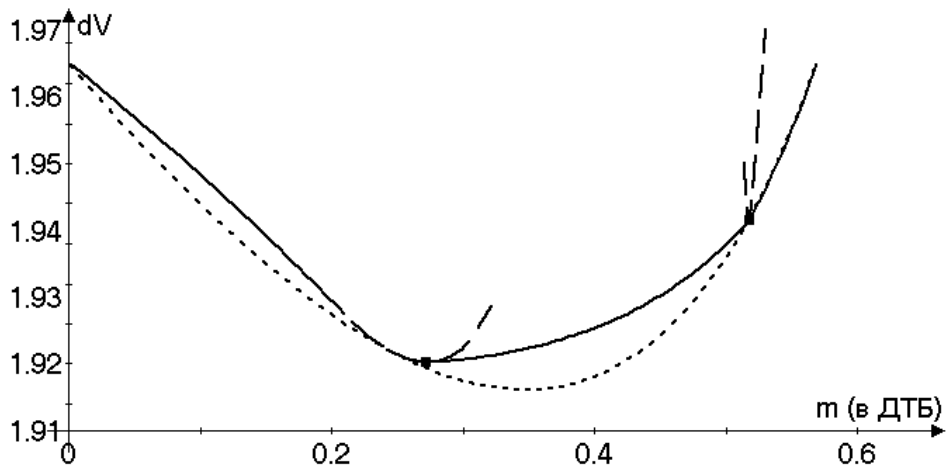


Рис. 8.43: Двухвитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Зависимость величины импульса довыведения от массы топлива в ДТБ при $n = 0.2$, $m_{\text{п}} = 0.40$ и $\alpha = 0,05$.

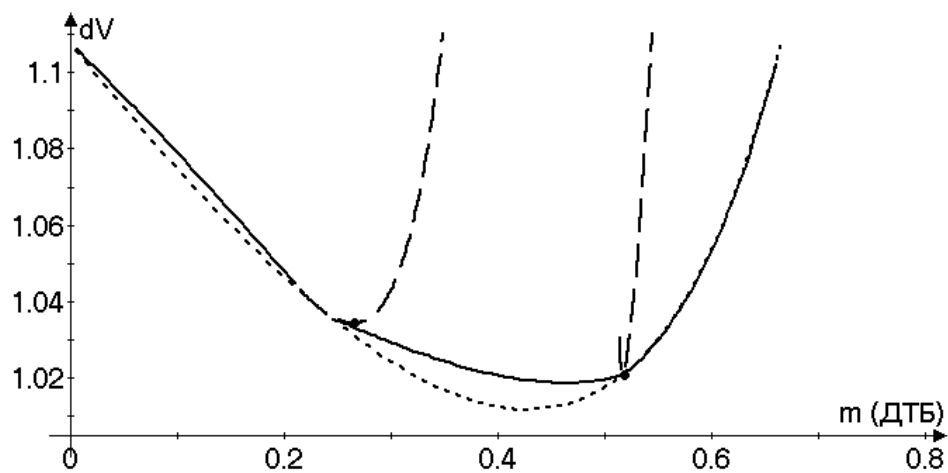


Рис. 8.44: Двухвитковый перелет КА с ДТБ на ГПО. Зависимость величины импульса довыведения от массы топлива в ДТБ при $n = 0.2$, $m_{\text{п}} = 0.30$ и $\alpha = 0,05$.

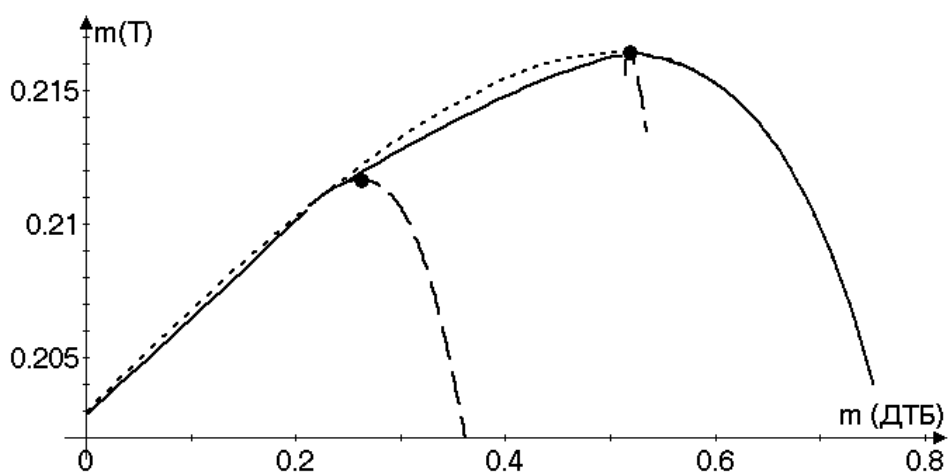


Рис. 8.45: Двухвитковый перелет КА с ДТБ на ГСО. Зависимость полезной массы от массы топлива в ДТБ при $n = 0.2$ и $\alpha = 0,05$.

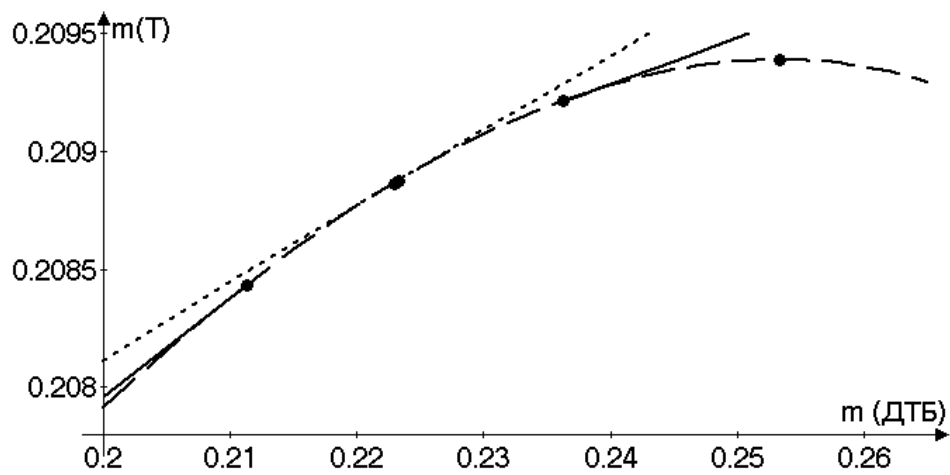


Рис. 8.46: Увеличенный участок рисунка 8.41 (левая часть)

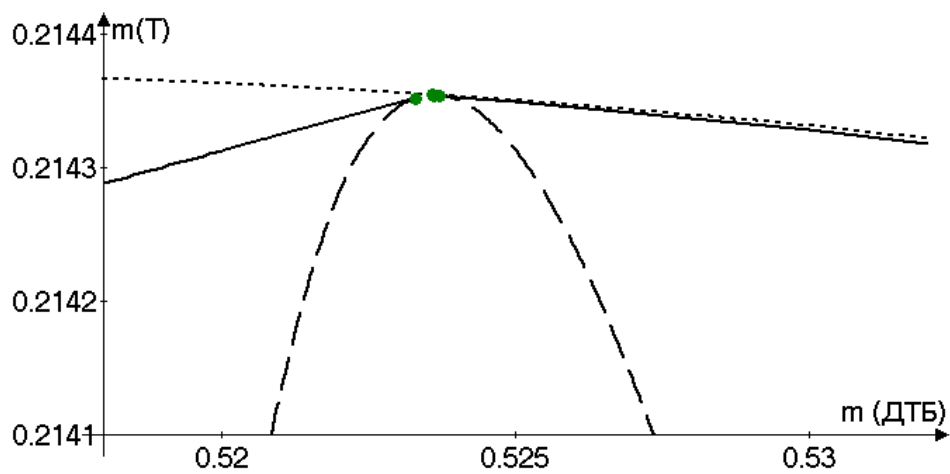


Рис. 8.47: Увеличенный участок рисунка 8.41 (правая часть)

В таблице 8.1 приведены значения наилучшей массы топлива в ДТБ, соответствующей рассматриваемым перелетам КА с ДТБ на ГПО и ГСО при продолжительности сброса ДТБ 1 с (наилучшие точки короткого пунктира на рис. 8.22–8.45) и наилучшей массы топлива в ДТБ, соответствующей решению простой модели § 6.2 при наборе параметров, соответствующих рассмотренным экстремалам. Масса топлива определялась соотношением: $m_T = (1 - m_{\text{п}} - \beta \cdot n) / (1 + \alpha)$. Использование второй простой модели при анализе перелетов КА на ГСО обусловлено тем, что, во-первых, в рассмотренных перелетах затруднительно аккуратно определить требуемую характеристическую скорость маневра и, во-вторых, взаимностью решений первой и второй простых моделей.

При анализе результатов табл. 8.1 следует обратить внимание на то, что: — значения, полученные, в результате анализа простой модели отличаются от значений, полученных в результате решения краевых задач принципа максимума, не более чем на 10^{-2} , — отличие значений для одновитковых экстремалей больше соответствующего отличия значений для двухвитковых экстремалей (см. строки 5 и 6, 7 и 8, 9 и 10, 11 и 12 табл. 8.1), — отличие значений для тяговооруженности, близкой к "наилучшей" ($n = 0,35$ для одновитковых и $n = 0,2$ для двухвитковых экстремалей) значительно меньше отличия значений для тяговооруженности $n = 0,1$.

На рис. 8.48, 8.49 представлены зависимости полезной массы (2.19) на рассматриваемых траекториях перелета двухступенчатого КА от массы топлива в первой ступени. Проведенные расчеты показали, что для любых заданных тяговооруженностей ступеней существует наилучшая масса первой ступени, соответствующая наибольшей полезной массе. При этом сброс ступени происходит на активном участке. Отличие наилучших масс первой ступени для сброса ступени на активном и на пассивном участке для рассматриваемых перелетов КА на ГСО оказалось малым.

Таблица 8.1: Сравнение наилучших масс топлива в ДТБ при рассмотренных перелетах КА с ДТБ на ГПО и ГСО (сброс ДТБ за 1 с) и оценках из второй модели

Траектория	m(в ДТБ)	
	сброс за 1 с	Простая модель
ГПО, 2 витка, $\alpha = 0.02$, $n = 0.10$, $m_{\text{II}} = 0.40$	0.3561037	0.3595631
ГПО, 2 витка, $\alpha = 0.05$, $n = 0.10$, $m_{\text{II}} = 0.40$	0.3469927	0.3492899
ГПО, 2 витка, $\alpha = 0.08$, $n = 0.10$, $m_{\text{II}} = 0.40$	0.3381346	0.3395874
ГПО, 2 витка, $\alpha = 0.05$, $n = 0.20$, $m_{\text{II}} = 0.40$	0.3477060	0.3485384
ГПО, 1 виток, $\alpha = 0.02$, $n = 0.10$, $m_{\text{II}} = 0.30$	0.4349503	0.4425150
ГПО, 2 витка, $\alpha = 0.02$, $n = 0.10$, $m_{\text{II}} = 0.30$	0.4382625	0.4425150
ГПО, 1 виток, $\alpha = 0.05$, $n = 0.10$, $m_{\text{II}} = 0.30$	0.4207763	0.4298717
ГПО, 2 витка, $\alpha = 0.05$, $n = 0.10$, $m_{\text{II}} = 0.30$	0.4250843	0.4298717
ГПО, 1 виток, $\alpha = 0.08$, $n = 0.10$, $m_{\text{II}} = 0.30$	0.4083868	0.4179309
ГПО, 2 витка, $\alpha = 0.08$, $n = 0.10$, $m_{\text{II}} = 0.30$	0.4131864	0.4179309
ГПО, 1 виток, $\alpha = 0.05$, $n = 0.35$, $m_{\text{II}} = 0.30$	0.4269945	0.4277063
ГПО, 2 витка, $\alpha = 0.05$, $n = 0.20$, $m_{\text{II}} = 0.30$	0.4277548	0.4290045
ГПО, 1 виток, $\alpha = 0.02$, $n = 0.10$, $m_{\text{II}} = 0.25$	0.4857250	0.4892167
ГПО, 1 виток, $\alpha = 0.05$, $n = 0.10$, $m_{\text{II}} = 0.25$	0.4693435	0.4752390
ГПО, 1 виток, $\alpha = 0.08$, $n = 0.10$, $m_{\text{II}} = 0.25$	0.4549157	0.4620380
ГПО, 1 виток, $\alpha = 0.05$, $n = 0.35$, $m_{\text{II}} = 0.25$	0.4726252	0.4728687
ГСО, 1 виток, $\alpha = 0.02$, $n = 0.10$	0.5244039	0.5235511
ГСО, 1 виток, $\alpha = 0.05$, $n = 0.10$	0.5232986	0.5235034
ГСО, 1 виток, $\alpha = 0.08$, $n = 0.10$	0.5230049	0.5234559
ГСО, 1 виток, $\alpha = 0.05$, $n = 0.35$	0.5088099	0.5084923
ГСО, 2 витка, $\alpha = 0.02$, $n = 0.10$	0.5107540	0.5104075
ГСО, 2 витка, $\alpha = 0.05$, $n = 0.10$	0.5099386	0.5103970
ГСО, 2 витка, $\alpha = 0.08$, $n = 0.10$	0.5097535	0.5103866
ГСО, 2 витка, $\alpha = 0.05$, $n = 0.20$	0.5073337	0.5072913

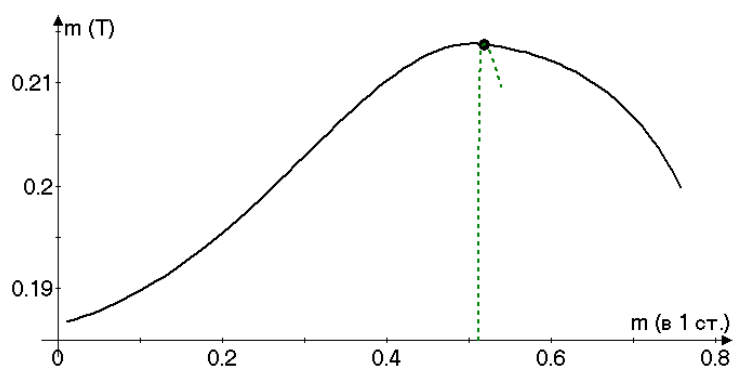


Рис. 8.48: Одновитковый перелет двухступенчатого КА на ГСО. Зависимость величины полезной массы от массы топлива в первой ступени при $n_1 = 0,4$, $n_2 = 0,1$ и $\alpha = 0,05$.

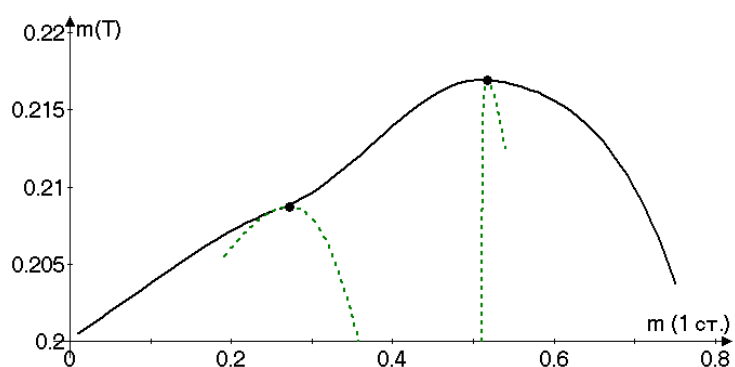


Рис. 8.49: Двухвитковый перелет двухступенчатого КА на ГСО. Зависимость величины полезной массы от массы топлива в первой ступени при $n_1 = 0,4$, $n_2 = 0,1$ и $\alpha = 0,05$.

8.2 “Простые” траектории и их сравнение с экстремалами

Построение решения задачи, соответствующей третьей упрощенной модели, никаких затруднений не вызвало. Решение задачи, получившейся в четвертой упрощенной модели, потребовало несколько бóльших временных затрат, что связано с бóльшим числом свободных переменных.

В табл. 8.2 приведены результаты сравнения траекторий перелета третьей простой модели, четвертой простой модели и экстремалей Понтрягина двухвитковых перелетов КА с ДТБ на ГСО и ГПО, соответствующих задаче максимизации полезной массы при не ограниченном заранее времени перелета T , наилучшей массе топлива ДТБ, при тяговооруженности $n = 0, 1$, удельной тяге $P_{уд} = 350$ с, коэффициентах $\alpha = 0,05$, $\beta = 0$. При этом сброс ДТБ происходит на первом пассивном участке (при ΔV_A от 1.4 км/с до 2 км/с), на втором активном участке (при ΔV_A от 0.8 км/с до 1.3 км/с) и на втором (главном) пассивном участке (при ΔV_A от 0 км/с до 0.7 км/с). Наилучший сброс ДТБ на первом и последнем активных участках никакой скорости довыведения не соответствует (для сравнения см. рис. 8.35, 8.38, 8.41).

Отсутствие в табл. 8.2 данных для перелета в третьей простой модели на ГСО связано с невозможностью гарантировать выведение КА на круговую орбиту.

Таблица 8.2: Сравнение экстремалей и траекторий третьей и четвертой простых моделей

	$T, \text{ с}$	m_{Π}	$i_T, ^\circ$	$h_{\Pi}, \text{ км}$
ГСО экстр.	28847.3	0.214927977		
реш. 4	28837.9	0.214893872		
$\Delta V_A = 0.1$ км/с экстр.	28838.9	0.221980	0.991	31417.586
реш. 3	28968.3	0.213886	1.025	31473.406
реш. 4	29048.5	0.221932	0.990	31416.186

	$T, \text{с}$	m_{Π}	$i_T, ^\circ$	$h_{\Pi}, \text{км}$
$\Delta V_A = 0.2 \text{ км/с}$ экстр.	28830.1	0.229241	2.039	27624.991
реш. 3	28943.2	0.221393	2.098	27709.895
реш. 4	29024.3	0.229194	2.038	27624.094
$\Delta V_A = 0.3 \text{ км/с}$ экстр.	28820.9	0.236716	3.149	24308.827
реш. 3	28917.5	0.229102	3.219	24398.240
реш. 4	28999.4	0.236670	3.152	24311.813
$\Delta V_A = 0.4 \text{ км/с}$ экстр.	28811.2	0.244413	4.327	21391.896
реш. 3	28891.1	0.237046	4.577	21693.479
реш. 4	28973.8	0.244367	4.329	21394.418
$\Delta V_A = 0.5 \text{ км/с}$ экстр.	28801.0	0.252337	5.577	18813.216
реш. 3	28863.9	0.245210	5.853	19116.404
реш. 4	28947.3	0.252292	5.578	18814.643
$\Delta V_A = 0.6 \text{ км/с}$ экстр.	28790.3	0.260495	6.904	16524.011
реш. 3	28836.0	0.253579	7.532	17188.699
реш. 4	28920.1	0.260449	6.898	16518.178
$\Delta V_A = 0.7 \text{ км/с}$ экстр.	28779.2	0.268894	8.315	14484.826
реш. 3	28807.2	0.262211	9.020	15178.039
реш. 4	28892.2	0.268847	8.310	14480.218
$\Delta V_A = 0.8 \text{ км/с}$ экстр.	28789.2	0.277545	9.819	12665.385
реш. 3	28870.0	0.271136	10.110	12917.840
реш. 4	28928.4	0.277494	9.809	12657.295
$\Delta V_A = 0.9 \text{ км/с}$ экстр.	28819.3	0.286467	11.421	11038.722
реш. 3	28822.0	0.280213	11.258	10912.890
реш. 4	28898.7	0.286424	11.417	11035.761
$\Delta V_A = 1 \text{ км/с}$ экстр.	28863.3	0.295674	13.127	9581.765
реш. 3	28839.2	0.289696	13.464	9843.097
реш. 4	28867.9	0.295634	13.129	9583.444
$\Delta V_A = 1.1 \text{ км/с}$ экстр.	28940.4	0.305179	14.945	8276.248
реш. 3	28762.9	0.299392	15.211	8471.849

	$T, \text{с}$	m_{Π}	$i_T, ^\circ$	$h_{\Pi}, \text{км}$
реш. 4	28836.3	0.305140	14.949	8279.086
$\Delta V_A = 1.2 \text{ км/с}$ экстр.	29474.4	0.315021	16.874	7100.562
реш. 3	28836.1	0.309383	17.263	7379.685
реш. 4	28805.6	0.314960	16.869	7097.173
$\Delta V_A = 1.3 \text{ км/с}$ экстр.	29662.5	0.325327	18.907	6034.191
реш. 3	28914.8	0.319685	19.286	6297.406
реш. 4	28818.6	0.325148	18.929	6048.710
$\Delta V_A = 1.4 \text{ км/с}$ экстр.	29558.3	0.335978	21.089	5091.543
реш. 3	29197.2	0.330432	21.362	5275.480
реш. 4	28854.2	0.335791	21.106	5102.313
$\Delta V_A = 1.5 \text{ км/с}$ экстр.	29452.1	0.346948	23.409	4251.028
реш. 3	29398.8	0.341564	23.656	4415.625
реш. 4	29156.3	0.346873	23.400	4244.742
$\Delta V_A = 1.6 \text{ км/с}$ экстр.	29349.1	0.358247	25.872	3504.326
реш. 3	29322.2	0.352983	26.082	3644.932
реш. 4	29118.7	0.358179	25.863	3498.572
$\Delta V_A = 1.7 \text{ км/с}$ экстр.	29249.2	0.369884	28.480	2844.629
реш. 3	29283.0	0.364704	28.676	2978.452
реш. 4	29079.9	0.369819	28.472	2839.514
$\Delta V_A = 1.8 \text{ км/с}$ экстр.	29152.1	0.381868	31.235	2266.152
реш. 3	29215.9	0.376735	31.406	2386.718
реш. 4	29039.9	0.381804	31.229	2261.805
$\Delta V_A = 1.9 \text{ км/с}$ экстр.	29057.5	0.394211	34.137	1763.996
реш. 3	29112.5	0.389085	34.297	1883.910
реш. 4	28898.7	0.394146	34.129	1758.165
$\Delta V_A = 2 \text{ км/с}$ экстр.	28965.3	0.406922	37.181	1334.038
реш. 3	28981.6	0.401767	37.321	1448.949
реш. 4	28856.3	0.406855	37.175	1329.094

Отметим, что полезная масса КА на решениях рассмотренных задач ока-

зывается достаточно близкой к полезной массе КА на экстремалиях Понтрягина: для четвертой упрощенной модели она отличается в 4–5 знаке, а для третьей упрощенной модели — в третьем. Итоговые орбиты выведения также оказываются близкими. В целом несколько более сложная четвертая модель приближает экстремали Понтрягина лучше по сравнению с более простой третьей моделью.

Немонотонность времени перелета КА в зависимости от величины ΔV_A , по-видимому, связана с изменением протяженности первого активного участка и изменением времени движения по переходной орбите при определении наилучшего распределения топлива по бакам. В задаче оптимизации перелета одноступенчатого КА такой немонотонности не наблюдается.

8.2.1 Направление вектора тяги

На рис. 8.50–8.57 представлены зависимости различных углов, описывающих вектор направления тяги на траектории перелета.

В качестве примера рассматривается выведение КА на ГСО со сбросом ДТБ на главном пассивном участке. Начальная тяговооруженность КА для приведенной траектории $n = 0,1$, удельная тяга $P_{уд} = 350$ с, высота и наклон начальной орбиты $h_0 = 200$ км, $i_0 = 0,9$ рад, весовые коэффициенты $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.01$, при не ограниченном заранее времени перелета ($T = 28847.301$ с, $m_{п} = 0.214927977$). (Про задачи с неактивным ограничением времени перелета — см. описание условий (2.5) и (4.1)).

Сплошной линией на этих рисунках представлены зависимости, соответствующие экстремали Понтрягина, короткий пунктир соответствует траектории четвертой простой модели.

Приводятся углы:

θ — ориентированный угол между вектором тяги и плоскостью геостационарной орбиты Zx , отсчитываемый от плоскости экватора в сторону положительного направления оси Zz (рис. 8.50, слева),

ϕ — ориентированный угол между проекцией вектора тяги на плоскость геостационара и осью Z_x , отсчитываемый от оси Z_x против часовой стрелки (в сторону оси Z_y) (рис. 8.50, справа),

θ_n — ориентированный угол между вектором тяги и плоскостью начальной орбиты (рис. 8.51, слева),

ϕ_n — ориентированный угол между проекцией вектора тяги на плоскость начальной орбиты и осью Z_x , отсчитываемого от оси Z_x по направлению движения (рис. 8.51, справа),

θ_m — ориентированный угол между вектором тяги и плоскостью мгновенного движения КА (\vec{r}, \vec{v}) (рис. 8.52, слева),

ϕ_m — ориентированный угол между проекцией вектора тяги на плоскость (\vec{r}, \vec{v}) , отсчитывается от вектора \vec{r} в сторону вектора \vec{v} (рис. 8.52, справа),

ξ_p — ориентированный угол проекции вектора тяги на плоскость (\vec{r}, \vec{v}) отсчитывается от вектора \vec{v} в сторону вектора \vec{r} (рис. 8.52, слева),

ξ — не ориентированный угол между вектором тяги и вектором скорости (рис. 8.52, справа).

Углы θ и ϕ используются в четвертой простой модели при определении направления вектора тяги. Как и следовало ожидать, для четвертой простой модели они являются линейными функциями времени.

На рис. 8.54–8.57 для наглядности представления результатов на первых двух участках приводятся зависимости перечисленных углов от ориентированного угла ϵ , отсчитываемого в плоскости начальной орбиты от линии узлов (оси Z_x) до проекции радиус–вектора КА на эту плоскость (положительное направление против часовой стрелки — по скорости КА на орбите). На третьем активном участке наклонение орбиты сильно меняется и такое представление результатов не оказывается наглядным.

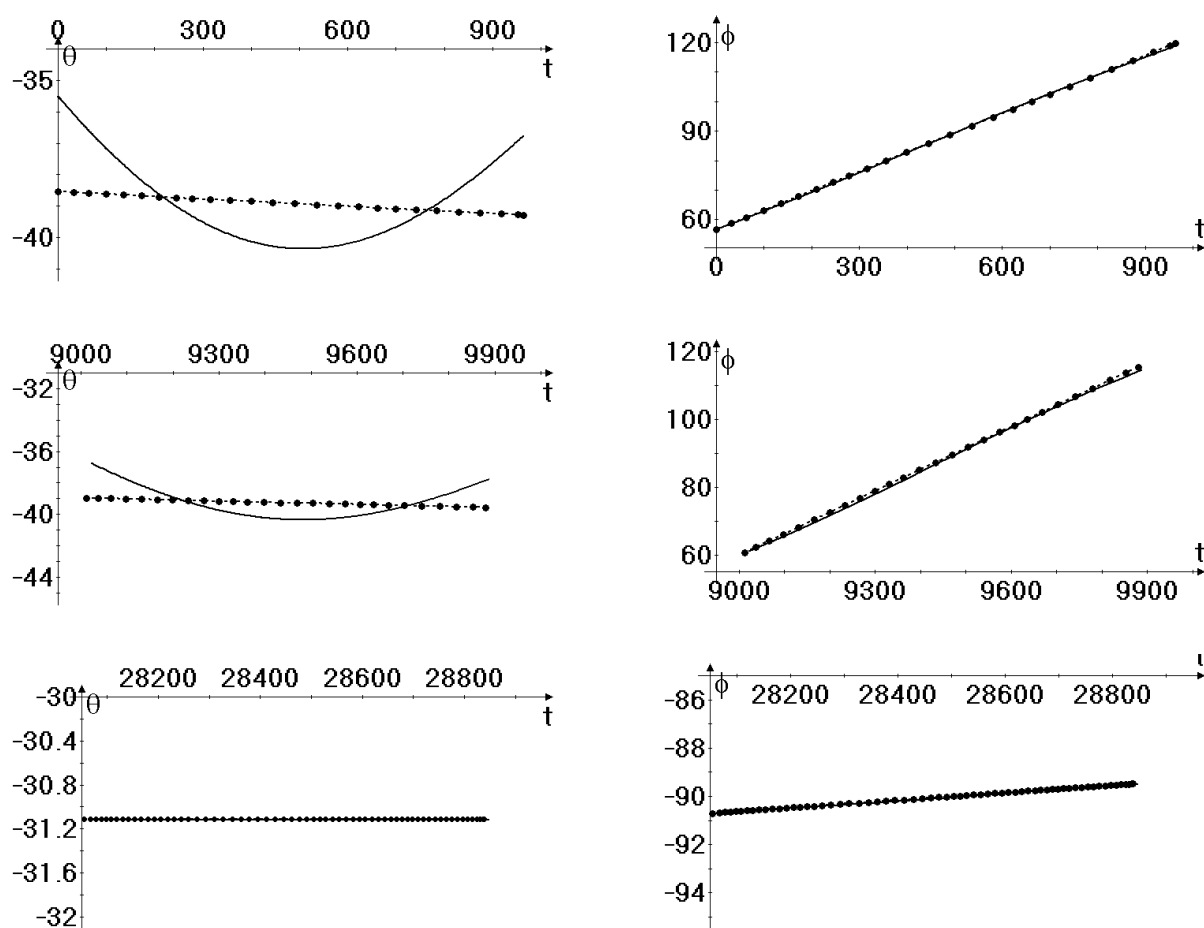


Рис. 8.50: Углы θ (между вектором тяги и плоскостью геостационара) и ϕ (между проекцией вектора тяги на плоскость геостационара и осью Z_x) на первом, втором и третьем активном участках.

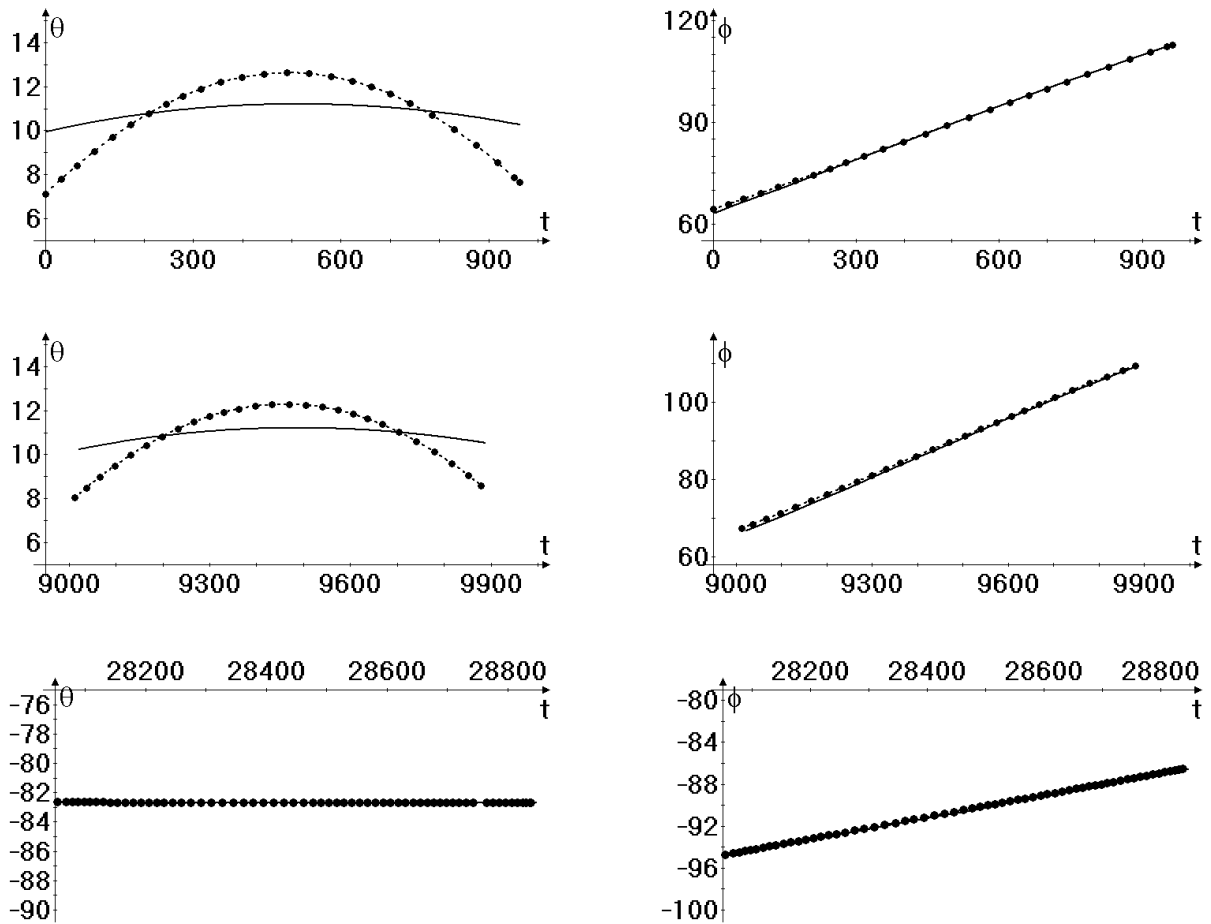


Рис. 8.51: Углы θ_n (между вектором тяги и плоскостью начальной орбиты) и ϕ_n (между проекцией вектора тяги на плоскость начальной орбиты и осью Zx) на первом, втором и третьем активном участках.

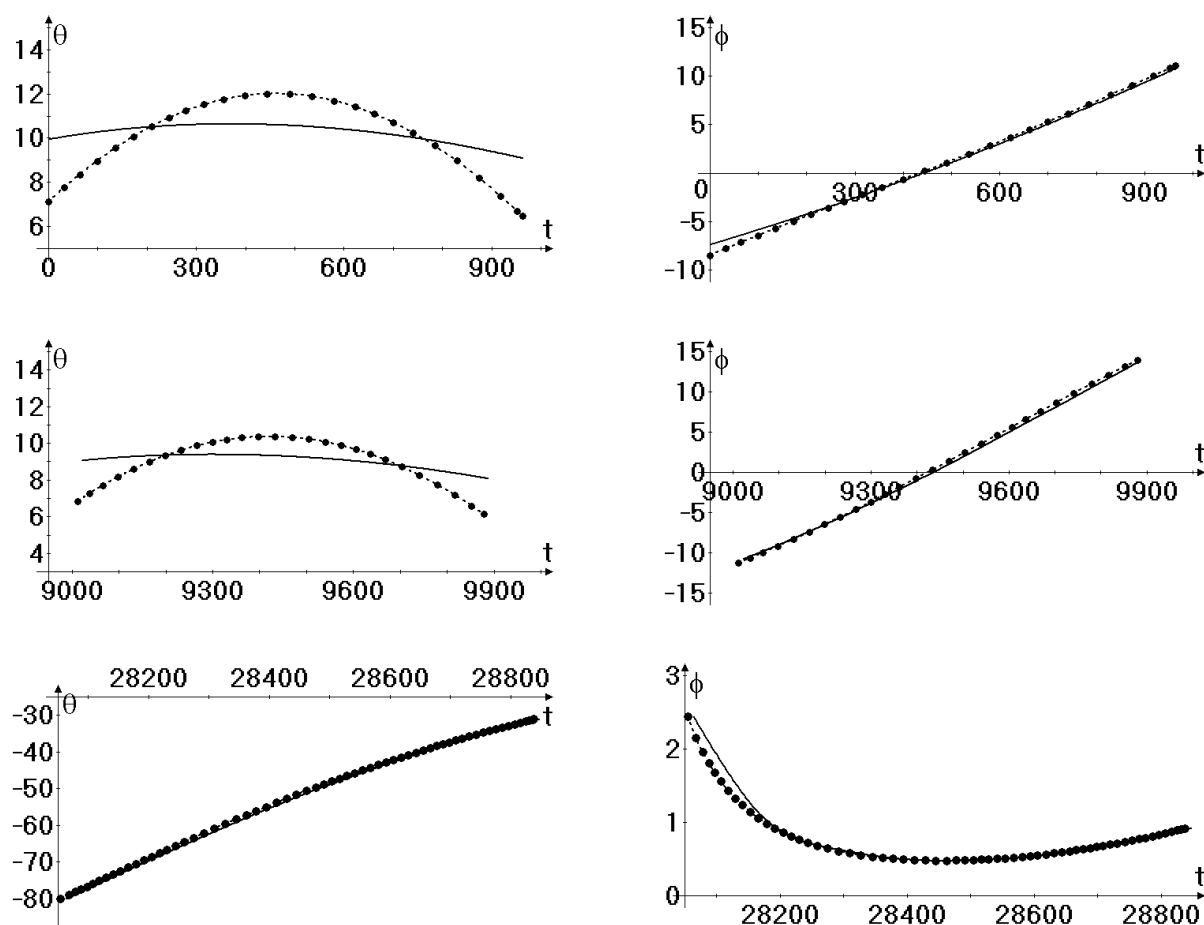


Рис. 8.52: Углы θ_m (между вектором тяги и плоскостью мгновенного движения КА (\vec{r}, \vec{v})) и ϕ_m (между проекцией вектора тяги на плоскость (\vec{r}, \vec{v}) , отсчитывается от вектора \vec{r} в сторону вектора \vec{v}) на первом, втором и третьем активном участках.

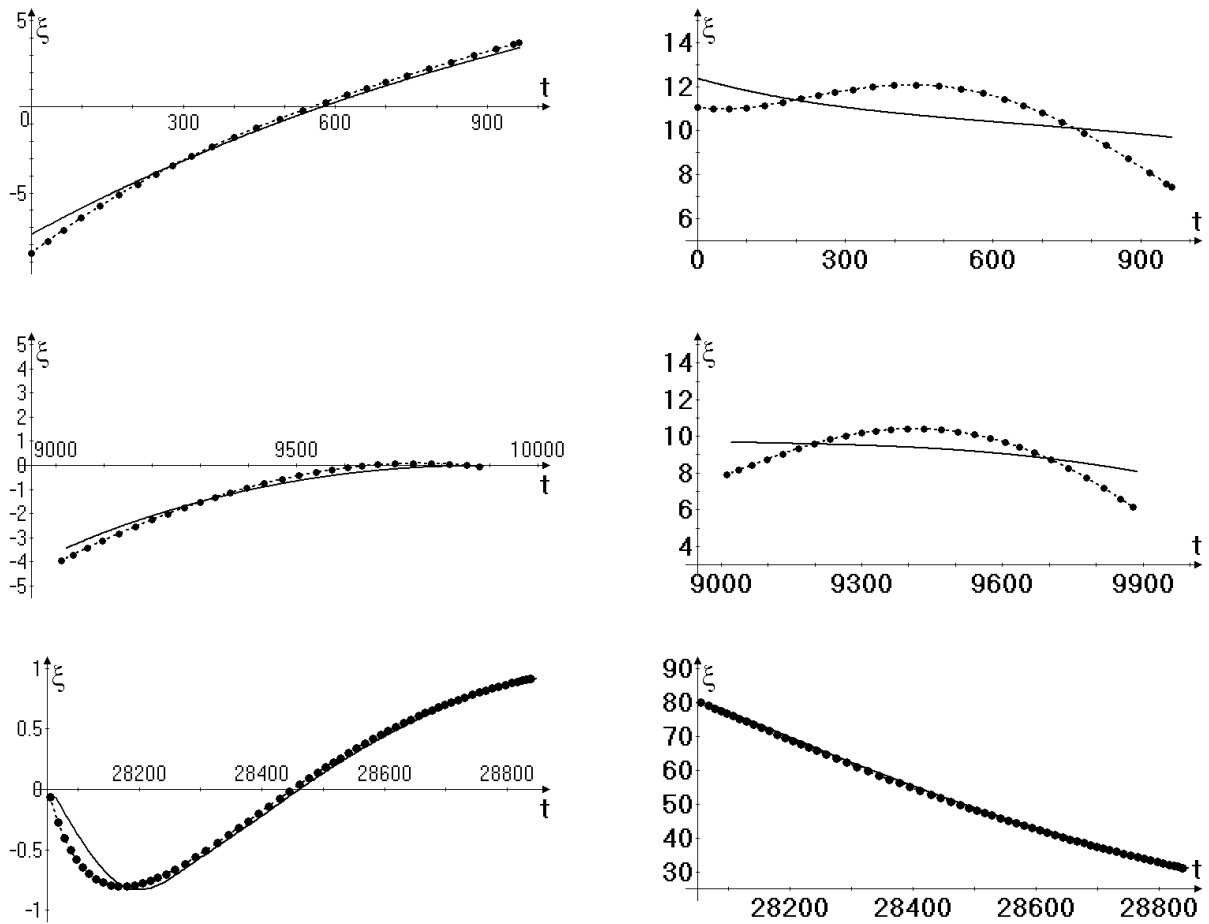


Рис. 8.53: Углы ξ_p (слева, проекции вектора тяги на плоскость (\vec{r}, \vec{v}) отсчитывается от вектора \vec{v} в сторону вектора \vec{r}) и ξ (справа, между вектором тяги и вектором скорости) на первом, втором и третьем активном участках.

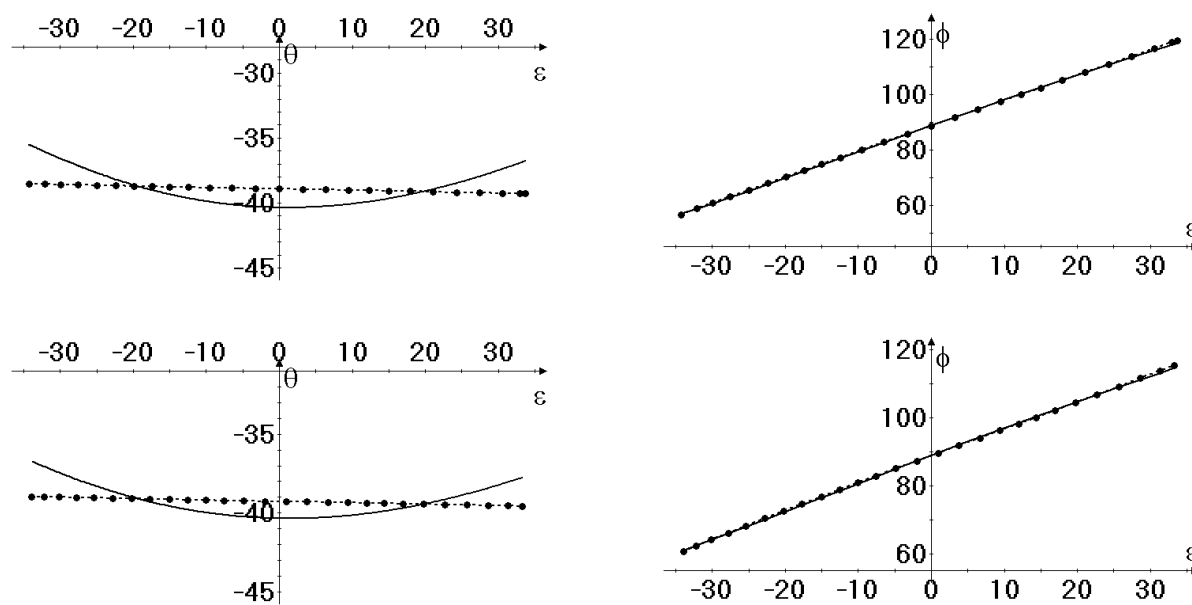


Рис. 8.54: Зависимости углов θ и ϕ от угла ϵ на первом и втором активном участках.

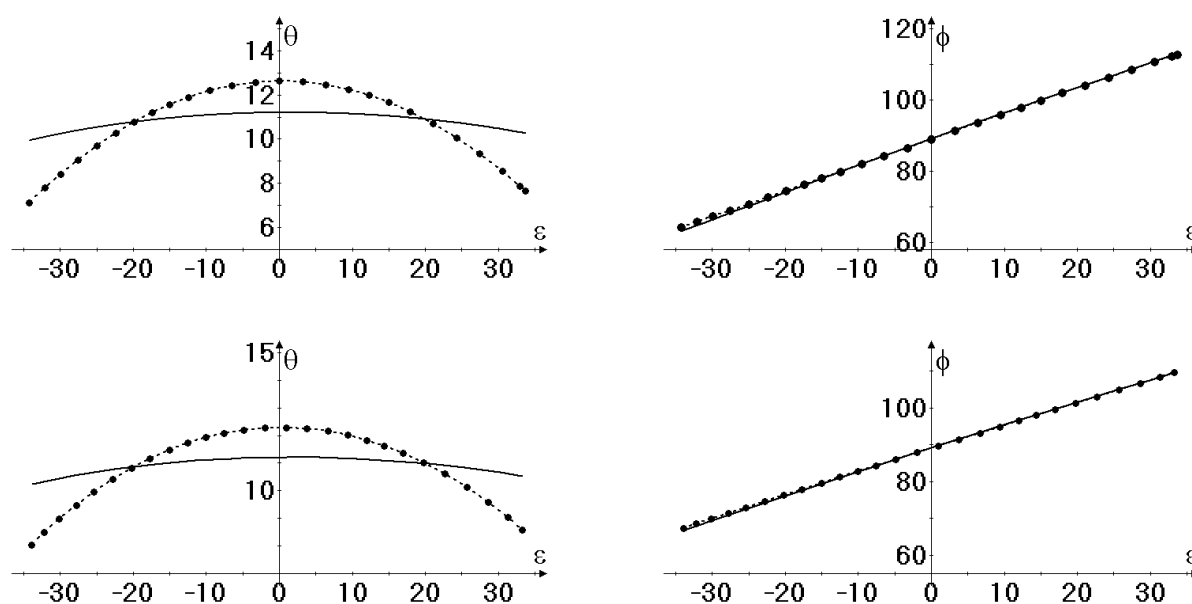


Рис. 8.55: Зависимости углов θ_n и ϕ_n от угла ϵ на первом и втором активном участках.

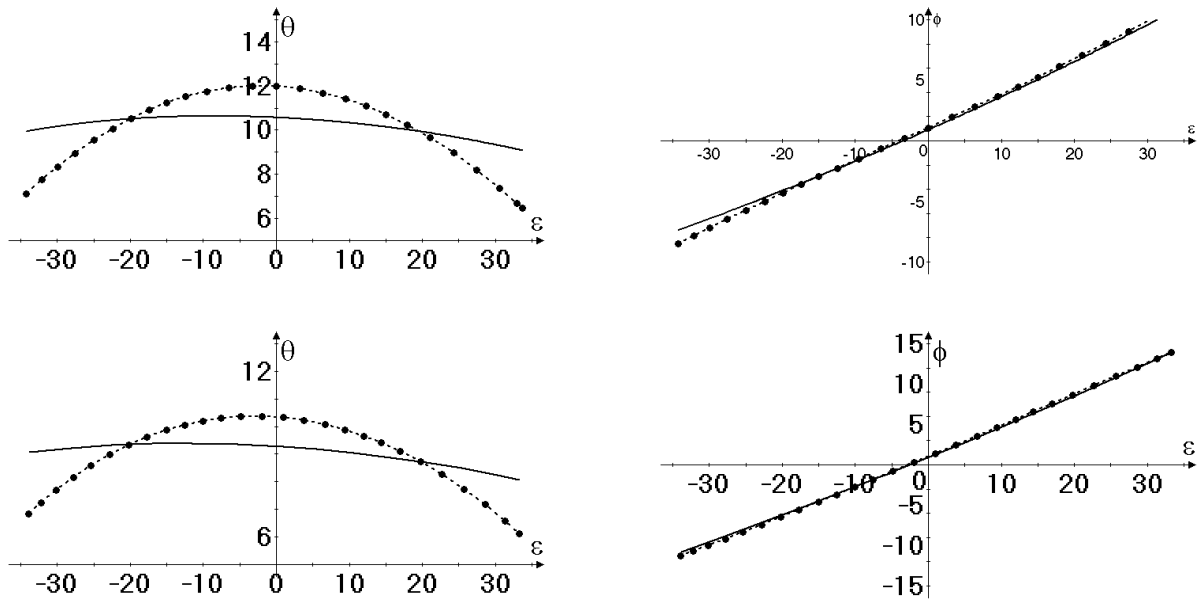


Рис. 8.56: Зависимости углов θ_m и ϕ_m от угла ϵ на первом и втором активном участках.

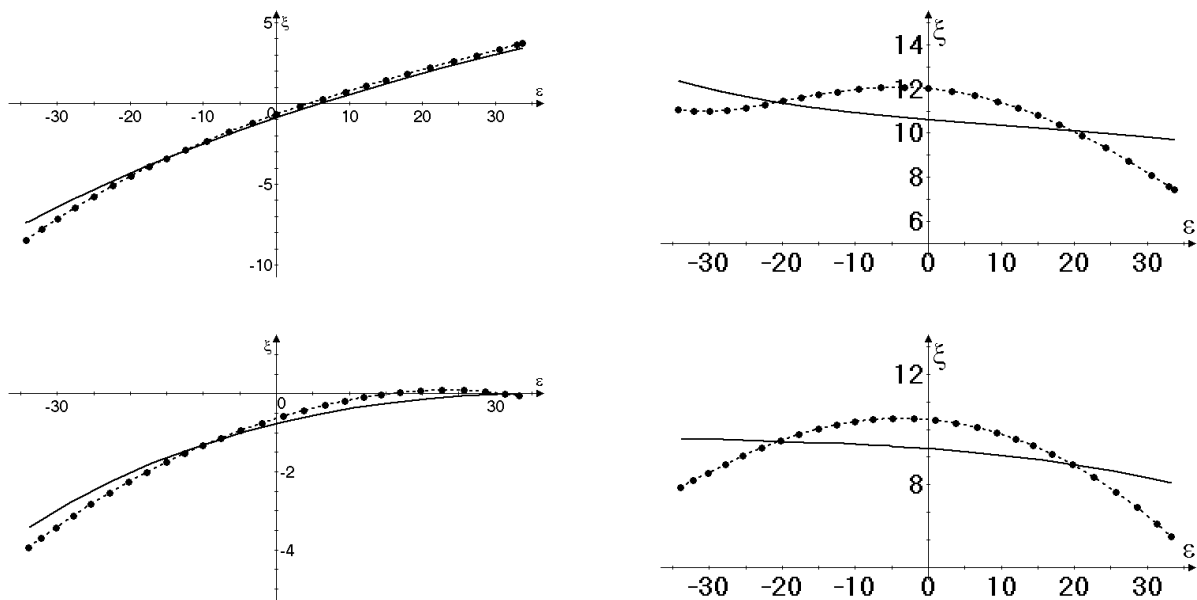


Рис. 8.57: Зависимости углов ξ_p (слева) и ξ (справа) на первом и втором активном участках.

8.2.2 Изменение элементов орбиты

На рис. 8.58–8.72 представлены зависимости величин a , e , i , r_a , r_p на траектории выведения КА на ГСО со сбросом ДТБ на главном пассивном участке (использовавшейся в предыдущем параграфе). Сплошной линией на этих рисунках представлены зависимости, соответствующие экстремали Понтрягина, короткий пунктир с выделенными точками соответствует траектории четвертой простой модели. Основное свойство всех этих графиков — они близки, что связано с близостью использовавшихся на экстремалиях Понтрягина и траекториях четвертой простой модели управлений. Горизонтальное смещение графиков друг относительно друга на втором и третьем активном участках связано с немного отличающимися переходными орбитами и, как следствие, неодинаковыми временами начала активных участков.

Как и следовало ожидать, на первых двух перицентрических участках радиус перицентра (рис. 8.70, 8.71) и наклон орбиты (рис. 8.64, 8.65) практически постоянны, их основное увеличение приходится на апоцентрический участок (рис. 8.72, 8.66); Радиус апоцентра напротив изменяется в основном на перицентрических участках (рис. 8.67, 8.68), на апоцентрическом участке он практически не изменяется (рис. 8.67). Небольшой залет внутрь начальной орбиты на начальном участке и аналогичный вылет за ГСО на последнем активном участке действительно есть. Они встречались и ранее, например при решении траекторных задач лунных экспедиций [21, 23].

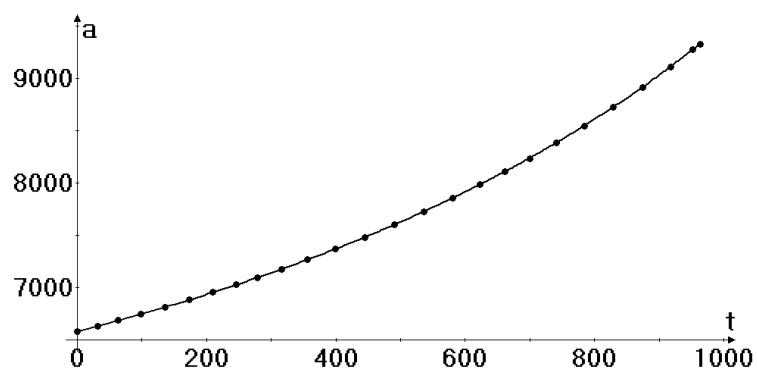


Рис. 8.58: Изменение большой полуоси a на первом активном участке

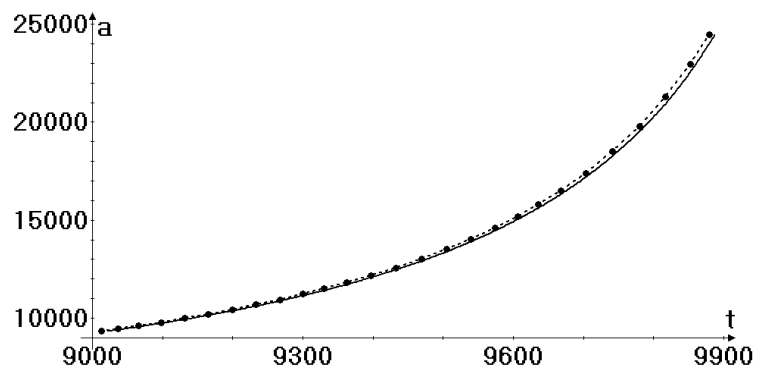


Рис. 8.59: Изменение большой полуоси a на втором активном участке

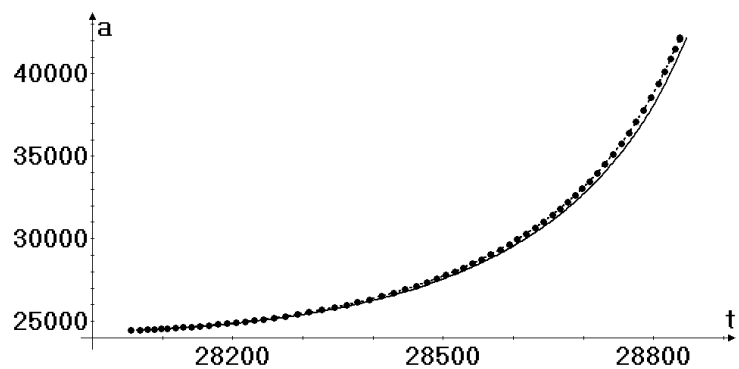


Рис. 8.60: Изменение большой полуоси a на третьем активном участке

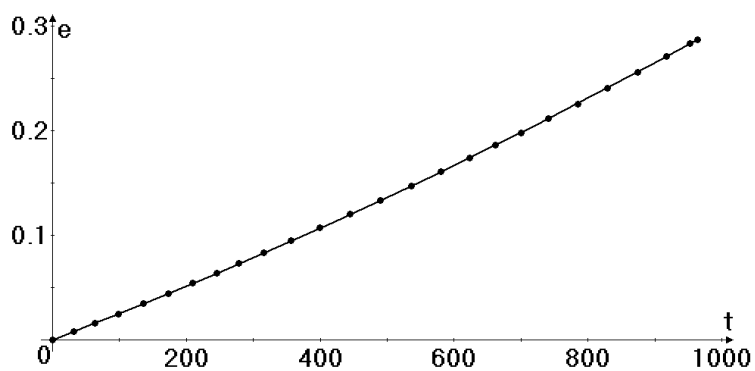


Рис. 8.61: Изменение эксцентриситета e на первом активном участке

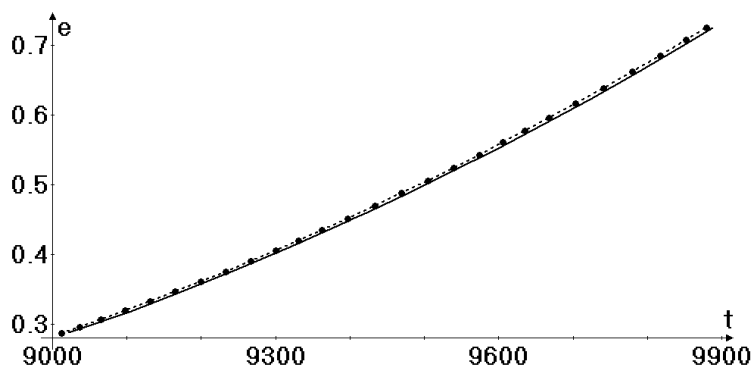


Рис. 8.62: Изменение эксцентриситета e на втором активном участке

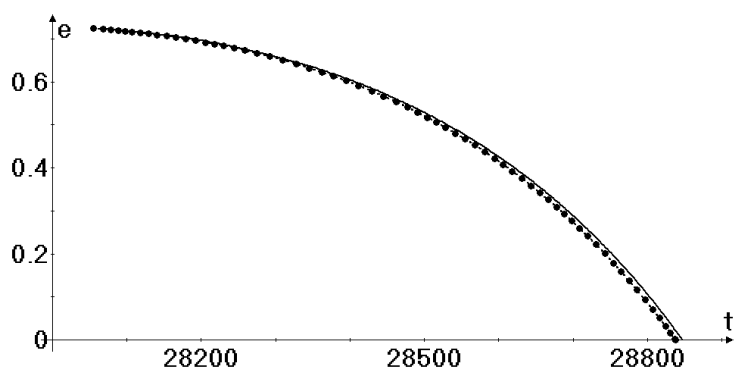


Рис. 8.63: Изменение эксцентриситета e на третьем активном участке

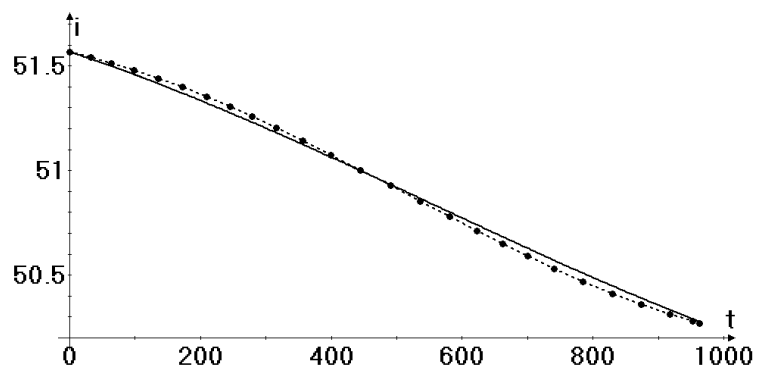


Рис. 8.64: Изменение наклона i на первом активном участке

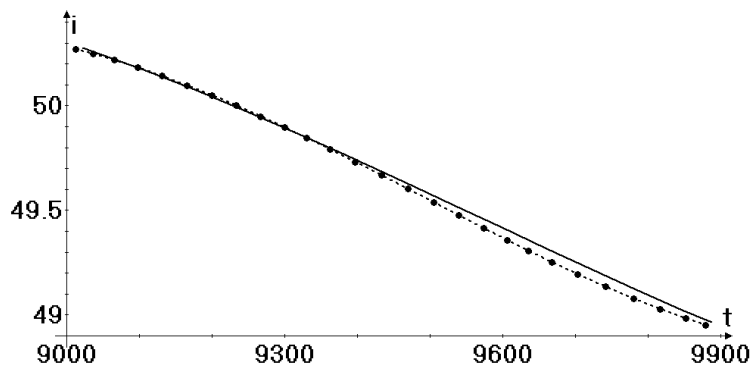


Рис. 8.65: Изменение наклона i на втором активном участке

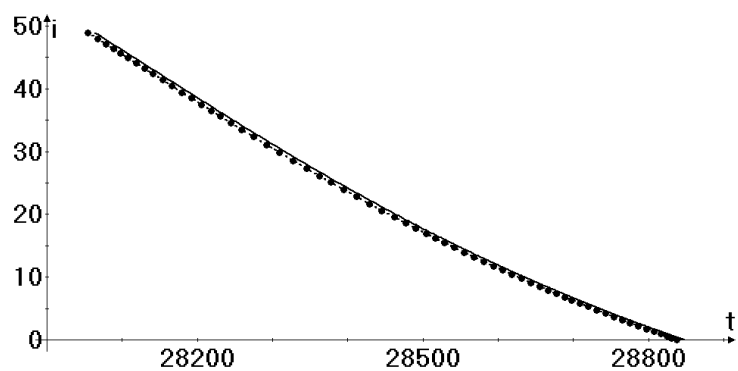


Рис. 8.66: Изменение наклона i на третьем активном участке

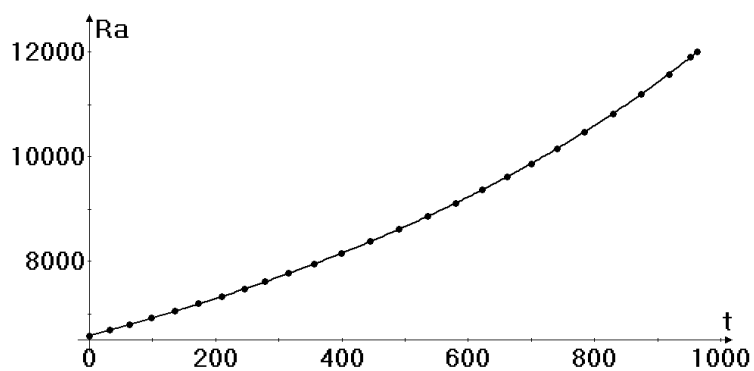


Рис. 8.67: Изменение радиуса апогея r_a на первом активном участке

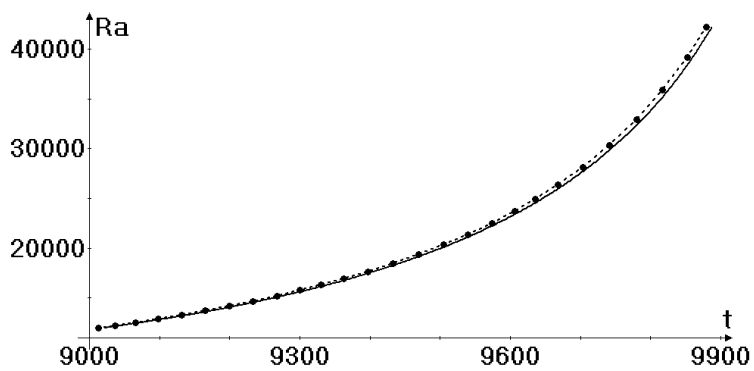


Рис. 8.68: Изменение радиуса апогея r_a на втором активном участке

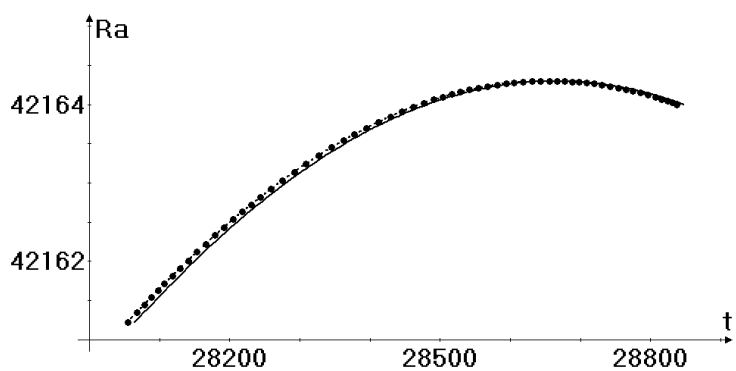


Рис. 8.69: Изменение радиуса апогея r_a на третьем активном участке

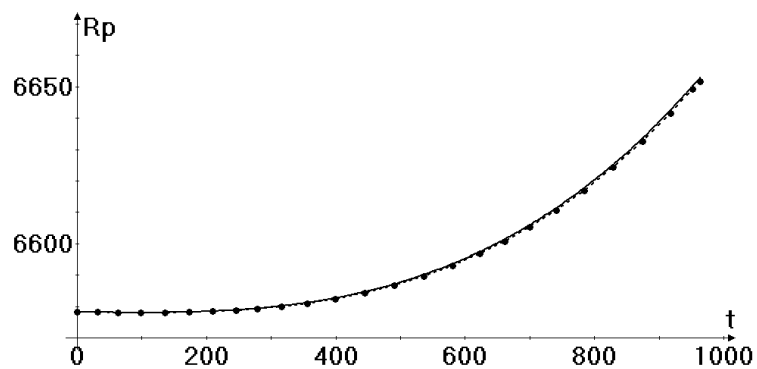


Рис. 8.70: Изменение радиуса перигея r_p на первом активном участке

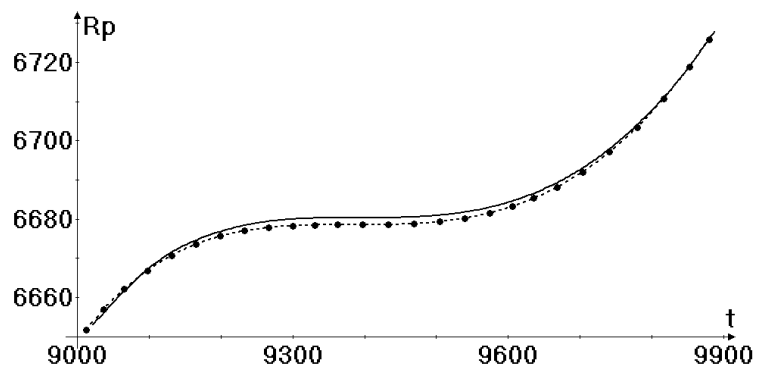


Рис. 8.71: Изменение радиуса перигея r_p на втором активном участке

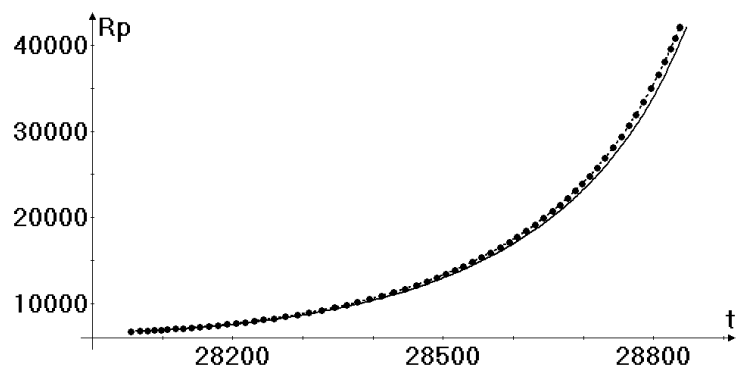


Рис. 8.72: Изменение радиуса перигея r_p на третьем активном участке

Интересным оказывается сравнение решений рассматриваемой задачи и реальных траекторий выведения КА с коммерческими спутниками связи, информация о которых представлена в табл. 8.3 по материалам сайта <http://coop.khrunichev.ru/>. На рис. 8.73 представлены зависимости параметров целевой орбиты (высоты перицентра и наклона) для двухвитковых перелетов КА с ДТБ при не ограниченном заранее времени перелета от величины необходимого импульса довыведения на геостационарную орбиту. На этих же рисунках отмечены соответствующие параметры целевых орбит реальных выведений КА за 5 лет — с 2006 по 2010 годы. Информация о запусках в табл. 8.3 представлена в следующем виде: сначала представлено 10 запусков, параметры которых с высокой точностью попали на расчетные зависимости — на рис. 8.73 они изображены кружочками (всего на рисунках видно 9 точек из-за “слипания” двух отметок для запусков Astra-1m и DirectTV-10). Затем 4 запуска (Nimiq-4, Anik-F3, Арабсат-4В и HotBird-8), параметры которых не попадают на расчетные зависимости наилучших целевых орбит — на рис. 8.73 они изображены квадратиками. Общим свойством этих орбит является меньшее наклонение и меньшая высота перигея. Заканчивают таблицу 5 запусков, которые в сравнение не включались из-за значительного отличия целевых орбит от рассматриваемых в работе: целевые орбиты двух запусков (IntelSat-16 и Thor-5) соответствуют почти круговым орбитам с радиусом несколько большим радиуса геостационара и трех запусков (W7, W2A и Ciel-2) с апоцентром примерно на 200 км ниже геостационара. Включение этих последних строк в таблицу призвано пояснить отличие выбранных параметров целевых орбит для имеющейся четверки. Дело в том, что при реальных выведениях спутник связи с целевой орбиты требуется перевести в заданную точку геостационара (точку стояния) и, таким образом, на выбор целевой орбиты может влиять положение точки стояния и способ перехода к этой точке.

В [29, 51, 52, 68] рассматривалась задача перехода между точками одной и той же круговой орбиты. Общая схема такого перехода имеет следующий вид: сначала осуществляется переход на некоторую вспомогательную орбиту (этот

переход может осуществляться с помощью одного–двух импульсных воздействий), затем происходит пассивное движение по вспомогательной орбите, и, наконец, переход в выбранную точку исходной орбиты. Все такие перелеты можно разделить на два класса: “догоняющие” и “отстающие”. При выведении на околокруговые орбиты большего радиуса (IntelSat-16 и Thor-5), по-видимому, планировалась использовать “отстающие траектории”, остальные перелеты, по-видимому, соответствуют “догоняющим траекториям”. Форма наилучшей вспомогательной орбиты зависит от угловой дальности перехода и числа оборотов и варьируется от эллиптической, соответствующей одноимпульсному переходу на вспомогательную орбиту, до почти круговой. Вероятно с этим и связан выбор целевых орбит с меньшим наклоном, меньшей высотой перицентра и, как следствие, меньшим периодом обращения по целевой орбите при выборе эллиптических целевых орбит запусков из второй половины таблицы.

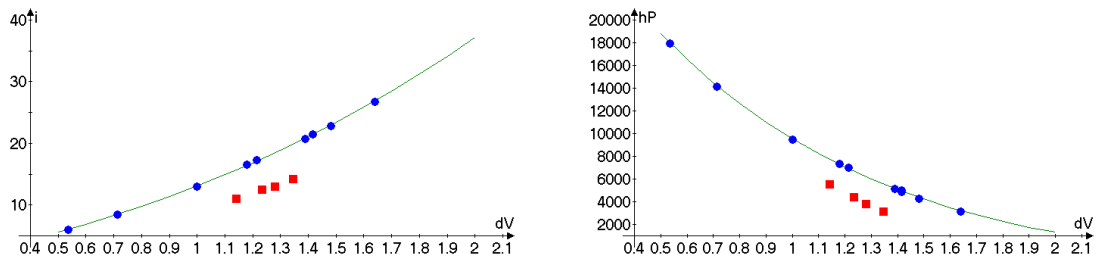


Рис. 8.73: Сравнение параметров целевой орбиты (высоты перицентра и наклона) полученных в результате решения задачи и при реальных выведениях.

Таблица 8.3: Параметры целевой орбиты (номинал) по материалам сайта <http://coop1.khrunichev.ru/>

Аппарат	Дата	m , кг	h_p , км	h_a , км	i
EchoStar-14	20.03.2010	6379	3120.49	35785.87	26°42'11"
DirecTV-12	29.12.2009	5940	5117.81	35785.87	20°42'0"
Nimiq-5	17.09.2009	—	9490.64	35785.86	13°0'16"
AsiaSat-5	11.08.2009	3760	17950.56	35785.86	6°0'18"
ProtoStar II	16.05.2009	3905	14155.51	35785.86	8°24'12"
Astra-1m	05.11.2008	5345	4980.89	35785.73	21°30'2"
Inmarsat-4F3	19.08.2008	5960	4269.31	35785.85	22°48'1"
Sirius-4	18.11.2007	4385	7029.88	35785.87	17°17'40"
DirectTV-10	07.07.2007	5893	4898.51	35785.93	21°23'60"
Measat-3	12.12.2006	4765	7357.69	35785.87	16°30'14"
Nimiq-4	20.09.2008	4850	4400.50	35785.73	12°30'0"
Anik-F3	10.04.2007	4600	5500.30	35785.69	11°0'0"
Арабсат-4В	08.11.2006	3304	3151.60	35786	14°12'2"
HotBird-8	05.08.2006	4875	3800.68	35785.72	12°59'56"
IntelSat-16	12.02.2010	2056.6	37677.72	37677.94	0°0'9"
Thor-5	11.02.2008	1960	36795.23	36795.43	0°0'34"
W7	24.11.2009	5600	4918.86	35595.99	20°54'1"
W2A	03.04.2009	5915	5008.80	35595.96	20°41'9"
Ciel-2	10.12.2008	5625	5590.18	35595.72	19°30'0"

8.3 Замечание о довыведении КА

Итак, рассмотрение экстремалей и траекторий для простых моделей при выведении на целевую орбиту показало их определённую близость к “гомановской” траектории выведения КА на геостационарную орбиту. Следует отметить, что условия (2.8) нахождения апогея целевой орбиты на геостационаре, навязанное используемыми схемами перелёта, фактически вывело из рассмотрения биэллиптические траектории. Между тем при наклоне начальной орбиты $i_0 = 0.9$ рад гомановский перелёт, оптимальный при сравнении с другими двухимпульсными перелётами, при расширении класса сравнения до трёхимпульсных перестаёт быть оптимальным.

Для пояснения полученного утверждения рассмотрим вспомогательную задачу апсидального импульсного перехода с низкой круговой орбиты ИСЗ на ГСО. Такой трёхимпульсный переход состоит из двух эллиптических движений. Первый “разгонный” импульс переводит КА с круговой орбиты ИСЗ радиусом R_0 и наклоном i_0 на первую эллиптическую орбиту с радиусом перигея R_0 , радиусом апогея R_* и наклоном i_1 . Второй импульс “в удаленной точке” переводит КА с первой эллиптической орбиты на вторую с радиусом перигея R_{GSO} , радиусом апогея R_* и наклоном i_2 . Третий “установочный” импульс — со второй эллиптической орбиты на геостационарную. Полезная масса вычисляется по формуле Циолковского и зависит от i_1 , i_2 , R_* :

$$m_{\Pi}(i_1, i_2, R_*) = \exp\left(-\frac{\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3}{c}\right),$$

где ΔV_1 , ΔV_2 , ΔV_3 — величины трёх упомянутых импульсов

$$\Delta V_1 = \sqrt{V_0^2 + V_{1\Pi}^2 - 2V_0V_{1\Pi} \cos(i_1 - i_0)},$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{V_{1a}^2 + V_{2a}^2 - 2V_{1a}V_{2a} \cos(i_2 - i_1)},$$

$$\Delta V_3 = \sqrt{V_{GSO}^2 + V_{2a}^2 - 2V_{GSO}V_{2a} \cos(-i_2)},$$

V_0 , V_{GSO} — круговые скорости на опорной орбите и геостационаре, $V_{1\Pi}$, V_{1a} , $V_{2\Pi}$, V_{2a} — скорости в апоцентрах и перицентрах первой и второй переходных

эллиптических орбит

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0}}, \quad V_{1\Pi} = \sqrt{\frac{2\mu R_*}{R_0(R_0 + R_*)}}, \quad V_{1a} = \sqrt{\frac{2\mu R_0}{R_*(R_0 + R_*)}},$$

$$V_{GSO} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{GSO}}}, \quad V_{2\Pi} = \sqrt{\frac{2\mu R_*}{R_{GSO}(R_{GSO} + R_*)}}, \quad V_{2a} = \sqrt{\frac{2\mu R_{GSO}}{R_*(R_{GSO} + R_*)}}.$$

Оптимальные наклоны i_1 , i_2 первой и второй эллиптических орбит и соответствующая им максимально-возможная полезная масса при таком перелёте определяется численно в результате решения задачи максимизации функции двух переменных без дополнительных ограничений:

$$m_{\Pi}(R_*) = \max_{i_1, i_2} m_{\Pi}(i_1, i_2, R_*).$$

Зависимость обезразмеренной полезной массы m_{Π} от R_* представлена на рис. 8.74. Выделенная левая нижняя точка на этом монотонно-возрастающем графике соответствует гомановскому перелёту.

Проведённое сравнение показывает, что отказ от условия попадания апогея целевой орбиты на геостационар и использование более общих условий формализации понятия характеристической скорости манёвра довыведения может привести (и, как показывает исследование А.И. Проскурякова¹ [69], приводит) к целевым орбитам и траекториям перелёта с бóльшей полезной массой. Следует заметить, что рассмотрение задачи в более общем виде, не смотря на кажущуюся похожесть, оказывается гораздо более громоздким по сравнению с проведённым в работе исследованием и требует использования подходящей к решению “громоздких” задач вычислительной технологии.

¹<http://istina.msu.ru/profile/Proskuryakov>

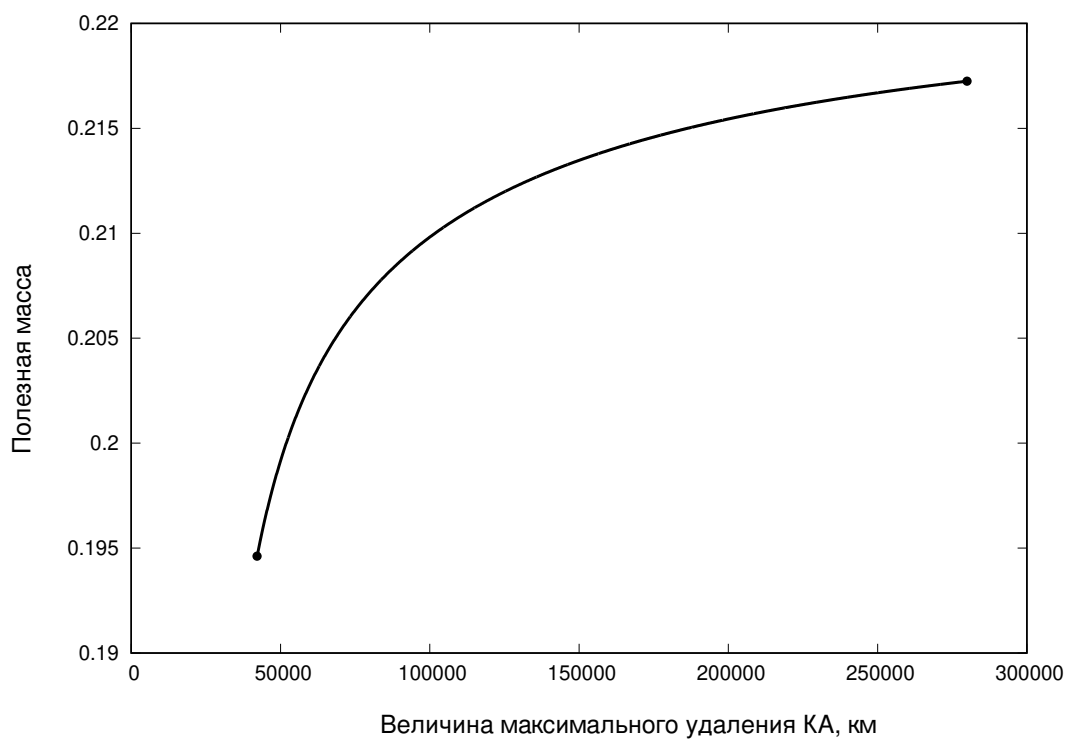


Рис. 8.74: Зависимость полезной массы $m_{\text{П}}$ от радиуса R_* апогея “удалённой точки” для апсидального трёхимпульсного перелёта.

Литература

- [1] *Александров В.В., Бахвалов Н.С., Григорьев К.Г. и др.* Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. М.: МГУ, 1988
- [2] *Александров В.М., Болтянский В.Г., Лемак С.С. и др.* Оптимизация динамики управляемых систем. М.: Изд-во Московского гос. ун-та, 2000.
- [3] *Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984.
- [4] *Алексеев В.М., Тихомиров В.М.* Принцип Лагранжа и задачи оптимального управления. Ч.1. М.: Изд-во Московского гос. ун-та, 1979.
- [5] *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.:Наука, 1979.
- [6] *Ащепков Л.Т.* Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // ПММ. 1981. Т. 45. № 2. С. 215-222.
- [7] *Ащепков Л.Т.* Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск. Сибирское отделение, 1987.
- [8] *Ащепков Л.Т., Белов Б.И., Булатов В.П. и др.* Методы решения задач математического программирования и оптимального управления. Новосибирск. Наука. Сибирское отделение, 1984.

- [9] *Болонкин А.А.* Оптимизация траекторий многоступенчатых ракет. Сборник "Исследования по динамике полета." Вып. 1. м.: Машиностроение, 1965.
- [10] *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980; 1988.
- [11] *Величенко В.В.* О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями // Автоматика и телемеханика. 1966. № 7. С. 20–30.
- [12] *Величенко В.В.* Оптимальное управление составными системами // ДАН СССР. 1967. Т. 176. № 4. С. 754–756.
- [13] *Величенко В.В.* Условия оптимальности в задачах управления с промежуточными условиями // ДАН СССР. 1967. Т. 174. № 5. С. 1011–1013.
- [14] *Веретенников В.Г., Сеницын В.А.* Разрывная вариационная задача оптимизации процессов управления // Прикладная математика и механика, 1972, Т. 36, вып. 2, С. 357–360.
- [15] *Воробьев Л.М.* К теории полета реактивных аппаратов. М.: Машиностроение, 1979.
- [16] *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974.
- [17] *Галеев Э.М.* Курс лекций по вариационному исчислению и оптимальному управлению. М.: Изд-во мех.-мат. ф-та Московского гос. ун-та, 1996.
- [18] *Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Краткий курс теории экстремальных задач. М.: МГУ, 1989.
- [19] *Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Оптимизация: теория, примеры, задачи. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

-
- [20] *Голубев Ю.Ф.* Метод Охоцимского–Понтрягина в теории управления и аналитической механике. // Вестн. Моск. ун-та, сер. 1 Матем. и Механ. Часть 1 2008, № 6, с. 50–56; часть 2 2009, № 1, с. 38–44.
- [21] *Григорьев И.С.* Исследование оптимальных траекторий перелетов космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги между Землей и Луной // Дис... канд. физ.-мат. наук. Московский гос. ун-т, мех.-мат. фак-т, 1996.
- [22] *Григорьев И.С.* Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005.
- [23] *Григорьев И.С., Григорьев К.Г.* Исследование оптимальных пространственных траекторий перелетов космического аппарата с реактивными двигателями большой ограниченной тяги между орбитами искусственных спутников Земли и Луны // Космические исследования. 1997. Т. 35. № 1. С. 52–75.
- [24] *Григорьев И.С., Григорьев К.Г.* К проблеме решения в импульсной постановке задач оптимизации траекторий перелетов космического аппарата с реактивным двигателем большой тяги в произвольном гравитационном поле в вакууме // Космические исследования. 2002. Т. 40. № 1. С. 88–111.
- [25] *Григорьев И.С., Григорьев К.Г.* Об условиях принципа максимума в задачах оптимального управления совокупностью динамических систем и их применении к решению задач оптимального управления движением космических аппаратов // Космические исследования. 2003. Т. 41. № 3. С. 307–331.
- [26] *Григорьев И.С., Григорьев К.Г.* Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач

- оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги. I // Космические исследования. 2007. Т. 45. № 4. С. 358–366.
- [27] *Григорьев И.С., Григорьев К.Г.* Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги. II // Космические исследования. 2007. Т. 45. № 6. С. 553–563.
- [28] *Григорьев И.С., Григорьев К.Г., Заплетин М.П.* Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. Дополнение I. М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007.
- [29] *Григорьев И.С., Григорьев К.Г., Петрикова Ю.Д.* О наискорейших маневрах космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги в гравитационном поле в вакууме. // Космические исследования. 2000. Т. 38. № 2. С. 171–192.
- [30] *Григорьев И.С., Данилина И.А.* Оптимизация межорбитальных пространственных траекторий перелетов космических аппаратов различных конструкций // Четвертые Поляховские чтения: Избранные труды. — ВВМ Санкт-Петербург, 2006. С. 241–250.
- [31] *Григорьев И.С., Данилина И.А.* Оптимизация межорбитальных пространственных траекторий перелета ступенчатых космических аппаратов // Автоматика и Телемеханика. 2007. Т. 68, № 8. С. 86–105.
- [32] *Григорьев И.С., Данилина И.А.* Оптимизация траекторий перелетов космических аппаратов с дополнительным топливным баком. I // Автоматика и Телемеханика. 2017. Т. 78, № 12. С. 131–140.

-
- [33] Григорьев И.С., Данилина И.А. Оптимизация траекторий перелетов космических аппаратов с дополнительным топливным баком. II // Автоматика и Телемеханика. 2018. Т. 79, № 2. С. 135–153.
- [34] Григорьев И.С., Заплетин М.П. Об одной задаче по оптимизации траекторий. // Космические исследования, 2008, т. 46, № 3, с.1–5.
- [35] Григорьев И.С., Рыжов С.Ю. К проблеме решения задач оптимизации многовитковых траекторий межорбитальных перелетов КА // Космические исследования. 2006. Т. 44. № 3.
- [36] Григорьев К.Г. О маневрах космического аппарата при минимальных затратах массы и ограниченном времени. // Космические исследования, 1994, т. 32, № 2, С. 45–60.
- [37] Григорьев К.Г., Заплетин М.П. Численное решение краевых задач принципа максимума в оптимизационных задачах динамики космического полета. // Изв. РАН. Техническая кибернетика, 1993, № 1, С. 91.
- [38] Григорьев К.Г., Заплетин М.П. О вертикальном старте в оптимизационных задачах ракетодинамики. // Космические исследования, 1997, т. 35, № 4, с.363–377.
- [39] Григорьев К.Г., Заплетина Е.В., Заплетин М.П. Оптимальная мягкая посадка космического аппарата на поверхность Луны с круговой орбиты ее спутника. // Космические исследования, 1992, т. 30, № 2, С. 203.
- [40] Григорьев К.Г., Заплетина Е.В., Заплетин М.П. Оптимальное выведение космического аппарата с поверхности Луны в заданную точку круговой орбиты ее искусственного спутника. // Космические исследования, 1992, т. 30, № 3, С. 321.
- [41] Григорьев К.Г., Заплетина Е.В., Заплетин М.П. Оптимальная мягкая посадка космического аппарата с круговой орбиты искусственного

- спутника Луны в заданную точку ее поверхности. // Космические исследования, 1992, т. 30, № 4, С. 483.
- [42] *Григорьев К.Г., Заплетина Е.В., Заплетин М.П.* Оптимальные пространственные перелеты космического аппарата между поверхностью Луны и орбитой ее искусственного спутника. // Космические исследования, 1993, т. 31, № 5, С. 34–52.
- [43] *Григорьев К.Г., Заплетин М.П., Силаев Д.А.* Оптимальное выведение космического аппарата с поверхности Луны на круговую орбиту ее спутника. // Космические исследования, 1991, т. 29, № 5, С. 695.
- [44] *Григорьев К.Г., Федына А.В.* Оптимальное пространственное выведение космического аппарата на геостационарную орбиту с орбиты искусственного спутника Земли. // Изв. РАН Техническая кибернетика, 1993, № 3, С. 116.
- [45] *Григорьев К.Г., Федына А.В.* Оптимальные перелеты космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги между компланарными круговыми орбитами. // Космические исследования, 1995, т. 33, № 4, С. 403–416.
- [46] *Гроздовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В.* Механика космического полета с малой тягой. М.: Наука, 1966.
- [47] *Гроздовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В.* Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975.
- [48] Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Дубошина Г.Н.: Наука, 1976.
- [49] *Зеликин М.И.* Оптимальное управление системами с разрывной правой частью. // В кн: Материалы Всесоюзного симпозиума по оптимальному управлению и дифференциальным играм. Тезисы докладов. 7–11 июля 1976 г. Тбилиси 1977. с. 128–133.

-
- [50] *Зенгер–Бредт И.* Исследование оптимальных условий вертикального полета ракеты с произвольным числом ступеней в поле силы тяжести. // Вопросы ракетной техники. 1954. Выпуск 5(23).
- [51] *Ивашкин В.В., Райкунов Г.Г.* Оптимизация двухимпульсного маневра встречи двух аппаратов на круговой орбите при наличии ограничений // Космич. исслед. 1991. Т.29. №3. С. 352.
- [52] *Ивашкин В.В., Райкунов Г.Г.* Анализ оптимальности двухимпульсных траекторий встречи двух аппаратов на круговой орбите // Космич. исслед. 1993. Т.31. №3. С. 43.
- [53] *Космодемьянский В.А.* Об одном типе вариационных задач. // Прикладная математика и механика. 1963. Т. XXVII. Выпуск 6. С. 1111–1116.
- [54] *Космодемьянский В.А.* К теории ступенчатых ракет // Доклады Академии наук СССР. 1964. Т. 156. № 2. С. 286–289.
- [55] *Космодемьянский В.А.* К расчету составных ракет // Инженерный журнал. 1964. Т. IV. Выпуск 2. С. 219–224.
- [56] *Космодемьянский В.А.* Необходимые условия вариационного исчисления для одной задачи типа Больца–Майера // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. Выпуск 2. С. 368–372.
- [57] *Космодемьянский В.А.* Достаточные условия абсолютного экстремума в одной вариационной задаче типа Больца–Майера // Прикладная математика и механика. 1966. Т. 30. Выпуск 3. С. 599–604.
- [58] *Космодемьянский В.А.* Оптимальный подбор ступеней составной ракеты // Механика твердого тела. 1972. № 1. С. 25–29.
- [59] *Космодемьянский В.А.* К оптимизации параметров составных ракет // Механика твердого тела. 1980. № 5. С. 36–41.

- [60] *Космодемьянский В.А.* К методике расчета оптимальной программы ступенчатой тяги // *Механика твердого тела.* 1987. № 4. С. 17–22.
- [61] *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
- [62] *Медведев В.А., Розова В.Н.* Оптимальное управление ступенчатыми системами // *Автоматика и телемеханика.* 1972. №3 С. 15-23.
- [63] *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971.
- [64] *Моисеенко В.П.* Оптимизация многоступенчатого аппарата // *Труды ЦАГИ.* 1971. Выпуск 1295.
- [65] *Моисеенко В.П.* Об одном подходе к решению разрывных вариационных задач // *Исследование операций,* вып. 4, Москва, ВЦ АН СССР, 1974, С. 146–162.
- [66] *Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // *Успехи физических наук.* 1957. Т. 63. Выпуск 1 а. С. 5–32.
- [67] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.:Наука,1969.
- [68] *Прассинг Дж. Е., Чженхуа Чу.* Оптимальная многоимпульсная программа, обеспечивающая встречу объектов, находящихся на круговых орбитах, за фиксированное время // *Аэрокосмическая техника.* 1986, N8, с. 135.
- [69] *Проскуряков А.И.* Сравнение апсидальных и неапсидальных импульсных траекторий выведения ка на целевую орбиту с учетом сброса ступеней в атмосферу // *XLIII Академические чтения по космонавтике,*

посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019.

- [70] *Рыжов С.Ю.* Проблемы оптимизации многовитковых траекторий перелётов космического аппарата с реактивным двигателем ограниченной тяги. // Дис... канд. физ-мат. наук. Моск. гос. ун. мех-мат. факультет. 2007.
- [71] *Рыжов С.Ю., Григорьев И.С., Егоров В.А.* Оптимизация многовитковых межорбитальных перелетов КА. Препринт ИПМ им. Келдыша РАН, 2005, № 63.
- [72] *Тихомиров В.М.* Принцип Лагранжа и задачи оптимального управления. М.: Изд-во Московского гос. ун-та, 1982.
- [73] *Троицкий В.А.* Вариационные задачи оптимизации процессов управления для уравнений с разрывными правыми частями // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. Выпуск 2. С. 233–246.
- [74] *Троицкий В.А.* Вариационные задачи оптимизации процессов управления с функционалами, зависящими от промежуточных значений координат // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. Выпуск 6. С. 1003–1011.
- [75] *Троицкий В.А.* Вариационные задачи оптимизации процессов управления с функционалами, зависящими от промежуточных значений координат // ДАН СССР. 1963. Т. 149. № 2. С. 268–271.
- [76] *Троицкий В.А.* Оптимизация движения многоступенчатой ракеты // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. Выпуск 4. С. 745–750.
- [77] *Троицкий В.А.* Об оптимальных режимах движения многоступенчатых ракет // Космические исследования. 1967. Т. 5. № 2. С. 176–183.

- [78] *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
- [79] *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. М.: МФТИ, 1994.
- [80] *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
- [81] *Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973.

Приложение А

Примеры экстремалей

В приложении А приводятся примеры траектории рассмотренных перелетов одноступенчатого КА, двухступенчатого КА и КА с ДТБ на ГСО и на ГПО, соответствующие наилучшим тяговооруженностям и наилучшему распределению топлива по ступеням или бакам, при сбросе ступеней и баков на активном и на протяженном пассивном участке при заданном и при наилучшем временах перелета.

Основной упор при описании этих траекторий делается на возможность повторения расчетов по описанным в диссертации вычислительным схемам. Как отмечалось в § 5.4, задачи Коши во всех рассматриваемых случаях интегрировались на участках непрерывности управления в положительном времени по порядку их следования (последовательно, на активных и на пассивных участках). Для использования таких последовательных вычислительных схем производилось задание значений фазовых и сопряженных переменных для решения задач Коши в начале каждого из участков. Значения округлялись с точностями: времена до тысячных секунды, координаты до 1 мм, скорости до 1 мм/с, обезразмеренная масса, сопряженная масса p_m и сопряженные скорости p_u , p_v , p_w до 7 знаков, сопряженные координаты p_x , p_y , p_z — до 10 знаков. Основными расчетными единицами в диссертации были километры и секунды. При выборе других расчетных единиц для повторения расчетов сопряженные переменные необходимо пересчитать.

А.1 Перелет на геостационарную орбиту

А.1.1 Одновитковый перелет одноступенчатого КА.

Экстремаль одновиткового перелета одноступенчатого КА на геостационарную орбиту при $n = 0.1$, $P_{уд} = 350$ с, $h_0 = 200$ км, $i_0 = 0.9$ рад, $T_{\max} = 5$ ч.

Экстремаль задачи состоит из трех участков: первого активного, пассивного и последнего активного.

В начальный момент времени фазовые и сопряженные переменные определяются по формулам (5.1)–(5.5) с использованием 6 параметров пристрелки $\varphi = -1.083512728$ рад, $\alpha_0 = 1.799016777$ рад, $\alpha_{тр} = 0.104949622$ рад, $\lambda_r = 1.55139889 \cdot 10^{-7}$, $\lambda_{rc} = -2.33932143 \cdot 10^{-4}$, $p_m(0) = 3.226822$ и принимают следующие значения: $x(0) = 3080.116792$ км, $y(0) = -3613.166618$ км, $z(0) = 4553.161605$ км, $u(0) = 6.878183$ км/с, $v(0) = 2.265629$ км/с, $w(0) = -2.855052$ км/с, $m(0) = 1.0000000$, $p_x(0) = 2.425905389 \cdot 10^{-4}$, $p_y(0) = -8.212842303 \cdot 10^{-4}$, $p_z(0) = 6.586153935 \cdot 10^{-4}$, $p_u(0) = 0.7506099$, $p_v(0) = 0.4875902$, $p_w(0) = -0.4459155$. Продолжительность первого активного участка $\Delta t_1 = 1895.924$ с является 7-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на первом активном участке от $t = 0$ до $t_1 = 0 + \Delta t_1$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{1-})$, \dots , $p_m(t_{1-})$ в конце первого активного участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале пассивного участка $x(t_{1+}) = 3869.659294$ км, $y(t_{1+}) = 5182.244879$ км, $z(t_{1+}) = -6105.176027$ км, $u(t_{1+}) = -5.591259$ км/с, $v(t_{1+}) = 4.258407$ км/с, $w(t_{1+}) = -4.931449$ км/с, $p_x(t_{1+}) = 2.356625583 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{1+}) = 4.711374725 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{1+}) = -3.396847472 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{1+}) = -0.6675959$, $p_v(t_{1+}) = 0.6161001$, $p_w(t_{1+}) = -0.5665840$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_1 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{1+}) = m(t_{1-}) = 0.4583074$, а величина $p_m(t_{1+}) = 8.018210$ определяется из условия $\chi(t_{1+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции

переключения в конце первого активного участка $\chi(t_{1-}) = 0$. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_2 = 15294.414$ с является 20-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{1+}), \dots, p_m(t_{1+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_2 позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_1$ до $t_2 = t_1 + \Delta t_2$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{2-}), \dots, p_m(t_{2-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго активного участка $x(t_{2+}) = -41910.342687$ км, $y(t_{2+}) = 834.199724$ км, $z(t_{2+}) = -568.842014$ км, $u(t_{2+}) = -0.595861$ км/с, $v(t_{2+}) = -1.072690$ км/с, $w(t_{2+}) = 1.261734$ км/с, $p_x(t_{2+}) = -5.367604033 \cdot 10^{-5}$, $p_y(t_{2+}) = 1.846857264 \cdot 10^{-5}$, $p_z(t_{2+}) = 1.729316308 \cdot 10^{-6}$, $p_u(t_{2+}) = 0.1856263$, $p_v(t_{2+}) = -0.8896843$, $p_w(t_{2+}) = -0.5659379$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_2 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{2+}) = m(t_{2-}) = 0.4583074$, а величина $p_m(t_{2+}) = 8.018210$ определяется из условия $\chi(t_{2+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{2-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_3 = 809.662$ с является последним, тридцать третьим параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{2+}), \dots, p_m(t_{2+})$ и продолжительности второго активного участка позволяет решить задачу Коши на активном участке от $t = t_2$ до $T = t_2 + \Delta t_3$ и, в частности, вычислить значения $x(T), \dots, p_m(T)$ в конце участка.

Траектория заканчивается в момент $T = t_2 + \Delta t_3 = 18000$ с: $x(T) = -42157.303930$ км, $y(T) = -751.412907$ км, $z(T) = 0.000000$ км, $u(T) = 0.054794$ км/с, $v(T) = -3.074181$ км/с, $w(T) = 0.000000$ км/с, $m(T) = 0.2269755$, $p_x(T) = -5.548653973 \cdot 10^{-5}$, $p_y(T) = 1.459588779 \cdot 10^{-5}$, $p_z(T) = -7.360980795 \cdot 10^{-7}$, $p_u(T) = 0.2298173$, $p_v(T) = -0.9030759$, $p_w(T) = -0.5663348$, $p_m(T) = 16.284411$. В момент T вычисляется 7 компонент вектор-функции невязок (2.4), (3.15), (4.2). Всего $13+13+7=33$ условия.

Эта экстремаль соответствует всем величинам α и β , при которых полезная масса положительна. В частности, при $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.01$ масса

основного топливного бака составляет 0.061842, масса двигателя — 0.001, полезная масса $m_{\text{п}} = 0.1641335$.

А.1.2 Двухвитковый перелет одноступенчатого КА.

Экстремаль двухвиткового перелета одноступенчатого КА на геостационарную орбиту при $n = 0.1$, $P_{\text{уд}} = 350$ с, $h_0 = 200$ км, $i_0 = 0.9$ рад, $T_{\text{max}} = 7.5$ ч.

Экстремаль задачи состоит из пяти участков: трех активных и двух пассивных.

В начальный момент времени фазовые и сопряженные переменные определяются по формулам (5.1)–(5.5) с использованием 6 параметров пристрелки $\varphi = -0.442613145$ рад, $\alpha_0 = 1.673648882$ рад, $\alpha_{\text{тр}} = 0.190286307$ рад, $\lambda_r = 1.38983667 \cdot 10^{-7}$, $\lambda_{rc} = -1.06082629 \cdot 10^{-4}$, $p_m(0) = 3.39654167$ и принимают следующие значения: $x(0) = 5944.340449$ км, $y(0) = -1751.373227$ км, $z(0) = 2207.007364$ км, $u(0) = 3.333991$ км/с, $v(0) = 4.372455$ км/с, $w(0) = -5.509985$ км/с, $m(0) = 1.0000000$, $p_x(0) = 7.750695583 \cdot 10^{-4}$, $p_y(0) = -3.935217992 \cdot 10^{-4}$, $p_z(0) = 3.252418650 \cdot 10^{-4}$, $p_u(0) = 0.3272461$, $p_v(0) = 0.7236552$, $p_w(0) = -0.6076456$. Продолжительность первого активного участка $\Delta t_1 = 783.506$ с является 7-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на первом активном участке от $t = 0$ до $t_1 = 0 + \Delta t_1$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{1-})$, \dots , $p_m(t_{1-})$ в конце первого активного участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале первого пассивного участка $x(t_{1+}) = 5865.081059$ км, $y(t_{1+}) = 2136.472903$ км, $z(t_{1+}) = -2595.777400$ км, $u(t_{1+}) = -3.543876$ км/с, $v(t_{1+}) = 4.878650$ км/с, $w(t_{1+}) = -5.907585$ км/с, $p_x(t_{1+}) = 7.145033703 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{1+}) = 3.972029816 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{1+}) = -3.225824934 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{1+}) = -0.3542369$, $p_v(t_{1+}) = 0.7142769$, $p_w(t_{1+}) = -0.6010271$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_1 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7) Масса КА считается непрерывной

$m(t_{1+}) = m(t_{1-}) = 0.7761412$, а величина $p_m(t_{1+}) = 4.415457$ определяется из условия $\chi(t_{1+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце первого активного участка $\chi(t_{1-}) = 0$. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_2 = 6901.462$ с является 20-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{1+}), \dots, p_m(t_{1+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_2 позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_1$ до $t_2 = t_1 + \Delta t_2$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{2-}), \dots, p_m(t_{2-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго активного участка $x(t_{2+}) = 5355.643633$ км, $y(t_{2+}) = -2810.675680$ км, $z(t_{2+}) = 3399.571306$ км, $u(t_{2+}) = 4.400404$ км/с, $v(t_{2+}) = 4.447077$ км/с, $w(t_{2+}) = -5.393952$ км/с, $p_x(t_{2+}) = 5.907045214 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{2+}) = -4.918560952 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{2+}) = 3.971793610 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{2+}) = 0.4506682$, $p_v(t_{2+}) = 0.6767749$, $p_w(t_{2+}) = -0.5794676$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_2 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{2+}) = m(t_{2-}) = 0.7761412$, а величина $p_m(t_{2+}) = 4.415457$ определяется из условия $\chi(t_{2+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{2-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_3 = 1049.442$ с является тридцать третьим параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{2+}), \dots, p_m(t_{2+})$ и продолжительности второго активного участка позволяет решить задачу Коши на активном участке от $t = t_2$ до $t_3 = t_2 + \Delta t_3$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{3-}), \dots, p_m(t_{3-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго пассивного участка $x(t_{3+}) = 5686.221911$ км, $y(t_{3+}) = 3130.704743$ км, $z(t_{3+}) = -3608.659282$ км, $u(t_{3+}) = -3.869274$ км/с, $v(t_{3+}) = 5.731022$ км/с, $w(t_{3+}) = -6.575448$ км/с, $m(t_{3+}) = 0.4763008$, $p_x(t_{3+}) = 5.821174924 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{3+}) = 3.943532049 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{3+}) = -3.132408937 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{3+}) = -0.4076602$, $p_v(t_{3+}) = 0.7123434$, $p_w(t_{3+}) = -0.6102029$, $p_m(t_{3+}) = 7.369984$. считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент

переключения t_3 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7) Масса КА считается непрерывной $m(t_{3+}) = m(t_{3-}) = 0.4763008$, а величина $p_m(t_{3+}) = 8.018210$ определяется из условия $\chi(t_{3+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{3-}) = 0$. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_4 = 17437.472$ с является сорок шестым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{3+}), \dots, p_m(t_{3+})$ и продолжительности второго пассивного участка позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_3$ до $t_4 = t_3 + \Delta t_4$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{4-}), \dots, p_m(t_{4-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале третьего (последнего) активного участка $x(t_{4+}) = -42085.383664$ км, $y(t_{4+}) = 566.821036$ км, $z(t_{4+}) = -561.225904$ км, $u(t_{4+}) = -0.213807$ км/с, $v(t_{4+}) = -1.059281$ км/с, $w(t_{4+}) = 1.217343$ км/с, $p_x(t_{4+}) = -2.949515557 \cdot 10^{-5}$, $p_y(t_{4+}) = 5.640059581 \cdot 10^{-6}$, $p_z(t_{4+}) = 1.376795194 \cdot 10^{-6}$, $p_u(t_{4+}) = 0.0318162$, $p_v(t_{4+}) = -0.8743572$, $p_w(t_{4+}) = -0.5295799$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_4 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7) Масса КА считается непрерывной $m(t_{4+}) = m(t_{4-}) = 0.4763008$, а величина $p_m(t_{4+}) = 7.369984$ определяется из условия $\chi(t_{4+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{4-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_5 = 828.119$ с является последним, пятьдесят девятым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{4+}), \dots, p_m(t_{4+})$ и продолжительности третьего активного участка позволяет решить задачу Коши на активном участке от $t = t_4$ до $T = t_4 + \Delta t_5$ и, в частности, вычислить значения $x(T), \dots, p_m(T)$ в конце участка.

Траектория заканчивается в момент $T = t_4 + \Delta t_5 = 27000$ с: $x(T) = -42150.917589$ км, $y(T) = -1050.258245$ км, $z(T) = 0.000000$ км, $u(T) = 0.076587$ км/с, $v(T) = -3.073715$ км/с, $w(T) = 0.000000$ км/с, $m(T) = 0.2396953$, $p_x(T) = -2.982208917 \cdot 10^{-5}$, $p_y(T) = 1.774444655 \cdot 10^{-6}$, $p_z(T) = -9.625355505 \cdot 10^{-7}$, $p_u(T) = 0.0563860$, $p_v(T) = -0.8774281$, $p_w(T) = -0.5297502$, $p_m(T) = 14.663172$. В момент T вычисляется 7 компо-

нент вектор-функции невязок (2.4), (3.15), (4.2). Всего $13+13+13+13+7=59$ условий.

Эта экстремаль соответствует всем величинам α и β , при которых полезная масса положительна. В частности, при $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.01$ масса основного топливного бака равна 0.0608244, масса двигателя — 0.001, полезная масса $m_{\Pi} = 0.1778710$.

А.1.3 Одновитковый перелет КА с ДТБ. Сброс ДТБ на пассивном участке.

Экстремаль одновиткового перелета КА с ДТБ на геостационарную орбиту при $n = 0.1$, $P_{\text{уд}} = 350$ с, $h_0 = 200$ км, $i_0 = 0.9$ рад, $T_{\text{max}} = 5$ ч, $\beta = 0.01$, $\alpha = 0.08$. Наилучшая масса топлива в ДТБ вычисляется в процессе решения задачи (на рис. 8.30 эта экстремаль выделена точкой).

Траектория перелета состоит из трех участков: двух активных и пассивного.

В начальный момент времени фазовые и сопряженные переменные определяются по формулам (5.1)–(5.5) с использованием 6 параметров пристрелки $\varphi = -1.084967284$ рад, $\alpha_0 = 1.799073950$ рад, $\alpha_{\text{тр}} = 0.103298626$ рад, $\lambda_r = 1.55204436 \cdot 10^{-7}$, $\lambda_{rc} = -2.31077065 \cdot 10^{-4}$, $p_m(0) = 3.232555$ и принимают следующие значения: $x(0) = 3071.658795$ км, $y(0) = -3615.947732$ км, $z(0) = 4556.666249$ км, $u(0) = 6.883478$ км/с, $v(0) = 2.259408$ км/с, $w(0) = -2.847212$ км/с, $m(0) = 1.0000000$, $p_x(0) = 2.411969628 \cdot 10^{-4}$, $p_y(0) = -8.195321958 \cdot 10^{-4}$, $p_z(0) = 6.610005927 \cdot 10^{-4}$, $p_u(0) = 0.7516504$, $p_v(0) = 0.4857214$, $p_w(0) = -0.4462021$. Продолжительность первого активного участка $\Delta t_1 = 1895.391$ с является 7-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на первом активном участке от $t = 0$ до $t_1 = 0 + \Delta t_1$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{1-})$, \dots , $p_m(t_{1-})$ в конце первого активного участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале пассивного участка $x(t_{1+}) = 3884.144304$ км, $y(t_{1+}) = 5174.099177$ км,

$z(t_{1+}) = -6100.759781$ км, $u(t_{1+}) = -5.580241$ км/с, $v(t_{1+}) = 4.262093$ км/с, $w(t_{1+}) = -4.941557$ км/с, $p_x(t_{1+}) = 2.375228978 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{1+}) = 4.694551325 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{1+}) = -3.412763732 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{1+}) = -0.6672161$, $p_v(t_{1+}) = 0.6161386$, $p_w(t_{1+}) = -0.5687179$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_1 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА непрерывна $m(t_{1+}) = m(t_{1-}) = 0.4584596$, а величина $p_m(t_{1+}) = 8.022408$ определяется из условия $\chi(t_{1+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце первого активного участка $\chi(t_{1-}) = 0$. Для определенности τ_1 , τ_2 , сброс ДТБ выполняется через 2000 с после начала пассивного участка. Масса ДТБ равна 0.0433232, масса КА после сброса ДТБ — 0.4151364. Величина $p_m(\tau_{2+})$ является 20-ым параметром пристрелки. Все остальные фазовые и сопряженные переменные в момент сброса непрерывны. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_2 = 15371.364$ с является 21-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{1+})$, \dots , $p_m(t_{1+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_2 с учетом условий сброса позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_1$ до $t_2 = t_1 + \Delta t_2$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{2-})$, \dots , $p_m(t_{2-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго активного участка $x(t_{2+}) = -41939.599714$ км, $y(t_{2+}) = 781.668229$ км, $z(t_{2+}) = -515.466197$ км, $u(t_{2+}) = -0.579070$ км/с, $v(t_{2+}) = -1.072368$ км/с, $w(t_{2+}) = 1.262266$ км/с, $p_x(t_{2+}) = -5.299535955 \cdot 10^{-5}$, $p_y(t_{2+}) = 1.779098269 \cdot 10^{-5}$, $p_z(t_{2+}) = 1.568741637 \cdot 10^{-6}$, $p_u(t_{2+}) = 0.1825302$, $p_v(t_{2+}) = -0.8789658$, $p_w(t_{2+}) = -0.5586746$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_2 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{2+}) = m(t_{2-}) = 0.4151364$, а величина $p_m(t_{2+}) = 8.742222$ определяется из условия $\chi(t_{2+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{2-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_3 = 733.245$ с является последним, тридцать четвертым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{2+})$, \dots , $p_m(t_{2+})$ и

продолжительности второго активного участка позволяет решить задачу Коши на активном участке от $t = t_2$ до $T = t_2 + \Delta t_3$ и, в частности, вычислить значения $x(T), \dots, p_m(T)$ в конце участка.

Траектория заканчивается в момент $T = t_2 + \Delta t_3 = 18000$ с: $x(T) = -42158.926023$ км, $y(T) = -654.104421$ км, $z(T) = 0.000000$ км, $u(T) = 0.047698$ км/с, $v(T) = -3.074299$ км/с, $w(T) = 0.000000$ км/с, $m(T) = 0.2056378$, $p_x(T) = -5.459658101 \cdot 10^{-5}$, $p_y(T) = 1.433191163 \cdot 10^{-5}$, $p_z(T) = -6.324655915 \cdot 10^{-7}$, $p_u(T) = 0.2219748$, $p_v(T) = -0.8907472$, $p_w(T) = -0.5590141$, $p_m(T) = 17.739898$. В момент T вычисляется 8 компонент вектор-функции невязок (2.4), (3.15), (3.41), (4.2). Всего $13+13+8=34$ условия.

Масса основного топливного бака равна 0.0167599. Масса двигателя — 0.001. Полезная масса $m_{\text{п}} = 0.1878779$.

А.1.4 Двухвитковый перелет КА с ДТБ. Сброс ДТБ на втором пассивном участке.

Экстремаль двухвиткового перелета КА с ДТБ на геостационарную орбиту при $n = 0.1$, $P_{\text{уд}} = 350$ с, $h_0 = 200$ км, $i_0 = 0.9$ рад, $T_{\text{max}} = 7.5$ ч, $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.01$, соответствующая наилучшей массе топлива в ДТБ, определяемой в процессе решения задачи. Сброс ДТБ осуществляется на втором пассивном участке (на. рис. 8.42 эта экстремаль выделена точкой).

Экстремаль задачи состоит из пяти участков: трех активных и двух пассивных.

В начальный момент времени фазовые и сопряженные переменные определяются по формулам (5.1)–(5.5) с использованием 6 параметров пристрелки $\varphi = -0.445690166$ рад, $\alpha_0 = 1.674368269$ рад, $\alpha_{\text{тр}} = 0.188152367$ рад, $\lambda_r = 1.39033724 \cdot 10^{-7}$, $\lambda_{rc} = -1.05742403 \cdot 10^{-4}$, $p_m(0) = 3.397449$ и принимают следующие значения: $x(0) = 5935.642880$ км, $y(0) = -1762.734698$ км, $z(0) = 2221.324615$ км, $u(0) = 3.355620$ км/с, $v(0) = 4.366058$ км/с, $w(0) = -5.501923$ км/с, $m(0) = 1.0000000$, $p_x(0) = 7.734467940 \cdot 10^{-4}$,

$p_y(0) = -3.953184316 \cdot 10^{-4}$, $p_z(0) = 3.280532371 \cdot 10^{-4}$, $p_u(0) = 0.3295625$, $p_v(0) = 0.7217673$, $p_w(0) = -0.6086382$. Продолжительность первого активного участка $\Delta t_1 = 786.939$ с является 7-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на первом активном участке от $t = 0$ до $t_1 = 0 + \Delta t_1$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{1-})$, \dots , $p_m(t_{1-})$ в конце первого активного участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале пассивного участка $x(t_{1+}) = 5863.045293$ км, $y(t_{1+}) = 2141.602277$ км, $z(t_{1+}) = -2602.423888$ км, $u(t_{1+}) = -3.548428$ км/с, $v(t_{1+}) = 4.878035$ км/с, $w(t_{1+}) = -5.908353$ км/с, $m(t_{1+}) = 0.7751602$, $p_x(t_{1+}) = 7.137972836 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{1+}) = 3.970355395 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{1+}) = -3.238676987 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{1+}) = -0.3549115$, $p_v(t_{1+}) = 0.7131153$, $p_w(t_{1+}) = -0.6025740$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_1 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{1+}) = m(t_{1-}) = 0.7751602$, а величина $p_m(t_{1+}) = 4.422557$ определяется из условия $\chi(t_{1+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце первого активного участка $\chi(t_{1-}) = 0$. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_2 = 6922.212$ с является 20-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{1+})$, \dots , $p_m(t_{1+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_2 позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_1$ до $t_2 = t_1 + \Delta t_2$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{2-})$, \dots , $p_m(t_{2-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго (промежуточного) активного участка $x(t_{2+}) = 5364.802698$ км, $y(t_{2+}) = -2802.482242$ км, $z(t_{2+}) = 3390.609023$ км, $u(t_{2+}) = 4.387172$ км/с, $v(t_{2+}) = 4.455801$ км/с, $w(t_{2+}) = -5.405655$ км/с, $p_x(t_{2+}) = 5.924283222 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{2+}) = -4.895606977 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{2+}) = 3.971319976 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{2+}) = 0.4493022$, $p_v(t_{2+}) = 0.6765469$, $p_w(t_{2+}) = -0.5813801$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_2 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{2+}) = m(t_{2-}) = 0.7751602$, а величина $p_m(t_{2+}) = 4.422557$ определяется

из условия $\chi(t_{2+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце первого пассивного участка $\chi(t_{2-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_3 = 1045.555$ с является 33-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{2+}), \dots, p_m(t_{2+})$ и продолжительности второго активного участка Δt_3 позволяет решить задачу Коши на активном участке от $t = t_2$ до $t_3 = t_2 + \Delta t_3$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{3-}), \dots, p_m(t_{3-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго пассивного участка $x(t_{3+}) = 5693.109793$ км, $y(t_{3+}) = 3119.090755$ км, $z(t_{3+}) = -3598.225057$ км, $u(t_{3+}) = -3.857946$ км/с, $v(t_{3+}) = 5.733832$ км/с, $w(t_{3+}) = -6.584755$ км/с, $m(t_{3+}) = 0.4764303$, $p_x(t_{3+}) = 5.837815490 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{3+}) = 3.928462969 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{3+}) = -3.135745625 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{3+}) = -0.4063997$, $p_v(t_{3+}) = 0.7117459$, $p_w(t_{3+}) = -0.6119007$, $p_m(t_{3+}) = 7.368678$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_3 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{3+}) = m(t_{3-}) = 0.4764303$, а величина $p_m(t_{3+}) = 7.368678$ определяется из условия $\chi(t_{3+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{3-}) = 0$. Для определенности τ_1, τ_2 , сброс ДТБ выполняется через 2000 с после начала второго пассивного участка. Масса ДТБ равна 0.0418856, масса КА после сброса ДТБ — 0.4345447. Величина $p_m(\tau_+)$ является 46-ым параметром пристрелки. Все остальные фазовые переменные и сопряженные фазовые переменные в момент сброса непрерывны. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_4 = 17489.648$ с является 47-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{3+}), \dots, p_m(t_{3+})$ и продолжительности второго пассивного участка с учетом условий сброса позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_3$ до $t_4 = t_3 + \Delta t_4$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{4-}), \dots, p_m(t_{4-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале третьего (последнего) активного участка $x(t_{4+}) = -42095.237321$ км, $y(t_{4+}) = 521.924736$ км, $z(t_{4+}) = -512.327617$ км, $u(t_{4+}) = -0.202893$ км/с,

$v(t_{4+}) = -1.058807$ км/с, $w(t_{4+}) = 1.217847$ км/с, $m(t_{4+}) = 0.4345447$,
 $p_x(t_{4+}) = -2.929808201 \cdot 10^{-5}$, $p_y(t_{4+}) = 5.340871318 \cdot 10^{-6}$,
 $p_z(t_{4+}) = 1.248154726 \cdot 10^{-6}$, $p_u(t_{4+}) = 0.0319189$, $p_v(t_{4+}) = -0.8661619$,
 $p_w(t_{4+}) = -0.5245326$, $p_m(t_{4+}) = 8.002219$ считаются параметрами
 пристрелки (5.6). В момент переключения t_4 вычисляется 13 компо-
 нент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной
 $m(t_{4+}) = m(t_{4-}) = 0.4345447$, а величина $p_m(t_{4+}) = 8.002219$ определяется
 из условия $\chi(t_{4+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции
 переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{4-}) = 0$. Продолжительность
 активного участка $\Delta t_5 = 755.646$ с является 60-ым параметром пристрел-
 ки. Задание значений $x(t_{4+}), \dots, p_m(t_{4+})$ и продолжительности последнего
 активного участка позволяет решить задачу Коши на активном участке от
 $t = t_4$ до $T = t_4 + \Delta t_5$ и, в частности, вычислить значения $x(T), \dots, p_m(T)$
 в конце участка.

Траектория заканчивается в момент $T = t_4 + \Delta t_5 = 27000$ с:
 $x(T) = -42153.219612$ км, $y(T) = -953.400403$ км, $z(T) = 0.000000$ км,
 $u(T) = 0.069524$ км/с, $v(T) = -3.073883$ км/с, $w(T) = 0.000000$ км/с,
 $m(T) = 0.2186457$, $p_x(T) = -2.959454931 \cdot 10^{-5}$, $p_y(T) = 1.848242461 \cdot 10^{-6}$,
 $p_z(T) = -8.653517240 \cdot 10^{-7}$, $p_u(T) = 0.0541765$, $p_v(T) = -0.8688788$,
 $p_w(T) = -0.5246764$, $p_m(T) = 15.921482$. В момент T вычисляет-
 ся 8 компонент вектор-функции невязок (2.4), (3.15), (3.41), (4.2). Всего
 $13+13+13+13+8=33$ условия.

Масса основного топливного бака равна 0.0172719, масса двигателя —
 0.001. Полезная масса $m_{\text{п}} = 0.2003738$.

А.1.5 Одновитковый перелет двухступенчатого КА. Сброс ступени на пассивном участке.

Экстремаль одновиткового перелета двухступенчатого КА на геостационар-
 ную орбиту при $n_1 = 0.4349$, $n_2 = 0.1904$, $P_{\text{уд}_1} = P_{\text{уд}_2} = 350$ с, $h_0 = 200$ км,
 $i_0 = 0.9$ рад, $T_{\text{max}} = 5$ ч, $\beta = 0.01$, $\alpha = 0.08$. Наилучшая масса топлива в

первой ступени определяется в процессе решения задачи.

Траектория перелета состоит из трех участков: двух активных и пассивного.

В начальный момент времени фазовые и сопряженные переменные определяются по формулам (5.1)–(5.5) с использованием 6 параметров пристрелки $\varphi = -0.210759740$ рад, $\alpha_0 = 1.632791495$ рад, $\alpha_{\text{тр}} = 0.196260397$ рад, $\lambda_r = 1.34651432 \cdot 10^{-7}$, $\lambda_{rc} = -4.93662723 \cdot 10^{-4}$, $p_m(0) = 3.409882$ и принимают следующие значения: $x(0) = 6432.688175$ км, $y(0) = -855.452741$ км, $z(0) = 1078.005802$ км, $u(0) = 1.628478$ км/с, $v(0) = 4.731667$ км/с, $w(0) = -5.962649$ км/с, $m(0) = 1.0000000$, $p_x(0) = 8.511277349 \cdot 10^{-4}$, $p_y(0) = -1.975662834 \cdot 10^{-4}$, $p_z(0) = 1.695479791 \cdot 10^{-4}$, $p_u(0) = 0.1453711$, $p_v(0) = 0.7556938$, $p_w(0) = -0.6385876$. Продолжительность первого активного участка $\Delta t_1 = 416.98$ с является 7-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на первом активном участке от $t = 0$ до $t_1 = 0 + \Delta t_1$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{1-})$, \dots , $p_m(t_{1-})$ в конце первого активного участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале пассивного участка $x(t_{1+}) = 6325.022514$ км, $y(t_{1+}) = 1483.918725$ км, $z(t_{1+}) = -1727.781260$ км, $u(t_{1+}) = -2.268899$ км/с, $v(t_{1+}) = 6.491052$ км/с, $w(t_{1+}) = -7.418730$ км/с, $p_x(t_{1+}) = 8.004406891 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{1+}) = 2.330856619 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{1+}) = -1.912103391 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{1+}) = -0.2167429$, $p_v(t_{1+}) = 0.7463408$, $p_w(t_{1+}) = -0.6321920$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_1 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{1+}) = m(t_{1-}) = 0.4818727$, а величина $p_m(t_{1+}) = 7.135946$ определяется из условия $\chi(t_{1+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце первого активного участка $\chi(t_{1-}) = 0$. Сброс первой ступени выполняется в момент времени $\tau = t_1 + 2000$ с. Масса топливного бака равна 0.0414502, масса двигателя — 0.0043490, масса КА после сброса первой ступени — 0.4360735. В соответствии с (2.17) $m(\tau+) = 1.0$. Величина $p_m(\tau+)$ является 20-ым параметром пристрелки. Все остальные фазовые и

сопряженные переменные в момент сброса ступени непрерывны. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_2 = 16666.18$ с является 21-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{1+}), \dots, p_m(t_{1+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_2 с учетом условий сброса позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_1$ до $t_2 = t_1 + \Delta t_2$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{2-}), \dots, p_m(t_{2-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго активного участка $x(t_{2+}) = -41983.105316$ км, $y(t_{2+}) = 707.626987$ км, $z(t_{2+}) = -614.913516$ км, $u(t_{2+}) = -0.399406$ км/с, $v(t_{2+}) = -1.051382$ км/с, $w(t_{2+}) = 1.205204$ км/с, $p_x(t_{2+}) = -3.657791996 \cdot 10^{-5}$, $p_y(t_{2+}) = 1.099925324 \cdot 10^{-5}$, $p_z(t_{2+}) = 1.537440987 \cdot 10^{-6}$, $p_u(t_{2+}) = 0.0949496$, $p_v(t_{2+}) = -0.8414266$, $p_w(t_{2+}) = -0.5044299$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_2 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{2+}) = m(t_{2-}) = 1.0$, а величина $p_m(t_{2+}) = 3.383000$ определяется из условия $\chi(t_{2+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{2-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_3 = 916.840$ с является последним, тридцать четвертым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{2+}), \dots, p_m(t_{2+})$ и продолжительности второго активного участка позволяет решить задачу Коши на активном участке от $t = t_2$ до $T = t_2 + \Delta t_3$ и, в частности, вычислить значения $x(T), \dots, p_m(T)$ в конце участка.

Траектория заканчивается в момент $T = t_2 + \Delta t_3 = 18000$ с: $x(T) = -42150.207818$ км, $y(T) = -1078.367719$ км, $z(T) = 0.000000$ км, $u(T) = 0.078636$ км/с, $v(T) = -3.073663$ км/с, $w(T) = 0.000000$ км/с, $m(T) = 0.5012391$, $p_x(T) = -3.762477459 \cdot 10^{-5}$, $p_y(T) = 6.857234451 \cdot 10^{-6}$, $p_z(T) = -9.415779976 \cdot 10^{-7}$, $p_u(T) = 0.1289725$, $p_v(T) = -0.8496166$, $p_w(T) = -0.5046991$, $p_m(T) = 6.773107$. В момент T вычисляется 8 компонент вектор-функции невязок (2.4), (3.15), (3.28) и невязка, соответствующая заданному времени перелета (4.2). Всего $13+13+8=34$ условия.

Масса топливного бака второй ступени равна 0.0399009, масса двигателя

— 0.0019040, полезная масса второй ступени равна 0.4594343, полезная масса КА $m_{\text{п}} = 0.2003471$.

А.1.6 Одновитковый перелет двухступенчатого КА. Сброс ступени на пассивном участке, оптимальное время перелета

Экстремаль одновиткового перелета двухступенчатого КА на геостационарную орбиту при $n_1 = 0.3928$, $n_2 = 0.0763$, $P_{\text{уд}_1} = P_{\text{уд}_2} = 350$ с, $h_0 = 200$ км, $i_0 = 0.9$ рад, $\beta = 0.01$, $\alpha = 0.08$. Наилучшая масса топлива в первой ступени определяется в процессе решения задачи.

Траектория перелета состоит из трех участков: двух активных и пассивного.

В начальный момент времени фазовые и сопряженные переменные определяются по формулам (5.1)–(5.5) с использованием 6 параметров пристрелки $\varphi = -0.305012839$ рад, $\alpha_0 = 1.639909832$ рад, $\alpha_{\text{тр}} = 0.193015138$ рад, $\lambda_r = 1.37301902 \cdot 10^{-7}$, $\lambda_{rc} = -0.714630235 \cdot 10^{-4}$, $p_m(0) = 3.432328$ и принимают следующие значения: $x(0) = 6274.618352$ км, $y(0) = -1227.980635$ км, $z(0) = 1547.449888$ км, $u(0) = 2.337638$ км/с, $v(0) = 4.615397$ км/с, $w(0) = -5.816130$ км/с, $m(0) = 1.0000000$, $p_x(0) = 8.374322089 \cdot 10^{-4}$, $p_y(0) = -2.7213569234 \cdot 10^{-4}$, $p_z(0) = 2.2796961852 \cdot 10^{-4}$, $p_u(0) = 0.2293775$, $p_v(0) = 0.7434277$, $p_w(0) = -0.6282525$. Продолжительность первого активного участка $\Delta t_1 = 461.644$ с является 7-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на первом активном участке от $t = 0$ до $t_1 = 0 + \Delta t_1$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{1-})$, \dots , $p_m(t_{1-})$ в конце первого активного участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале пассивного участка $x(t_{1+}) = 6431.473056$ км, $y(t_{1+}) = 1354.199421$ км, $z(t_{1+}) = -1549.997683$ км, $u(t_{1+}) = -1.798466$ км/с, $v(t_{1+}) = 6.531599$ км/с, $w(t_{1+}) = -7.472336$ км/с, $p_x(t_{1+}) = 8.247443717 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{1+}) = 2.045751272 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{1+}) = -1.707907295 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{1+}) = -0.1781357$,

$p_v(t_{1+}) = 0.7575133$, $p_w(t_{1+}) = -0.6400865$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_1 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7) Масса КА считается непрерывной $m(t_{1+}) = m(t_{1-}) = 0.4819033$, а величина $p_m(t_{1+}) = 7.176613$ определяется из условия $\chi(t_{1+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце первого активного участка $\chi(t_{1-}) = 0$. Сброс первой ступени выполняется в момент времени $\tau = t_1 + 2000$ с. Масса топливного бака равна 0.0414477, масса двигателя — 0.0039280, масса КА после сброса первой ступени — 0.4365275. В соответствии с (2.17) $m(\tau+) = 1.0$. Величина $p_m(\tau+)$ является 20-ым параметром пристрелки. Все остальные фазовые и сопряженные переменные в момент сброса ступени непрерывны. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_2 = 17518.891$ с является 21-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{1+}), \dots, p_m(t_{1+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_2 с учетом условий сброса позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_1$ до $t_2 = t_1 + \Delta t_2$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{2-}), \dots, p_m(t_{2-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго активного участка $x(t_{2+}) = -42042.046153$ км, $y(t_{2+}) = 1336.397709$ км, $z(t_{2+}) = -1524.254521$ км, $u(t_{2+}) = -0.283677$ км/с, $v(t_{2+}) = -1.048098$ км/с, $w(t_{2+}) = 1.199117$ км/с, $p_x(t_{2+}) = -2.292507876 \cdot 10^{-5}$, $p_y(t_{2+}) = 5.745464545 \cdot 10^{-6}$, $p_z(t_{2+}) = 3.421254311 \cdot 10^{-6}$, $p_u(t_{2+}) = -0.0290450$, $p_v(t_{2+}) = -0.8508133$, $p_w(t_{2+}) = -0.5074497$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_2 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7) Масса КА считается непрерывной $m(t_{2+}) = m(t_{2-}) = 1.0$, а величина $p_m(t_{2+}) = 3.401698$ определяется из условия $\chi(t_{2+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{2-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_3 = 2276.672$ с является последним, тридцать четвертым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{2+}), \dots, p_m(t_{2+})$ и продолжительности второго активного участка позволяет решить задачу Коши на активном участке от $t = t_2$ до $T = t_2 + \Delta t_3$ и, в частности, вычислить

значения $x(T), \dots, p_m(T)$ в конце участка.

Траектория заканчивается в момент $T = t_2 + \Delta t_3 = 20257.207$ с: $x(T) = -42131.230559$ км, $y(T) = -3092.987255$ км, $z(T) = 0.000000$ км, $u(T) = 0.224901$ км/с, $v(T) = -3.063490$ км/с, $w(T) = 0.000000$ км/с, $m(T) = 0.5036854$, $p_x(T) = -2.225009529 \cdot 10^{-5}$, $p_y(T) = -4.537522418 \cdot 10^{-6}$, $p_z(T) = -2.713089293 \cdot 10^{-6}$, $p_u(T) = 0.0226205$, $p_v(T) = -0.8521532$, $p_w(T) = -0.5082505$, $p_m(T) = 6.763110$. В момент T вычисляется 8 компонент вектор-функции невязок (2.4), (3.15), (3.28) и невязка, соответствующая оптимальности времени перелета (4.1). Всего $13+13+8=34$ условия.

Масса топливного бака второй ступени равна 0.0397052, масса двигателя — 0.0007630, полезная масса второй ступени равна 0.4632172, полезная масса КА $m_{\text{н}} = 0.2022071$.

А.1.7 Одновитковый перелет двухступенчатого КА. Сброс ступени на первом активном участке.

Экстремаль одновиткового перелета двухступенчатого КА на геостационарную орбиту при $n_1 = 0.4406$, $n_2 = 0.1871$, $P_{\text{уд}_1} = P_{\text{уд}_2} = 350$ с, $h_0 = 200$ км, $i_0 = 0.9$ рад, $T_{\text{max}} = 5$ ч, $\beta = 0.01$, $\alpha = 0.08$. Масса топлива в первой ступени задана.

Траектория перелета состоит из трех участков: двух активных и пассивного.

В начальный момент времени фазовые и сопряженные переменные определяются по формулам (5.1)–(5.5) с использованием 6 параметров пристрелки $\varphi = -0.208600144$ рад, $\alpha_0 = 1.632090224$ рад, $\alpha_{\text{тр}} = 0.198459810$ рад, $\lambda_r = 1.34638045 \cdot 10^{-7}$, $\lambda_{rc} = -4.93855997 \cdot 10^{-5}$, $p_m(0) = 3.410100$ и принимают следующие значения: $x(0) = 6435.645185$ км, $y(0) = -846.815340$ км, $z(0) = 1067.121310$ км, $u(0) = 1.612035$ км/с, $v(0) = 4.733842$ км/с, $w(0) = -5.965390$ км/с, $m(0) = 1.0000000$, $p_x(0) = 8.517663369 \cdot 10^{-4}$, $p_y(0) = -1.959141091 \cdot 10^{-4}$, $p_z(0) = 1.674348856 \cdot 10^{-4}$, $p_u(0) = 0.1438931$, $p_v(0) = 0.7572492$, $p_w(0) = -0.6370780$. Масса топлива в первой ступени

$m_* = 0.50371$ задана. Продолжительность активного участка до сброса первой ступени $\Delta t_{11} = 400.133$ с является 7-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на первой части первого активного участка. В момент времени $\tau = 0 + \Delta t_{11}$, соответствующий мгновенному сбросу первой ступени, вычисляется одна невязка (2.13). Масса сбрасываемой ступени складывается из массы топливного бака 0.0402968 и массы двигателя 0.004406. В соответствии с (2.17) $m(\tau+) = 1.0$, значение $p_m(\tau+) = 3.419115$ определяется по формуле (4.4). Остальные переменные в момент сброса ступени не изменяются. Продолжительность первого активного участка после сброса ступени $\Delta t_{12} = 54.745$ с является 8-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на второй части первого активного участка от $t = \tau$ до $t_1 = \tau + \Delta t_{12}$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{1-}), \dots, p_m(t_{1-})$.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале пассивного участка $x(t_{1+}) = 6228.505360$ км, $y(t_{1+}) = 1741.615387$ км, $z(t_{1+}) = -2020.279886$ км, $u(t_{1+}) = -2.591474$ км/с, $v(t_{1+}) = 6.411869$ км/с, $w(t_{1+}) = -7.318639$ км/с, $p_x(t_{1+}) = 7.686943975 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{1+}) = 2.667732199 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{1+}) = -2.171331115 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{1+}) = -0.2477396$, $p_v(t_{1+}) = 0.7375348$, $p_w(t_{1+}) = -0.6222534$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_1 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{1+}) = m(t_{1-}) = 0.9707347$, а величина $p_m(t_{1+}) = 3.522576$ определяется из условия $\chi(t_{1+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце первого активного участка $\chi(t_{1-}) = 0$. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_2 = 16639.683$ с является 21-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{1+}), \dots, p_m(t_{1+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_2 позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_1$ до $t_2 = t_1 + \Delta t_2$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{2-}), \dots, p_m(t_{2-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго активного участка $x(t_{2+}) = -41986.498083$ км, $y(t_{2+}) = 702.337730$ км,

$z(t_{2+}) = -606.972232$ км, $u(t_{2+}) = -0.396641$ км/с, $v(t_{2+}) = -1.052032$ км/с, $w(t_{2+}) = 1.204648$ км/с, $p_x(t_{2+}) = -3.671480646 \cdot 10^{-5}$, $p_y(t_{2+}) = 1.104946311 \cdot 10^{-5}$, $p_z(t_{2+}) = 1.536885211 \cdot 10^{-6}$, $p_u(t_{2+}) = 0.0957855$, $p_v(t_{2+}) = -0.8505746$, $p_w(t_{2+}) = -0.5097839$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_2 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{2+}) = m(t_{2-}) = 0.9707347$, а величина $p_m(t_{2+}) = 3.522576$ определяется из условия $\chi(t_{2+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{2-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_3 = 905.439$ с является последним, тридцать четвертым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{2+}), \dots, p_m(t_{2+})$ и продолжительности второго активного участка позволяет решить задачу Коши на активном участке от $t = t_2$ до $T = t_2 + \Delta t_3$ и, в частности, вычислить значения $x(T), \dots, p_m(T)$ в конце участка.

Траектория заканчивается в момент $T = t_2 + \Delta t_3 = 18000$ с: $x(T) = -42150.628186$ км, $y(T) = -1061.809537$ км, $z(T) = 0.000000$ км, $u(T) = 0.077429$ км/с, $v(T) = -3.073694$ км/с, $w(T) = 0.000000$ км/с, $m(T) = 0.4867129$, $p_x(T) = -3.775629448 \cdot 10^{-5}$, $p_y(T) = 6.915331662 \cdot 10^{-6}$, $p_z(T) = -9.369433800 \cdot 10^{-7}$, $p_u(T) = 0.1295069$, $p_v(T) = -0.8587118$, $p_w(T) = -0.5100517$, $p_m(T) = 7.049995$.

В момент T вычисляется 7 компонент вектор-функции невязок (2.4), (3.15) и невязка, соответствующая заданному времени перелета (4.2). Всего $1+13+13+7=34$ условия.

Масса топливного бака второй ступени равна 0.0410629, масса двигателя — 0.0018710, полезная масса второй ступени равна 0.443779, полезная масса КА $m_{\Pi} = 0.2004049$.

А.1.8 Одновитковый перелет двухступенчатого КА. Сброс ступени на первом активном участке, оптимальное время перелета.

Экстремаль одновиткового перелета двухступенчатого КА на геостационарную орбиту при $n_1 = 0.3962$, $n_2 = 0.0770$, $P_{уд1} = P_{уд2} = 350$ с, $h_0 = 200$ км, $i_0 = 0.9$ рад, $\beta = 0.01$, $\alpha = 0.08$. Масса топлива в первой ступени задана.

Траектория перелета состоит из трех участков: двух активных и пассивного.

В начальный момент времени фазовые и сопряженные переменные определяются по формулам (5.1)–(5.5) с использованием 6 параметров пристрелки $\varphi = -0.303377513$ рад, $\alpha_0 = 1.639418220$ рад, $\alpha_{тр} = 0.194750937$ рад, $\lambda_r = 1.37302505 \cdot 10^{-7}$, $\lambda_{rc} = -7.16861889 \cdot 10^{-5}$, $p_m(0) = 3.432327$ и принимают следующие значения: $x(0) = 6277.840522$ км, $y(0) = -1221.600625$ км, $z(0) = 1539.410066$ км, $u(0) = 2.325493$ км/с, $v(0) = 4.617767$ км/с, $w(0) = -5.819117$ км/с, $m(0) = 1.0000000$, $p_x(0) = 8.381818028 \cdot 10^{-4}$, $p_y(0) = -2.711056869 \cdot 10^{-4}$, $p_z(0) = 2.263126369 \cdot 10^{-4}$, $p_u(0) = 0.2282081$, $p_v(0) = 0.7447224$, $p_w(0) = -0.6271440$. Масса топлива в первой ступени $m_1^* = 0.50912$ задана. Продолжительность активного участка до сброса первой ступени $\Delta t_{11} = 449.753$ с является 7-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на первой части первого активного участка. В момент времени $\tau = 0 + \Delta t_{11}$, соответствующий мгновенному сбросу первой ступени, вычисляется одна невязка (2.13). Масса сбрасываемой ступени складывается из массы топливного бака 0.0407296 и массы двигателя 0.003962. В соответствии с (2.17) $m(\tau+) = 1.0$, значение сопряженной переменной $p_m(\tau+) = 3.424274$ определяется по формуле (4.4). Остальные переменные в момент сброса ступени не изменяются. Продолжительность первого активного участка после сброса ступени $\Delta t_{12} = 82.337$ с является 8-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на второй части первого активного участка от $t = \tau$ до $t_1 = \tau + \Delta t_{12}$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{1-})$, \dots , $p_m(t_{1-})$.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале пассивного участка $x(t_{1+}) = 6281.495873$ км, $y(t_{1+}) = 1818.974813$ км, $z(t_{1+}) = -2080.035069$ км, $u(t_{1+}) = -2.376364$ км/с, $v(t_{1+}) = 6.389547$ км/с, $w(t_{1+}) = -7.303882$ км/с, $p_x(t_{1+}) = 7.676494762 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{1+}) = 2.634374057 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{1+}) = -2.168574134 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{1+}) = -0.2353516$, $p_v(t_{1+}) = 0.7415684$, $p_w(t_{1+}) = -0.6246652$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_1 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{1+}) = m(t_{1-}) = 0.9818859$, а величина $p_m(t_{1+}) = 3.487810$ определяется из условия $\chi(t_{1+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце первого активного участка $\chi(t_{1-}) = 0$. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_2 = 17434.551$ с является 21-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{1+})$, \dots , $p_m(t_{1+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_2 позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_1$ до $t_2 = t_1 + \Delta t_2$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{2-})$, \dots , $p_m(t_{2-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго активного участка $x(t_{2+}) = -41971.457540$ км, $y(t_{2+}) = 1303.861707$ км, $z(t_{2+}) = -1485.865278$ км, $u(t_{2+}) = -0.277154$ км/с, $v(t_{2+}) = -1.050645$ км/с, $w(t_{2+}) = 1.201064$ км/с, $p_x(t_{2+}) = -2.302939647 \cdot 10^{-5}$, $p_y(t_{2+}) = 5.658876575 \cdot 10^{-6}$, $p_z(t_{2+}) = 3.374018456 \cdot 10^{-6}$, $p_u(t_{2+}) = -0.0284084$, $p_v(t_{2+}) = -0.8563169$, $p_w(t_{2+}) = -0.5113073$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_2 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{2+}) = m(t_{2-}) = 0.9818859$, а величина $p_m(t_{2+}) = 3.48781$ определяется из условия $\chi(t_{2+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{2-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_3 = 2215.926$ с является последним, тридцать четвертым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{2+})$, \dots , $p_m(t_{2+})$ и продолжительности второго активного участка позволяет решить задачу Коши на активном участке от $t = t_2$ до $T = t_2 + \Delta t_3$ и, в частности, вычислить

значения $x(T), \dots, p_m(T)$ в конце участка.

Траектория заканчивается в момент $T = t_2 + \Delta t_3 = 20182.566$ с:
 $x(T) = -42056.195101$ км, $y(T) = -3013.195917$ км, $z(T) = 0.000000$ км,
 $u(T) = 0.219727$ км/с, $v(T) = -3.066808$ км/с, $w(T) = 0.000000$ км/с,
 $m(T) = 0.4943821$, $p_x(T) = -2.238082717 \cdot 10^{-5}$, $p_y(T) = -4.470330947 \cdot 10^{-6}$,
 $p_z(T) = -2.675400020 \cdot 10^{-6}$, $p_u(T) = 0.0221309$, $p_v(T) = -0.8576017$,
 $p_w(T) = -0.5120764$, $p_m(T) = 6.936384$.

В момент T вычисляется 7 компонент вектор-функции невязок (2.4), (3.15) и невязка, соответствующая оптимальности времени перелета (4.1). Всего $1+13+13+7=34$ условия.

Масса топливного бака второй ступени равна 0.0404494, масса двигателя — 0.0007700, полезная масса второй ступени равна 0.4531627, полезная масса КА $m_{\text{п}} = 0.2021959$.

А.1.9 Двухвитковый перелет двухступенчатого КА. Сброс ступени на втором активном участке

Экстремаль двухвиткового перелета двухступенчатого КА на геостационарную орбиту при $n_1 = 0.2745$, $n_2 = 0.0913$, $P_{\text{уд}_1} = P_{\text{уд}_2} = 350$ с, $h_0 = 200$ км, $i_0 = 0.9$ рад, $T_{\text{max}} = 7.5$ ч, $\beta = 0.01$, $\alpha = 0.08$. Масса топлива в первой ступени задана.

Траектория перелета состоит из пяти участков: трех активных и двух пассивных.

В начальный момент времени фазовые и сопряженные переменные определяются по формулам (5.1)–(5.5) с использованием 6 параметров пристрелки $\varphi = -0.136586415$ рад, $\alpha_0 = 1.603556051$ рад, $\alpha_{\text{тр}} = 0.201926848$ рад, $\lambda_r = 1.35780026 \cdot 10^{-7}$, $\lambda_{rc} = -3.26183854 \cdot 10^{-5}$, $p_m(0) = 3.428671$ и принимают следующие значения: $x(0) = 6516.983918$ км, $y(0) = -556.781318$ км, $z(0) = 701.632553$ км, $u(0) = 1.059913$ км/с, $v(0) = 4.793672$ км/с, $w(0) = -6.040786$ км/с, $m(0) = 1.0000000$, $p_x(0) = 8.797060413 \cdot 10^{-4}$, $p_y(0) = -1.245339324 \cdot 10^{-4}$, $p_z(0) = 1.044584198 \cdot 10^{-4}$, $p_u(0) = 0.1015345$,

$p_v(0) = 0.7628026$, $p_w(0) = -0.6386101$. Продолжительность первого активного участка $\Delta t_1 = 243.762$ с является 7-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на первом активном участке от $t = 0$ до $t_1 = 0 + \Delta t_1$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{1-})$, \dots , $p_m(t_{1-})$ в конце первого активного участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале пассивного участка $x(t_{1+}) = 6504.958445$ км, $y(t_{1+}) = 683.706869$ км, $z(t_{1+}) = -834.045312$ км, $u(t_{1+}) = -1.182229$ км/с, $v(t_{1+}) = 5.333264$ км/с, $w(t_{1+}) = -6.488159$ км/с, $p_x(t_{1+}) = 8.726122955 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{1+}) = 1.356792609 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{1+}) = -1.128917276 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{1+}) = -0.1151513$, $p_v(t_{1+}) = 0.7613659$, $p_w(t_{1+}) = -0.6375054$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_1 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{1+}) = m(t_{1-}) = 0.8088211$, а величина $p_m(t_{1+}) = 4.242240$ определяется из условия $\chi(t_{1+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце первого активного участка $\chi(t_{1-}) = 0$. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_2 = 6959.325$ с является 20-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{1+})$, \dots , $p_m(t_{1+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_2 позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_1$ до $t_2 = t_1 + \Delta t_2$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{2-})$, \dots , $p_m(t_{2-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго активного участка $x(t_{2+}) = 6358.970378$ км, $y(t_{2+}) = -1188.839394$ км, $z(t_{2+}) = 1444.185307$ км, $u(t_{2+}) = 1.995832$ км/с, $v(t_{2+}) = 5.209685$ км/с, $w(t_{2+}) = -6.338901$ км/с, $p_x(t_{2+}) = 8.364582084 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{2+}) = -2.325867047 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{2+}) = 1.940897270 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{2+}) = 0.1945309$, $p_v(t_{2+}) = 0.7505852$, $p_w(t_{2+}) = -0.6309760$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_2 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{2+}) = m(t_{2-}) = 0.8088211$, а величина $p_m(t_{2+}) = 4.242240$ определяется из условия $\chi(t_{2+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции

переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{2-}) = 0$. Масса топлива в первой ступени $m_1^* = 0.50873$ задана. Продолжительность активного участка до сброса первой ступени $\Delta t_{31} = 404.921$ с является 33-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на первой части второго активного участка. В момент времени $\tau = t_2 + \Delta t_{31}$, соответствующий мгновенному сбросу первой ступени, вычисляется одна невязка (2.13). Масса сбрасываемой ступени складывается из массы топливного бака 0.0414984 и массы двигателя 0.002745. В соответствии с (2.17) $m(\tau+) = 1.0$, значение сопряженной переменной $p_m(\tau+) = 3.422353$ определяется по формуле (4.4). Остальные переменные в момент сброса ступени не изменяются. Продолжительность второго активного участка после сброса ступени $\Delta t_{32} = 68.487$ с является 34-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на второй части второго активного участка от τ до $t_3 = \tau + \Delta t_{32}$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{3-})$, \dots , $p_m(t_{3-})$.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго пассивного участка $x(t_{3+}) = 6317.541574$ км, $y(t_{3+}) = 1656.505445$ км, $z(t_{3+}) = -1895.416568$ км, $u(t_{3+}) = -2.218029$ км/с, $v(t_{3+}) = 6.453873$ км/с, $w(t_{3+}) = -7.369010$ км/с, $p_x(t_{3+}) = 7.870289567 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{3+}) = 2.454763880 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{3+}) = -2.021533295 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{3+}) = -0.2176614$, $p_v(t_{3+}) = 0.7447373$, $p_w(t_{3+}) = -0.6263731$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_3 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{3+}) = m(t_{3-}) = 0.9821346$, а величина $p_m(t_{3+}) = 3.484882$ определяется из условия $\chi(t_{1+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце второго активного участка $\chi(t_{1-}) = 0$. Продолжительность второго пассивного участка $\Delta t_4 = 17454.793$ с является 47-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{3+})$, \dots , $p_m(t_{3+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_4 позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_3$ до $t_4 = t_3 + \Delta t_4$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{4-})$, \dots , $p_m(t_{4-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале последнего активного участка $x(t_{4+}) = -41991.416977$ км, $y(t_{4+}) = 1117.226230$ км, $z(t_{4+}) = -1251.331136$ км, $u(t_{4+}) = -0.266971$ км/с, $v(t_{4+}) = -1.051370$ км/с, $w(t_{4+}) = 1.200818$ км/с, $p_x(t_{4+}) = -2.444437283 \cdot 10^{-5}$, $p_y(t_{4+}) = 5.792893280 \cdot 10^{-6}$, $p_z(t_{4+}) = 2.864258587 \cdot 10^{-6}$, $p_u(t_{4+}) = -0.0120184$, $p_v(t_{4+}) = -0.8561877$, $p_w(t_{4+}) = -0.5110300$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_4 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{4+}) = m(t_{4-}) = 0.9821346$, а величина $p_m(t_{4+}) = 3.484882$ определяется из условия $\chi(t_{4+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{4-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_5 = 1868.741$ с является последним, 60-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{4+})$, \dots , $p_m(t_{4+})$ и продолжительности третьего активного участка позволяет решить задачу Коши на активном участке от $t = t_4$ до $T = t_4 + \Delta t_5$ и, в частности, вычислить значения $x(T)$, \dots , $p_m(T)$ в конце участка.

Траектория заканчивается в момент $T = t_4 + \Delta t_5 = 27000$ с: $x(T) = -42088.375624$ км, $y(T) = -2524.189646$ км, $z(T) = 0.000000$ км, $u(T) = 0.184068$ км/с, $v(T) = -3.069155$ км/с, $w(T) = 0.000000$ км/с, $m(T) = 0.4946602$, $p_x(T) = -2.425978189 \cdot 10^{-5}$, $p_y(T) = -2.760321511 \cdot 10^{-6}$, $p_z(T) = -2.237458022 \cdot 10^{-6}$, $p_u(T) = 0.0336168$, $p_v(T) = -0.8590102$, $p_w(T) = -0.5116094$, $p_m(T) = 6.930446$.

В момент T вычисляется 7 компонент вектор-функции невязок (2.4), (3.15) и невязка, соответствующая заданному времени перелета (4.2). Всего $13+13+1+13+13+7=60$ условия.

Масса топливного бака второй ступени равна 0.0404271, масса двигателя — 0.000913, полезная масса второй ступени равна 0.4533201, полезная масса КА $m_{\text{п}} = 0.2030088$.

А.1.10 Двухвитковый перелет двухступенчатого КА. Сброс ступени на втором активном участке, оптимальное время перелета

Экстремаль двухвиткового перелета двухступенчатого КА на геостационарную орбиту при $n_1 = 0.2498$, $n_2 = 0.0766$, $P_{уд1} = P_{уд2} = 350$ с, $h_0 = 200$ км, $i_0 = 0.9$ рад, $\beta = 0.01$, $\alpha = 0.08$. Масса топлива в первой ступени задана.

Траектория перелета состоит из пяти участков: трех активных и двух пассивных.

В начальный момент времени фазовые и сопряженные переменные определяются по формулам (5.1)–(5.5) с использованием 6 параметров пристрелки $\varphi = -0.239884667$ рад, $\alpha_0 = 1.625448362$ рад, $\alpha_{тр} = 0.198075722$ рад, $\lambda_r = 1.3669416 \cdot 10^{-7}$, $\lambda_{rc} = -5.69558095 \cdot 10^{-5}$, $p_m(0) = 3.432327$ и принимают следующие значения: $x(0) = 6389.884407$ км, $y(0) = -971.532896$ км, $z(0) = 1224.285163$ км, $u(0) = 1.849453$ км/с, $v(0) = 4.700182$ км/с, $w(0) = -5.922973$ км/с, $m(0) = 1.0000000$, $p_x(0) = 8.582444652 \cdot 10^{-4}$, $p_y(0) = -2.156603023 \cdot 10^{-4}$, $p_z(0) = 1.801398913 \cdot 10^{-4}$, $p_u(0) = 0.1805740$, $p_v(0) = 0.7531754$, $p_w(0) = -0.6325503$. Продолжительность первого активного участка $\Delta t_1 = 384.996$ с является 7-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на первом активном участке от $t = 0$ до $t_1 = 0 + \Delta t_1$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{1-})$, \dots , $p_m(t_{1-})$ в конце первого активного участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале пассивного участка $x(t_{1+}) = 6439.092026$ км, $y(t_{1+}) = 1025.789770$ км, $z(t_{1+}) = -1229.366612$ км, $u(t_{1+}) = -1.648231$ км/с, $v(t_{1+}) = 5.542481$ км/с, $w(t_{1+}) = -6.642150$ км/с, $p_x(t_{1+}) = 8.525073496 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{1+}) = 1.908647823 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{1+}) = -1.592054603 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{1+}) = -0.1613295$, $p_v(t_{1+}) = 0.7575810$, $p_w(t_{1+}) = -0.6362394$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_1 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{1+}) = m(t_{1-}) = 0.7252225$, а величина $p_m(t_{1+}) = 4.744035$ определяется

из условия $\chi(t_{1+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце первого активного участка $\chi(t_{1-}) = 0$. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_2 = 8644.624$ с является 20-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{1+}), \dots, p_m(t_{1+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_2 позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_1$ до $t_2 = t_1 + \Delta t_2$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{2-}), \dots, p_m(t_{2-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго активного участка $x(t_{2+}) = 6438.538538$ км, $y(t_{2+}) = -1027.196022$ км, $z(t_{2+}) = 1230.951472$ км, $u(t_{2+}) = 1.651225$ км/с, $v(t_{2+}) = 5.542119$ км/с, $w(t_{2+}) = -6.641742$ км/с, $p_x(t_{2+}) = 8.524333561 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{2+}) = -1.911141449 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{2+}) = 1.593646607 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{2+}) = 0.1616674$, $p_v(t_{2+}) = 0.7575343$, $p_w(t_{2+}) = -0.6362093$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_2 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{2+}) = m(t_{2-}) = 0.7252225$, а величина $p_m(t_{2+}) = 4.744035$ определяется из условия $\chi(t_{2+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{2-}) = 0$. Масса топлива в первой ступени $m_1^* = 0.50923$ задана. Продолжительность активного участка до сброса первой ступени $\Delta t_{31} = 328.496$ с является 33-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на первой части второго активного участка. В момент времени $\tau = t_2 + \Delta t_{31}$, соответствующий мгновенному сбросу первой ступени, вычисляется одна невязка (2.13). Масса сбрасываемой ступени складывается из массы топливного бака 0.0407384 и массы двигателя 0.002498. В соответствии с (2.17) $m(\tau+) = 1.0$, значение сопряженной переменной $p_m(\tau+) = 3.424863$ определяется по формуле (4.4). Остальные переменные в момент сброса ступени не изменяются. Продолжительность второго активного участка после сброса ступени $\Delta t_{32} = 76.048$ с является 34-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на второй части второго активного участка от τ до $t_3 = \tau + \Delta t_{32}$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{3-}),$

$\dots, p_m(t_{3-})$.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго пассивного участка $x(t_{3+}) = 6381.493899$ км, $y(t_{3+}) = 1477.560395$ км, $z(t_{3+}) = -1687.511676$ км, $u(t_{3+}) = -1.958990$ км/с, $v(t_{3+}) = 6.510503$ км/с, $w(t_{3+}) = -7.434868$ км/с, $p_x(t_{3+}) = 8.075227254 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{3+}) = 2.208346126 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{3+}) = -1.826973588 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{3+}) = -0.1924118$, $p_v(t_{3+}) = 0.7497685$, $p_w(t_{3+}) = -0.6297810$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_3 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{3+}) = m(t_{3-}) = 0.9833563$, а величина $p_m(t_{3+}) = 3.483082$ определяется из условия $\chi(t_{3+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце второго активного участка $\chi(t_{3-}) = 0$. Продолжительность второго пассивного участка $\Delta t_4 = 17471.040$ с является 47-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{3+}), \dots, p_m(t_{3+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_4 позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_3$ до $t_4 = t_3 + \Delta t_4$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{4-}), \dots, p_m(t_{4-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале последнего активного участка $x(t_{4+}) = -41969.069880$ км, $y(t_{4+}) = 1308.713949$ км, $z(t_{4+}) = -1493.512928$ км, $u(t_{4+}) = -0.278939$ км/с, $v(t_{4+}) = -1.050207$ км/с, $w(t_{4+}) = 1.199331$ км/с, $p_x(t_{4+}) = -2.293719489 \cdot 10^{-5}$, $p_y(t_{4+}) = 5.699149115 \cdot 10^{-6}$, $p_z(t_{4+}) = 3.390087368 \cdot 10^{-6}$, $p_u(t_{4+}) = -0.0283979$, $p_v(t_{4+}) = -0.8567932$, $p_w(t_{4+}) = -0.5107821$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_4 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{4+}) = m(t_{4-}) = 0.9833563$, а величина $p_m(t_{4+}) = 3.483082$ определяется из условия $\chi(t_{4+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{4-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_5 = 2230.518$ с является последним, 60-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{4+}), \dots, p_m(t_{4+})$ и продолжительности третьего активного участка позволяет решить задачу Коши на

активном участке от $t = t_4$ до $T = t_4 + \Delta t_5$ и, в частности, вычислить значения $x(T), \dots, p_m(T)$ в конце участка.

Траектория заканчивается в момент $T = t_4 + \Delta t_5 = 29135.721$ с: $x(T) = -42054.535666$ км, $y(T) = -3036.268425$ км, $z(T) = 0.000000$ км, $u(T) = 0.221410$ км/с, $v(T) = -3.066687$ км/с, $w(T) = 0.000000$ км/с, $m(T) = 0.4951914$, $p_x(T) = -2.228013943 \cdot 10^{-5}$, $p_y(T) = -4.502809130 \cdot 10^{-6}$, $p_z(T) = -2.693242517 \cdot 10^{-6}$, $p_u(T) = 0.0222636$, $p_v(T) = -0.8580946$, $p_w(T) = -0.5115541$, $p_m(T) = 6.926147$.

В момент T вычисляется 7 компонент вектор-функции невязок (2.4), (3.15) и невязка, соответствующая оптимального времени перелета (4.1). Всего $13+13+1+13+13+7=60$ условия.

Масса топливного бака второй ступени равна 0.0403846, масса двигателя — 0.000766, полезная масса второй ступени равна 0.4540408, полезная масса КА $m_{\text{п}} = 0.2031985$.

А.1.11 Двухвитковый перелет двухступенчатого КА. Сброс ступени на втором пассивном участке.

Экстремаль двухвиткового перелета двухступенчатого КА на геостационарную орбиту при $n_1 = 0.2725$, $n_2 = 0.0916$, $P_{\text{уд1}} = P_{\text{уд2}} = 350$ с, $h_0 = 200$ км, $i_0 = 0.9$ рад, $T_{\text{max}} = 7.5$ ч, $\beta = 0.01$, $\alpha = 0.08$. Наилучшая масса топлива в первой ступени определяется в ходе решения задачи.

Траектория перелета состоит из пяти участков: трех активных и двух пассивных.

В начальный момент времени фазовые и сопряженные переменные определяются по формулам (5.1)–(5.5) с использованием 6 параметров пристрелки $\varphi = -0.136902733$ рад, $\alpha_0 = 1.603709827$ рад, $\alpha_{\text{тр}} = 0.200638407$ рад, $\lambda_r = 1.35766506 \cdot 10^{-7}$, $\lambda_{rc} = -3.24890762 \cdot 10^{-5}$, $p_m(0) = 3.428597$ и принимают следующие значения: $x(0) = 6516.700268$ км, $y(0) = -558.062680$ км, $z(0) = 703.247272$ км, $u(0) = 1.062353$ км/с, $v(0) = 4.793464$ км/с, $w(0) = -6.040523$ км/с, $m(0) = 1.0000000$, $p_x(0) = 8.795418385 \cdot 10^{-4}$,

$p_y(0) = -1.247139538 \cdot 10^{-4}$, $p_z(0) = 1.048933010 \cdot 10^{-4}$, $p_u(0) = 0.1017196$, $p_v(0) = 0.7619627$, $p_w(0) = -0.6395826$. Продолжительность первого активного участка $\Delta t_1 = 244.777$ с является 7-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на первом активном участке от $t = 0$ до $t_1 = 0 + \Delta t_1$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{1-})$, \dots , $p_m(t_{1-})$ в конце первого активного участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале пассивного участка $x(t_{1+}) = 6504.068972$ км, $y(t_{1+}) = 687.261813$ км, $z(t_{1+}) = -838.678640$ км, $u(t_{1+}) = -1.189169$ км/с, $v(t_{1+}) = 5.330023$ км/с, $w(t_{1+}) = -6.486377$ км/с, $p_x(t_{1+}) = 8.723031866 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{1+}) = 1.362846615 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{1+}) = -1.136845235 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{1+}) = -0.1158380$, $p_v(t_{1+}) = 0.7604665$, $p_w(t_{1+}) = -0.6384280$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_1 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{1+}) = m(t_{1-}) = 0.8094233$, а величина $p_m(t_{1+}) = 4.239014$ определяется из условия $\chi(t_{1+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце первого активного участка $\chi(t_{1-}) = 0$. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_2 = 6948.665$ с является 20-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{1+})$, \dots , $p_m(t_{1+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_2 позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_1$ до $t_2 = t_1 + \Delta t_2$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{2-})$, \dots , $p_m(t_{2-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго активного участка $x(t_{2+}) = 6356.990286$ км, $y(t_{2+}) = -1193.674634$ км, $z(t_{2+}) = 1450.526030$ км, $u(t_{2+}) = 2.004531$ км/с, $v(t_{2+}) = 5.205506$ км/с, $w(t_{2+}) = -6.335946$ км/с, $p_x(t_{2+}) = 8.358457077 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{2+}) = -2.333657108 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{2+}) = 1.952570413 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{2+}) = 0.1953462$, $p_v(t_{2+}) = 0.7496275$, $p_w(t_{2+}) = -0.6318358$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_2 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{2+}) = m(t_{2-}) = 0.8094233$, а величина $p_m(t_{2+}) = 4.239014$ определяется

из условия $\chi(t_{2+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{2-}) = 0$. Продолжительность второго активного участка после сброса ступени $\Delta t_3 = 419.809$ с является 33-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на втором активном участке от $t = t_2$ до $t_3 = t_2 + \Delta t_3$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{3-}), \dots, p_m(t_{3-})$.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго пассивного участка $x(t_{3+}) = 6426.224449$ км, $y(t_{3+}) = 1300.602013$ км, $z(t_{3+}) = -1490.030016$ км, $u(t_{3+}) = -1.769616$ км/с, $v(t_{3+}) = 6.555737$ км/с, $w(t_{3+}) = -7.490358$ км/с, $p_x(t_{3+}) = 8.283542982 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{3+}) = 1.987901877 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{3+}) = -1.652796834 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{3+}) = -0.1735933$, $p_v(t_{3+}) = 0.7561770$, $p_w(t_{3+}) = -0.6374985$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_3 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{3+}) = m(t_{3-}) = 0.4825719$, а величина $p_m(t_{3+}) = 7.142179$ определяется из условия $\chi(t_{3+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце второго активного участка $\chi(t_{3-}) = 0$. Сброс первой ступени выполняется в момент времени $\tau = t_3 + 2000$ с. Масса топливного бака равна 0.0413942, масса двигателя — 0.0027250, масса КА после сброса первой ступени — 0.4384527. В соответствии с (2.17) $m(\tau+) = 1.0$. Величина $p_m(\tau+)$ является 46-ым параметром пристрелки. Все остальные фазовые и сопряженные переменные в момент сброса ступени непрерывны. Продолжительность второго пассивного участка $\Delta t_4 = 17489.928$ с является 47-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{3+}), \dots, p_m(t_{3+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_4 позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_3$ до $t_4 = t_3 + \Delta t_4$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{4-}), \dots, p_m(t_{4-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале последнего активного участка $x(t_{4+}) = -41985.993750$ км, $y(t_{4+}) = 1133.511715$ км, $z(t_{4+}) = -1270.467880$ км, $u(t_{4+}) = -0.271095$ км/с, $v(t_{4+}) = -1.050896$ км/с, $w(t_{4+}) = 1.201045$ км/с, $p_x(t_{4+}) = -2.441626365 \cdot 10^{-5}$,

$p_y(t_{4+}) = 5.845796801 \cdot 10^{-6}$, $p_z(t_{4+}) = 2.889430926 \cdot 10^{-6}$, $p_u(t_{4+}) = -0.0122195$, $p_v(t_{4+}) = -0.8506489$, $p_w(t_{4+}) = -0.5077902$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_4 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{4+}) = m(t_{4-}) = 1.0$, а величина $p_m(t_{4+}) = 3.400610$ определяется из условия $\chi(t_{4+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{4-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_5 = 15489.926$ с является последним, 60-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{4+})$, \dots , $p_m(t_{4+})$ и продолжительности третьего активного участка позволяет решить задачу Коши на активном участке от $t = t_4$ до $T = t_4 + \Delta t_5$ и, в частности, вычислить значения $x(T)$, \dots , $p_m(T)$ в конце участка.

Траектория заканчивается в момент $T = t_4 + \Delta t_5 = 27000$ с: $x(T) = -42086.085671$ км, $y(T) = -2562.086822$ км, $z(T) = 0.000000$ км, $u(T) = 0.186832$ км/с, $v(T) = -3.068988$ км/с, $w(T) = 0.000000$ км/с, $m(T) = 0.5035749$, $p_x(T) = -2.422754642 \cdot 10^{-5}$, $p_y(T) = -2.781300810 \cdot 10^{-6}$, $p_z(T) = -2.256853207 \cdot 10^{-6}$, $p_u(T) = 0.0340464$, $p_v(T) = -0.8535437$, $p_w(T) = -0.5083835$, $p_m(T) = 6.764321$. В момент T вычисляется 8 компонент вектор-функции невязок (2.4), (3.15), (3.28) и невязка, соответствующая заданному времени перелета (4.2). Всего $13+13+8=34$ условия.

Масса топливного бака второй ступени равна 0.0397140, масса двигателя — 0.000916, полезная масса второй ступени равна 0.4629449, полезная масса КА $m_{\text{п}} = 0.2029794$.

А.1.12 Двухвитковый перелет двухступенчатого КА. Сброс на втором пассивном участке, оптимальное время перелета

Экстремаль двухвиткового перелета двухступенчатого КА на геостационарную орбиту при $n_1 = 0.2479$, $n_2 = 0.0763$, $P_{\text{уд}_1} = P_{\text{уд}_2} = 350$ с, $h_0 = 200$ км,

$i_0 = 0.9$ рад, $\beta = 0.01$, $\alpha = 0.08$. Наилучшая масса топлива в первой ступени определяется в ходе решения задачи.

Траектория перелета состоит из пяти участков: трех активных и двух пассивных.

В начальный момент времени фазовые и сопряженные переменные определяются по формулам (5.1)–(5.5) с использованием 6 параметров пристрелки $\varphi = -0.240922099$ рад, $\alpha_0 = 1.625769206$ рад, $\alpha_{\text{тр}} = 0.196462611$ рад, $\lambda_r = 1.36665172 \cdot 10^{-7}$, $\lambda_{rc} = -5.67520089 \cdot 10^{-5}$, $p_m(0) = 3.432327$ и принимают следующие значения: $x(0) = 6388.259458$ км, $y(0) = -975.653263$ км, $z(0) = 1229.477477$ км, $u(0) = 1.857297$ км/с, $v(0) = 4.698987$ км/с, $w(0) = -5.921467$ км/с, $m(0) = 1.0000000$, $p_x(0) = 8.578378261 \cdot 10^{-4}$, $p_y(0) = -2.162867294 \cdot 10^{-4}$, $p_z(0) = 1.812570773 \cdot 10^{-4}$, $p_u(0) = 0.1813230$, $p_v(0) = 0.7520489$, $p_w(0) = -0.6336753$. Продолжительность первого активного участка $\Delta t_1 = 386.805$ с является 7-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на первом активном участке от $t = 0$ до $t_1 = 0 + \Delta t_1$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{1-})$, \dots , $p_m(t_{1-})$ в конце первого активного участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале пассивного участка $x(t_{1+}) = 6437.615000$ км, $y(t_{1+}) = 1030.171723$ км, $z(t_{1+}) = -1235.312779$ км, $u(t_{1+}) = -1.656473$ км/с, $v(t_{1+}) = 5.537153$ км/с, $w(t_{1+}) = -6.639437$ км/с, $p_x(t_{1+}) = 8.520548271 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{1+}) = 1.915342254 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{1+}) = -1.602829481 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{1+}) = -0.1621411$, $p_v(t_{1+}) = 0.7564631$, $p_w(t_{1+}) = -0.6373851$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_1 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{1+}) = m(t_{1-}) = 0.7260316$, а величина $p_m(t_{1+}) = 4.738817$ определяется из условия $\chi(t_{1+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце первого активного участка $\chi(t_{1-}) = 0$. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_2 = 8623.364$ с является 20-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{1+})$, \dots , $p_m(t_{1+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_2 позволяет решить задачу Коши на пассивном участ-

ке от $t = t_1$ до $t_2 = t_1 + \Delta t_2$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{2-}), \dots, p_m(t_{2-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго активного участка $x(t_{2+}) = 6437.202670$ км, $y(t_{2+}) = -1031.222080$ км, $z(t_{2+}) = 1236.449517$ км, $u(t_{2+}) = 1.658695$ км/с, $v(t_{2+}) = 5.536882$ км/с, $w(t_{2+}) = -6.639143$ км/с, $p_x(t_{2+}) = 8.520011209 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{2+}) = -1.917211111 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{2+}) = 1.603977439 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{2+}) = 0.1623906$, $p_v(t_{2+}) = 0.7564280$, $p_w(t_{2+}) = -0.6373633$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_2 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{2+}) = m(t_{2-}) = 0.7260316$, а величина $p_m(t_{2+}) = 4.738817$ определяется из условия $\chi(t_{2+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{2-}) = 0$. Продолжительность второго активного участка после сброса ступени $\Delta t_3 = 343.818$ с является 33-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на втором активном участке ea от $t = t_2$ до $t_3 = t_2 + \Delta t_3$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{3-}), \dots, p_m(t_{3-})$.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго пассивного участка $x(t_{3+}) = 6486.076177$ км, $y(t_{3+}) = 1073.000000$ км, $z(t_{3+}) = -1226.432561$ км, $u(t_{3+}) = -1.439272$ км/с, $v(t_{3+}) = 6.611572$ км/с, $w(t_{3+}) = -7.555976$ км/с, $p_x(t_{3+}) = 8.491114403 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{3+}) = 1.651802194 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{3+}) = -1.381071334 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{3+}) = -0.1413654$, $p_v(t_{3+}) = 0.7607472$, $p_w(t_{3+}) = -0.6409831$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_3 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{3+}) = m(t_{3-}) = 0.4825105$, а величина $p_m(t_{3+}) = 7.147469$ определяется из условия $\chi(t_{3+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце второго активного участка $\chi(t_{3-}) = 0$. Сброс первой ступени выполняется в момент времени $\tau = t_3 + 2000$ с. Масса топливного бака равна 0.0413992, масса двигателя — 0.0024790, масса КА после сброса ступени — 0.4386323. В соответствии с (2.17) $m(\tau+) = 1.0$. Величина

$p_m(\tau_+) = 3.404121$ является 46-ым параметром пристрелки. Все остальные фазовые и сопряженные переменные в момент сброса ступени непрерывны. Продолжительность второго пассивного участка $\Delta t_4 = 17553.624$ с является 47-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{3+}), \dots, p_m(t_{3+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_4 позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_3$ до $t_4 = t_3 + \Delta t_4$ и, в частности, вычислить значения $x(t_{4-}), \dots, p_m(t_{4-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале последнего активного участка $x(t_{4+}) = -42042.286440$ км, $y(t_{4+}) = 1332.490543$ км, $z(t_{4+}) = -1521.805876$ км, $u(t_{4+}) = -0.283583$ км/с, $v(t_{4+}) = -1.047746$ км/с, $w(t_{4+}) = 1.197419$ км/с, $p_x(t_{4+}) = -2.283344197 \cdot 10^{-5}$, $p_y(t_{4+}) = 5.750305198 \cdot 10^{-6}$, $p_z(t_{4+}) = 3.416261149 \cdot 10^{-6}$, $p_u(t_{4+}) = -0.0288434$, $p_v(t_{4+}) = -0.8517818$, $p_w(t_{4+}) = -0.5072156$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_4 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{4+}) = m(t_{4-}) = 1.0$, а величина $p_m(t_{4+}) = 3.404121$ определяется из условия $\chi(t_{4+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{4-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_5 = 2276.299$ с является последним, 60-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{4+}), \dots, p_m(t_{4+})$ и продолжительности третьего активного участка позволяет решить задачу Коши на активном участке от $t = t_4$ до $T = t_4 + \Delta t_5$ и, в частности, вычислить значения $x(T), \dots, p_m(T)$ в конце участка.

Траектория заканчивается в момент $T = t_4 + \Delta t_5 = 29183.910$ с: $x(T) = -42131.026974$ км, $y(T) = -3095.759146$ км, $z(T) = 0.000000$ км, $u(T) = 0.225102$ км/с, $v(T) = -3.063475$ км/с, $w(T) = 0.000000$ км/с, $m(T) = 0.5037668$, $p_x(T) = -2.215847405 \cdot 10^{-5}$, $p_y(T) = -4.542524371 \cdot 10^{-6}$, $p_z(T) = -2.714244683 \cdot 10^{-6}$, $p_u(T) = 0.0226068$, $p_v(T) = -0.8531214$, $p_w(T) = -0.5080092$, $p_m(T) = 6.766839$. В момент T вычисляется 8 компонент вектор-функции невязок (2.4), (3.15), (3.28) и невязка, соответствующая оптимальности времени перелета (4.1). Всего $13+13+8=34$ условия.

Масса топливного бака второй ступени равна 0.0396987, масса двигателя — 0.0007630, полезная масса второй ступени равна 0.4633051, полезная масса КА $m_{\text{п}} = 0.2032206$.

А.2 Перелет на геопереходную орбиту

А.2.1 Двухвитковый перелет КА с ДТБ. Сброс ДТБ на первом пассивном участке.

Экстремаль двухвиткового перелета КА с ДТБ на геопереходную орбиту при $n = 0.1$, $P_{\text{уд}} = 350$ с, $h_0 = 200$ км, $i_0 = 0.9$ рад, $\Delta V = 1.5$ км/с, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.01$ при не ограниченном заранее времени перелета ($m_{\text{п}} = 0.34694822$, $T = 29452.07$ с), соответствующая сбросу бака на первом пассивном участке. Наилучшая масса топлива в ДТБ определяется в процессе решения задачи. Данная экстремаль используется в табл. 8.2.

Экстремаль задачи состоит из пяти участков: трех активных и двух пассивных.

В начальный момент времени фазовые и сопряженные переменные определяются по формулам (5.1)–(5.5) с использованием 6 параметров пристрелки $\varphi = -0.658258086$ рад, $\alpha_0 = 1.712529775$ рад, $\alpha_{\text{тр}} = 0.171070776$ рад, $\lambda_r = 1.42933845 \cdot 10^{-7}$, $\lambda_{rc} = -1.55781925 \cdot 10^{-4}$, $p_m(0) = 3.4323275$ и принимают следующие значения: $x(0) = 5203.784060$ км, $y(0) = -2501.468846$ км, $z(0) = 3152.246522$ км, $u(0) = 4.761906$ км/с, $v(0) = 3.827727$ км/с, $w(0) = -4.823542$ км/с, $p_x(0) = 6.430337161 \cdot 10^{-4}$, $p_y(0) = -5.605684084 \cdot 10^{-4}$, $p_z(0) = 4.557944834 \cdot 10^{-4}$, $p_u(0) = 0.4866523$, $p_v(0) = 0.6659770$, $p_w(0) = -0.5653708$. Продолжительность первого активного участка $\Delta t_1 = 1057.361$ с является 7-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на первом активном участке от $t = 0$ до $t_1 = 0 + \Delta t_1 = 1057.361$ с и, в частности, вычислить значения $x(t_{1-})$, \dots , $p_m(t_{1-})$ в конце первого активного участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале пассивного участка $x(t_{1+}) = 5617.895820$ км, $y(t_{1+}) = 2695.775709$ км, $z(t_{1+}) = -3231.140494$ км, $u(t_{1+}) = -4.027863$ км/с, $v(t_{1+}) = 4.830725$ км/с, $w(t_{1+}) = -5.785424$ км/с, $p_x(t_{1+}) = 6.317558801 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{1+}) = 4.494122315 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{1+}) = -3.609841180 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{1+}) = -0.4203799$, $p_v(t_{1+}) = 0.7081717$, $p_w(t_{1+}) = -0.6005058$. считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_1 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{1+}) = m(t_{1-}) = 0.6978968$, а величина $p_m(t_{1+}) = 5.012686$ определяется из условия $\chi(t_{1+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце первого активного участка $\chi(t_{1-}) = 0$. Для определенности τ_1 , τ_2 , сброс ДТБ выполняется через 2000 с после начала пассивного участка. Масса ДТБ равна 0.0151052, масса КА после сброса ДТБ — 0.6827917. Величина $p_m(\tau_+) = 5.2474913$ является 20-ым параметром пристрелки. Все остальные фазовые и сопряженные переменные в момент сброса непрерывны. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_2 = 8801.059$ с является 21-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{1+})$, \dots , $p_m(t_{1+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_2 с учетом условий сброса позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_1$ до $t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 9858.420$ с и, в частности, вычислить значения $x(t_{2-})$, \dots , $p_m(t_{2-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго (промежуточного) активного участка $x(t_{2+}) = 5986.291528$ км, $y(t_{2+}) = -2197.593324$ км, $z(t_{2+}) = 2630.533586$ км, $u(t_{2+}) = 3.342972$ км/с, $v(t_{2+}) = 5.120070$ км/с, $w(t_{2+}) = -6.134466$ км/с, $p_x(t_{2+}) = 7.356568920 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{2+}) = -3.876481284 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{2+}) = 3.167401441 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{2+}) = 0.3522807$, $p_v(t_{2+}) = 0.7501116$, $p_w(t_{2+}) = -0.6347594$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_2 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{2+}) = m(t_{2-}) = 0.6827917$, а величина $p_m(t_{2+}) = 5.247491$ определяется из условия $\chi(t_{2+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции

переключения в конце первого активного участка $\chi(t_{2-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_3 = 756.668$ с является 34-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{2+}), \dots, p_m(t_{2+})$ и продолжительности второго активного участка Δt_3 позволяет решить задачу Коши на активном участке от $t = t_2$ до $t_3 = t_2 + \Delta t_3 = 10615.088$ с и, в частности, вычислить значения $x(t_{3-}), \dots, p_m(t_{3-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго пассивного участка $x(t_{3+}) = 6194.114087$ км, $y(t_{3+}) = 2304.227230$ км, $z(t_{3+}) = -2646.638998$ км, $u(t_{3+}) = -2.887316$ км/с, $v(t_{3+}) = 6.141159$ км/с, $w(t_{3+}) = -7.044571$ км/с, $p_x(t_{3+}) = 7.309369572 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{3+}) = 3.250354788 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{3+}) = -2.650444964 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{3+}) = -0.3083451$, $p_v(t_{3+}) = 0.7698011$, $p_w(t_{3+}) = -0.6508984$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_3 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{3+}) = m(t_{3-}) = 0.4666008$, а величина $p_m(t_{3+}) = 7.754728$ определяется из условия $\chi(t_{3+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{3-}) = 0$. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_4 = 18477.503$ с является 47-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{3+}), \dots, p_m(t_{3+})$ и продолжительности второго пассивного участка позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_3$ до $t_4 = t_3 + \Delta t_4 = 29092.591$ с и, в частности, вычислить значения $x(t_{4-}), \dots, p_m(t_{4-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале третьего (последнего) активного участка $x(t_{4+}) = -42159.816413$ км, $y(t_{4+}) = 215.251391$ км, $z(t_{4+}) = -227.024281$ км, $u(t_{4+}) = -0.042188$ км/с, $v(t_{4+}) = -1.059848$ км/с, $w(t_{4+}) = 1.216015$ км/с, $p_x(t_{4+}) = -2.427626590 \cdot 10^{-5}$, $p_y(t_{4+}) = 9.009989091 \cdot 10^{-7}$, $p_z(t_{4+}) = 5.590685087 \cdot 10^{-7}$, $p_u(t_{4+}) = -0.0050150$, $p_v(t_{4+}) = -0.9025138$, $p_w(t_{4+}) = -0.5447777$, считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_4 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{4+}) = m(t_{4-}) = 0.4666008$, а величина $p_m(t_{4+}) = 7.754728$ опреде-

ляется из условия $\chi(t_{4+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{4-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_5 = 359.477$ с является 60-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{4+}), \dots, p_m(t_{4+})$ и продолжительности последнего активного участка позволяет решить задачу Коши на активном участке от $t = t_4$ до $T = t_4 + \Delta t_5 = 29452.068$ с и, в частности, вычислить значения $x(T), \dots, p_m(T)$ в конце участка.

В момент оканания перелета: $x(T) = -42160.772035$ км, $y(T) = -291.634471$ км, $z(T) = 134.157707$ км, $u(T) = 0.038031$ км/с, $v(T) = -1.790362$ км/с, $w(T) = 0.775103$ км/с, $m(T) = 0.3638931$, $p_x(T) = -2.426930149 \cdot 10^{-5}$, $p_y(T) = -8.244287945 \cdot 10^{-7}$, $p_z(T) = -4.824197443 \cdot 10^{-7}$, $p_u(T) = 0.0037106$, $p_v(T) = -0.9025276$, $p_w(T) = -0.5447915$, $p_m(T) = 9.943601$. К параметрам пристрелки добавляются 3 множителя Лагранжа $\lambda_{T_a} = -2.42720242 \cdot 10^{-5}$, $\lambda_{T_o} = 3.04478591 \cdot 10^{-9}$, $\lambda_0 = 0.351429696$. В момент T вычисляются 11 компонент вектор-функции невязок (2.8), (2.9), (3.16), (3.41), (4.2). Всего $13+13+13+13+11=63$ условия.

Масса основного топливного бака равна 0.0151052, масса двигателя — 0.001. Импульс довыведения — 1.5 км/с. Конечная орбита КА наклонена к геостационару под углом $i = 23.409^\circ$ рад, высота перигея $h_p = 4251.028$ км.

А.2.2 Двухвитковый перелет КА с ДТБ. Сброс ДТБ на втором активном участке

Экстремаль двухвиткового перелета КА с ДТБ на геопереходную орбиту при $n = 0.1$, $P_{уд} = 350$ с, $h_0 = 200$ км, $i_0 = 0.9$ рад, $\Delta V = 1.0$ км/с, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.01$ при не ограниченном заранее времени перелета ($m_{\pi} = 0.29567392$, $T = 28863.356$ с), соответствующая наилучшему сбросу на втором активном участке. Масса топлива в ДТБ составляет $m_1^* = 0.51055$. Данная экстремаль используется в табл. 8.2.

Экстремаль задачи состоит из пяти участков: трех активных и двух пассивных; сброс ДТБ происходит на втором активном участке и занимает 120 с, поэтому второй активный участок состоит из трех частей — первой части активного участка, пассивного участка сброса ДТБ и второй части активного участка.

В начальный момент времени фазовые и сопряженные переменные определяются по формулам (5.1)–(5.5) с использованием 6 параметров пристрелки $\varphi = -0.609482635$ рад, $\alpha_0 = 1.70091524$ рад, $\alpha_{\text{тр}} = 0.17013393$ рад, $\lambda_r = 1.42473304 \cdot 10^{-7}$, $\lambda_{rc} = -1.39876786 \cdot 10^{-4}$, $p_m(0) = 3.43232749$ и принимают следующие значения: $x(0) = 5393.798525$ км, $y(0) = -2340.781310$ км, $z(0) = 2949.754803$ км, $u(0) = 4.456015$ км/с, $v(0) = 3.967495$ км/с, $w(0) = -4.999672$ км/с, $p_x(0) = 6.818490489 \cdot 10^{-4}$, $p_y(0) = -5.201947133 \cdot 10^{-4}$, $p_z(0) = 4.305042474 \cdot 10^{-4}$, $p_u(0) = 0.4545557$, $p_v(0) = 0.6762127$, $p_w(0) = -0.5797546$. Продолжительность первого активного участка $\Delta t_1 = 977.412$ с является 7-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на первом активном участке от $t = 0$ до $t_1 = 0 + \Delta t_1 = 977.412$ с и, в частности, вычислить значения $x(t_{1-})$, \dots , $p_m(t_{1-})$ в конце первого активного участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале пассивного участка $x(t_{1+}) = 5741.172764$ км, $y(t_{1+}) = 2478.179973$ км, $z(t_{1+}) = -2983.375706$ км, $u(t_{1+}) = -3.802799$ км/с, $v(t_{1+}) = 4.876098$ км/с, $w(t_{1+}) = -5.868344$ км/с, $p_x(t_{1+}) = 6.719242934 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{1+}) = 4.265494032 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{1+}) = -3.501095086 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{1+}) = -0.3934241$, $p_v(t_{1+}) = 0.7105606$, $p_w(t_{1+}) = -0.6085477$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_1 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{1+}) = m(t_{1-}) = 0.7207393$, а величина $p_m(t_{1+}) = 4.833158$ определяется из условия $\chi(t_{1+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце первого активного участка $\chi(t_{1-}) = 0$. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_2 = 8146.140$ с является 20-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{1+})$, \dots , $p_m(t_{1+})$ и продолжительности

пассивного участка Δt_2 позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_1$ до $t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 9123.553$ с и, в частности, вычислить значения $x(t_{2-}), \dots, p_m(t_{2-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго (промежуточного) активного участка $x(t_{2+}) = 5713.665725$ км, $y(t_{2+}) = -2503.478947$ км, $z(t_{2+}) = 3012.472028$ км, $u(t_{2+}) = 3.857135$ км/с, $v(t_{2+}) = 4.858927$ км/с, $w(t_{2+}) = -5.848582$ км/с, $p_x(t_{2+}) = 6.684274379 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{2+}) = -4.307933459 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{2+}) = 3.527249897 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{2+}) = 0.4000141$, $p_v(t_{2+}) = 0.7082082$, $p_w(t_{2+}) = -0.6069917$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_2 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{2+}) = m(t_{2-}) = 0.7207393$, а величина $p_m(t_{2+}) = 4.833158$ определяется из условия $\chi(t_{2+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце первого пассивного участка $\chi(t_{2-}) = 0$.

Сброс ДТБ выполняется на втором активном участке. Продолжительность активного участка до начала сброса ДТБ $\Delta t_{3_1} = 735.663$ с является 33-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{2+}), \dots, p_m(t_{2+})$ и продолжительности второго активного участка до начала сброса ДТБ Δt_{3_1} позволяет решить задачу Коши на участке от $t = t_2$ до $\tau_1 = t_2 + \Delta t_{3_1} = 9859.215$ с и, в частности, вычислить значения $x(\tau_1), \dots, p_m(\tau_1)$ в конце участка. Значения фазовых и сопряженных переменных в момент времени τ_1 : $x(\tau_1) = 6424.217237$ км, $y(\tau_1) = 1772.677874$ км, $z(\tau_1) = -2034.322709$ км, $u(\tau_1) = -2.152853$ км/с, $v(\tau_1) = 6.165351$ км/с, $w(\tau_1) = -7.142859$ км/с, $m(\tau_1) = 0.5105500$, $p_x(\tau_1) = 8.012264410 \cdot 10^{-4}$, $p_y(\tau_1) = 2.571313447 \cdot 10^{-4}$, $p_z(\tau_1) = -2.157525462 \cdot 10^{-4}$, $p_u(\tau_1) = -0.2353947$, $p_v(\tau_1) = 0.7816799$, $p_w(\tau_1) = -0.6677088$, $p_m(\tau_1) = 6.915636$. В момент, соответствующий началу сброса бака, вычисляется невязка (2.20). Масса дополнительного бака равна 0.0244725. Продолжительность сброса (пассивного полета) составляет 120 с. В момент времени $\tau_2 = \tau_1 + 120 = 9979.215$ с включается двигатель и продолжается второй активный участок, при этом $x(\tau_2) = 6113.789855$ км, $y(\tau_2) = 2495.960754$ км, $z(\tau_2) = -2872.440471$ км,

$u(\tau_2) = -3.000007$ км/с, $v(\tau_2) = 5.877855$ км/с, $w(\tau_2) = -6.812392$ км/с,
 $m(\tau_2) = 0.4860775$, $p_x(\tau_2) = 6.891050325 \cdot 10^{-4}$, $p_y(\tau_2) = 3.348903851 \cdot 10^{-4}$,
 $p_z(\tau_2) = -2.747156822 \cdot 10^{-4}$, $p_u(\tau_2) = -0.3249797$, $p_v(\tau_2) = 0.7458828$,
 $p_w(\tau_2) = -0.6380083$, $p_m(\tau_2) = 7.126339$. Напомним, что на участке $[\tau_1, \tau_2]$
 функции m и p_m не рассматриваются, величина $m(\tau_2)$ определяется соотношением (2.26), а величина $p_m(\tau_2)$ — (4.6). Из-за плохой обусловленности системы уравнений с условием оптимальности оптимизация массы в ДТБ производится на основе решения задачи в два этапа. На основном этапе решаются задачи с фиксированными m_1^* , на построенных экстремалиях вычисляется величина левой части (3.41) и определяется m_1^* для которой она обращается в ноль.

Продолжительность второго активного участка после сброса ДТБ $\Delta t_{3_2} = 113.200$ с является 34-ым параметром пристрелки. Решение задачи Коши на участке от $t = \tau_2$ до $t_3 = \tau_2 + \Delta t_{3_2} = 10092.416$ с позволяет вычислить значения $x(t_{3-}), \dots, p_m(t_{3-})$ в конце второго активного участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго пассивного участка $x(t_{3+}) = 5730.125777$ км, $y(t_{3+}) = 3152.883916$ км,
 $z(t_{3+}) = -3631.087839$ км, $u(t_{3+}) = -3.762329$ км/с, $v(t_{3+}) = 5.723151$ км/с,
 $w(t_{3+}) = -6.584778$ км/с, $p_x(t_{3+}) = 5.751570063 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{3+}) = 3.833008996 \cdot 10^{-4}$,
 $p_z(t_{3+}) = -3.059580533 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{3+}) = -0.3965518$,
 $p_v(t_{3+}) = 0.7050113$, $p_w(t_{3+}) = -0.6049279$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_3 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{3+}) = m(t_{3-}) = 0.4537345$, а величина $p_m(t_{3+}) = 7.640757$ определяется из условия $\chi(t_{3+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{3-}) = 0$. Продолжительность пассивного участка $\Delta t_4 = 18252.795$ с является 47-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{3+}), \dots, p_m(t_{3+})$ и продолжительности второго пассивного участка позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_3$ до $t_4 = t_3 + \Delta t_4 = 28345.211$ с и, в частности, вычислить значения $x(t_{4-}), \dots, p_m(t_{4-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале третьего (последнего) активного участка $x(t_{4+}) = -42154.684657$ км, $y(t_{4+}) = 308.676859$ км, $z(t_{4+}) = -336.151663$ км, $u(t_{4+}) = -0.062114$ км/с, $v(t_{4+}) = -1.058895$ км/с, $w(t_{4+}) = 1.218656$ км/с, $p_x(t_{4+}) = -2.370567215 \cdot 10^{-5}$, $p_y(t_{4+}) = 1.271905827 \cdot 10^{-6}$, $p_z(t_{4+}) = 7.827437064 \cdot 10^{-7}$, $p_u(t_{4+}) = -0.0069743$, $p_v(t_{4+}) = -0.8642870$, $p_w(t_{4+}) = -0.5226772$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_4 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{4+}) = m(t_{4-}) = 0.4537345$, а величина $p_m(t_{4+}) = 7.640757$ определяется из условия $\chi(t_{4+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{4-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_5 = 518.145$ с является 60-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{4+})$, \dots , $p_m(t_{4+})$ и продолжительности последнего активного участка позволяет решить задачу Коши на активном участке от $t = t_4$ до $T = t_4 + \Delta t_5 = 28863.355$ с и, в частности, вычислить значения $x(T)$, \dots , $p_m(T)$ в конце участка.

В момент оканания перелета: $x(T) = -42157.618335$ км, $y(T) = -520.814834$ км, $z(T) = 125.599939$ км, $u(T) = 0.053488$ км/с, $v(T) = -2.218651$ км/с, $w(T) = 0.517403$ км/с, $m(T) = 0.3056931$, $p_x(T) = -2.368383845 \cdot 10^{-5}$, $p_y(T) = -1.110077039 \cdot 10^{-6}$, $p_z(T) = -6.577283021 \cdot 10^{-7}$, $p_u(T) = 0.0053040$, $p_v(T) = -0.8643289$, $p_w(T) = -0.5227096$, $p_m(T) = 11.341507$. К параметрам пристрелки добавляются 3 множителя Лагранжа $\lambda_{T_a} = -2.36945224 \cdot 10^{-5}$, $\lambda_{T_o} = 3.76807792 \cdot 10^{-9}$, $\lambda_0 = 0.505124472$. В момент T вычисляются 11 компонент вектор-функции невязок (2.8), (2.9), (3.16), (3.41), (4.2). Всего $13+13+13+13+11=63$ условия.

Масса основного топливного бака равна 0.0090192, масса двигателя — 0.001. Импульс довыведения — 1 км/с. Конечная орбита КА наклонена к геостационару под углом $i = 13.127^\circ$ рад, высота перигея $h_p = 9581.789$ км.

А.2.3 Двухвитковый перелет КА с ДТБ. Сброс ДТБ на втором пассивном участке.

Экстремаль двухвиткового перелета КА с ДТБ на геопереходную орбиту при $n = 0.1$, $P_{уд} = 350$ с, $h_0 = 200$ км, $i_0 = 0.9$ рад, $\Delta V = 0.5$ км/с, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.01$ при не ограниченном заранее времени перелета ? ($m_{\Pi} = 0.252336785$, $T = 28801015$ с), соответствующая сбросу бака на первом пассивном участке. Наилучшая масса топлива в ДТБ определяется в процессе решения задачи. Данная экстремаль используется в табл. 8.2.

Экстремаль задачи состоит из пяти участков: трех активных и двух пассивных.

В начальный момент времени фазовые и сопряженные переменные определяются по формулам (5.1)–(5.5) с использованием 6 параметров пристрелки $\varphi = -0.598049150$ рад, $\alpha_0 = 1.700057134$ рад, $\alpha_{тр} = 0.171031882$ рад, $\lambda_r = 1.42074283 \cdot 10^{-7}$, $\lambda_{rc} = -1.37209742 \cdot 10^{-4}$, $p_m(0) = 3.4323275$ и принимают следующие значения: $x(0) = 5436.499832$ км, $y(0) = -2302.294514$ км, $z(0) = 2901.255351$ км, $u(0) = 4.382749$ км/с, $v(0) = 3.998905$ км/с, $w(0) = -5.039253$ км/с, $p_x(0) = 6.877596305 \cdot 10^{-4}$, $p_y(0) = -5.117923954 \cdot 10^{-4}$, $p_z(0) = 4.242065400 \cdot 10^{-4}$, $p_u(0) = 0.4452137$, $p_v(0) = 0.6797791$, $p_w(0) = -0.5828252$. Продолжительность первого активного участка $\Delta t_1 = 963.599$ с является 7-ым параметром пристрелки. Задание этих значений позволяет решить задачу Коши на первом активном участке от $t = 0$ до $t_1 = 0 + \Delta t_1 = 963.599$ с и, в частности, вычислить значения $x(t_{1-})$, ..., $p_m(t_{1-})$ в конце первого активного участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале пассивного участка $x(t_{1+}) = 5750.321518$ км, $y(t_{1+}) = 2451.674603$ км, $z(t_{1+}) = -2953.667007$ км, $u(t_{1+}) = -3.784983$ км/с, $v(t_{1+}) = 4.877047$ км/с, $w(t_{1+}) = -5.872923$ км/с, $p_x(t_{1+}) = 6.748314528 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{1+}) = 4.243828946 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{1+}) = -3.486513000 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{1+}) = -0.3905595$, $p_v(t_{1+}) = 0.7108744$, $p_w(t_{1+}) = -0.6090793$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_1 вычисляется 13 компо-

нент вектор–функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{1+}) = m(t_{1-}) = 0.7246861$, а величина $p_m(t_{1+}) = 4.804146$ определяется из условия $\chi(t_{1+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце первого активного участка $\chi(t_{1-}) = 0$.

Продолжительность пассивного участка $\Delta t_2 = 8058.351$ с является 20-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{1+}), \dots, p_m(t_{1+})$ и продолжительности пассивного участка Δt_2 с учетом условий сброса позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_1$ до $t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 9021.950$ с и, в частности, вычислить значения $x(t_{2-}), \dots, p_m(t_{2-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго (промежуточного) активного участка $x(t_{2+}) = 5742.501691$ км, $y(t_{2+}) = -2459.139367$ км, $z(t_{2+}) = 2960.601205$ км, $u(t_{2+}) = 3.800992$ км/с, $v(t_{2+}) = 4.871913$ км/с, $w(t_{2+}) = -5.868096$ км/с, $p_x(t_{2+}) = 6.739385680 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{2+}) = -4.257316119 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{2+}) = 3.493467688 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{2+}) = 0.3924294$, $p_v(t_{2+}) = 0.7101666$, $p_w(t_{2+}) = -0.6087029$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_2 вычисляется 13 компонент вектор–функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{2+}) = m(t_{2-}) = 0.7246861$, а величина $p_m(t_{2+}) = 4.804146$ определяется из условия $\chi(t_{2+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце первого активного участка $\chi(t_{2-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_3 = 865.789$ с является 33-им параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{2+}), \dots, p_m(t_{2+})$ и продолжительности второго активного участка Δt_3 позволяет решить задачу Коши на активном участке от $t = t_2$ до $t_3 = t_2 + \Delta t_3 = 9887.739$ с и, в частности, вычислить значения $x(t_{3-}), \dots, p_m(t_{3-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале второго пассивного участка $x(t_{3+}) = 6040.237138$ км, $y(t_{3+}) = 2601.660628$ км, $z(t_{3+}) = -2995.637086$ км, $u(t_{3+}) = -3.216579$ км/с, $v(t_{3+}) = 6.001133$ км/с, $w(t_{3+}) = -6.902584$ км/с, $p_x(t_{3+}) = 6.707034075 \cdot 10^{-4}$, $p_y(t_{3+}) = 3.458762980 \cdot 10^{-4}$, $p_z(t_{3+}) = -2.826230091 \cdot 10^{-4}$, $p_u(t_{3+}) = -0.3381762$, $p_v(t_{3+}) = 0.7379494$, $p_w(t_{3+}) = -0.6317941$ считаются параметрами

пристрелки (5.6). В момент переключения t_3 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{3+}) = m(t_{3-}) = 0.4773178$, а величина $p_m(t_{3+}) = 7.396796$ определяется из условия $\chi(t_{3+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{3-}) = 0$.

Для определенности τ_1 , τ_2 , сброс ДТБ выполняется через 2000 с после начала пассивного участка. Масса ДТБ равна 0.0261341, масса КА после сброса ДТБ — 0.4511837. Величина $p_m(\tau_+) = 7.6719373$ является 46-ым параметром пристрелки. Все остальные фазовые и сопряженные переменные в момент сброса непрерывны.

Продолжительность пассивного участка $\Delta t_4 = 18253.7867$ с является 47-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{3+})$, \dots , $p_m(t_{3+})$ и продолжительности второго пассивного участка позволяет решить задачу Коши на пассивном участке от $t = t_3$ до $t_4 = t_3 + \Delta t_4 = 28141.526$ с и, в частности, вычислить значения $x(t_{4-})$, \dots , $p_m(t_{4-})$ в конце участка.

Значения фазовых и сопряженных переменных в начале третьего (последнего) активного участка $x(t_{4+}) = -42147.881566$ км, $y(t_{4+}) = 395.692912$ км, $z(t_{4+}) = -437.239413$ км, $u(t_{4+}) = -0.080770$ км/с, $v(t_{4+}) = -1.057817$ км/с, $w(t_{4+}) = 1.216992$ км/с, $p_x(t_{4+}) = -2.369387822 \cdot 10^{-5}$, $p_y(t_{4+}) = 1.653072432 \cdot 10^{-6}$, $p_z(t_{4+}) = 1.010464180 \cdot 10^{-6}$, $p_u(t_{4+}) = -0.0089161$, $p_v(t_{4+}) = -0.8633112$, $p_w(t_{4+}) = -0.5212079$ считаются параметрами пристрелки (5.6). В момент переключения t_4 вычисляется 13 компонент вектор-функции невязок (5.7). Масса КА считается непрерывной $m(t_{4+}) = m(t_{4-}) = 0.4511837$, а величина $p_m(t_{4+}) = 7.671937$ определяется из условия $\chi(t_{4+}) = 0$. Она непрерывна в силу обращения в ноль функции переключения в конце пассивного участка $\chi(t_{4-}) = 0$. Продолжительность активного участка $\Delta t_5 = 659.490$ с является 60-ым параметром пристрелки. Задание значений $x(t_{4+})$, \dots , $p_m(t_{4+})$ и продолжительности последнего активного участка позволяет решить задачу Коши на активном участке от $t = t_4$ до $T = t_4 + \Delta t_5 = 28801.015$ с и, в частности, вычислить значения $x(T)$, \dots , $p_m(T)$ в конце участка.

В момент оканания перелета: $x(t) = -42154.178477$ км, $y(t) = -778.880845$ км, $z(t) = 77.710790$ км, $u(t) = 0.066360$ км/с, $v(t) = -2.646020$ км/с, $w(t) = 0.258361$ км/с, $m(t) = 0.2627581$, $p_x(t) = -2.364685848 \cdot 10^{-5}$, $p_y(t) = -1.375658059 \cdot 10^{-6}$, $p_z(t) = -8.180582182 \cdot 10^{-7}$, $p_u(t) = 0.0066983$, $p_v(t) = -0.8634025$, $p_w(t) = -0.5212714$, $p_m(t) = 13.174762$. К параметрам пристрелки добавляются 3 множителя Лагранжа $\lambda_{T_a} = -2.36719416 \cdot 10^{-5}$, $\lambda_{T_o} = 6.43355333 \cdot 10^{-9}$, $\lambda_0 = 1.00879612$. В момент T вычисляются 11 компонент вектор-функции невязок (2.8), (2.9), (3.16), (3.41), (4.2). Всего $13+13+13+13+11=63$ условия.

Масса основного топливного бака равна 0.0094213, масса двигателя — 0.001, $m_{\Pi} = 0.2523368$. Импульс довыведения — 0.5 км/с. Конечная орбита КА наклонена к геостационару под углом $i = 5.577^{\circ}$ рад, высота перигея $h_p = 18813.216$ км.

Григорьев И.С., Данилина И.А.

Оптимизация межорбитальных пространственных траекторий
перелетов космического аппарата с разгонным блоком.

Заведующий типографией:

С.М.Сейидов

Технический редактор:

А.Г.Алиев



Подписано в печать 10.01.2020. Формат 64x92.
Бумага офсетная 80 гр, Печать - цифровая,
Объем 12,25 усл. печ. л. Тираж 100

Отпечатано в типографии
Филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Баку