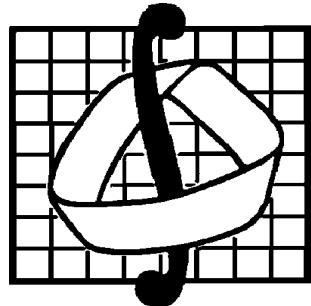


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА



Механико-математический факультет  
Кафедра вычислительной математики

И. С. Григорьев

Методическое пособие по численным  
методам решения краевых задач  
принципа максимума в задачах  
оптимального управления

Москва 2005 год

И. С. Григорьев, Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. — М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико–математическом факультете МГУ, 2005. — 160 с.

Данное пособие призвано помочь при выполнении заданий Практикума по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. При решении краевых задач принципа максимума в Пособии используется метод стрельбы.

Пособие состоит из двух частей.

В первой части Пособия приведено несколько примеров численного решения задач оптимизации (задачи классического вариационного исчисления, Лагранжа, оптимального управления). При решении этих задач обсуждаются возникающие при численном решении проблемы, способы их преодоления, возможные способы обоснования точности определения экстремумов и методы исследования их оптимальности.

Вторая часть Пособия содержит некоторые необходимые при решении задач утверждения и теоремы (без доказательства) с указаниями на литературу, в которой они разбираются подробнее. Также в ней кратко описываются используемые при решении задач методы, входящие составными частями в метод стрельбы.

Для студентов, аспирантов и широкого круга специалистов, занимающихся численным решением задач оптимального управления.

Рецензенты:

д.ф.-м.н., проф. Е. В. Чижонков,  
к.ф.-м.н., доц. М. П. Заплетин.

©Механико-математический факультет МГУ, 2005 г.

©И. С. Григорьев, 2005 г.

## От автора

Данное Пособие призвано помочь при выполнении заданий Практикума по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. Актуальность решения краевых задач принципа максимума подчеркивается следующей цитатой [35, §14, с. 115]:

*“...решение вариационной задачи формально сведено к решению краевой задачи для П-системы (краевой задачи принципа максимума — авт.)... не вызывает никаких сомнений, что разработка надежных методов решения П-систем было бы существенным вкладом в численное решение вариационных задач. К сожалению, здесь встретились значительные трудности, преодолеть которые пока не удалось. Однако следует сразу же отметить, что наиболее точные и аккуратные численные решения вариационных задач связаны именно с решением соответствующих П-систем; правда удалось это, несмотря на многочисленные попытки, в очень редких случаях.”*

Несмотря на прошедшие с момента издания монографии [35] десятилетия справедливость этого высказывания к настоящему времени не изменилась.

При решении краевых задач принципа максимума в Пособии используется метод стрельбы. Никакие другие непрямые или прямые методы решения задач оптимального управления в Пособии не рассматриваются.

Пособие состоит из двух частей. В первой части Пособия приведено несколько примеров численного решения задач оптимизации (задачи классического вариационного исчисления, Лагранжа, оптимального управления). При решении этих задач обсуждаются возникающие при численном решении проблемы, способы их преодоления, возможные способы обоснования точности определения экстремалей и методы исследования их оптимальности. Эти примеры могут, в какой-то мере, служить образцами при выполнении других заданий Практикума.

Вторая часть Пособия содержит некоторые необходимые при решении задач утверждения и теоремы (без доказательства) с указаниями на литературу, в которой они разбираются подробнее. Также в ней кратко описываются используемые

при решении задач методы, входящие составными частями в метод стрельбы. Краткость изложения и связанная с ней необходимость ознакомления с дополнительной литературой является серьезным недостатком Пособия; она обусловлена, в первую очередь, отсутствием в настоящее время всегда приводящего к успеху алгоритма решения задач оптимизации и необходимостью привлечения при решении задач огромного объема недостаточно структурированного материала из различных разделов математики.

Основу настоящего Пособия составляют материалы лекций специального курса, прочитанного автором на механико-математическом факультете, и методические разработки, связанные с выполнением заданий курса "Практикум на ЭВМ" студентами 4-го курса механико-математического факультета. При написании Пособия предполагалось, что выполняющий задание студент знаком с основами теории оптимизации (курс "Классическое вариационное исчисление и оптимальное управление" или "Механика управляемых систем") и с основами численного решения задач оптимального управления [1]. Основное внимание в Пособии уделяется недостаточно освещенным в [1] вопросам (например: "Что делать, если классическая вычислительная схема метода стрельбы не позволяет определить решение задачи?").

Автор надеется, что это Пособие окажется полезным и просит всех заинтересованных читателей присыпать свои замечания и предложения по e-mail: [iliagri@newmail.ru](mailto:iliagri@newmail.ru) или [iliagri@mech.math.msu.su](mailto:iliagri@mech.math.msu.su).

Автор благодарен К. Г. Григорьеву, А. В. Дмитруку, М. П. Заплетину, Е. В. Заплетиной, Г. М. Кобелькову, А. В. Попову, Д. А. Силаеву, Е. В. Чижонкову и моей семье за помощь, консультации, внимание к работе и поддержку.

## **Задание и задачи**

Этот раздел написан для студентов, выполняющих задания “Практикума по ЭВМ”, и для преподавателей, ведущих занятия по “Практикуму”.

По результатам проведенного исследования студентом пишется отчет о решенной задаче, состоящий из следующих пунктов:

- 1) постановка решаемой задачи и ее формализация;
- 2) сведение решения задачи оптимизации к решению краевой задачи;
- 3) анализ полученной краевой задачи и формирование вычислительной схемы ее решения (формирование вектора параметров пристрелки и вектор-функции невязок, выбор метода решения задачи Коши с учетом ее особенностей, выбор метода решения системы полученных алгебраических уравнений);
- 4) описание полученных при решении результатов и обоснование их точности.

Решение задачи на основе необходимых условий оптимальности не дает ответа на вопрос об относительной или абсолютной оптимальности полученного решения, а только выделяет серию экстремалей, на которых минимум может достигаться. Поэтому в тех задачах, где это возможно, исследование не должно ограничиваться решением краевой задачи. В отчет желательно включить

- 5) исследование относительной (локальной) и/или абсолютной оптимальности полученных экстремалей.

Обратим внимание, что в конце каждого из решенных в Пособии примеров включено описание пунктов отчета в рассматриваемых случаях.

**Дополнительное разъяснение** для студентов, задающих вопрос: “Что из себя представляет отчет?”

Отчет представляет собой связный текст, написанный на языке, понятном преподавателю. Особенно важно, чтобы этот текст был *полностью понятен* преподавателю вне зависимости от наличия рядом написавшего его студента. В этом тексте *должны* найти отражение пункты 1–4 и, *желательно*, пункт 5. Наличие графиков (рисунков) в отчете желательно, но не является необ-

ходимым. Все представленные числа должны иллюстрировать какую–либо приведенную в тексте отчета мысль.

**Примечание для преподавателей.** В постановках задач используются некоторые константы. Зачастую эти константы выбирались так, чтобы решение задачи оказывалось сравнительно простым. Некоторые задачи имеют аналитическое решение. При решении задач Практикума необходимо не просто как–либо решить эти сравнительно несложные задачи для специально подобранных констант, а реализовать работоспособный алгоритм численного решения задач. Наличие аналитического решения и специально подобранные значения позволяют легко оценить точность численного решения.

### Задачи классического вариационного исчисления и задачи Лагранжа

1.  $B_0 \equiv \int_0^T (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr},$   
 $x(0) = x(T) = 0, \dot{x}(T) = 1,$   
 $T = \{0.1; 1.0; 2.0; 3.0; 3.5; 10.0; 20.0\}.$
2.  $\int_0^T (\ddot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr},$   
 $x(0) = x(T) = 0, \dot{x}(T) = 1, \quad T \in [0.1; 10.0].$
3.  $\int_0^{\pi/2} u^2 dt \rightarrow \inf, \quad \ddot{x} + x \exp(-\alpha x) = u,$   
 $x(0) = x(\pi/2) = 0, \dot{x}(\pi/2) = -\pi/2, \quad \alpha \in [0.0; 25.0].$
4.  $\int_0^{\pi/2} u^2 dt \rightarrow \inf, \quad \ddot{x} + x \exp(-\alpha x) = u,$   
 $\dot{x}(0) = 0, x(\pi/2) = 0.8, \quad \alpha \in [0.0; 25.0].$
5.  $\int_0^{\pi/2} u^2 dt + x^2(0) \rightarrow \inf, \quad \ddot{x} + x \exp(-\alpha x) = u,$   
 $\dot{x}(0) = x(\pi/2) = 0, \dot{x}(\pi/2) = 1, \quad \alpha \in [0.0; 25.0].$
6.  $\int_0^{\pi/2} u^2 dt \rightarrow \inf, \quad \ddot{x} + x \exp(-\alpha t) = u,$   
 $\dot{x}(0) = x(\pi/2) = 0, \dot{x}(\pi/2) = -\pi/2,$   
 $\alpha = \{0.0; 0.1; 1.5; 10.0\}.$
7.  $\int_0^1 u^2 dt \rightarrow \inf, \quad \ddot{x} - x \exp(-\alpha x) = u,$   
 $x(0) = \dot{x}(0) = 0, x(1) = \operatorname{sh} 1, \dot{x}(1) = e (= \operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} 1),$   
 $\alpha = \{0.0; 0.01; 0.5; 1.5; 10.5\}.$

8.  $\int_0^1 u^2 dt \rightarrow inf$ ,  $\ddot{x} - x \cos(\alpha \dot{x}) = u$ ,  
 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ,  $x(1) = \operatorname{sh} 1$ ,  $\dot{x}(1) = e$  ( $= \operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} 1$ ),  
 $\alpha = \{0.0; 0.01; 0.5; 1.5; 10.5\}$ .
9.  $\int_0^{\pi/2} u^2 dt + \dot{x}^2(0) \rightarrow inf$ ,  $\ddot{x} + x/(1 + \alpha x^2) = u$ ,  
 $x(0) = 0$ ,  $x(\pi/2) = 1$ ,  $\alpha = \{0.0; 0.01; 0.5; 1.5; 10.5\}$ .
10.  $\int_0^{\pi/2} u^2 dt + \dot{x}^2(0) \rightarrow inf$ ,  $\ddot{x} + x/(1 + \alpha t^2) = u$ ,  
 $x(0) = 0$ ,  $x(\pi/2) = 1$ ,  $\alpha = \{0.0; 0.01; 0.5; 1.5; 10.5\}$ .
11.  $\int_0^{\pi/2} u^2 dt \rightarrow inf$ ,  $\ddot{x} + x/(1 + \alpha t^2) = u$ ,  
 $x(0) = x(\pi/2) = 0$ ,  $\dot{x}(\pi/2) = -\pi/2$ ,  
 $\alpha = \{0.0; 0.01; 1.02; 10.01\}$ .
12.  $\int_0^{\pi/2} u^2 dt \rightarrow inf$ ,  $\ddot{x} + \dot{x}/(1 + \alpha x^2) = u$ ,  
 $x(0) = x(\pi/2) = 0$ ,  $\dot{x}(\pi/2) = -\pi/2$ ,  
 $\alpha = \{0.0; 0.01; 1.02; 10.01\}$ .
13.  $\int_0^2 u^2 dt \rightarrow inf$ ,  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -ux_1$ ,  
 $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = -x_2(2) = \alpha$ ,  $x_1(2) = 0$ ,  
 $\alpha \in [0.1; 10.0]$ .
14.  $\int_0^1 x^2 + u^2 dt \rightarrow extr$ ,  $\ddot{x} + \sqrt{2}x \exp(-\alpha x) = u$ ,  
 $x(0) = 1$ ,  $\alpha = \{0.0; \pm 0.01; \pm 1.0; \pm 10.0\}$ .
15.  $\int_0^1 x^2 + u^2 dt \rightarrow extr$ ,  $\ddot{x} + \sqrt{2}x \exp(-\alpha t) = u$ ,  
 $x(0) = 1$ ,  $\alpha = \{0.0; 0.01; 1.0; 10.0\}$ .
16.  $\int_0^1 x^2 + u^2 dt \rightarrow extr$ ,  $\ddot{x} + 2x \sin(\pi/(4 + \alpha t^2)) = u$ ,  
 $x(0) = 1$ ,  $\alpha = \{0.0; 0.01; 0.5; 1.5; 10.5\}$ .
17.  $\int_0^1 x^2 + 2u^2 dt \rightarrow extr$ ,  $\dot{x} - \sin(\pi/(4 + \alpha t^2)) = u$ ,  
 $x(0) = 1$ ,  $\alpha = \{0.0; 0.01; 0.5; 1.5; 10.7\}$ .
18.  $\int_0^1 x^2 + 2u^2 dt \rightarrow extr$ ,  $\dot{x} - \sin(\pi/(4 + \alpha x^2)) = u$ ,  
 $x(0) = 1$ ,  $\alpha = \{0.0; 0.01; 0.5; 1.5; 10.7\}$ .
19.  $\int_0^{4.1} u^4 + \varepsilon u^2 dt \rightarrow inf$ ,  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -ux_1$ ,  
 $x_1(0) = x_1(4.1) = 0$ ,  $x_2(0) = x_2(4.1) = \alpha$ ,  $\alpha = 0.3$ ,  
 $\varepsilon = \{0.0; 0.5\}$ . (аналог задачи IAa6).

20.  $\int_0^\pi (\dot{x}^2 \exp(-\alpha x)) dt \rightarrow extr,$   
 $\int_0^\pi x \sin t dt = 1, \int_0^\pi x \cos t dt = 0,$   
 $x(0) = 0, \quad \alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0\}$  (см. 11.23).
21.  $\int_0^\pi (\dot{x}^2 \exp(-\alpha x)) dt \rightarrow extr,$   
 $\int_0^\pi x \sin t dt = 1, \int_0^\pi x \cos t/(1 + \alpha t^2) dt = 0,$   
 $x(0) = 0, \quad \alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 5.0\}$  (см. 11.23).
22.  $\int_0^1 (\dot{x}^2 \exp(-\alpha t)) dt \rightarrow extr,$   
 $\int_0^1 x dt = \int_0^1 x^3 t/(1 + \alpha t^2) dt = 0,$   
 $x(0) = 0, x(1) = 1, \quad \alpha = \{0.0; 0.01; 0.5; 1.5; 10.5\}.$
23.  $\int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 \exp(\alpha t)) dt \rightarrow extr,$   
 $x(0) = 0, x(\pi/2) = 1, \quad \alpha \in [-A; A].$
24.  $\int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 \cos(\alpha x)) dt \rightarrow extr,$   
 $x(0) = 0, x(\pi/2) = 1, \quad \alpha = \{0.0; 0.01; 0.5; 1.5; 10.5\}.$
25.  $\int_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 + x \exp(-\alpha x^2)) dt \rightarrow extr,$   
 $x(0) = 0, x(\pi/2) = 1, \quad \alpha \in [-A; B].$  (задача IA69).
26.  $\int_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 + x \cos(\alpha x)) dt \rightarrow extr,$   
 $x(0) = 0, x(\pi/2) = 1, \dot{x}(0) = 2,$   
 $\alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0\}.$
27.  $\int_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x/(1 + \alpha t^2)) dt \rightarrow extr,$   
 $x(1) = \dot{x}(0) = 0, \quad \alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 5.1\}.$
28.  $\int_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x/(1 + \alpha \dot{x}^2)) dt \rightarrow extr,$   
 $x(1) = \dot{x}(0) = 0, \quad \alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 5.1\}.$
29.  $\int_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x/(1 + \exp(-\alpha t))) dt \rightarrow extr,$   
 $x(1) = \dot{x}(0) = 0, \quad \alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 5.1\}.$
30.  $\int_0^1 (\ddot{x}^2 - 48\dot{x}/(2 + \cos(\alpha x))) dt \rightarrow extr,$   
 $x(1) = \dot{x}(0) = 0, \quad \alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 5.1\}.$
31.  $\int_0^1 (\ddot{x}^2/(1 + \alpha x^2)) dt \rightarrow extr,$   
 $x(0) = \dot{x}(1) = 0, \dot{x}(0) = 1, \quad \alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0\}.$

32.  $\int_0^1 (\ddot{x}^2(\cos(\alpha x) + 2)/(1 + \alpha t^2)) dt \rightarrow extr,$   
 $x(0) = \dot{x}(1) = 0, \dot{x}(0) = 1, \alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0\}.$

33.  $\int_0^1 (\ddot{x}^2/(1 + \alpha t^4)) dt \rightarrow extr,$   
 $\int_0^1 x dt = 1, x(0) = \dot{x}(1) = 0, \dot{x}(0) = 1, \alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0\}.$

34.  $\int_0^1 (\ddot{x}^2/(1 + \alpha t^2 x^2)) dt \rightarrow extr,$   
 $\int_0^1 x dt = 1, x(0) = \dot{x}(1) = 0, \dot{x}(0) = 1, \alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0\}.$

35.  $T \rightarrow inf, \int_0^T \ddot{x}^2/(1 + \alpha \sin^2 x) dt = 1,$   
 $x(0) = \dot{x}(0) = x(T) = 0, \dot{x}(T) = 1, \alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0\}$  (см. 11.118).

36.  $T \rightarrow inf, \int_0^T \ddot{x}^2/(1 + \alpha t^6) dt = 1,$   
 $x(0) = \dot{x}(0) = 0, \dot{x}(T) = 1, \alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0\}$  (см. 11.117).

### Задачи оптимального управления

37.  $\int_0^T (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow extr, |\ddot{x}| \leq 1,$   
 $x(0) = x(T) = 0, \dot{x}(0) = 0, T = \{0.1; 1.0; 10.0; 20.0\}.$

38.  $\int_0^T (\ddot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow extr, |\ddot{x}| \leq 1,$   
 $x(0) = x(T) = 0, \dot{x}(0) = 1, T = \{0.1; 1.0; 10.0; 20.0\}.$

39.  $\int_0^T (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow extr, |\dot{x}| \leq 1,$   
 $x(0) = x(T) = 0, T = \{0.1; 1.0; 10.0; 20.0\}.$

40.  $\int_0^1 x/(1 + \alpha \cos^2 \dot{x}) dt \rightarrow extr, |\dot{x}| \leq 2,$   
 $x(0) = \dot{x}(1) = 0, \alpha = \{0.0; 0.01; 0.5; 1.0; 10.0\}.$

41.  $\int_0^4 x^\beta/(1 + \exp \alpha \dot{x}^2) dt \rightarrow extr, |\ddot{x}| \leq 2,$   
 $\dot{x}(0) = \dot{x}(4) = 0, x(0) + x(4) = 0, \alpha = \{0.0; 0.01; 0.5; 1.0; 10.0\}, \beta = \{1; 3\}.$

42.  $\int_0^2 t^r/(1 + \dot{x}^2) dt \rightarrow inf, 0 \leq \ddot{x} \leq 16,$   
 $x(0) = 0, x(2) = 1, r = \{1; 2\}$  (задача IАa9).

43.  $\int_0^1 (\ddot{x}/(1+\alpha t^4)) dt \rightarrow \inf, \quad |\ddot{x}| \leq 1,$   
 $x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x(1) = -11/24,$   
 $\alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 11.0\}.$
44.  $\int_0^1 (\ddot{x}/(1+\alpha x^2 \dot{x}^2)) dt \rightarrow \inf, \quad |\ddot{x}| \leq 1,$   
 $x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x(1) = -11/24,$   
 $\alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 11.0\}.$
45.  $\int_0^4 (\ddot{x}^2 \exp(\alpha x)) dt \rightarrow \inf, \quad \ddot{x} \leq 24,$   
 $x(0) = 11, \quad x(4) = \dot{x}(4) = 0, \quad \alpha = \{-0.5; 0.0; 1.0; 10.0\}.$
46.  $\int_0^4 (\ddot{x}^2 \cos(\alpha x) - \dot{x}^2) dt \rightarrow \inf, \quad \ddot{x} \leq 24,$   
 $x(0) = 11, \quad x(4) = \dot{x}(4) = 0, \quad \alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0\}.$
47.  $T \rightarrow \inf, \quad |u| \leq 1,$   
 $\dot{x}_1 = (u - 2/3)x_1 + x_2/6, \quad \dot{x}_2 = 2x_1/3 - x_2/6,$   
 $(x_1 > 0, \quad x_2 > 0 - \text{Задача IA61}):$   
 а)  $x_1(0) = 3.0, \quad x_2(0) = 5.0, \quad x_1(T) = 2.0, \quad x_2(T) = 2.5;$   
 б)  $x_1(0) = 0.1, \quad x_2(0) = 5.0, \quad x_1(T) = 1.0, \quad x_2(T) = 1.5;$   
 в)  $x_1(0) = 0.01, \quad x_2(0) = 7.0, \quad x_1(T) = 2.0, \quad x_2(T) = 3.0;$   
 г)  $x_1(0) = 4.0, \quad x_2(0) = 7.0, \quad x_1(T) = 3.0, \quad x_2(T) = 3.5.$
48.  $x_1^2(8) + x_2^2(8) \rightarrow \text{extr},$   
 $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -0.4x_1 - 0.3x_2 + 0.2|u|^{1+\alpha} \text{sign } u,$   
 $|u| \leq 0.8, \quad x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = 7, \quad \alpha = \{0, 1\}$  (задача II.1).

### Задачи оптимального управления с режимами осо- бого управления первого порядка

49.  $\int_0^T (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}, \quad |\ddot{x}| \leq 1,$   
 $x(0) = x(T) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad T = \{0.1; 1.0; 10.0; 20.0\}.$
50.  $\int_0^T (\ddot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}, \quad |\ddot{x}| \leq 1,$   
 $x(0) = x(T) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad T = \{0.1; 1.0; 10.0; 20.0\}.$
51.  $\int_0^T (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}, \quad |\ddot{x}| \leq 1,$   
 $x(0) = \dot{x}(0) = x(T) = 0, \quad T = \{0.1; 1.0; 10.0; 20.0\}.$

52.  $\int_0^4 x \exp(-\alpha x) dt \rightarrow extr$ ,  $|\dot{x}| \leq 2$ ,  
 $x(0) = x(4) = 0$ ,  $\alpha = \{0.0; 0.01; 0.5; 1.5; 10.5\}$ .
53.  $\int_0^4 x \exp(-\alpha x) dt \rightarrow extr$ ,  $|\dot{x}| \leq 2$ ,  
 $x(0) = 0$ ,  $\alpha = \{0.0; 0.01; 0.5; 1.5; 10.5\}$ .
54.  $\int_0^4 x^2 \exp(-\alpha x) dt \rightarrow extr$ ,  $|\dot{x}| \leq 2$ ,  
 $x(0) = x(4) + 1$ ,  $\alpha = \{0.0; 0.01; 0.5; 1.5; 10.5\}$ .
55.  $\int_0^4 x \exp(-\alpha x) dt \rightarrow extr$ ,  $|\dot{x}| \leq 2$ ,  
 $x(0) + x(4) = 0$ ,  $\alpha = \{0.0; 0.01; 0.1; 1.0; 10.0\}$ .
56.  $\int_0^4 (\dot{x}^2 + x \exp(\alpha x)) dt \rightarrow inf$ ,  $|\ddot{x}| \leq 1$ ,  
 $x(0) = \dot{x}(0) = x(4) = 0$ ,  $\alpha = \{0.0; \pm 1.0; \pm 5.0\}$ .
57.  $\int_0^4 (\dot{x}^2 + x \cos(\alpha x)) dt \rightarrow extr$ ,  $|\ddot{x}| \leq 1/3$ ,  
 $x(0) = x(4) = 0$ ,  $\alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0\}$ .
58.  $\int_0^4 (\dot{x}^2 + x/(1 + \alpha t^2)) dt \rightarrow extr$ ,  $|\ddot{x}| \leq 1$ ,  
 $x(0) = \dot{x}(4) = 0$ ,  $\alpha = \{0.0; 0.01; 0.5; 1.5; 10.5\}$ .
59.  $\int_0^4 (\dot{x}^2 + x^p/(1 + \alpha x^2)) dt \rightarrow extr$ ,  $|\ddot{x}| \leq 1/3$ ,  
 $x(0) = 0$ ,  $x(4) = 2$ ,  $p = \{0; 1; 2; 4\}$ ,  
 $\alpha = \{0.0; 0.01; 0.5; 1.5; 5.0\}$  (задача ИБа2).
60.  $\int_0^2 x/(1 + \alpha \dot{x}^2) dt \rightarrow inf$ ,  $|\ddot{x}| \leq 1$ ,  
 $x(0) = x(2) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0$ ,  
 $\alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0; 50.0\}$ .
61.  $\int_0^2 x/(1 + \alpha |\dot{x}|^3) dt \rightarrow inf$ ,  $|\ddot{x}| \leq 1$ ,  
 $x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0$ ,  $\alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0; 50.0\}$ .
62.  $\int_0^2 x/(1 + \alpha |\dot{x}|^3) dt \rightarrow inf$ ,  $|\ddot{x}| \leq 1$ ,  
 $x(0) = x(2) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0$ ,  
 $\alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0; 50.0\}$ .
63.  $\int_0^2 x/(1 + \alpha \dot{x}^4) dt \rightarrow inf$ ,  $|\ddot{x}| \leq 1$ ,  
 $x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0$ ,  $\alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0; 50.0\}$ .
64.  $\int_0^2 x/(1 + \alpha \dot{x}^4) dt \rightarrow inf$ ,  $|\ddot{x}| \leq 1$ ,  
 $x(0) = x(2) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0$ ,  
 $\alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0; 50.0\}$ .

65.  $\int_0^2 x/(1 + \alpha|\dot{x}|^5)dt \rightarrow inf$ ,  $|\ddot{x}| \leq 1$ ,  
 $x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0$ ,  $\alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0; 50.0\}$ .

66.  $\int_0^2 x/(1 + \alpha|\dot{x}|^5)dt \rightarrow inf$ ,  $|\ddot{x}| \leq 1$ ,  
 $x(0) = x(2) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0$ ,  
 $\alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0; 50.0\}$ .

67.  $\int_0^2 x/(1 + \alpha\dot{x}^6)dt \rightarrow inf$ ,  $|\ddot{x}| \leq 1$ ,  
 $x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0$ ,  $\alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0; 50.0\}$ .

68.  $\int_0^2 x/(1 + \alpha\dot{x}^6)dt \rightarrow inf$ ,  $|\ddot{x}| \leq 1$ ,  
 $x(0) = x(2) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0$ ,  
 $\alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 10.0; 50.0\}$ .

**Задачи оптимального управления с режимами осо-  
бого управления второго порядка**

69.  $\int_0^4 x \exp(-\alpha x)dt \rightarrow extr$ ,  $|\ddot{x}| \leq 2$ ,  
 $x(0) = x(4) = \dot{x}(4) = 0$ ,  $\alpha = \{0.0; 0.01; 0.5; 1.5; 10.5\}$ .

70.  $\int_0^4 x \exp(-\alpha x)dt \rightarrow extr$ ,  $|\ddot{x}| \leq 2$ ,  
 $\dot{x}(0) = \dot{x}(4) = 0$ ,  $x(0) + x(4) = 0$ ,  
 $\alpha = \{0.0; 0.01; 0.1; 1.0; 10.0\}$  (задача IIa5).

## Глава 1.

### Примеры решения задач

#### 1.1. Простейшая задача классического вариационного исчисления

Простейшей задачей классического вариационного исчисления называется следующая экстремальная задача в пространстве  $C^1([t_0, t_1])$ :

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \inf, \quad x(0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Совокупность необходимых и достаточных условий слабого и сильного локальных экстремумов для простейшей задачи классического вариационного исчисления подробно рассматривается в [2, 3, 14, 15, 16]. Алгоритм решения простейшей задачи классического вариационного исчисления следующий. Во-первых, записывается уравнение Эйлера–Лагранжа и решается полученная таким образом краевая задача. Во-вторых, проверяется выполнение на найденных экстремалах условия Лежандра — необходимого условия слабого локального экстремума. Условие Лежандра выполнено, если на экстремали  $L_{\dot{x}\dot{x}}$  неотрицательно определена; если на экстремали  $L_{\dot{x}\dot{x}}$  положительно определена, то выполнено усиленное условие Лежандра. Экстремали, на которых выполняется усиленное условие Лежандра, проверяются на выполнение условия Якоби — необходимого условия слабого локального экстремума. Условие Якоби выполнено, если в интервале  $(t_0, t_1)$  нет точек, сопряженных с  $t_0$ ; если в полуинтервале  $(t_0, t_1]$  нет точек, сопряженных с  $t_0$ , то выполнено усиленное условие Якоби. Если на экстремали выполняется усиленное условие Якоби, то на этой экстремали достигается слабый локальный экстремум. В–третьих, проверяется выполнение условия квазирегулярности (усиленного условия Вейерштрасса). Согласно этому условию подынтегральная

функция  $L$  является выпуклой по  $\dot{x}$  функцией в некоторой окрестности экстремали (ее вторая производная по  $\dot{x}$  неотрицательно определена в окрестности экстремали). Если на экстремали выполняется усиленное условие Якоби и выполняется условие квазирегулярности, то на этой экстремали достигается сильный локальный экстремум (если условие квазирегулярности выполняется на всем пространстве — то абсолютный экстремум). Если условие квазирегулярности не выполняется, то проверяется выполнение условия Вейерштрасса — необходимо го условия сильного локального экстремума.

По результатам проведенного исследования делается соответствующий вывод: в случае невыполнения какого-либо необходимого условия соответствующий (сильный или слабый) экстремум не достигается, в случае выполнения достаточных условий соответствующий экстремум достигается, в случае выполнения системы необходимых условий и невыполнения системы достаточных условий для ответа на вопрос о достижении экстремума необходимо провести дополнительное исследование.

Необходимо заметить, что при решении простейшей задачи классического вариационного исчисления как задачи оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина, выполнение условий Лежандра и Вейерштрасса является следствием выполнения условия максимума функции Понтрягина (минимума лагранжиана) по управлению.

### 1.1.1. Постановка задачи

$$\int_0^{\pi/2} (x^2 - x^2 \exp(\alpha t)) dt \rightarrow \inf, \quad (1.1)$$

$x(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 1, \quad \alpha \in [-A, A]$  — параметр задачи.

### 1.1.2. Формализация задачи как задачи оптимального управления

$$\int_0^{\pi/2} (u^2 - x^2 \exp(\alpha t)) dt \rightarrow \inf,$$

$$\dot{x} = u, \quad u \in R,$$

$$x(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 1,$$

$\alpha \in [-A, A]$  — параметр задачи.

### 1.1.3. Система необходимых условий оптимальности

Основные конструкции:

$$\mathcal{L} := \int_0^{\pi/2} L dt + l,$$

$$L := \lambda_0(u^2 - x^2 \exp \alpha t) + p(\dot{x} - u),$$

$$l := \lambda_1 x(0) + \lambda_2 x(\pi/2),$$

$$H := pu - \lambda_0(u^2 - x^2 \exp \alpha t).$$

Необходимые условия оптимальности:

а) уравнение Эйлера–Лагранжа (сопряженное уравнение):

$$\dot{p} = -2\lambda_0 x \exp \alpha t;$$

б) условие оптимальности по управлению:

$$\hat{u} = \underset{u \in R}{argabsmax}(pu - \lambda_0 u^2),$$

при  $\lambda_0 \neq 0$

$$\hat{u} = \frac{p}{2\lambda_0};$$

в) условия трансверсальности:

$$p(0) = \lambda_1, \quad p(\pi/2) = -\lambda_2.$$

Условий стационарности г) и дополняющей нежесткости д) нет, так как концы фиксированы ( $t_0 = 0, t_1 = \pi/2$ ) и в постановке задачи отсутствуют условия типа “меньше или равно”.

е) Условие неотрицательности:  $\lambda_0 \geq 0$ ;

ж) множители Лагранжа Не Равны Одновременно Нулю (условие НЕРОН);

з) множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного сомножителя (условие нормировки).

#### 1.1.4. Краевая задача

Для формирования краевой задачи принципа максимума необходимо выбрать условие нормировки. Проведем анализ возможности аномального случая  $\lambda_0 = 0$ . В этом случае  $\dot{p} = 0$ . При  $p = \text{const} \neq 0$  из условия оптимальности по управлению следует  $u = \pm\infty$  и такой управляемый процесс не является допустимым. При  $p \equiv 0$  числовые множители Лагранжа также равны нулю:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ . То есть из предположения  $\lambda_0 = 0$  следует, что все множители Лагранжа равны нулю, что недопустимо. Поэтому в качестве условия нормировки задачи выбирается условие  $\lambda_0 = 1/2$ .

Таким образом, на основе принципа максимума решение рассматриваемой простейшей задачи классического вариационного исчисления сводится к решению краевой задачи:

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -x \exp \alpha t, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 1, \quad \alpha \in [-A, A].$$

Во-первых, заметим, что проведенное обоснование невозможности аномального случая справедливо для любой простейшей задачи классического вариационного исчисления и, во-вторых, что полученная краевая задача есть следствие необходимого условия экстремальности в простейшей задаче классического вариационного исчисления — уравнения Эйлера—Лагранжа

$$-\frac{dL_{\dot{x}}}{dt} + L_x = 0,$$

где  $L := \dot{x}^2 - x^2 \exp(\alpha t)$  [2, 3, 15].

#### 1.1.5. Численное решение краевой задачи

Краевая задача решается методом стрельбы (см. п. 2.2). В качестве параметра пристрелки выбирается значение  $\beta_1 = p(0)$ . Задав это значение каким-либо образом, мы сможем решить задачу Коши на отрезке  $[0, \pi/2]$  и получить соответствующие выбранному значению  $\beta_1$  величины  $x(\pi/2)[\beta_1]$  и  $p(\pi/2)[\beta_1]$ . Задача Коши для системы двух дифференциальных уравнений, входящая составной частью в метод стрельбы, как и во всех других рассматриваемых примерах, решается численно явным

методом Рунге–Кутты 8-го порядка, основанном на формулах Дормана–Принса 8(7) DOPRI8<sup>1)</sup> [38]. Для решения краевой задачи необходимо подобрать значение  $\beta_1$  так, чтобы выполнялось условие  $x(\pi/2)[\beta_1] - 1 = 0$ , принимаемое в данном случае в качестве функции невязки.

Таким образом, в результате выбора вычислительной схемы метода стрельбы решение краевой задачи свелось к решению алгебраического уравнения

$$x(\pi/2)[\beta_1] - 1 = 0.$$

В силу линейности дифференциального уравнения это алгебраическое уравнение линейно.

### 1.1.6. Результаты решения краевой задачи и оценки точности этого решения

Метод стрельбы (при точном решении задачи Коши) находит решение этой задачи за одну итерацию и сводится в данном случае к нахождению решения задачи Коши для начальных условий  $x(0) = 0$ ,  $p(0) = 1$  с последующим умножением построенного решения на вычисленное значение  $x^{-1}(\pi/2)[1]$  (при  $x(\pi/2)[1] \neq 0$ ). (Таким образом, решен вопрос существования и единственности решения краевой задачи). Так как задача Коши решается приближенно, и поскольку при различных значениях  $p(0)$  величины шагов выбираются немного по–разному (см., например, текст программы DOPRI8 в [38, прил. 2]), то метод стрельбы может сделать более одного шага, корректируя погрешность вычисления значения  $p(0)$ . Такая коррекция аналогична уточнению решения системы линейных алгебраических уравнений в методе Гаусса с повторным пересчетом [7, гл. 8 §3; 31, §8.4].

Рассматриваемая краевая задача линейна, и параметр пристрелки один, поэтому для оценки точности решения краевой задачи достаточно оценить точность решения задачи Коши.

В качестве нормы погрешности используется евклидова норма вектора погрешности — корень из суммы квадратов.

---

<sup>1)</sup> Разумеется, использование именно этого метода при решении задачи Коши не необходимо (см. примечание в п. 2.4).

Матрица Якоби системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\exp(\alpha t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Для определения скорости распространения ошибки определяется логарифмическая норма матрицы  $\mu(J)$  — максимальное собственное значение матрицы

$$(J + J^T)/2 = \begin{pmatrix} 0 & (1 - \exp(\alpha t))/2 \\ (1 - \exp(\alpha t))/2 & 0 \end{pmatrix}:$$

$$\mu(J) = |1 - \exp(\alpha t)|/2$$

и норма матрицы  $\|J\|$  — максимальное сингулярное число:

$$(J^T J) = \begin{pmatrix} \exp(2\alpha t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \quad \|J\| = \begin{cases} 1, & \text{при } \alpha \leq 0, \\ \exp(\alpha t), & \text{при } \alpha > 0. \end{cases}$$

Очевидно, что в рассматриваемом примере  $\mu(J) \leq \|J\|$ . Поэтому в оценках глобальной погрешности используется теорема I.10.6 (см. [38, гл. I, §10, стр. 66], п. 2.4)

При оценке точности решения задачи Коши предполагается, что начальные условия заданы точно, то есть в условии  $\|v(0) - x(0)\| \leq \delta_K(0)$ ,  $\delta_K(0) = 0$ .

Правые части в системе дифференциальных уравнений также считаются вычисляемыми точно, то есть в условии  $\|\dot{v}(t) - f(t, v(t))\| \leq \rho(t)$ ,  $\rho(t) \equiv 0$ .

Учитывая, что для логарифмической нормы получена аналитическая формула, не зависящая от  $x(t)$  и  $p(t)$ ,  $\mu(J(t, x(t), p(t))) = l(t)$ ,  $l(t) = |1 - \exp(\alpha t)|/2$  (см. теорему I.10.6 п. 2.5), интеграл  $L_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} l(s) ds$  можно не только оценивать (см. п. 2.4), но и вычислять явно:

$$L_i = \begin{cases} |(t_{i+1} - t_i)/2 - (\exp(\alpha t_{i+1}) - \exp(\alpha t_i))/2\alpha|, & \text{при } \alpha \neq 0, \\ 0, & \text{при } \alpha = 0. \end{cases}$$

С учетом вышеизложенного, на первом этапе вычисляется величина  $\delta_K(\pi/2)$  — оценка погрешности решения задачи Коши в конечный момент времени  $t = \pi/2$  (см. п. 2.4).

После того, как погрешность решения задачи Коши оценена, перейдем к оценке точности решения краевой задачи. Для этого оценивается относительная точность выбора начальных условий — параметра пристрелки  $\beta_1$ . Затем (в силу специфики задачи) оценка погрешности решения краевой задачи получается из оценки погрешности решения задачи Коши умножением на величину  $1 + \Delta\beta_1/\beta_1$ .

В силу линейности уравнения абсолютная погрешность определения величины параметра пристрелки оценивается величиной

$$\Delta\beta_1 = \frac{\delta_K(\pi/2) + |x(\pi/2)[\beta_1] - 1|}{\beta_1 \cdot (1 - \beta_1 \delta_K(\pi/2))}, \quad (1.2)$$

где  $\delta_K(\pi/2)$  — вычисленная оценка абсолютной погрешности решения задачи Коши,  $|x(\pi/2)[\beta_1] - 1|$  — величина невязки (точность выполнения краевого условия при  $t = 1$ ),  $\beta_1 = p(0) = (dx(\pi/2)[\beta_1]/d\beta_1)^{-1}$  — величина, обратная к производной вычисленного в результате решения задачи Коши значения по параметру пристрелки (в обозначениях п. 2.4 —  $\|J^{-1}\|$ ). Заметим, что в данном случае точность вычисления производной оценивается той же величиной  $\delta_K(\pi/2)$ , что и точность решения задачи Коши (в силу линейности и так как известно одно точное, тождественно нулевое решение задачи Коши при  $p(0) = 0$ ). Кроме того заметим, что точность выполнения арифметических операций при этом считалась много меньшей используемых в (1.2) величин и потому не учитывалась.

Зависимость значений величины параметра пристрелки  $\beta_1 := p(0) \equiv \dot{x}(0)$  от величины параметра  $\alpha$  представлена на рис. 1.1 и в табл. 1.1. Кроме того, в табл. 1.1 представлена дополнительная информация о построенных экстремалах и о точности их построения. В ней содержатся вычисленные на экстремали: значение функционала (1.1), оценка абсолютной величины погрешности решения задачи Коши  $\delta_K(\pi/2)$  и величина невязки  $x(\pi/2) - 1$ . Представленные величины вычислялись при ограничении относительной локальной погрешности  $10^{-10}$ .

Забегая вперед, отметим, что разрыв графика на рис. 1.1 при  $\alpha = \alpha_* \approx 1.56245352$  соответствует наличию сопряженной точки в конечный момент  $t = \pi/2$ . В табл. 1.1 экстремали при  $\alpha < \alpha_*$  и при  $\alpha > \alpha_*$  разделены горизонтальной линией.

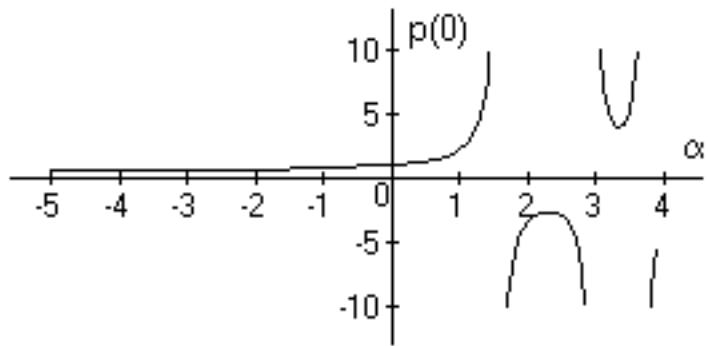


Рис. 1.1 Зависимость величины  $p(0)$ , соответствующей решению краевой задачи, от параметра  $\alpha$ .

**Таблица 1.1.** Семейство экстремалей в зависимости от  $\alpha$ .

$\alpha$	$\beta_1 = p(0)$	$B_0$	$\delta_K(\pi/2)$	$x(\pi/2) - 1$
-4.00000	0.6646999	0.6243404	$7.9 \cdot 10^{-11}$	$-1.6 \cdot 10^{-10}$
-3.00000	0.6802611	0.6103524	$7.4 \cdot 10^{-11}$	$5.5 \cdot 10^{-10}$
-2.00000	0.7113991	0.5720144	$7.4 \cdot 10^{-11}$	$4.4 \cdot 10^{-10}$
-1.00000	0.7838201	0.4516115	$7.0 \cdot 10^{-11}$	$1.8 \cdot 10^{-10}$
0.00000	1.0000000	$1.1 \cdot 10^{-12}$	$6.7 \cdot 10^{-11}$	$7.0 \cdot 10^{-13}$
0.50000	1.3085348	-0.6880488	$9.2 \cdot 10^{-11}$	$8.0 \cdot 10^{-10}$
1.00000	2.2659883	-2.7345456	$5.2 \cdot 10^{-10}$	$-2.6 \cdot 10^{-9}$
1.50000	20.130499	-35.776631	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$2.3 \cdot 10^{-9}$
1.56000	515.99981	-932.16832	$2.8 \cdot 10^{-7}$	$5.6 \cdot 10^{-10}$
1.56240	23663.960	-42770.406	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$-8.0 \cdot 10^{-9}$
1.56244	93689.838	-169337.01	$5.1 \cdot 10^{-5}$	$-1.5 \cdot 10^{-10}$
1.56246	-195359.40	353098.20	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-9}$
1.56250	-27245.668	49244.994	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$4.6 \cdot 10^{-9}$
1.56500	-497.50669	899.65718	$2.7 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-11}$
1.57000	-167.99789	304.08141	$9.2 \cdot 10^{-8}$	$-1.8 \cdot 10^{-9}$
1.60000	-33.923389	61.671668	$2.1 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-9}$
2.00000	-3.3661716	4.7661969	$2.4 \cdot 10^{-9}$	$8.6 \cdot 10^{-9}$
2.50000	-2.9194037	-2.6934829	$2.5 \cdot 10^{-9}$	$3.7 \cdot 10^{-9}$
2.90000	-24.503347	-72.427760	$3.9 \cdot 10^{-8}$	$3.9 \cdot 10^{-9}$

Таблица 1.1. Продолжение.

$\alpha$	$\beta_1 = p(0)$	$B_0$	$\delta_K(\pi/2)$	$x(\pi/2) - 1$
3.00000	17.535513	51.931711	$2.9 \cdot 10^{-8}$	$2.3 \cdot 10^{-9}$
3.50000	5.2759727	-12.390666	$1.1 \cdot 10^{-8}$	$9.0 \cdot 10^{-10}$
3.60000	10.058084	-35.404382	$2.8 \cdot 10^{-8}$	$4.2 \cdot 10^{-9}$
3.70000	-84.321839	332.89212	$2.8 \cdot 10^{-7}$	$-3.2 \cdot 10^{-9}$
4.00000	-5.3599333	-6.2012236	$2.3 \cdot 10^{-8}$	$-1.5 \cdot 10^{-10}$

В табл. 1.2 для двух значений  $\alpha = \{0; 1\}$  приведены результаты численного эксперимента — вычисленные в результате решения задач Коши значения переменных и оценки их погрешности в двух точках отрезка интегрирования для различных точностей “на шаге”. Кроме того, для  $\alpha = 0$  в таблице приводятся точные (вычисленные по аналитической формуле) значения переменных.

Величина  $\Delta H(t)$  в табл. 1.2 обозначает разность вычисленных двумя способами значений функции Понtryгина. Во-первых, она вычисляется по определению, с учетом  $u(t) = \dot{x}(t) = p(t)$ :

$$H(t, x(t), p(t)) := \dot{x}L_{\dot{x}} - L = p^2(t) + x^2(t) \exp(\alpha t).$$

Во-вторых, значение  $H(t)$  вычисляется интегрированием:

$$\frac{dH(t, x(t), p(t))}{dt} = \frac{\partial H(t, x(t), p(t))}{\partial t} = \alpha x^2(t) \exp(\alpha t)$$

при начальном условии  $H(0) = p^2(0) + x^2(0)$ .

В табл. 1.2 не приводятся значения, соответствующие  $t = 0$ . Это связано с тем, что начальное значение  $x(0) = 0$  задано условиями задачи; начальное значение  $p(0)$  при всех представленных в табл. 1.2 расчетах бралось одинаковым, совпадающим со значением из табл. 1.1 (точным при  $\alpha = 0$  и вычисленным приближенно при  $\alpha = 1$ );  $\delta_K(0) = 0$  — предполагалось, что начальные условия выбраны точно;  $\Delta H(0) = 0$  — по определению этой величины.

Анализ результатов, представленных в табл. 1.2, показывает, что оценка абсолютной погрешности определения экстремали  $\delta_3(t) = \delta_K(t) \cdot (1 + \Delta\beta_1/\beta_1)$  вычисляется с “с запасом”

Таблица 1.2 Экстремали при различных допустимых погрешностях на шаге.

$\Delta_{\text{лок}}$	$t$	$x(t)$ $p(t)$	$\delta_K(t)$ $\Delta H(t)$
$\alpha = 0$			
$10^{-8}$	$\pi/4$	0.707106781190 0.707106781265	$2.0 \cdot 10^{-9}$ $-1.2 \cdot 10^{-10}$
	$\pi/2$	1.000000000099 $8.9 \cdot 10^{-11}$	$3.4 \cdot 10^{-9}$ $-2.0 \cdot 10^{-10}$
$10^{-10}$	$\pi/4$	0.707106781186 0.707106781187	$3.6 \cdot 10^{-11}$ $-7.7 \cdot 10^{-13}$
	$\pi/2$	1.000000000001 $5.3 \cdot 10^{-13}$	$6.7 \cdot 10^{-11}$ $-1.4 \cdot 10^{-12}$
$10^{-12}$	$\pi/4$	0.707106781186 0.707106781186	$6.6 \cdot 10^{-13}$ $-4.7 \cdot 10^{-15}$
	$\pi/2$	1.000000000000 $4.4 \cdot 10^{-15}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$ $-9.3 \cdot 10^{-15}$
аналитическое решение			
	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$ $\sqrt{2}/2$	
	$\pi/2$	1 0	
$\alpha = 1$			
$10^{-8}$	$\pi/4$	1.516998105503 1.158487126719	$9.2 \cdot 10^{-08}$ $8.4 \cdot 10^{-09}$
	$\pi/2$	0.99999996927 $-2.734545614936$	$2.6 \cdot 10^{-07}$ $3.9 \cdot 10^{-08}$
$10^{-10}$	$\pi/4$	1.516998105271 1.158487127016	$2.6 \cdot 10^{-09}$ $1.5 \cdot 10^{-10}$
	$\pi/2$	0.99999997309 $-2.734545614272$	$5.3 \cdot 10^{-09}$ $5.0 \cdot 10^{-10}$
$10^{-12}$	$\pi/4$	1.516998105267 1.158487127022	$3.7 \cdot 10^{-11}$ $1.5 \cdot 10^{-12}$
	$\pi/2$	0.99999997314 $-2.734545614263$	$9.2 \cdot 10^{-11}$ $6.3 \cdot 10^{-12}$

в два знака (например, при  $\alpha = 0$ ,  $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-10}$ :  $\beta_1 = 1$ ,  $\Delta\beta_1 = (6.74 \cdot 10^{-11} + 7.05 \cdot 10^{-13}) / (1.0 - 6.74 \cdot 10^{-11}) = 6.81 \cdot 10^{-11}$ ,  $\delta_3(\pi/2) = 6.74 \cdot 10^{-11} \cdot (1 + 6.81 \cdot 10^{-11}) \approx 6.74 \cdot 10^{-11} = \delta_K(\pi/2)$ ), а величины  $\Delta H(t)$  близки к погрешности вычисления экстремалей, определяемой для  $\alpha = 0$  точно, как разность между вычисленным и аналитическим решениями, а для  $\alpha = 1$  — приближенно оцениваемой разностью между вычисленными с различной точностью решениями. Эти погрешности имеют порядок  $10^{-10}$  при  $\alpha = 0$ ,  $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-8}$ ,  $10^{-12}$  при  $\alpha = 0$ ,  $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-10}$ ,  $< 10^{-12}$  при  $\alpha = 0$ ,  $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-12}$  (то есть все приведенные знаки точны),  $10^{-9}$  при  $\alpha = 1$ ,  $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-8}$ ,  $10^{-11}$  при  $\alpha = 1$ ,  $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-10}$ . (Отметим, что несоответствие величин  $\delta_K(t)$  и  $\Delta_{\text{лок}}$  друг другу кажущееся, так как  $\delta_K(t)$  — оценка *абсолютных*, а  $\Delta_{\text{лок}}$  — *относительных* величин). При анализе результатов расчетов прежде всего следует обратить внимание на то, что при уменьшении  $\Delta_{\text{лок}}$  в 100 раз число совпадающих знаков увеличивается на два и также на два порядка уменьшаются  $\Delta H(t)$  и  $\delta_K(t)$ . Этот необходимый признак корректности вычислений зачастую (в более сложных случаях) является единственным реальным способом хоть как-то убедиться в правильности решения задачи. Следует напомнить, что оценка погрешности вычисления экстремалей на основе совпадения знаков при различных оценках локальной погрешности и малости невязок не является доказательством правильности решения задачи: можно привести примеры экстремалей, компоненты функции невязок для которых малы, задача Коши решена с достаточно высокой точностью, а отличие истинного решения краевой задачи от определенной экстремали значительно.

### 1.1.7. Исследование оптимальности полученных экстремалей

Теперь необходимо определить, при каких  $\alpha$  построенные экстремали доставляют функционалу минимальное значение.

Проверим выполнение условия Лежандра:  $L_{\dot{x}\dot{x}} = 2 > 0$ , — на экстремали выполнено усиленное условие Лежандра.

Выпишем задачу Коши для уравнения Якоби:

$$-2\ddot{h} - 2 \exp(at)h = 0, \quad h(0) = 0, \quad \dot{h}(0) = 1. \quad (1.3)$$

Условие Якоби состоит в отсутствии на интервале  $(0, \pi/2)$  моментов  $\tau$  таких, что  $h(\tau) = 0$ ; усиленное условие Якоби состоит в том, что и в конечный момент времени  $h(\pi/2) \neq 0$ .

Решение задачи Коши для уравнения Якоби показывает, что при  $\alpha < \alpha_*$ ,  $\alpha_* \approx 1.56245352$  выполняется усиленное условие Якоби: на полуотрезке  $(0, \pi/2]$  нет сопряженных точек. При  $\alpha = \alpha_*$  решить краевую задачу не удается: в силу совпадения вида уравнения Эйлера–Лагранжа и уравнения Якоби условия  $x(\pi/2) = 1$  и  $h(\pi/2) = 0$  оказываются противоречивыми. При  $\alpha > \alpha_*$  интервал  $(0, \pi/2)$  содержит особую точку и на экстремали минимум не достигается.

**Примечание.** Величина  $\alpha_*$  определена в результате численного решения методом стрельбы краевой задачи для дифференциального уравнения и начальных условий (1.3), конечного условия  $h(\pi/2) = 0$ . При этом величина  $\alpha$  является параметром пристрелки, а  $h(\pi/2)[\alpha] = 0$  — функцией невязок.

Так как функция  $\dot{x}^2 - x^2 \exp(\alpha t)$  является выпуклой функцией по  $\dot{x}$   $\forall x, t$ , то условие квазирегулярности выполняется для всего пространства.

**Вывод:** при  $\alpha < \alpha_*$  на построенной экстремали достигается абсолютный минимум.

Исследование задачи закончено.

Как указывалось в п. **Задание и задачи**, отчет по проведенному исследованию состоит из 5 пунктов:

- 1) постановка решаемой задачи и ее формализация — п. 1.1.1;
- 2) сведение решения задачи оптимизации к решению краевой задачи — п. 1.1.3 и п. 1.1.4;
- 3) анализ полученной краевой задачи и формирование вычислительной схемы ее решения — п. 1.1.5;
- 4) описание полученных при решении результатов и обоснование их точности — п. 1.1.6; 5) исследование оптимальности полученных экстремалей — п. 1.1.7.

## 1.2. Простейшая задача классического вариационного исчисления, краевая задача в которой не может быть решена методом стрельбы

### 1.2.1. Постановка задачи

$$\int_0^1 (\dot{x}^2 + a^2(t)x^2) dt \rightarrow \inf,$$

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 1, \quad a^2(t) \gg 1 \quad \forall t \in [0, 1].$$

### 1.2.2. Формализация задачи как задачи оптимального управления

$$\int_0^1 (u^2 + a^2(t)x^2) dt \rightarrow \inf,$$

$$\dot{x} = u, \quad u \in R,$$

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 1,$$

$a^2(t) \gg 1 \quad \forall t \in [0, 1]$  — некоторая заданная функция.

### 1.2.3. Система необходимых условий оптимальности

Основные конструкции:

$$\mathcal{L} := \int_0^1 L dt + l,$$

$$L := \lambda_0(u^2 + a^2(t)x^2) + p(\dot{x} - u),$$

$$l := \lambda_1 x(0) + \lambda_2 x(1),$$

$$H := pu - \lambda_0(u^2 + a^2(t)x^2).$$

Необходимые условия оптимальности:

- а) уравнение Эйлера–Лагранжа (сопряженное уравнение):  
 $\dot{p} = 2\lambda_0 x a^2(t);$

- б) условие оптимальности по управлению:  
 $\hat{u} = \arg\max_{u \in R} (pu - \lambda_0 u^2);$   
 при  $\lambda_0 \neq 0$ :  $\hat{u} = \frac{p}{2\lambda_0};$
- в) условия трансверсальности:  $p(0) = \lambda_1, p(1) = -\lambda_2.$   
 Условий стационарности г) и дополняющей нежесткости д)  
 нет, так как концы фиксированы ( $t_0 = 0, t_1 = 1$ ) и в постановке  
 задачи отсутствуют условия типа “меньше или равно”.
- е) Условие неотрицательности:  $\lambda_0 \geq 0;$   
 ж) множители Лагранжа Не Равны Одновременно Нулю  
 (условие НЕРОН);  
 з) множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью  
 до положительного сомножителя (условие нормировки).

#### 1.2.4. Краевая задача

Для формирования краевой задачи принципа максимума необходимо выбрать условие нормировки. Так как в этой, как и в любой другой простейшей задаче классического вариационного исчисления (см. исследование в п. 1.1.4), аномальный случай  $\lambda_0 = 0$  невозможен, то в качестве условия нормировки задачи выбирается условие  $\lambda_0 = 1/2.$

Таким образом, на основе принципа максимума решение рассматриваемой простейшей задачи классического вариационного исчисления сводится к решению краевой задачи:

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = a^2(t)x, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 1.$$

#### 1.2.5. Численное решение краевой задачи

При решении краевой задачи методом стрельбы (см. п. 2.2) в качестве параметра пристрелки выбирается значение  $\beta_1 = p(0).$  Задав это значение каким-либо образом и решив задачу Коши на отрезке  $[0, 1],$  получим соответствующие выбранному значению  $\beta_1$  величины  $x(1)[\beta_1]$  и  $p(1)[\beta_1].$  Для решения краевой задачи необходимо подобрать значение  $\beta_1$  так, чтобы выполнилось условие  $x(1)[\beta_1] - 1 = 0,$  принимаемое в данном случае в качестве функции невязки.

Таким образом, в результате выбора вычислительной схемы метода стрельбы решение краевой задачи свелось к решению

алгебраического уравнения  $x(1)[\beta_1] - 1 = 0$ . В силу линейности дифференциального уравнения это алгебраическое уравнение линейно.

### 1.2.6. Результаты решения краевой задачи и оценки точности этого решения

Матрица Якоби системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Для определения скорости распространения ошибки определяется логарифмическая норма матрицы  $\mu(J)$  — максимальное собственное значение матрицы

$$(J + J^T)/2 = \begin{pmatrix} 0 & (1 + a^2(t))/2 \\ (1 + a^2(t))/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mu(J) = (1 + a^2(t))/2$$

и норма матрицы  $\|J\|$  — максимальное сингулярное число

$$(J^T J) = \begin{pmatrix} a^4(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|J\| = a^2(t).$$

Так как  $a^2(t) \gg 1$ , то в рассматриваемом примере  $\mu(J) < \|J\|$ . Поэтому в оценках глобальной погрешности используется теорема I.10.6.

Оценка точности решения задачи Коши показывает, что ошибка, допущенная на первом шаге, при условии, что дальнейшее решение будет точным, к моменту  $t = 1$  увеличится в  $\exp(L)$  раз, где  $L = 0.5 \int_0^1 [1 + a^2(s)] ds$ . Таким образом, корректно численно решить задачу Коши не удается.

Для решения полученной краевой задачи следует воспользоваться методом дифференциальной прогонки [36, §9]. Дальнейшее решение этой задачи в пособии не рассматривается. Отметим лишь, что экстремаль в этой задаче для всех  $a(t)$  будет доставлять функционалу абсолютный минимум.

**Примечание.** Невозможность решения методом стрельбы полученной краевой задачи связана с величиной  $a^2(t) \gg 1$ . При

умеренных значениях  $a^2(t)$  (например, при  $a^2(t) \approx 1$ ) метод стрельбы решения краевой задачи окажется вполне удовлетворительным.

### **1.3. Задача Лагранжа: фиксированный временной отрезок, без ограничений вида “меньше или равно”**

Рассматриваемый пример является частным случаем общей постановки задачи Лагранжа — в нем отсутствуют ограничения вида “меньше или равно” и временной интервал фиксирован.

Алгоритм решения рассматриваемой задачи (предполагается, что решение задачи существует).

Во–первых, выписывается система необходимых условий оптимальности (принцип Лагранжа для задачи Лагранжа или принцип максимума Понтрягина для задачи Лагранжа, formalized как задача оптимального управления) и формируется краевая задача.

Во–вторых, проводится анализ полученной краевой задачи; при использовании для ее решения метода стрельбы — формируется вычислительная схема метода стрельбы (осуществляется выбор вектора параметров пристрелки и вектор–функции невязок, анализируются возможные особенности решения задачи Коши, применения метода Ньютона, численного дифференцирования, решения системы линейных алгебраических уравнений). Особое внимание при этом следует обратить на возможные способы выбора начального приближения, в частности, на возможность применения метода продолжения решения по параметру.

В–третьих, предложенная вычислительная схема реализуется и определяются экстремали задачи. Если определить экстремали задачи не удалось, то следует вернуться к предыдущему пункту.

После определения экстремали проводится анализ точности определения экстремалей задачи и анализ их оптимальности.

В–четвертых, проверяется выполнение условия Лежандра (неотрицательной определенности  $L_{uu}$  на экстремали) и усиленного условия Лежандра (положительной определенности  $L_{uu}$  на экстремали). Заметим, что в случае анализа задачи на основе принципа максимума условие Лежандра является следствием условия максимума функции Понтрягина по управле-

нию [34]. Напомним (см. 2.1.2), что при невыполнении усиленного условия Лежандра на экстремали исследование оптимальности заканчивается (любознательные студенты, как отмечалось ранее, могут его продолжить, ознакомившись, например, с [4, гл. 3] и затем с [5]).

В–пятых, для задач Лагранжа на фиксированном временному интервале с фиксированным концом(–ами) проверяется неотрицательная и положительная определенность второй вариации функции Лагранжа на линеаризованной системе ограничений (касательном многообразии) в форме выполнения условия Якоби и усиленного условия Якоби [20]. Заметим, что смешанные ограничения в рассматриваемых в практикуме задачах отсутствуют, на вариации управления ограничения не накладываются  $\dot{u} \in R^r$ , где  $r$  – размерность вектора управления, и потому присоединенная задача в вариациях относится к классу линейно–квадратичных задач (системы дифференциальных уравнений и краевых условий линейны, функционал задачи – вторая производная функции Лагранжа – квадратичен).

В–шестых, проверяется выполнение условия квазирегулярности (усиленного условия Вейерштрасса) и, в случае его невыполнения, условие Вейерштрасса. Заметим, что в случае анализа задачи на основе принципа максимума условие Вейерштрасса является следствием условия максимума функции Понtryгина по управлению [34].

По результатам проведенного анализа делается вывод об оптимальности полученной экстремали (см. конец п. 2.1).

### 1.3.1. Постановка задачи

$$B_0 := \int_0^{1.8} (u^2 - x^2) dt \rightarrow \inf,$$

$$\ddot{x} + \alpha x \cos x = u, \quad u \in R,$$

$$x(1.8) = 1, \quad \dot{x}(1.8) = 0, \quad \alpha \in [-A, A].$$

### 1.3.2. Формализация задачи

Введем обозначения:

$$x_1 := x, \quad x_2 := \dot{x}.$$

Тогда рассматриваемая задача представляется в виде:

$$\int_0^{1.8} (u^2 - x_1^2) dt \rightarrow \inf, \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u - \alpha x_1 \cos x_1, \end{cases} \quad u \in R, \quad (1.5)$$

$$x_1(1.8) = 1, \quad x_2(1.8) = 0, \quad \alpha \in [-A, A]. \quad (1.6)$$

### 1.3.3. Система необходимых условий оптимальности

Основные конструкции:

$$\mathcal{L} := \int_0^{1.8} L dt + l,$$

$$L := \lambda_0(u^2 - x_1^2) + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u + \alpha x_1 \cos x_1),$$

$$l := \lambda_1 x_1(1.8) + \lambda_2 x_2(1.8),$$

$$H := p_1 x_2 + p_2(u - \alpha x_1 \cos x_1) - \lambda_0(u^2 - x_1^2).$$

Необходимые условия оптимальности:

а) уравнения Эйлера–Лагранжа (сопряженная система уравнений):

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = p_2\alpha(\cos x_1 - x_1 \sin x_1) - 2\lambda_0 x_1, \\ \dot{p}_2 = -p_1; \end{cases} \quad (1.7)$$

б) условие оптимальности по управлению:

$$\hat{u} = \underset{u \in R}{\operatorname{argmax}} (p_2 u - \lambda_0 u^2);$$

при  $\lambda_0 \neq 0$

$$\hat{u} = \frac{p_2}{2\lambda_0}; \quad (1.8)$$

в) условия трансверсальности:

$$p_1(0) = 0, \quad p_2(0) = 0, \quad p_1(1.8) = -\lambda_1, \quad p_2(1.8) = -\lambda_2. \quad (1.9)$$

Условий стационарности г) и дополняющей нежесткости д) нет, так как концы фиксированы ( $t_0 = 0, t_1 = 1.8$ ) и в постановке задачи отсутствуют условия типа “меньше или равно”.

- е) Условие неотрицательности:  $\lambda_0 \geq 0$ ;
- ж) множители Лагранжа Не Равны Одновременно Нулю (условие НЕРОН);
- з) множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного сомножителя (условие нормировки).

#### 1.3.4. Краевая задача и ее анализ

Для формирования краевой задачи принципа максимума необходимо выбрать условие нормировки. Проведем анализ возможности аномального случая  $\lambda_0 = 0$ . При этом если  $\exists(\tau_1; \tau_2) \in [0; 1.8]$  такой, что  $p_2(t) \neq 0$  при  $t \in (\tau_1; \tau_2)$ , то  $u(t) = \pm\infty$ , и такой управляемый процесс не принадлежит допустимому классу процессов (функций). Следовательно,  $p_2(t) \equiv 0 \forall t \in [0; 1.8]$  и  $p_1(t) \equiv 0 \forall t \in [0; 1.8]$  (1.7) и  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$  (1.9). Итак, обращение в ноль множителя Лагранжа при функционале приводит к обращению в ноль всех множителей Лагранжа задачи, что невозможно в силу условий принципа Лагранжа. Вывод: аномальный случай  $\lambda_0 = 0$  невозможен. Поэтому в силу однородности функции Лагранжа по множителям Лагранжа в качестве условия нормировки задачи выбирается условие  $\lambda_0 = 1/2$ .

Таким образом, на основе принципа максимума решение задачи Лагранжа сводится к решению краевой задачи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = p_2 - \alpha x_1 \cos x_1, \\ \dot{p}_1 = p_2 \alpha (\cos x_1 - x_1 \sin x_1) - x_1, \\ \dot{p}_2 = -p_1. \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} p_1(0) &= 0, \quad x_1(1.8) = 1, \\ p_2(0) &= 0, \quad x_2(1.8) = 0, \end{aligned} \quad \alpha \in [-A, A]. \quad (1.11)$$

### 1.3.5. Численное решение краевой задачи

Краевая задача решается методом стрельбы (см. п. 2.2). В качестве параметров пристрелки выбираются недостающие для решения задачи Коши значения при  $t = 0$ :  $\beta_1 = x_1(0)$ ,  $\beta_2 = x_2(0)$ . Задав эти значения каким-либо образом и решив задачу Коши на отрезке  $[0; 1.8]$ , получим соответствующие выбранному значению  $\vec{\beta} := \{\beta_1, \beta_2\}$  функции  $x_1(\cdot)[\beta_1, \beta_2]$ ,  $x_2(\cdot)[\beta_1, \beta_2]$ ,  $p_1(\cdot)[\beta_1, \beta_2]$ ,  $p_2(\cdot)[\beta_1, \beta_2]$  и, в частности, значения  $x_1(1.8)[\beta_1, \beta_2]$ ,  $x_2(1.8)[\beta_1, \beta_2]$ . Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (1.10), входящая составной частью в метод стрельбы, как и во всех других рассматриваемых примерах, решается численно явным методом Рунге–Кутты 8-го порядка, основанном на формулах Дормана–Принса 8(7) DOPRI8 [38]. Для решения краевой задачи необходимо подобрать значения  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  так, чтобы выполнились условия

$$\begin{aligned} x_1(1.8)[\beta_1, \beta_2] - 1 &= 0, \\ x_2(1.8)[\beta_1, \beta_2] &= 0, \end{aligned} \tag{1.12}$$

принимаемые в данном случае в качестве вектор–функции невязок. Таким образом, в результате выбора вычислительной схемы метода стрельбы решение краевой задачи свелось к решению системы двух алгебраических уравнений от двух неизвестных.

Если решение задачи Коши для выбранного значения  $\vec{\beta}$  не продолжается на отрезок  $[0; 1.8]$ , то вектор–функция невязок считается неопределенной.

### 1.3.6. Оценки точности решения краевой задачи

После построения решения краевой задачи (решения задачи Коши, вычисленного с автоматическим выбором шага при заданной оценке относительной локальной погрешности, удовлетворяющего краевым условиям при  $t = 1.8$  (1.12) с заранее выбранной точностью  $\varepsilon$ ) производится оценка точности этого решения.

При оценке точности решения задачи Коши предполагается, что начальные условия заданы точно:  $\|v(0) - x(0)\| \leq \delta_K(0)$ ,  $\delta_K(0) = 0$ .

Правые части в системе дифференциальных уравнений также считаются вычисляемыми точно:  $\|\dot{v}(t) - f(t, v(t))\| \leq \rho(t)$ ,  $\rho(t) \equiv 0$ .

Матрица Якоби системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 1 \\ B & 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A &= \alpha(x_1 \sin x_1 - \cos x_1), \\ B &= -p_2 \alpha(2 \sin x_1 + x_1 \cos x_1) - 1. \end{aligned}$$

Для определения скорости распространения ошибки в оценках глобальной погрешности используется теорема I.10.6 (см. [38, п. I. §10, стр. 66], п. 2.4): определяется логарифмическая норма матрицы  $\mu(J)$  — максимальное собственное значение матрицы  $(J + J^T)/2$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & (A+1)/2 & B/2 & 0 \\ (A+1)/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ B/2 & 0 & 0 & -(A+1)/2 \\ 0 & 1/2 & -(A+1)/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица симметрична, то все ее собственные значения действительны. После несложных, но громоздких (и потому пропущенных) выкладок характеристическое уравнение

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & (A+1)/2 & B/2 & 0 \\ (A+1)/2 & -\lambda & 0 & 1/2 \\ B/2 & 0 & -\lambda & -(A+1)/2 \\ 0 & 1/2 & -(A+1)/2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

сводится к биквадратному уравнению:

$$\lambda^4 - C\lambda^2 + D = 0,$$

где

$$C = [2(A+1)^2 + B^2 + 1]/4, \quad D = [(A+1)^2 + B]^2/16.$$

Выполняются условия, гарантирующие существование четырех (с учетом кратности) действительных корней уравнения:

$$C > 0,$$

$$C^2 - 4D = (B - 1)^2 \cdot [(A + 1)^2 + (B + 1)^2 / 4] / 4 \geq 0,$$

$$C \geq \sqrt{C^2 - 4D} \text{ (так как } D \geq 0).$$

Эти корни определяются по формуле

$$\lambda_i = \pm \sqrt{\frac{C \pm \sqrt{C^2 - 4D}}{2}}, \quad i = \overline{1, 4};$$

максимальный из них соответствует двум знакам плюс:

$$\mu(J) = \frac{1}{2} \sqrt{(A + 1)^2 + \frac{B^2}{2} + \frac{1}{2} + |B - 1| \sqrt{(A + 1)^2 + \frac{(B + 1)^2}{4}}}. \quad (1.13)$$

Так как точные значения функций  $x_1(t)$ ,  $p_2(t)$  неизвестны, то для оценки коэффициента  $L_i$  в (2.20) необходимо оценить максимальное значение  $\mu(J)$  по окрестности функций  $x_1(t)$ ,  $p_2(t)$  не известного заранее радиуса  $\delta_K(t)$  при  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Для оценки величины  $L_i$  воспользуемся упрощенным алгоритмом, заменив искомый максимум  $\mu(J)$  по окрестности на максимум  $\mu(J)$  по двум точкам:

$$L_i \approx \max\{\mu(J)[x_1(t_i), p_2(t_i)], \mu(J)[x_1(t_{i+1}), p_2(t_{i+1})]\}. \quad (1.14)$$

В данной задаче возможно провести и более точную оценку  $L_i$ . В самом деле, учитывая простой вид зависимости  $\mu(J)[t]$  от  $x_1(t)$  и  $p_2(t)$ , поиск максимума по двумерной области заменим максимизацией (как независимых величин) каждой из входящих в (1.13) скобок по отрезкам

$$\begin{aligned} x_1 &\in [\min_{t \in [t_i, t_{i+1}]} (x_1(t) - \delta_K(t)), \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} (x_1(t) + \delta_K(t))], \\ p_2 &\in [\min_{t \in [t_i, t_{i+1}]} (p_2(t) - \delta_K(t)), \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} (p_2(t) + \delta_K(t))]. \end{aligned}$$

При этом рассматриваются подзадачи:

- a)  $(A + 1)^2 \rightarrow \max;$
- б)  $B^2 \rightarrow \max;$
- в)  $|B - 1| \rightarrow \max;$
- г)  $(B + 1)^2 \rightarrow \max.$

Во всех этих случаях максимальное значение достигается на граничных значениях величин  $A$  и  $B$ . Таким образом, для

Таблица 1.3 Корни уравнения (1.15).

$k$	$x_1(k)$
0	0.00
1	2.288929728103404
2	5.086985094102270
3	8.096163603222919
4	11.17270586832998

оценки сверху максимального  $\mu(J)[t]$  на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$ , достаточно определить на этом отрезке максимальное и минимальное значения величин  $A$  и  $B$ .

Величина  $A$  представляет собой непрерывно–дифференцируемую функцию  $x_1$ ; экстремумы величины  $A$  достигаются либо на границе отрезка изменения  $x_1$ , либо в точке, в которой производная функции  $A$  обращается в ноль:

$$A' = 2 \sin x_1 + x_1 \cos x_1 = 0 \quad (1.15)$$

(разумеется, если соответствующий корень принадлежит рассматриваемому отрезку изменения  $x_1$ ). Уравнение (1.15) решается методом простой итерации по формуле:

$$x_1^{j+1}(k) = -\operatorname{arctg}(x_1^j(k)/2) + \pi k,$$

где  $j$  — номер итерации и число  $k$  — “номер” искомого корня, выбираемый с учетом отрезка изменения  $x_1$ . Эти корни находятся заранее (а не на каждом шаге решения задачи Коши), и при вычислении максимального и минимального значений  $A_{\max}$  и  $A_{\min}$  на отрезке изменения  $x_1$  осуществляется проверка на их допустимость. Первые несколько корней  $x_1(k)$  уравнения (1.15) включены в табл. 1.3, корни для отрицательных  $k$  отличаются от положительных знаком и потому в таблицу не включены.

Величина  $B$  представляет собой непрерывно–дифференцируемую функцию двух переменных  $x_1$  и  $p_2$ . Оценка максимального и минимального значений  $B_{\max}$  и  $B_{\min}$  осуществляется следующим способом: во–первых, оцениваются отрезки изменения  $x_1$  и  $p_2$ , во–вторых, оцениваются экстремумы величины  $A' = (2 \sin x_1 + x_1 \cos x_1)$  на отрезке изменения  $x_1$  (очевидно,

Таблица 1.4 Корни уравнения (1.16).

$k$	$x_1(k)$
0	1.192458829336429
1	3.808762219199689
2	6.703955775780747
3	9.724027476175509
4	12.796648390281420

что экстремумы  $p_2$  достигаются на границах отрезка изменения  $p_2$ , в—третьих, экстремумы  $B_{\max}$  и  $B_{\min}$  ищутся среди попарных произведений экстремумов  $p_2 \max A'_{\max}$ ,  $p_2 \max A'_{\min}$ ,  $p_2 \min A'_{\max}$ ,  $p_2 \min A'_{\min}$ .

Экстремумы величины  $A' = (2 \sin x_1 + x_1 \cos x_1)$  достигаются либо на границе отрезка изменения  $x_1$ , либо в точке, в которой производная функции  $A'$  обращается в ноль:

$$A'' = 3 \cos x_1 - x_1 \sin x_1 = 0 \quad (1.16)$$

(разумеется, если соответствующий корень принадлежит рассматриваемому отрезку изменения  $x_1$ ).

Уравнение (1.16) решается методом простой итерации по формуле:

$$x_1^{j+1}(k) = \operatorname{arcctg}(x_1^j(k)/3) + \pi k,$$

где  $j$  — номер итерации и число  $k$  — “номер” искомого корня, выбираемый с учетом отрезка изменения  $x_1$ . Первые несколько корней  $x_1(k)$  уравнения (1.16) включены в табл. 1.4, корни для отрицательных  $k$  отличаются от положительных знаком и потому в таблицу не включены (для  $k = 0$  имеется два корня, отличающихся знаком).

Чтобы избежать ошибок, связанных с немонотонностью функций  $x_1$  и  $p_2$ , все точки, соответствующие условиям обращения производных этих функций по времени в ноль, включаются в расчетную сетку. При расчетах нули функций  $\dot{x}_1(t) = x_2(t) = 0$  и  $\dot{p}_2(t) = -p_1(t) = 0$  определялись методом хорд (см. (2.16) в п. 2.4).

Таким образом вычисление  $A_{\max}$ ,  $A_{\min}$ ,  $B_{\max}$  и  $B_{\min}$  разбивается на два этапа: во—первых, оцениваются отрезки изме-

нения  $x_1$  и  $p_2$ , во–вторых, вычисляются максимум и минимум по некоторым точкам этих отрезков.

Так как на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$  функции  $x_1(t)$ ,  $p_2(t)$  монотонны, то первое приближение погрешности вычисляется в виде  $\tilde{\delta}_K(t_{i+1}) = r_i + \delta_K(t_i) \cdot \exp(\tilde{L}_i h_i)$ , где  $\tilde{L}_i$  — величина, вычисленная по упрощенному алгоритму (1.14), и отрезки изменения  $x_1 \in [x_{1\min}, x_{1\max}]$  и  $p_2 \in [p_{2\min}, p_{2\max}]$  оцениваются величинами

$$\begin{aligned} x_{1\min} &= \min\{x_1(t_i) - \delta_K(t_i), x_1(t_{i+1}) - \tilde{\delta}_K(t_{i+1})\}, \\ x_{1\max} &= \max\{x_1(t_i) + \delta_K(t_i), x_1(t_{i+1}) + \tilde{\delta}_K(t_{i+1})\}, \\ p_{2\min} &= \min\{p_2(t_i) - \delta_K(t_i), p_2(t_{i+1}) - \tilde{\delta}_K(t_{i+1})\}, \\ p_{2\max} &= \max\{p_2(t_i) + \delta_K(t_i), p_2(t_{i+1}) + \tilde{\delta}_K(t_{i+1})\}. \end{aligned}$$

Затем вычисляется значение  $L_i$  как максимум  $\mu(J)[x_1, p_2]$  по этим отрезкам. При этом сравниваются значения  $\mu(J)[x_1, p_2]$  на концах отрезов и в точках отрезка, удовлетворяющих (1.15), (1.16). Окончательно, погрешность  $\delta_K(t_{i+1})$  оценивается по формуле (2.20).

Проведенный анализ несложен, но громоздок. Заметим, что по сравнению с упрощенным алгоритмом оценка точности решения задачи Коши увеличивается лишь незначительно.

После того, как погрешность решения задачи Коши оценена, оценивается точность решения краевой задачи. Для этого оценивается относительная точность выбора начальных условий  $x_2(0) = \beta_1$ ,  $p_1(0) = \beta_2$  и затем повторяется оценка решения задачи Коши для  $\delta_3(0) \neq 0$ .

Для оценки величины  $\delta_3(0)$  (2.21) вычисляются  $\|A^{-1}\|$ ,  $\|\Delta A\|$  (см. п. 2.5) и  $\max_{|\vec{Y} - \vec{y}(1.8)| < \delta_K(1.8)} \|\vec{X}(\vec{Y})\|$ . С учетом вида вектор–функции невязок, величина

$$\max_{|\vec{Y} - \vec{y}(1.8)| < \delta_K(1.8)} \|\vec{X}(\vec{Y})\| \leq \delta_K(1.8) + \|\vec{X}(\vec{y}(1.8))\|,$$

где  $\delta_K(1.8)$  — точность решения задачи Коши при  $t = 1.8$ ,  $\vec{y}(1.8)$  — приближение неизвестного точного решения задачи Коши, полученное в результате численного решения.

### 1.3.7. Исследование оптимальности экстремалей

Пространством  $X$  из теоремы 1 п. 2.1 в рассматриваемой задаче Лагранжа будет  $C^1([0; 1.8], R^2) \times C([0; 1.8])$ . Элементы этого пространства  $\xi := \{x_1(\cdot), x_2(\cdot), u(\cdot)\}$  называются управляемыми процессами.

Элемент этого пространства, удовлетворяющий системе необходимых условий оптимальности, определенный в результате решения краевой задачи (1.10), (1.11), для которого проверяется выполнение теорем 1,2 п. 2.1, обозначается  $\hat{\xi} := \{\hat{x}_1(\cdot), \hat{x}_2(\cdot), \hat{u}(\cdot)\}$ .

Оператор типа равенства (1.5), (1.6) действует из пространства  $X$  в пространство  $Y := C([0; 1.8], R^2) \times R^2$ .

Легко проверяется, что теоремы 1,2 п. 2.1 к этой задаче применимы.

Обозначим через  $\delta\xi := \{\delta x_1, \delta x_2, \delta u\}$  элемент касательного пространства к многообразию, определяемому в точке  $\hat{\xi}$  пространства  $X$  условиями (1.5), (1.6).

Принадлежность элемента  $\delta\xi$  касательному пространству, совпадающему в силу теоремы Люстерника с ядром производной оператора, определяющего условие типа равенства (1.5), (1.6), накладывает на  $\delta x_1, \delta x_2, \delta u$  условия:

$$\begin{aligned}\dot{\delta x}_1 &= \delta x_2, \\ \dot{\delta x}_2 &= \delta u - \alpha(\cos \hat{x}_1 - \hat{x}_1 \sin \hat{x}_1)\delta x_1, \\ \delta u &\in R, \\ \delta x_1(1.8) &= 0, \\ \delta x_2(1.8) &= 0.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Вторая вариация функции Лагранжа  $\mathcal{L}$  в данной задаче имеет вид:

$$\mathcal{L}_{\xi\xi} = \int_0^{1.8} ((\delta u)^2 - (\hat{p}_2 \alpha(2 \sin \hat{x}_1 + \hat{x}_1 \cos \hat{x}_1) + 1)(\delta x_1)^2) dt.\tag{1.18}$$

Необходимым условием оптимальности является неотрицательная определенность  $\mathcal{L}_{\xi\xi}[\delta\xi, \delta\xi] \geq 0$  на допустимых вариациях (теорема 1 п. 2.1), а достаточным условием второго порядка

ка — положительная определенность на допустимых вариациях:  $\mathcal{L}_{\xi\xi}[\delta\xi, \delta\xi] \geq \varepsilon\varphi(\delta\xi)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\varphi(\delta\xi) = \int_0^{1.8} (\delta u)^2 dt$  (теорема 2 п. 2.1).

Необходимое для неотрицательной определенности второй вариации  $\mathcal{L}_{\xi\xi}[\delta\xi, \delta\xi]$  условие Лежандра выполняется в усиленной форме:  $L_{uu} = 2 > 0$ . Поэтому для неотрицательности второй вариации необходимо выполнение условия Якоби (на интервале  $(0; 1.8)$  нет сопряженных точек), для положительности второй вариации достаточно выполнения усиленного условия Якоби (на полуотрезке  $(0; 1.8]$  нет сопряженных точек).

**Примечание.** При выполнении условия Лежандра и невыполнении усиленного условия Лежандра условие Якоби перестает быть необходимым. Пример см. в [4, §3.1; 20].

В рассматриваемом случае точка  $\tau$  называется сопряженной, если существует нетривиальное решение следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}x_1 &= \delta x_2, \\ \dot{\delta}x_2 &= \delta u - \alpha(\cos \hat{x}_1 - \hat{x}_1 \sin \hat{x}_1)\delta x_1, \\ \dot{q}_1 &= \alpha(\cos \hat{x}_1 - \hat{x}_1 \sin \hat{x}_1)q_2 - (\hat{p}_2\alpha(2 \sin \hat{x}_1 + \hat{x}_1 \cos \hat{x}_1) + 1)\delta x_1, \\ \dot{q}_2 &= -q_1, \\ \delta u &= q_2, \\ q_1(0) &= 0, \\ q_2(0) &= 0, \\ \delta x_1(\tau) &= 0, \\ \delta x_2(\tau) &= 0. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Она может быть формально получена в результате применения необходимых условий оптимальности (принципа Лагранжа) к задаче минимизации квадратичного функционала (1.18) при выполнении системы линейных условий (1.17) на временном интервале  $[0; \tau]$  (после замены 1.8 на  $\tau$  в (1.17), (1.18)). Множитель Лагранжа при функционале в задаче (1.19) выбран величиной  $1/2$ . Первые два дифференциальных уравнения в (1.19) являются уравнениями в вариациях основной системы (1.5), следующие два — уравнениями в вариациях сопряженной системы (1.7), пятое соотношение (условие оптимальности) соответствует вариации условия оптимальности исходной задачи

(1.8).

Вследствие линейности и однородности системы дифференциальных уравнений рассматриваемой краевой задачи (1.19) все решения задач Коши, удовлетворяющие двум условиям при  $t = 0$  ( $q_1(0) = 0$  и  $q_2(0) = 0$ ), могут быть найдены в виде линейных комбинаций двух линейно-независимых решений задач Коши с начальными условиями:

$$\begin{pmatrix} \delta x_1^1(0) \\ \delta x_2^1(0) \\ q_1^1(0) \\ q_2^1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \delta x_1^2(0) \\ \delta x_2^2(0) \\ q_1^2(0) \\ q_2^2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Если в некоторый момент  $\tau \in (0; 1.8]$

$$\det \begin{pmatrix} \delta x_1^1(\tau) & \delta x_1^2(\tau) \\ \delta x_2^1(\tau) & \delta x_2^2(\tau) \end{pmatrix} = 0, \quad (1.21)$$

то краевая задача (1.19) имеет нетривиальное решение и точка  $\tau$  будет сопряженной.

### 1.3.8. Аналитическое решение при $\alpha = 0$

При  $\alpha = 0$  краевая задача решается аналитически.

Система дифференциальных уравнений краевой задачи (1.10) эквивалентна линейному дифференциальному уравнению:

$$x_1^{(IV)} = x_1.$$

Общее решение этого линейного однородного дифференциального уравнения представляется в виде

$$x_1(t) = a \cos t + b \sin t + c \operatorname{ch} t + d \operatorname{sh} t.$$

Дифференцируя это решение, получим выражения для остальных искомых функций краевой задачи (1.10), (1.11):

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \dot{x}_1(t) = -a \sin t + b \cos t + c \operatorname{sh} t + d \operatorname{ch} t, \\ p_2(t) &= \dot{x}_2(t) = -a \cos t - b \sin t + c \operatorname{ch} t + d \operatorname{sh} t, \\ p_1(t) &= -\dot{p}_2(t) = -a \sin t + b \cos t - c \operatorname{sh} t - d \operatorname{ch} t. \end{aligned}$$

Подставляя их в краевые условия (1.11) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $a, b, c, d$ :

$$\begin{aligned}x_1(1.8) &= 1 = a \cos 1.8 + b \sin 1.8 + c \operatorname{ch} 1.8 + d \operatorname{sh} 1.8, \\x_2(1.8) &= 0 = -a \sin 1.8 + b \cos 1.8 + c \operatorname{sh} 1.8 + d \operatorname{ch} 1.8, \\p_1(0) &= 0 = -a \sin 0 + b \cos 0 - c \operatorname{sh} 0 - d \operatorname{ch} 0, \\p_2(0) &= 0 = -a \cos 0 - b \sin 0 + c \operatorname{ch} 0 + d \operatorname{sh} 0.\end{aligned}$$

Решение этой системы в силу невырожденности матрицы существует и единственno:

$$a = c = \frac{\cos 1.8 + \operatorname{ch} 1.8}{2 + 2 \cos 1.8 \operatorname{ch} 1.8}, \quad b = d = \frac{\sin 1.8 - \operatorname{sh} 1.8}{2 + 2 \cos 1.8 \operatorname{ch} 1.8}.$$

Подстановка этих коэффициентов в решение при  $t = 0$  дает:

$$x_1(0) = a + c \approx 9.797654047599796,$$

$$x_2(0) = b + d \approx -6.695544653113242.$$

Исследуем оптимальность полученной экстремали. Как отмечалось в п. 1.3.7, на экстремали выполняется усиленное условие Лежандра. В силу линейности системы ограничений и квадратичности рассматриваемого функционала, система дифференциальных уравнений Якоби в (1.19) совпадает с системой дифференциальных уравнений краевой задачи (1.10). Общее решение такой системы, как отмечалось и использовалось выше, имеет вид:

$$\begin{aligned}\delta x_1(t) &= a' \cos t + b' \sin t + c' \operatorname{ch} t + d' \operatorname{sh} t, \\\delta x_2(t) &= -a' \sin t + b' \cos t + c' \operatorname{sh} t + d' \operatorname{ch} t, \\q_1(t) &= -a' \sin t + b' \cos t - c' \operatorname{sh} t - d' \operatorname{ch} t, \\q_2(t) &= -a' \cos t - b' \sin t + c' \operatorname{ch} t + d' \operatorname{sh} t.\end{aligned}$$

Начальные условия (1.20) однозначно определяют два набора коэффициентов:

$$\begin{aligned}1 &= a'_1 + c'_1, & 0 &= a'_2 + c'_2, \\0 &= b'_1 + d'_1, & 1 &= b'_2 + d'_2, \\0 &= b'_1 - d'_1, & 0 &= b'_2 - d'_2, \\0 &= -a'_1 + c'_1, & 0 &= -a'_2 + c'_2,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} a'_1 &= 0.5, & a'_2 &= 0, \\ b'_1 &= 0, & b'_2 &= 0.5, \\ c'_1 &= 0.5, & c'_2 &= 0, \\ d'_1 &= 0, & d'_2 &= 0.5. \end{aligned}$$

Условие (1.21) в этом случае преобразуется к виду

$$\det \begin{pmatrix} 0.5 \cos \tau + 0.5 \operatorname{ch} \tau & 0.5 \sin \tau + 0.5 \operatorname{sh} \tau \\ -0.5 \sin \tau + 0.5 \operatorname{sh} \tau & 0.5 \cos \tau + 0.5 \operatorname{ch} \tau \end{pmatrix} = 0$$

или

$$\cos \tau \operatorname{ch} \tau + 1 = 0.$$

Минимальный положительный корень этого уравнения

$$\tau \approx 1.875104068711961.$$

Так как на  $(0; 1.8]$  сопряженные точки отсутствуют, то на экстремали задачи выполняется усиленное условие Якоби и достигается слабый локальный минимум. Поскольку выполняется условие квазирегулярности (усиленное условие Вейерштрасса), то на экстремали достигается сильный локальный минимум. Так как задача линейно–квадратичная, сильный локальный минимум совпадает с абсолютным минимумом.

Вывод: при  $\alpha = 0$  на единственной существующей экстремали задачи достигается абсолютный минимум в задаче (1.4), (1.5), (1.6).

### 1.3.9. Результаты решения задачи и их анализ

С использованием метода продолжения решения по параметру, отправляясь от известного аналитического решения задачи при  $\alpha = 0$ , удалось построить семейство экстремалей в требуемом диапазоне  $\alpha \in [-5.0; 5.0]$ . Методом случайного поиска было найдено еще несколько экстремалей и методом продолжения решения по параметру построены содержащие их семейства экстремалей (с параметром  $\alpha$ ).

В табл. 1.5 для различных  $\alpha$  представлены вычисленные при оценке относительной погрешности на шаге решения задачи Коши  $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-12}$  результаты решения задачи: начальные значения  $x_1(0)$  и  $x_2(0)$  (параметры пристрелки), значение

функционала задачи, оценка точности решения задачи Коши  $\delta_K(1.8)$ , оценка точности выбора параметров пристрелки  $\Delta\beta$  (2.21), оценка точности решения краевой задачи  $\delta_3(1.8)$  (оценка точности решения задачи Коши с неточно заданными начальными условиями; заметим, что в данной задаче  $\delta_3(0) = \Delta\beta$ ) и сопряженная точка  $\tau$  (или прочерк, если на отрезке  $[0; 1.8]$  сопряженная точка отсутствует). Прочерк в колонках  $\Delta\beta$  и  $\delta_3(1.8)$  ставился при невозможности оценить эти величины по используемому алгоритму (см. п. 2.5).

**Таблица 1.5.** Экстремали задачи:  $\alpha$  — параметр задачи,  $x_1(0)$  и  $x_2(0)$  — параметры пристрелки,  $B_0$  — значение функционала на экстремали,  $\delta_K(1.8)$  — оценка точности решения задачи Коши,  $\Delta\beta$  — оценка точности выбора параметров пристрелки,  $\delta_3(1.8)$  — оценка точности решения краевой задачи,  $\tau$  — сопряженная точка. (Величины вычислены при оценке относительной погрешности на шаге  $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-12}$ ; прочерки в столбцах  $\Delta\beta$ ,  $\delta_3(1.8)$  означают, что оценки точности вычислить не удалось, в столбце  $\tau$  — сопряженная точка на экстремали отсутствует).

$\alpha$	$x_1(0)$ $x_2(0)$	$B_0$ $\tau$	$\delta_K(1.8)$ $\delta_3(1.8)$	$\Delta\beta$
-5.0	9.99445369	44.75306	$1.56 \cdot 10^{17}$	—
	1.94048009	—	—	—
-4.0	10.1374238	28.07787	$6.35 \cdot 10^9$	—
	-0.65453976	—	—	—
-3.0	10.1729382	14.54707	$1.81 \cdot 10^3$	—
	-2.78563727	—	—	—
-2.0	10.1145177	4.134599	$3.94 \cdot 10^{-3}$	—
	-4.49145492	—	—	—
-1.0	9.99160974	-3.302217	$1.24 \cdot 10^{-7}$	—
	-5.79512989	—	—	—
0.0	9.79765405	-8.020180	$6.79 \cdot 10^{-11}$	$1.96 \cdot 10^{-9}$
	-6.69554465	—	$1.19 \cdot 10^{-8}$	—
1.0	7.80527818	-10.60483	$8.45 \cdot 10^{-9}$	$8.38 \cdot 10^{-8}$
	-3.59228140	—	$2.28 \cdot 10^{-4}$	—
2.0	7.19061422	-11.67078	$1.29 \cdot 10^{-6}$	—
	-0.89371186	—	—	—
3.0	6.71725702	-11.51552	$1.80 \cdot 10^{-4}$	—
	1.73079910	—	—	—
4.0	6.29823667	-10.50472	$2.12 \cdot 10^{-2}$	—

Таблица 1.5. Продолжение.

$\alpha$	$x_1(0)$	$B_0$	$\delta_K(1.8)$	$\Delta\beta$
	$x_2(0)$	$\tau$	$\delta_3(1.8)$	
5.0	4.12985206 5.92877095 6.17038648	— -8.889447 —	— 3.81 —	—
5.0	13.5621350 -0.40289668	-8.873503 —	$2.30 \cdot 10^{23}$ —	—
4.0	13.6975927 -2.84606068	-12.08265 —	$4.13 \cdot 10^{15}$ —	—
3.0	13.7479377 -4.92463711	-13.59447 —	$2.06 \cdot 10^8$ —	—
2.0	13.6557996 -6.71524565	-13.32812 —	$2.77 \cdot 10^1$ —	—
1.0	13.1826003 -8.27326467	-11.23301 —	$1.12 \cdot 10^{-5}$ —	—
0.33315	10.7120396 -7.880	-9.035552 1.8	$8.12 \cdot 10^{-10}$ $1.20 \cdot 10^{-6}$	$1.59 \cdot 10^{-8}$
1.0	9.76523188 -7.51511254	-10.31373 1.65445	$1.96 \cdot 10^{-7}$ 0.232	$5.80 \cdot 10^{-6}$
2.0	9.55750854 -7.85944916	-10.40485 1.48287	$4.04 \cdot 10^{-3}$ —	—
3.0	9.27750588 -7.61196157	-8.393900 1.31854	$5.62 \cdot 10^2$ —	—
4.0	8.89760100 -6.40787678	-4.330855 1.10446	$6.85 \cdot 10^8$ —	—
5.0	8.44196306 -4.11730215	1.688676 0.89228	$7.44 \cdot 10^{15}$ —	—
-5.0	3.99177364 3.05921918	56.50155 0.91983	$6.30 \cdot 10^{13}$ —	—
-4.0	5.10266800 -1.98185353	35.71044 0.98390	$2.47 \cdot 10^6$ —	—
-3.0	6.05071724 -5.47600715	18.93025 1.11361	3.95 —	—
-2.0	6.67148652 -6.43071541	6.401374 1.31579	$5.03 \cdot 10^{-5}$ —	—
-1.0	6.72366702 -5.47762715	-2.143645 1.54501	$6.78 \cdot 10^{-9}$ $1.42 \cdot 10^{-4}$	$8.61 \cdot 10^{-8}$

Таблица 1.5. Продолжение.

$\alpha$	$x_1(0)$	$B_0$	$\delta_K(1.8)$	$\Delta\beta$
	$x_2(0)$	$\tau$	$\delta_3(1.8)$	
-0.43202	5.04460707 -2.650	-5.289060 1.8	$7.10 \cdot 10^{-11}$ $6.69 \cdot 10^{-8}$	$5.36 \cdot 10^{-9}$
-1.0	2.94056578 -0.11352542	-4.920289 —	$2.74 \cdot 10^{-11}$ $9.50 \cdot 10^{-8}$	$1.04 \cdot 10^{-8}$
-2.0	2.30091295 0.79880307	-5.021007 —	$3.29 \cdot 10^{-11}$ $1.37 \cdot 10^{-8}$	$3.18 \cdot 10^{-10}$
-3.0	1.94782522 1.30437568	-5.076429 —	$4.36 \cdot 10^{-11}$ $2.30 \cdot 10^{-8}$	$1.63 \cdot 10^{-10}$
-4.0	1.65671158 1.54049096	-5.012524 —	$8.35 \cdot 10^{-11}$ $7.26 \cdot 10^{-8}$	$1.86 \cdot 10^{-10}$
-5.0	1.40960683 1.51195685	-4.866708 —	$2.22 \cdot 10^{-10}$ $7.15 \cdot 10^{-7}$	$7.32 \cdot 10^{-10}$

Представленные в табл. 1.5 экстремали соответствуют трем различным семействам экстремалей. Заметим, что нет никаких гарантий, что удалось определить все возможные экстремали задачи (кроме случая  $\alpha = 0$ , в котором в аналитическом виде обосновывается существование и единственность решения краевой задачи); точнее, в табл. 1.5 представлено *только* три различных семейства решений краевой задачи — несколько других семейств найдено, но среди результатов решения не описано.

Первое представленное в табл. 1.5 семейство условно называется основным (потому, что этому семейству принадлежит единственное существующее при  $\alpha = 0$  решение краевой задачи). Два других семейства условно называются отрицательным (для отрицательных  $\alpha$ ) и положительным (для положительных  $\alpha$ ). Положительные и отрицательные семейства (каждое из найденных) состоят из двух ветвей, эти ветви стыкуются друг с другом в некоторой “поворотной” экстремали (соответствующей максимальному для отрицательных и минимальному для положительных значений  $\alpha$ ); для остальных  $\alpha$  в этих семействах имеется по две разных экстремали. Построение такой “поворотной” экстремали — отдельная задача; ее решение несложно и может быть получено, например, с использованием “замены параметра семейства” (именно с такой заменой и

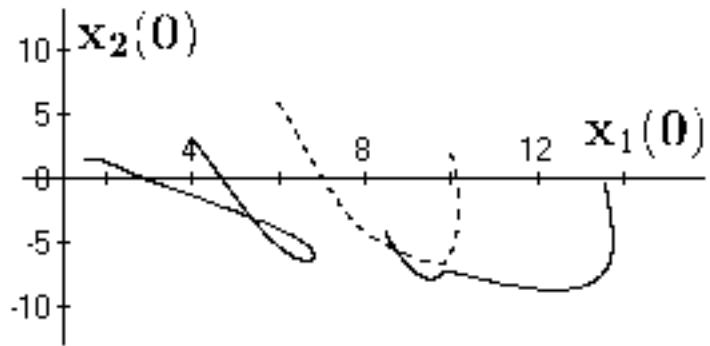


Рис. 1.2 Параметры пристрелки  $x_1(0)$  и  $x_2(0)$  на трех семействах задачи при  $\alpha \in [-5; 5]$ .

связано меньшее число знаков в колонке  $x_2(0)$  и большее — в колонке  $\alpha$  табл. 1.5 для двух экстремалей, близких к поворотным). Графики зависимостей параметров пристрелки на этих семействах (поясняющие, что представленные ветви действительно составляют семейства) показаны на рис. 1.2. Заметим, что точки пересечения и самопересечения этих графиков соответствуют разным  $\alpha$  (не являются точками бифуркации). На рис. 1.3 приведена зависимость от  $\alpha$  функционала задачи  $B_0$ , вычисленного на экстремалах. На обоих рисунках пунктиром представлен график, соответствующий “основному” семейству экстремалей.

Среди построенных экстремалей проведен отбор по функционалу: при  $-5 \leq \alpha < \alpha_*$ ,  $\alpha_* \approx -0.7$  минимальное среди вычисленных значение функционала соответствует экстремалям отрицательного семейства, при  $\alpha_* < \alpha < \alpha_{**}$ ,  $\alpha_{**} \approx 0.36$  — экстремалям основного семейства, при  $\alpha_{**} < \alpha < \alpha_{***}$ ,  $\alpha_{***} \approx 4.99$  — экстремалям положительного семейства, при  $\alpha_{***} < \alpha$  — снова экстремалям основного семейства (на экстремалах других рассчитанных семейств значение функционала больше и, собственно, поэтому эти семейства экстремалей не включены в описание).

Усиленное условие Якоби выполняется на всех приведенных экстремалах задачи основного семейства и на ветвях всех

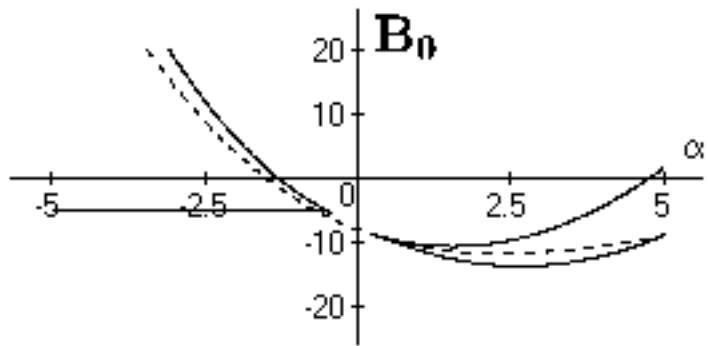


Рис. 1.3 Зависимость величины функционала задачи  $B_0$  на экстремалах разных семейств.

рассчитанных положительных и отрицательных семейств (как включенных, так и не включенных в табл. 1.5), соответствующих меньшим значениям функционала. Поэтому эти экстремали доставляют функционалу слабый локальный минимум. Так как функционал задачи является строго выпуклым по  $u$  для всех значений  $x_1, x_2$ , то построенные экстремали доставляют функционалу сильный локальный минимум. На поворотных экстремалах сопряженная точка попадает в конец отрезка; поэтому они могут оказаться как оптимальными, так и не оптимальными.

Так как на экстремалах, соответствующих наименьшим (для каждого  $\alpha$ ) значениям функционала, выполняется совокупность достаточных условий сильной локальной оптимальности, то эти экстремали могут оказаться решениями исходной задачи.

В табл. 1.6–1.8 приводятся результаты численного эксперимента: для трех экстремалей Понтрягина (соответствующих минимальным среди вычисленных значениям функционала при  $\alpha = 0, \alpha = -5, \alpha = 4$  — см. табл. 1.5) проводятся расчеты с различными оценками погрешности на шаге.

**Таблица 1.6.** Экстремаль задачи при  $\alpha = 0$ .

$t$	$\Delta x_1(t)$ $\Delta x_2(t)$	$\Delta p_1(t)$ $\Delta p_2(t)$	$\delta_K(t)$ $\delta_3(t)$	$H(t) - H(0)$
$\Delta_{\text{лок}} = 10^{-8}$				
0.00	$2.40 \cdot 10^{-9}$ $3.11 \cdot 10^{-9}$	0.0 0.0	0.0 $1.60 \cdot 10^{-6}$	0.0
0.45	$3.82 \cdot 10^{-9}$ $3.15 \cdot 10^{-9}$	$-1.44 \cdot 10^{-9}$ $1.80 \cdot 10^{-9}$	$5.75 \cdot 10^{-9}$ $2.52 \cdot 10^{-6}$	$3.37 \cdot 10^{-10}$
0.90	$5.29 \cdot 10^{-9}$ $3.40 \cdot 10^{-9}$	$-3.54 \cdot 10^{-9}$ $1.17 \cdot 10^{-9}$	$1.36 \cdot 10^{-8}$ $3.96 \cdot 10^{-6}$	$6.74 \cdot 10^{-10}$
1.35	$6.98 \cdot 10^{-9}$ $4.30 \cdot 10^{-9}$	$-6.35 \cdot 10^{-9}$ $3.30 \cdot 10^{-9}$	$2.54 \cdot 10^{-8}$ $6.23 \cdot 10^{-6}$	$1.01 \cdot 10^{-9}$
1.80	$9.30 \cdot 10^{-9}$ $6.44 \cdot 10^{-9}$	$-1.00 \cdot 10^{-8}$ $6.90 \cdot 10^{-9}$	$4.40 \cdot 10^{-8}$ $9.77 \cdot 10^{-6}$	$1.35 \cdot 10^{-9}$
$\Delta_{\text{лок}} = 10^{-10}$				
0.0	$2.40 \cdot 10^{-9}$ $3.11 \cdot 10^{-9}$	0.0 0.0	0.0 $3.03 \cdot 10^{-7}$	0.0
0.45	$3.81 \cdot 10^{-9}$ $3.15 \cdot 10^{-9}$	$-1.40 \cdot 10^{-9}$ $2.85 \cdot 10^{-10}$	$5.57 \cdot 10^{-10}$ $4.75 \cdot 10^{-7}$	$1.93 \cdot 10^{-11}$
0.90	$5.28 \cdot 10^{-9}$ $3.49 \cdot 10^{-9}$	$-3.44 \cdot 10^{-9}$ $1.35 \cdot 10^{-9}$	$1.04 \cdot 10^{-9}$ $7.45 \cdot 10^{-7}$	$2.57 \cdot 10^{-11}$
1.35	$7.05 \cdot 10^{-9}$ $4.53 \cdot 10^{-9}$	$-6.20 \cdot 10^{-9}$ $3.49 \cdot 10^{-9}$	$1.64 \cdot 10^{-9}$ $1.17 \cdot 10^{-6}$	$2.61 \cdot 10^{-11}$
1.80	$9.55 \cdot 10^{-9}$ $6.84 \cdot 10^{-9}$	$-9.89 \cdot 10^{-9}$ $7.06 \cdot 10^{-9}$	$2.63 \cdot 10^{-9}$ $1.83 \cdot 10^{-6}$	$2.74 \cdot 10^{-11}$
$\Delta_{\text{лок}} = 10^{-12}$				
0.00	$2.40 \cdot 10^{-9}$ $3.11 \cdot 10^{-9}$	0.0 0.0	0.0 $2.28 \cdot 10^{-7}$	0.0
0.45	$3.81 \cdot 10^{-9}$ $3.16 \cdot 10^{-9}$	$-1.40 \cdot 10^{-9}$ $2.90 \cdot 10^{-10}$	$1.07 \cdot 10^{-11}$ $3.58 \cdot 10^{-7}$	$1.49 \cdot 10^{-13}$
0.90	$5.28 \cdot 10^{-9}$ $3.49 \cdot 10^{-9}$	$-3.44 \cdot 10^{-9}$ $1.35 \cdot 10^{-9}$	$2.02 \cdot 10^{-11}$ $5.61 \cdot 10^{-7}$	$1.85 \cdot 10^{-13}$
1.35	$7.05 \cdot 10^{-9}$ $4.53 \cdot 10^{-9}$	$-6.19 \cdot 10^{-9}$ $3.49 \cdot 10^{-9}$	$3.47 \cdot 10^{-11}$ $8.80 \cdot 10^{-7}$	$2.27 \cdot 10^{-13}$
1.80	$9.55 \cdot 10^{-9}$ $6.85 \cdot 10^{-9}$	$-9.89 \cdot 10^{-9}$ $7.07 \cdot 10^{-9}$	$5.77 \cdot 10^{-11}$ $1.38 \cdot 10^{-6}$	$2.77 \cdot 10^{-13}$

Так как при  $\alpha = 0$  известно аналитическое решение задачи, то анализ точности в этом случае элементарен. В табл. 1.6 приведены отличия вычисленных значений функций  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$  от их точных значений. Основной вклад в эти погрешности привносит неточность определения начальных значений (параметров пристрелки), одних и тех же во всех трех расчетах. При  $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-8}$  выбираемый программой шаг пре-восходит 0.45 и потому задача Коши фактически решена с постоянным шагом  $h = 0.45$ . При анализе чисел в этой таблице необходимо обратить внимание на степень совпадения значений при различных  $t$  и в том числе при  $t = 1.8$ : практическое совпадение этих значений при  $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-10}$  и  $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-12}$  в случае отсутствия аналитического решения позволило бы предположить, что погрешность решения задачи Коши составляет примерно  $10^{-11}$  (заметим, что эта величина хорошо согласуется с вычисленной величиной  $\Delta H$ ).

**Таблица 1.7.** Экстремаль задачи при  $\alpha = -5$ . (последняя строка табл. 1.5)

$t$	$x_1(t)$	$p_1(t)$
$H(t) - H(0)$	$x_2(t)$	$p_2(t)$
	$\delta_K(t)$	$\delta_3(t)$
$\Delta_{\text{лок}} = 10^{-6}$		
0.0	1.409606835410015 1.511956862343679	0.0 0.0
0.0	0.0	—
0.45	2.024976231183060 0.7928501594991314	-0.5544467113978056 0.1411831758985311
$9.865 \cdot 10^{-9}$	$2.588 \cdot 10^{-7}$	—
0.90	1.908805303527697 -1.191072044177759	-0.1647383909258695 0.3422049212482378
$1.108 \cdot 10^{-8}$	$3.152 \cdot 10^{-6}$	—
1.35	1.283389575105926 -1.207294706487639	0.3094402811874255 0.2776261705821790
$2.476 \cdot 10^{-8}$	$2.242 \cdot 10^{-5}$	—
1.80	1.0000000000000002 $7.953 \cdot 10^{-16}$	0.08391346179501891 0.1768831611444868

Таблица 1.7. Продолжение.

$t$	$x_1(t)$	$p_1(t)$
$H(t) - H(0)$	$x_2(t)$	$p_2(t)$
	$\delta_K(t)$	$\delta_3(t)$
$1.031 \cdot 10^{-8}$	$4.730 \cdot 10^{-5}$	—
$\Delta_{\text{лок}} = 10^{-8}$		
0.0	1.409606831076075 1.511956846392348	0.0 0.0
0.0	0.0	—
0.45	2.024976230473480 0.7928501655446639	-0.5544467219647961 0.1411831768116520
$1.162 \cdot 10^{-11}$	$2.203 \cdot 10^{-9}$	—
0.90	1.908805305029413 -1.191072042700488	-0.1647383890529318 0.3422049255248643
$3.567 \cdot 10^{-11}$	$2.998 \cdot 10^{-8}$	—
1.35	1.283389576855278 -1.207294706345364	0.3094402972549483 0.2776261651760423
$1.265 \cdot 10^{-10}$	$1.957 \cdot 10^{-7}$	—
1.80	1.000000000000044 -4.385 $\cdot 10^{-14}$	0.08391347140666618 0.1768831554321624
$-2.417 \cdot 10^{-11}$	$3.765 \cdot 10^{-7}$	—
$\Delta_{\text{лок}} = 10^{-10}$		
0.0	1.409606830972885 1.511956846312357	0.0 0.0
0.0	0.0	—
0.45	2.024976230452447 0.7928501657450588	-0.5544467219476635 0.1411831768233863
$2.565 \cdot 10^{-14}$	$5.996 \cdot 10^{-11}$	—
0.90	1.908805305062015 -1.191072042720622	-0.1647383891178881 0.3422049255970862
$1.229 \cdot 10^{-12}$	$8.919 \cdot 10^{-10}$	—
1.35	1.283389576861033 -1.207294706377862	0.3094402974258746 0.2776261651503116
$1.382 \cdot 10^{-12}$	$5.546 \cdot 10^{-9}$	—
1.80	0.9999999999999484 7.133 $\cdot 10^{-13}$	0.08391347149003180 0.1768831553894809
$-1.573 \cdot 10^{-12}$	$1.013 \cdot 10^{-8}$	—

Таблица 1.7. Продолжение.

$t$	$x_1(t)$ $x_2(t)$ $\delta_K(t)$	$p_1(t)$ $p_2(t)$ $\delta_3(t)$
$\Delta_{\text{лок}} = 10^{-12}$		
0.0	1.409606830970367 1.511956846311878 0.0	0.0 0.0 $6.471 \cdot 10^{-10}$
0.45	2.024976230452041 0.7928501657508835 $-1.332 \cdot 10^{-15}$	$-0.5544467219469956$ 0.1411831768235494 $5.218 \cdot 10^{-9}$
0.90	1.908805305062865 -1.191072042720973 $1.399 \cdot 10^{E-14}$	$-0.1647383891182218$ 0.3422049255984117 $6.054 \cdot 10^{-8}$
1.35	1.283389576861311 -1.207294706379061 $1.321 \cdot 10^{-14}$	0.3094402974290674 0.2776261651499857 $3.591 \cdot 10^{-7}$
1.80	0.9999999999999997 $4.607 \cdot 10^{-16}$ $-1.732 \cdot 10^{-14}$	0.08391347149167404 0.1768831553887960 $6.301 \cdot 10^{-7}$

Таблица 1.8. Экстремаль задачи при  $\alpha = 4$ . (13-ая строка табл. 1.5)

$t$	$x_1(t)$ $p_1(t)$ $\delta_K(t)$	$x_2(t)$ $p_2(t)$ $\delta_3(t)$
$\Delta_{\text{лок}} = 10^{-8}$		
0.0	13.69759274118108 0.0 0.0	$-2.846060697470446$ 0.0 —
0.45	9.276038712354625 -1.895674509928497 $-4.037 \cdot 10^{-8}$	$-10.168640564425910$ 0.8489768921871386 —
0.90	5.787932462119213 -18.519216260264490 $-2.313 \cdot 10^{-7}$	$-10.072771925492690$ 6.370667493149098 —

Таблица 1.8. Продолжение.

$t$	$x_1(t)$ $p_1(t)$ $\delta_K(t)$	$x_2(t)$ $p_2(t)$ $\delta_3(t)$
$H(t) - H(0)$		
1.35	2.105812280501838 -6.813428641363429 $2.141 \cdot 10^{11}$	-4.686587046554486 7.442914040333591 —
$-2.490 \cdot 10^{-7}$		
1.80	0.9999999999999218 -26.633099880738770 $3.523 \cdot 10^{21}$	$-1.644 \cdot 10^{-13}$ 15.992148153294000 —
$-2.652 \cdot 10^{-7}$		
$\Delta_{\text{лок}} = 10^{-10}$		
0.0	13.697592744710210 0.0 0.0	-2.846060676918103 0.0 —
0.0		
0.45	9.276038722219949 -1.895674484202870 $1.292 \cdot 10^{-7}$	-10.168640605333780 0.8489768949000965 —
$-2.110 \cdot 10^{-10}$		
0.90	5.787932469171911 -18.519216345142720 3.476	-10.072771920771870 6.370667484454155 —
$-2.025 \cdot 10^{-9}$		
1.35	2.105812282504768 -6.813428635544046 $2.753 \cdot 10^8$	-4.686587055693940 7.442914050366208 —
$-1.956 \cdot 10^{-9}$		
1.80	0.9999999999995072 -26.633099916395020 $1.673 \cdot 10^{18}$	$-4.676 \cdot 10^{-12}$ 15.992148175793630 —
$-2.250 \cdot 10^{-9}$		
$\Delta_{\text{лок}} = 10^{-12}$		
0.0	13.697592744747880 0.0 0.0	-2.846060676764355 0.0 —
0.0		
0.45	9.276038722309421 -1.895674483961957 $2.214 \cdot 10^{-9}$	-10.168640605708990 0.8489768949244977 —
$-1.265 \cdot 10^{-12}$		
0.90	5.787932469233537 -18.519216345881820 $3.665 \cdot 10^{-2}$	-10.072771920734820 6.370667484374647 —
$-1.417 \cdot 10^{-11}$		
1.35	2.105812282521849	-4.686587055776092

Таблица 1.8. Продолжение.

$t$	$x_1(t)$ $p_1(t)$ $\delta_K(t)$	$x_2(t)$ $p_2(t)$ $\delta_3(t)$
$H(t) - H(0)$		
$-1.310 \cdot 10^{-11}$	-6.813428635488267 $1.217 \cdot 10^6$	7.442914050446671 —
1.80	0.9999999999999563 -26.633099916655700 $3.824 \cdot 10^{+015}$	$-1.095 \cdot 10^{-13}$ 15.992148176000460 —
$-1.747 \cdot 10^{-11}$		

При анализе результатов, представленных в табл. 1.7 и табл. 1.8, следует обратить внимание на совпадение знаков при расчетах с различными  $\Delta_{лок}$ , точнее на то, что при уменьшении  $\Delta_{лок}$  в 100 раз число совпадающих знаков в среднем увеличивается на два и также на два порядка уменьшаются  $\Delta H$  и  $\delta_K$ . Точность решения краевой задачи при  $\alpha = -5$  удалось оценить только при  $\Delta_{лок} = 10^{-12}$ , а при  $\alpha = 4$  не удалось оценить во все из-за фатально завышенной оценки решения задачи Коши по используемому алгоритму. Опираясь на совпадение знаков в решении задачи можно предположить, что точность решения задачи Коши примерно совпадает с погрешностью  $\Delta H$ .

На этом исследование задачи закончено.

Как указывалось в п. **Задание и задачи**, отчет по проведенному исследованию состоит из 5 пунктов:

- 1) постановка решаемой задачи (п. 1.3.1) и ее формализация (п. 1.3.2);
- 2) сведение решения задачи оптимизации к решению краевой задачи (п. 1.3.3);
- 3) анализ полученной краевой задачи (п. 1.3.4) и формирование вычислительной схемы ее решения (п. 1.3.5), аналитическое решение задачи при  $\alpha = 0$  (п. 1.3.8) необходимо для применения метода продолжения решения по параметру;
- 4) оценки точности краевой задачи (п. 1.3.6), описание полученных при решении результатов и их анализ (п. 1.3.9);
- 5) исследование оптимальности полученных экстремалей — п. 1.3.7.

## 1.4. Задача Лагранжа с нефиксированным временем и ограничениями вида “меньше или равно”

В отличие от пункта 1.3, в этом пункте рассматривается задача, в постановке которой один из концов временного отрезка свободен (нефиксирован) и присутствуют ограничения вида “меньше или равно”.

### 1.4.1. Постановка задачи

$$B_0 := \int_0^T u^2 dt + \alpha T \rightarrow \inf, \quad \alpha \in [0, A]; \quad (1.22)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -ux_1, \end{cases} \quad u \in R; \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} &x_1(0) - 1 \leq 0, \\ &x_2(0) - 2 = 0, \\ &x_1(T) - 1 = 0, \\ &x_2(T) - 1 \leq 0, \\ &1 - T \leq 0, \\ &T - 10 \leq 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

### 1.4.2. Система необходимых условий оптимальности

Основные конструкции:

$$\mathcal{L} := \int_0^T L dt + l,$$

$$L := \lambda_0 u^2 + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 + ux_1),$$

$$\begin{aligned} l := &\lambda_0 \alpha T + \mu_1(1 - T) + \mu_2(T - 10) + \\ &+ \lambda_{10}(x_1(0) - 1) + \lambda_{20}(x_2(0) - 2) + \lambda_{1T}(x_1(T) - 1) + \lambda_{2T}(x_2(T) - 1), \\ H := &p_1 x_2 - p_2 u x_1 - \lambda_0 u^2. \end{aligned}$$

Необходимые условия оптимальности:

а) уравнения Эйлера–Лагранжа (сопряженная система уравнений):

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = p_2 u, \\ \dot{p}_2 = -p_1; \end{cases} \quad (1.25)$$

б) условие оптимальности по управлению:

$$\hat{u} = \underset{u \in R}{\operatorname{argabsmax}}(-p_2 x_1 u - \lambda_0 u^2);$$

при  $\lambda_0 \neq 0$

$$\hat{u} = -\frac{p_2 x_1}{2\lambda_0}; \quad (1.26)$$

в) условия трансверсальности:

$$p_1(0) = \lambda_{10}, \quad p_2(0) = \lambda_{20}, \quad p_1(T) = -\lambda_{1T}, \quad p_2(T) = -\lambda_{2T}; \quad (1.27)$$

г) условие стационарности:

$$H(T) = \lambda_0 \alpha + \mu_2 - \mu_1;$$

д) условия дополняющей нежесткости:

$$\begin{aligned} \lambda_{10}(x_1(0) - 1) &= 0, \\ \lambda_{2T}(x_2(T) - 1) &= 0, \\ \mu_1(1 - T) &= 0, \\ \mu_2(T - 10) &= 0; \end{aligned} \quad (1.28)$$

е) условия неотрицательности:

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_{10} \geq 0, \quad \lambda_{2T} \geq 0, \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0; \quad (1.29)$$

ж) множители Лагранжа Не Равны Одновременно Нулю (условие НЕРОН);

з) множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного сомножителя (условие нормировки).

### 1.4.3. Краевая задача и ее анализ

Для формирования краевой задачи принципа максимума необходимо выбрать условие нормировки. Проведем анализ возможности аномального случая  $\lambda_0 = 0$ . В этом случае,

если  $\exists(\tau_1, \tau_2) \in [0, T]$  такой, что  $p_2(t)x_1(t) \neq 0$  при  $t \in (\tau_1, \tau_2)$ , то  $\hat{u}(t) = \pm\infty$  при  $t \in (\tau_1, \tau_2)$ ,  $\hat{u}^2(t) = \infty$ ,  $\int_0^T \hat{u}^2(t)dt > \int_{\tau_1}^{\tau_2} \hat{u}^2(t)dt = \infty$ , что не соответствует оптимальному решению (кроме того соответствующий процесс не принадлежит классу допустимых процессов). Если  $p_2x_1 \equiv 0$ , то все существующие производные этой функции также должны быть нулевыми или, что то же самое:  $p_2x_2 - p_1x_1 \equiv 0$  и  $p_1x_2 \equiv 0$ . Выберем какую-либо точку  $\tau \in [0, T]$ . Из условия  $p_2(\tau)x_1(\tau) = 0$  следует, что  $p_2(\tau) = 0$  или  $x_1(\tau) = 0$ , а из условия  $p_1(\tau)x_2(\tau) = 0$  следует  $p_1(\tau) = 0$  или  $x_2(\tau) = 0$ .

Если  $p_1(\tau) = 0$ ,  $p_2(\tau) = 0$ , то система сопряженных уравнений (1.25) вне зависимости от выбора  $u(t)$  будет иметь единственное решение  $p_1(t) \equiv 0$ ,  $p_2(t) \equiv 0 \forall t \in [0, T]$ , и потому  $\lambda_{10} = -p_1(0) = 0$ ,  $\lambda_{20} = p_2(0) = 0$ ,  $\lambda_{1T} = -p_1(T) = 0$ ,  $\lambda_{2T} = -p_2(T) = 0$ ,  $H(t) \equiv 0$ ,  $\lambda_0\alpha + \mu_2 - \mu_1 = H(T) = 0$ , откуда в силу условий дополняющей нежесткости (1.28) и неотрицательности (1.29)  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 0$ . То есть все множители Лагранжа равны нулю, что невозможно.

Если  $x_1(\tau) = 0$ ,  $x_2(\tau) = 0$ , то система дифференциальных уравнений (1.23) вне зависимости от выбора  $u(t)$  будет иметь единственное решение  $x_1(t) \equiv 0$ ,  $x_2(t) \equiv 0 \forall t \in [0, T]$ , что невозможно в силу краевых условий (1.24).

Если  $x_1(\tau) = 0$ ,  $p_1(\tau) = 0$ , то из условия

$$p_2(\tau)x_2(\tau) - p_1(\tau)x_1(\tau) = 0$$

следует  $p_2(\tau)x_2(\tau) = 0$ , то есть  $p_2(\tau) = 0$  или  $x_2(\tau) = 0$ , что приводит к одному из двух рассмотренных выше случаев.

Наконец, если  $x_2(\tau) = 0$ ,  $p_2(\tau) = 0$ , то из условия  $p_2(\tau)x_2(\tau) - p_1(\tau)x_1(\tau) = 0$  следует  $p_1(\tau)x_1(\tau) = 0$ , то есть  $p_1(\tau) = 0$  или  $x_1(\tau) = 0$ , что также приводит к одному из двух первых случаев.

Следовательно аномальный случай  $\lambda_0 = 0$  в рассматриваемом примере невозможен. Поэтому, в силу однородности функции Лагранжа по множителям Лагранжа, в качестве условия нормировки задачи выбирается условие  $\lambda_0 = 1/2$ .

Таким образом, на основе принципа максимума решение за-

дачии Лагранжа свелось к решению краевой задачи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 p_2, \\ \dot{p}_1 = -p_2^2 x_1, \\ \dot{p}_2 = -p_1. \end{cases} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} x_2(0) - 2 &= 0, \\ p_1(0)(x_1(0) - 1) &= 0, \\ x_1(T) - 1 &= 0, \\ p_2(T)(x_2(T) - 1) &= 0, \\ H(T) = \alpha/2 + \mu_2 - \mu_1, \\ \mu_1(1 - T) &= 0, \\ \mu_2(T - 10) &= 0; \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} x_1(0) - 1 &\leq 0, \quad p_1(0) \geq 0, \\ x_2(T) - 1 &\leq 0, \quad p_2(T) \leq 0, \\ 1 - T &\leq 0, \quad \mu_1 \geq 0, \\ T - 10 &\leq 0, \quad \mu_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Управление из условия оптимальности в систему дифференциальных уравнений уже подставлено, множители Лагранжа  $\lambda_{10}$ ,  $\lambda_{20}$ ,  $\lambda_{1T}$ ,  $\lambda_{2T}$  исключены и могут быть определены из условий трансверсальности (1.27) после решения краевой задачи.

В полученной краевой задаче неизвестны функции  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ , момент  $T$  и множители Лагранжа  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ . Для решения этой краевой задачи необходимо определить четыре константы интегрирования системы дифференциальных уравнений краевой задачи (1.30), например, значения этих функций при  $t = 0$ , и три величины:  $T$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ . Для определения этих семи неизвестных в краевой задаче имеется семь условий типа равенств (1.31), причем решение краевой задачи должно удовлетворять восьми неравенствам (1.32).

Формально, введением другого набора параметров можно избавиться в краевой задаче от ограничений типа неравенств. Так, вместо  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , исключенных из краевой задачи множителей Лагранжа  $\lambda_{10}$ ,  $\lambda_{2T}$  и величин  $x_1(0)$ ,  $x_2(T)$  можно было бы ввести параметры  $\nu_1, \dots, \nu_6$ , связанные с исходными, например, формулами  $\mu_1 = \nu_1^2$ ,  $\mu_2 = \nu_2^2$ ,  $\lambda_{10} = \nu_3^2$ ,  $\lambda_{2T} = \nu_4^2$ ,  $x_1(0) = 1 - \nu_5^2$ ,  $x_2(T) = 1 - \nu_6^2$ ,  $T = 5.5 + 4.5 \cos \nu_7$ . Такая

замена с последующей подстановкой позволила бы автоматически учесть условия неотрицательности, оставив в краевой задаче только условия типа равенств. Однако такая или любая другая, подобная приведенной, замена приводит к определенным вычислительным проблемам. Так, попытка применить метод Ньютона могла бы привести к успешному решению задачи, если бы только шесть параметров  $\nu_1, \dots, \nu_6$  были ненулевыми (что невозможно в силу условий дополняющей нежесткости). В самом деле, если параметр  $\nu_i$  обращается в ноль, то производные всех функций невязок по этому параметру также будут нулевыми. В связи с этим, матрица Якоби окажется вырожденной и метод Ньютона окажется неприменимым. Следовательно, для решения полученной системы уравнений необходимо предложить метод, учитывающий специфику полученной системы (в искомом корне система функций по части направлений имеет нулевую производную).

Чтобы избежать вышеуказанных трудностей и не менять хорошо себя зарекомендовавший метод решения системы нелинейных алгебраических уравнений (модифицированный метод Ньютона с использованием в условии сходимости нормировки Федоренко), этот искусственный прием при численном решении не применялся.

#### 1.4.4. Вычислительная схема решения задачи и оценка точности этого решения

Рассматриваемая в данном пункте задача несколько отличается от других рассматриваемых в пособии задач тем, что построить аналитическое решение для какого-либо  $\alpha$  не удается. Для практики такая ситуация обычна. Первым делом при решении задачи, чаще всего, применяется метод случайного выбора начального приближения: программирование этого метода особых трудностей не представляет. Если методом случайного поиска построить решение задачи не удается, при решении сложных нелинейных задач зачастую строятся специальные параметрические семейства, позволяющие применить метод продолжения решения по параметру и в итоге решить требуемую задачу.

Обратим внимание на специфику краевой задачи (1.30),

(1.31), (1.32). Величина  $\alpha$  входит в эту краевую задачу только в условие стационарности. Если в исходной задаче оптимального управления зафиксировать величину  $T$  каким-либо образом, то решение соответствующей краевой задачи принципа максимума, отличающейся от (1.30)–(1.32) отсутствием условия стационарности, двух условий дополняющей нежесткости и двух условий неотрицательности:

$$\begin{aligned} H(T) &= \alpha/2 + \mu_2 - \mu_1, \\ \mu_1(1-T) &= 0, \quad \mu_2(T-10) = 0, \\ \mu_1 &\geq 0, \quad \mu_2 \geq 0, \end{aligned} \quad (1.33)$$

от  $\alpha$  не зависит.

При решении рассматриваемой краевой задачи (1.30)–(1.32) используется серия вспомогательных краевых задач, соответствующих случаям фиксированных и свободных значений  $x_1(0)$ ,  $x_2(T)$  и фиксированном  $T$  — всего 4 различных типа постановок: условия  $x_2(0) - 2 = 0$  и  $x_1(T) - 1 = 0$  дополняются одним из условий  $x_1(0) - 1 = 0$  или  $p_1(0) = 0$  и одним из условий  $x_2(T) - 1 = 0$  или  $p_2(T) = 0$ , величина  $T$  задается каким-либо значением из  $[1; 10]$ . Если построить решение какой-то из рассматриваемых задач удается, то вычисляется значение  $H(T)$  и от этой вычисленной величины зависит выполнение или невыполнение условий (1.33) при различных  $\alpha$ . Как бы ни было выбрано значение  $T$ , при  $\alpha = 2 \cdot H(T)$  совокупность условий (1.33) выполняется (при этом  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ); если  $T = 1$ , то при  $\alpha > 2 \cdot H(T)$  совокупность условий оптимальности (1.33) выполняется (при этом  $\mu_1 = \alpha/2 - H(T)$ ,  $\mu_2 = 0$ ), а при  $\alpha < 2 \cdot H(T)$  — не выполняется; если  $T = 10$ , то при  $\alpha < 2 \cdot H(T)$  совокупность условий оптимальности (1.33) выполняется (при этом  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = H(T) - \alpha/2$ ), а при  $\alpha > 2 \cdot H(T)$  — не выполняется. Таким образом, решение вспомогательных краевых задач позволяет указать совокупность значений  $\alpha$ , при которых определенные экстремали будут также и экстремалями исходной задачи.

Для выяснения взаимосвязи решений вспомогательных задач друг с другом осуществляется погружение этих решений в трехпараметрическое семейство решений краевой задачи, соответствующей переходу между *фиксированными* начальной и

конечной точками плоскости  $(x_1, x_2)$  при *фиксированном* времени перехода  $T$  (с параметрами семейства  $x_1(0), x_2(T), T$ ).

Говоря более простым языком, решается серия задач при различных *фиксированных* значениях  $x_1(0), x_2(T), T$ . Рассматривая выбираемые значения  $x_1(0), x_2(T), T$  как параметры, получим трехпараметрическое семейство (или некоторую совокупность таких трехпараметрических семейств) экстремалей и определим при каких  $\alpha$  на полученных экстремалах выполняются условия (1.31), (1.32). В случае их выполнения при этих  $\alpha$  полученная экстремаль является экстремальной исходной краевой задачи.

При решении таких вспомогательных задач применяется вычислительная схема, в которой подбираются начальные значения  $p_1(0), p_2(0)$  так, чтобы удовлетворить двум условиям в выбранный (фиксированный) момент  $T$ :  $x_1(T) = 1, x_2(T) = x_{2T}$ .

После построения экстремалей и проверки выполнения всех условий краевой задачи (1.30)–(1.32) проводится анализ точности их определения.

При оценке точности решения задачи Коши предполагается, что начальные условия заданы точно:  $\|v(0) - x(0)\| \leq \rho(0)$ ,  $\rho(0) = 0$ .

Правые части в системе дифференциальных уравнений также считаются вычисляемыми точно:  $\|\dot{v}(t) - f(t, v(t))\| \leq \delta(t)$ ,  $\delta(t) \equiv 0$ .

Матрица Якоби системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2x_1 p_2 & 0 & 0 & x_1^2 \\ -p_2^2 & 0 & 0 & -2x_1 p_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для определения скорости распространения ошибки в оценках глобальной погрешности используется теорема I.10.6 (см. [38, п. I.§10, стр. 66], п. 2.4): определяется логарифмическая норма матрицы  $\mu(J)$  — максимальное собственное значение ма-

трицы

$$(J + J^T)/2 = \begin{pmatrix} 0 & A & -p_2^2/2 & 0 \\ A & 0 & 0 & x_1^2/2 \\ -p_2^2/2 & 0 & 0 & -A \\ 0 & x_1^2/2 & -A & 0 \end{pmatrix}.$$

где  $A = x_1 p_2 + 1/2$ .

Так как матрица симметрична, то все ее собственные значения действительны. После несложных, но громоздких (и потому пропущенных) выкладок характеристическое уравнение

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & A & -p_2^2/2 & 0 \\ A & -\lambda & 0 & x_1^2/2 \\ -p_2^2/2 & 0 & -\lambda & -A \\ 0 & x_1^2/2 & -A & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

сводится к биквадратному уравнению

$$\lambda^4 - 2C\lambda^2 + D = 0,$$

где

$$C = A^2 + x_1^4/8 + p_2^4/8, \quad D = (A^2 - x_1^2 p_2^2/4)^2.$$

Выполняются условия, гарантирующие существование четырех (с учетом кратности) действительных корней уравнения:

$$\begin{aligned} C &\geq 0, \\ C^2 - D &= (x_1^2 + p_2^2)^2 \cdot [(4x_1 p_2 + 2)^2 + (x_1^2 - p_2^2)^2]/64 \geq 0, \\ C &\geq \sqrt{C^2 - D} \text{ (так как } D \geq 0). \end{aligned}$$

Эти корни определяются по формуле

$$\lambda_i = \pm \sqrt{C \pm \sqrt{C^2 - D}}, \quad i = \overline{1, 4};$$

максимальный из них соответствует двум знакам плюс:

$$\mu(J) = \sqrt{C + \sqrt{C^2 - D}}. \quad (1.34)$$

Так как точные значения функций  $x_1(t)$ ,  $p_2(t)$  неизвестны, то для оценки коэффициента  $L_i$  в (2.20) необходимо оценить максимальное значение  $\mu(J)$  по окрестности функций  $x_1(t)$ ,

$p_2(t)$  не известного заранее радиуса  $\rho(t)$  при  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Для оценки величины  $L_i$  воспользуемся упрощенным алгоритмом, заменив искомый максимум  $\mu(J)$  по окрестности на максимум  $\mu(J)$  по двум точкам:

$$L_i \approx \max\{\mu(J)[x_1(t_i), p_2(t_i)], \mu(J)[x_1(t_{i+1}), p_2(t_{i+1})]\}. \quad (1.35)$$

Учитывая простой вид зависимости  $\mu(J)$  от  $x_1(t)$  и  $p_2(t)$  в рассматриваемой задаче возможно провести и более точную оценку  $L_i$  (аналогично проведенной в примере 1.3). Такая оценка несложна, но громоздка; оставим ее в качестве упражнения заинтересованному читателю.

#### 1.4.5. Решение краевой задачи и результаты

При реализации описанной выше вычислительной схемы, во-первых, определяется какое-либо аналитическое решение системы дифференциальных уравнений (1.30) при возможно более полном выполнении условий (1.31), (1.32) краевой задачи. В качестве такого решения выбирается удовлетворяющее условию  $u \equiv 0$ :  $p_1 \equiv 0$ ,  $p_2 \equiv 0$ ,  $x_2 \equiv 2$ ,  $x_1 = 2(t - T) + 1$ . Это решение при любом допустимом  $T$  и  $\alpha = 0$ , а также при  $T = 1$  и любом неотрицательном  $\alpha$  удовлетворяет всем условиям основной краевой задачи кроме условия  $x_2(T) \leq 1$ . Заметим, что в задаче без неравенства  $x_2(T) \leq 1$  предъявленное решение доставляет функционалу абсолютный минимум.

Во-вторых, начиная с выбранного решения вспомогательной краевой задачи при  $T = 1$ , применяется метод продолжения решения по параметру  $x_2(T)$  с  $x_2(T) = 2$  до  $x_2(T) = 1$ . Последнее из этих решений удовлетворяет ограничениям исходной краевой задачи:  $x_1(0) = -0.697733771 \leq 1.0$ ,  $x_2(0) = 2.0$ ,  $p_1(0) = 0.0$ ,  $p_2(0) = -3.01660230$ ,  $x_1(T) = 1.0$ ,  $x_2(T) = 1.0$ ,  $p_1(T) = -2.85031919$ ,  $p_2(T) = -3.18288541 \leq 0.0$ . Так как  $T = 1$  и  $H(T) = 2.21506058 > 0$ , то при  $\alpha \geq \alpha_1 \approx 2 \cdot 2.21506058$  все неравенства (1.32) исходной краевой задачи выполняются.

В-третьих, для определения экстремалей исходной краевой задачи при других  $\alpha$  применяется метод продолжения решения по параметру с параметром продолжения  $T$ , начиная с последнего построенного решения при  $T = 1$  до  $T = 10$ . Результа-

ты проведенных расчетов представлены в табл. 1.9. Каждому  $T \in (1; 10)$  соответствует единственное  $\alpha$ , для которого выполняются все неравенства (1.32) исходной краевой задачи. При  $T = 10$   $H(t) = 5.42040403 \cdot 10^{-4} > 0$ , и потому при  $\alpha \in [0; \alpha_{10}]$ ,  $\alpha_{10} \approx 2 \cdot 5.42040403 \cdot 10^{-4}$  неравенства (1.32) также выполняются.

**Таблица 1.9.** Экстремали при различных  $T$  ( $\alpha = 0$ ,  $x_2(0) = 2$ ,  $p_1(0) = 0$ ,  $x_1(T) = 1$ ,  $x_2(T) = 1$ ; прочерк в колонке  $\delta_3$  обозначает, что оценить точность решения краевой задачи по используемому алгоритму не удалось).

$T$	$x_1(0)$	$p_2(0)$
$\delta_K$	$p_1(T)$	$p_2(T)$
$\delta_3$	$H(T)$	$B_0(T)$
1	-0.697733771	-3.01660230
$4.37 \cdot 10^{-11}$	-2.85031919	-3.18288541
$4.55 \cdot 10^{-7}$	2.21506058	3.37691984
2	-1.76676747	-0.589785501
$5.36 \cdot 10^{-12}$	$-7.12695897 \cdot 10^{-2}$	-1.10830141
$8.03 \cdot 10^{-11}$	0.542896421	0.771374955
3	-2.79138839	-0.177556686
$4.96 \cdot 10^{-12}$	$4.34128220 \cdot 10^{-2}$	-0.398526193
$2.52 \cdot 10^{-10}$	0.122824385	0.216706890
4	-3.90610730	$-6.80201745 \cdot 10^{-2}$
$1.17 \cdot 10^{-11}$	$2.26977806 \cdot 10^{-2}$	-0.158738130
$1.72 \cdot 10^{-8}$	$3.52966775 \cdot 10^{-2}$	$7.89926197 \cdot 10^{-2}$
5	-5.08791844	$-3.12913640 \cdot 10^{-2}$
$5.15 \cdot 10^{-10}$	$1.00367823 \cdot 10^{-2}$	$-7.26195103 \cdot 10^{-2}$
$4.61 \cdot 10^{-4}$	$1.26735790 \cdot 10^{-2}$	$3.55540750 \cdot 10^{-2}$
6	-6.30299165	$-1.65674538 \cdot 10^{-2}$
$2.65 \cdot 10^{-6}$	$4.73516911 \cdot 10^{-3}$	$-3.78700766 \cdot 10^{-2}$
-	$5.45224047 \cdot 10^{-3}$	$1.86521825 \cdot 10^{-2}$
7	-7.53352314	$-9.73209708 \cdot 10^{-3}$
1.91	$2.44762697 \cdot 10^{-3}$	$-2.19118247 \cdot 10^{-2}$
-	$2.68769022 \cdot 10^{-3}$	$1.09108044 \cdot 10^{-2}$
8	-8.77164570	$-6.17486447 \cdot 10^{-3}$
$5.36 \cdot 10^8$	$1.37270295 \cdot 10^{-3}$	$-1.37224355 \cdot 10^{-2}$
-	$1.46685494 \cdot 10^{-3}$	$6.90809237 \cdot 10^{-3}$
9	-10.0138006	$-4.15384214 \cdot 10^{-3}$

Таблица 1.9. Продолжение.

$T$	$x_1(0)$	$p_2(0)$
$\delta_K$	$p_1(T)$	$p_2(T)$
$\delta_3$	$H(T)$	$B_0(T)$
$4.00 \cdot 10^{19}$	$8.23415498 \cdot 10^{-4}$	$-9.13110339 \cdot 10^{-3}$
—	$8.65103499 \cdot 10^{-4}$	$4.64167864 \cdot 10^{-3}$
10	-11.2582596	$-2.92455349 \cdot 10^{-3}$
$9.50 \cdot 10^{33}$	$5.21747306 \cdot 10^{-4}$	$-6.37085792 \cdot 10^{-3}$
—	$5.42040774 \cdot 10^{-4}$	$3.26577494 \cdot 10^{-3}$

Так выбор “удачного” аналитического решения вспомогательной краевой задачи и применение метода продолжения решения по параметру позволили получить экстремали исходной задачи (траектории, “подозрительные на оптимальность”).

В табл. 1.10 приводятся результаты численного эксперимента для экстремали Понтрягина с  $T = 4$  проводятся расчеты с различными оценками погрешности на шаге. При анализе результатов, представленных в этой таблице, следует обратить внимание на совпадение знаков при расчетах с  $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-8}$ ,  $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-10}$  и  $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-12}$ , и на то, что при уменьшении  $\Delta_{\text{лок}}$  в 100 раз число совпадающих знаков в среднем увеличивается на два и также на два порядка уменьшаются  $\Delta H$ ,  $\delta_K$  и  $\delta_3$ . Это позволяет сделать предположение, что совпадающие в решениях знаки верны (разумеется, это только предположение; совпадение знаков является необходимым признаком, а не доказательством правильности определения решения задачи).

Таблица 1.10. Экстремаль задачи при  $T = 4$ 

$t$	$x_1(t)$	$x_2(t)$
$\delta_K(t)$	$p_1(t)$	$p_2(t)$
	$\delta_3(t)$	$H(t) - H(0)$
$\Delta_{\text{лок}} = 10^{-8}$		
0.0	-3.906107304211333	2.0
0.0	0.0	-0.06802017450104138
0.0	$2.88 \cdot 10^{-6}$	0.0
1.0	-2.290105615828812	1.335827843901833

Таблица 1.10. Продолжение.

$t$	$x_1(t)$ $p_1(t)$ $\delta_3(t)$	$x_2(t)$ $p_2(t)$ $H(t) - H(0)$
$5.21 \cdot 10^{-9}$	0.01509718156226958 $1.71 \cdot 10^{-5}$	-0.07595754886122799 $4.57 \cdot 10^{-13}$
2.0	-1.099016927944875	1.092758802716817
$2.65 \cdot 10^{-8}$	0.02707208654045565 $8.32 \cdot 10^{-5}$	-0.09726544170136416 $-7.43 \cdot 10^{-13}$
3.0	-0.03785097372656042	1.049518484918976
$4.72 \cdot 10^{-8}$	0.03362005168070973 $1.47 \cdot 10^{-4}$	-0.1284091697716288 $-1.78 \cdot 10^{-12}$
4.0	0.9999999999998736	0.9999999999998940
$7.10 \cdot 10^{-8}$	0.02269778059854717 $2.17 \cdot 10^{-4}$	-0.1587381295909767 $-1.60 \cdot 10^{-11}$
$\Delta_{\text{лок}} = 10^{-10}$		
0.0	-3.906107303736371	2.0
0.0	0.0 $2.72 \cdot 10^{-9}$	-0.06802017453491298 0.0
1.0	-2.290105615410945	1.335827843767711
$4.12 \cdot 10^{-11}$	0.01509718157544818 $1.20 \cdot 10^{-7}$	-0.07595754890153372 $2.99 \cdot 10^{-15}$
2.0	-1.099016927644050	1.092758802584516
$2.31 \cdot 10^{-10}$	0.02707208656556617 $5.20 \cdot 10^{-7}$	-0.09726544175736578 $-3.28 \cdot 10^{-15}$
3.0	-0.03785097355656264	1.049518484797575
$4.45 \cdot 10^{-10}$	0.03362005171161673 $8.90 \cdot 10^{-7}$	-0.1284091698560788 $-8.63 \cdot 10^{-14}$
4.0	0.9999999999996411	0.9999999999997071
$6.70 \cdot 10^{-10}$	0.02269778062449069 $1.27 \cdot 10^{-6}$	-0.1587381296941983 $-2.53 \cdot 10^{-13}$
$\Delta_{\text{лок}} = 10^{-12}$		
0.0	-3.906107303731438	2.0
0.0	0.0 $4.87 \cdot 10^{-11}$	-0.06802017453528930 0.0
1.0	-2.290105615406792	1.335827843766003
	0.01509718157559845	-0.07595754890198149

Таблица 1.10. Продолжение.

$t$	$x_1(t)$ $p_1(t)$ $\delta_3(t)$	$x_2(t)$ $p_2(t)$ $H(t) - H(0)$
$7.84 \cdot 10^{-13}$	$1.87 \cdot 10^{-9}$	$2.77 \cdot 10^{-17}$
2.0	$-1.099016927640989$	$1.092758802582764$
$4.20 \cdot 10^{-12}$	$0.02707208656585015$	$-0.09726544175799225$
	$7.44 \cdot 10^{-9}$	$-3.47 \cdot 10^{-17}$
3.0	$-0.03785097355523129$	$1.049518484796323$
$7.80 \cdot 10^{-12}$	$0.03362005171202613$	$-0.1284091698570270$
	$1.23 \cdot 10^{-8}$	$-7.98 \cdot 10^{-16}$
4.0	$0.9999999999996501$	$0.999999999997555$
$1.17 \cdot 10^{-11}$	$0.02269778062484220$	$-0.1587381296954501$
	$1.73 \cdot 10^{-8}$	$-2.39 \cdot 10^{-15}$

Комбинация метода случайного поиска и метода продолжения решения по параметру позволили получить еще несколько экстремалей вспомогательных краевых задач. Одно из семейств экстремалей (с параметром семейства  $T$ ) представлено в табл. 1.11. Обратим внимание, что на экстремалах представленного семейства все неравенства (1.32) исходной краевой задачи также выполняются. Значение функционала на всех дополнительных экстремалах больше, чем на экстремалах основного семейства (см. табл. 1.9). Поэтому дальнейшее исследование оптимальности этих экстремалей не проводится.

**Таблица 1.11.** Дополнительное семейство экстремалей ( $\alpha = 0$ ,  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 2$ ,  $x_1(T) = 1$ ,  $p_2(T) = 0$ ; прочерк в колонке  $\delta_3$  обозначает, что оценить точность решения краевой задачи по используемому алгоритму не удалось).

$T$	$p_1(0)$ $x_2(T)$ $H(T)$	$p_2(0)$ $p_1(T)$ $B_0(T)$
$\delta_K$		
$\delta_3$		
1	0.959208484	$-2.65116001$
$1.21 \cdot 10^{-11}$	$-1.25088698$	$-4.34311154$
$1.81 \cdot 10^{-7}$	5.43274167	7.15670779
2	0.441110005	$-0.583529192$

Таблица 1.9. Продолжение.

$T$	$p_1(0)$	$p_2(0)$
$\delta_K$	$x_2(T)$	$p_1(T)$
$\delta_3$	$H(T)$	$B_0(T)$
$8.48 \cdot 10^{-12}$	-1.44979064	-0.725948379
$5.01 \cdot 10^{-9}$	1.05247317	2.18133648
3	0.163524498	-0.191028910
$6.31 \cdot 10^{-11}$	-1.58005660	-0.218533323
$3.34 \cdot 10^{-8}$	0.345295018	0.945295251
4	$7.08020688 \cdot 10^{-2}$	$-7.88701521 \cdot 10^{-2}$
$4.71 \cdot 10^{-9}$	-1.66456550	$-8.69382357 \cdot 10^{-2}$
$8.02 \cdot 10^{-5}$	0.144714388	0.491065238
5	$3.50067036 \cdot 10^{-2}$	$-3.80420027 \cdot 10^{-2}$
$5.89 \cdot 10^{-6}$	-1.72204600	$-4.10773022 \cdot 10^{-2}$
$2.89 \cdot 10^{-1}$	$7.07370041 \cdot 10^{-2}$	0.286512684
6	$1.91453114 \cdot 10^{-2}$	$-2.04906251 \cdot 10^{-2}$
$2.10 \cdot 10^{-1}$	-1.76317381	$-2.18359390 \cdot 10^{-2}$
-	$3.85005557 \cdot 10^{-2}$	0.181323056
7	$1.13093873 \cdot 10^{-2}$	$-1.19790849 \cdot 10^{-2}$
$5.03 \cdot 10^5$	-1.79388991	$-1.26487828 \cdot 10^{-2}$
-	$2.26905238 \cdot 10^{-2}$	0.121861224
8	$7.09502353 \cdot 10^{-3}$	$-7.45859078 \cdot 10^{-3}$
$1.47 \cdot 10^{14}$	-1.81763932	$-7.82215822 \cdot 10^{-3}$
-	$1.42178624 \cdot 10^{-2}$	$8.57733870 \cdot 10^{-2}$
9	$4.67042997 \cdot 10^{-3}$	$-4.88154101 \cdot 10^{-3}$
$7.34 \cdot 10^{24}$	-1.83652334	$-5.09265222 \cdot 10^{-3}$
-	$9.35277467 \cdot 10^{-3}$	$6.26253694 \cdot 10^{-2}$
10	$3.19740942 \cdot 10^{-3}$	$-3.32676849 \cdot 10^{-3}$
$8.35 \cdot 10^{37}$	-1.85188543	$-3.45612771 \cdot 10^{-3}$
-	$6.40035254 \cdot 10^{-3}$	$4.71047083 \cdot 10^{-2}$

#### 1.4.6. Исследование оптимальности экстремалей

Так как функционал задачи (1.22) и система дифференциальных уравнений (1.23) не зависят от времени  $t$  явно, то функция Понtryгина будет первым интегралом:  $H(t) \equiv const$ . Обозна-

ним константу этого первого интеграла, зависящую от параметра задачи  $T$ , через  $H(T)$ . Таким образом,  $H(T)$  — значение функции Понтрягина на экстремали, соответствующей  $T$ .

При анализе оптимальности полученных экстремалей следует обратить внимание на вычисленные значения множителей Лагранжа, соответствующие трем присутствующим в задаче неравенствам.

Во-первых, множитель  $\lambda_{10} = 0$  и ограничение  $x_1(0) \leq 1$  выполняется как строгое неравенство. При исключении этого ограничения из рассмотрения вычисленные экстремали по прежнему остаются экстремалями в новой “расширенной” постановке задачи. Если удастся доказать оптимальность экстремалей в задаче без ограничения  $x_1(0) \leq 1$ , то и в задаче с дополнительным ограничением они также останутся оптимальными. Поэтому ограничение  $x_1(0) \leq 1$  и соответствующий этому ограничению множитель  $\lambda_{10}$  при исследовании оптимальности из рассмотрения исключаются.

Во-вторых, ограничение  $x_2(T) \leq 1$  выполняется в виде равенства и соответствующий ему множитель  $\lambda_{2T} > 0$ . Следовательно, на близких экстремалах при  $x_2(T) < 1$ , если эти экстремали оптимальны, значение функционала *больше* значения функционала задачи на вычисленной экстремали при  $x_2(T) = 1$ . Существуют теоремы о связи множителей Лагранжа и производных минимального значения функционала по величинам соответствующих этим множителям ограничений; для задачи Лагранжа это утверждение есть простое следствие принципа Лагранжа — все условия принципа Лагранжа есть условия обращения в ноль соответствующих производных по Фреше функции Лагранжа; аналогичное утверждение для задач оптимального управления доказывается несколько сложнее (см., например, [34, гл. 1, §9]). В связи с вышеизложенным при анализе оптимальности экстремалей условие вида неравенства заменяется равенством  $x_2(T) = 1$ .

В-третьих, проводится анализ связанных с  $T$  условий неотрицательности и дополняющей нежесткости. Так как при  $T = 1$  и  $\alpha > \alpha_1$  множители Лагранжа  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 = 0$  и при  $T = 10$  и  $0 \leq \alpha < \alpha_{10}$  множители Лагранжа  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 > 0$ , то в этих случаях исследование оптимальности экстремалей на осно-

ве условий второго порядка эквивалентно такому исследованию при *фиксированной* величине  $T$ . При  $1 \leq T \leq 10$  и специальном выборе  $\alpha = \alpha[T] = 2 \cdot H(T)$  множители Лагранжа  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 0$ . В этом случае, аналогично исключению из рассмотрения множителя  $\lambda_{10} = 0$  и ограничения  $x_1(0) \leq 1$ , было бы естественно воспользоваться принципом расширения и при анализе условий оптимальности экстремалей исключить из рассмотрения множители  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и ограничения  $1 \leq T \leq 10$ , считая величину  $T$  заранее не фиксированной. К сожалению, проводимое в Пособии исследование оптимальности существенно опирается на фиксированность временного интервала и одного из концов экстремали (это серьезный недостаток используемых условий оптимальности). Поэтому такое использование принципа расширения к успеху не приводит так как приводит к необходимости исследования задачи другого типа; это могло бы привести к успеху при использовании более общих условий оптимальности [25]. Одним из возможных выходов является модификация задачи, ее переформулировка с учетом указанных ограничений. Другой способ связан с анализом приведенной на рис. 1.4 зависимости  $H(T)$  и, соответственно,  $\alpha[T]$  от выбора  $T$ . Обратим внимание, что функция  $\alpha[T] = 2H(T)$  на отрезке  $[1; 10]$  монотонно убывает. Обозначим через  $T[\alpha]$  зависимость, обратную к зависимости  $\alpha[T]$ , она однозначно определена в силу монотонности. Монотонное убывание  $\alpha[T]$  позволяет сделать вывод: при любом фиксированном  $\alpha \in [\alpha_{10}; \alpha_1]$  значение минимизируемого функционала на экстремали, соответствующей  $T[\alpha]$ , *меньше* значения минимизируемого функционала (при том же самом значении  $\alpha$ ) на экстремали, соответствующей другому  $T \neq T[\alpha]$ . В самом деле, если  $T > T[\alpha]$ , то  $H(T)$  уменьшается,  $H(T) - \alpha/2$  становится меньше нуля, а производная функционала задачи по  $T$  становится положительной. Если  $T < T[\alpha]$ , то  $H(T)$  увеличивается,  $H(T) - \alpha/2$  становится больше нуля, а производная функционала задачи по  $T$  становится отрицательной.

Проведенный анализ можно проиллюстрировать следующим образом. На рис. 1.5 изображена зависимость значения функционала задачи  $B_0$  на экстремалах при различных  $T$  и  $\alpha = 0$ . Монотонность зависимости  $H(T)$  (рис. 1.4) обеспечивает

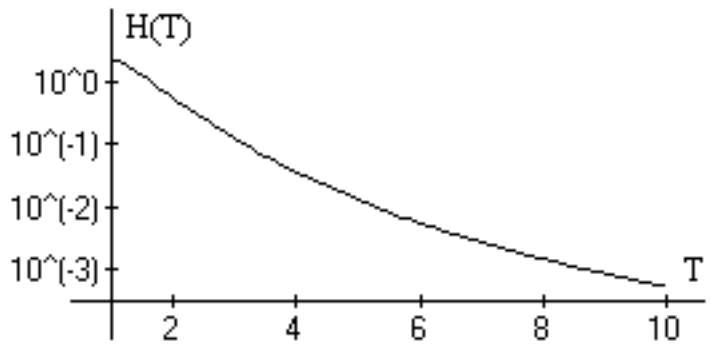


Рис. 1.4 Константа первого интеграла  $H$  на экстремалях при различных  $T$ .

ет выпуклость графика  $B_0[T]$  (рис. 1.5). График зависимости значения функционала задачи  $B_0$  на экстремалях при различных  $T$  и ненулевом  $\alpha$  получается из графика рис. 1.5 прибавлением линейной функции  $\alpha T$ . При  $\alpha \in [0; \alpha_{10}]$  зависимость  $B_0[T]$  на  $[1; 10]$  попрежнему остается монотонно убывающей. При  $\alpha \in (\alpha_{10}; \alpha_1)$  выпуклая функция  $B_0[T]$  имеет единственный минимум на отрезке  $[1; 10]$  в точке  $T = T[\alpha]$ . При  $\alpha \geq \alpha_1$  зависимость  $B_0[T]$  на  $[1; 10]$  становится монотонно возрастающей. Точка минимума  $T[\alpha]$  характеризуется обращением в ноль производной  $B_0[T]$  по  $T$ :

$$-2H(T) + \alpha = 0$$

(коэффициент 2 в этой производной связан с выбором множителя Лагранжа  $\lambda_0 = 1/2$ ).

Исходя из вышеизложенного, при анализе условий второго порядка величина  $T$  считается фиксированной.

Таким образом, для ответа на вопрос об оптимальности определенных экстремалей исходной задачи необходимо и достаточно исследовать оптимальность этих экстремалей в следу-

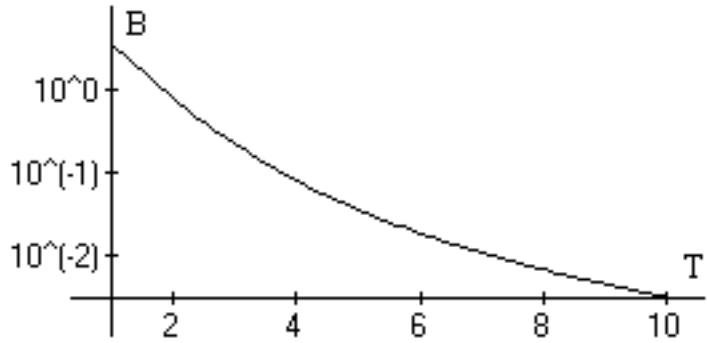


Рис. 1.5 Величина функционала  $B_0$  на экстремалях при различных  $T$ .

ющей вспомогательной задаче:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T u^2 dt \rightarrow \inf; \\
 & \dot{x}_1 = x_2, \\
 & \dot{x}_2 = -ux_1, \\
 & u \in R; \\
 & x_2(0) - 2 = 0, \\
 & x_1(T) - 1 = 0, \\
 & x_2(T) - 1 = 0,
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

где  $T \in [1; 10]$  — параметр задачи (при исследовании оптимальности экстремалей — фиксированное число).

Пространством  $X$  из теорем п. 2.1 в рассматриваемой задаче Лагранжа будет  $C^1([0; T], R^2) \times C([0; T])$ . Элементы этого пространства  $\xi := \{x_1(\cdot), x_2(\cdot), u(\cdot)\}$  называются управляемыми процессами. Исследуемый на оптимальность, определенный в результате решения краевой задачи (1.30)–(1.32) управляемый процесс обозначается  $\hat{\xi} := \{\hat{x}_1(\cdot), \hat{x}_2(\cdot), \hat{u}(\cdot)\}$ . Оператор типа равенства задачи (1.36) действует из пространства  $X$  в пространство  $Y := C([0; T], R^2) \times R^3$ . Через  $\delta\xi := \{\delta x_1, \delta x_2, \delta u\}$  обозначим элемент касательного пространства к многообразию, определяемому в точке  $\hat{\xi}$  пространства  $X$  оператором равенства задачи (1.36).

Итак, для исследования оптимальности построенных экстрем-

малей необходимо проверить положительную определенность второй вариации функции Лагранжа

$$\mathcal{L}_{\xi\xi} = \int_0^T (0.5(\delta u)^2 + \hat{p}_2 \delta u \delta x_1) dt \quad (1.37)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \dot{\delta x}_1 &= \delta x_2, \\ \dot{\delta x}_2 &= -\delta u \hat{x}_1 - \hat{u} \delta x_1, \\ \delta u &\in R, \\ \delta x_2(0) &= 0, \\ \delta x_1(T) &= 0, \\ \delta x_2(T) &= 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Необходимым условием оптимальности является неотрицательная определенность  $\mathcal{L}_{\xi\xi}[\delta\xi, \delta\xi] \geq 0$  на допустимых вариациях (теорема 1 п. 2.1), а достаточным условием второго порядка — положительная определенность на допустимых вариациях:  $\mathcal{L}_{\xi\xi}[\delta\xi, \delta\xi] \geq \varepsilon \varphi(\delta\xi)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\varphi(\delta\xi) = \int_0^T (\delta u)^2 dt$  (теорема 2 п. 2.1).

Условие Лежандра, необходимое для неотрицательной определенности  $\mathcal{L}_{\xi\xi}[\delta\xi, \delta\xi]$ , выполняется в усиленной форме:  $L_{uu} = 2 > 0$ . Поэтому для неотрицательности второй вариации необходимо выполнение условия Якоби: на интервале  $(0; T)$  нет сопряженных точек. Для положительности второй вариации достаточно выполнения усиленного условия Якоби: на полуотрезке  $(0; T]$  нет сопряженных точек.

**Примечание.** Как неоднократно отмечалось ранее, при выполнении условия Лежандра и невыполнении усиленного условия Лежандра приведенное выше утверждение перестает быть справедливым. Пример см. в [4, §3.1; 20].

В рассматриваемом случае точка  $\tau$  называется сопряжен-

ной, если краевая задача:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}x_1 &= \delta x_2, \\ \dot{\delta}x_2 &= -\delta u \hat{x}_1 - \hat{u} \delta x_1, \\ \dot{q}_1 &= q_2 \hat{u} + \hat{p}_2 \delta u, \\ \dot{q}_2 &= -q_1, \\ \dot{\delta}u &= -q_2 \hat{x}_1 - \hat{p}_2 \delta x_1, \\ q_1(0) &= 0, \\ \delta x_2(0) &= 0, \\ \delta x_1(\tau) &= 0, \\ \delta x_2(\tau) &= 0, \end{aligned} \tag{1.39}$$

полученная в результате применения необходимых условий оптимальности (принципа Лагранжа) к задаче минимизации квадратичного функционала (1.37) при выполнении системы линейных уравнений (1.38) на временном интервале  $[0; \tau]$  (после замены  $T$  на  $\tau$  в (1.38), (1.37)), будет иметь нетривиальное решение.

Множитель Лагранжа при функционале при записи задачи (1.39) принят равным 1. При этом в (1.39) первые два дифференциальных уравнения являются уравнениями в вариациях основной системы (1.23), следующие два — уравнениями в вариациях сопряженной системы (1.25), пятое соотношение (условие оптимальности) соответствует вариации условия оптимальности исходной задачи (1.26).

Вследствие линейности и однородности системы дифференциальных уравнений рассматриваемой краевой задачи (1.39) все решения задач Коши, удовлетворяющие двум условиям при  $t = 0$  ( $q_1(0) = 0$  и  $\delta x_2(0) = 0$ ), могут быть найдены в виде линейных комбинаций двух линейно-независимых решений задач Коши с начальными условиями:

$$\begin{pmatrix} \delta x_1^1(0) \\ \delta x_2^1(0) \\ q_1^1(0) \\ q_2^1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \delta x_1^2(0) \\ \delta x_2^2(0) \\ q_1^2(0) \\ q_2^2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.40}$$

Если в некоторый момент  $\tau \in (0; T]$

$$\det \begin{pmatrix} \delta x_1^1(\tau) & \delta x_1^2(\tau) \\ \delta x_2^1(\tau) & \delta x_2^2(\tau) \end{pmatrix} = 0, \tag{1.41}$$

то краевая задача (1.39) имеет нетривиальное решение и точка  $\tau$  будет сопряженной.

Вычисления показывают, что на проверяемых на оптимальность экстремалах (табл. 1.9) сопряженные точки отсутствуют и выполняется условие квазирегулярности. Таким образом, для этих экстремалей выполняется совокупность достаточных условий как слабой, так и сильной локальной оптимальности во вспомогательной задаче, а следовательно, и в основной задаче.

На этом исследование задачи закончено.

Как указывалось в п. **Задание и задачи**, отчет по проведенному исследованию состоит из 5 пунктов:

- 1) постановка решаемой задачи (п. 1.4.1);
- 2) сведение решения задачи оптимизации к решению краевой задачи (п. 1.4.2);
- 3) анализ полученной краевой задачи (п. 1.4.3), формирование вычислительной схемы ее решения и оценки точности (п. 1.4.4);
- 4) описание полученных при решении результатов и обоснование их точности (п. 1.4.5);
- 5) исследование оптимальности полученных экстремалей — п. 1.4.6.

## 1.5. Пример решения задачи оптимального управления с участком особого управления первого порядка (аналитическое решение)

В отличие от предыдущих примеров, в которых участки особых управлений на построенных экстремалях отсутствовали, в данном пункте рассматривается одна из простейших задач, полное решение которой без учета участков особых управлений невозможно.

### 1.5.1. Постановка задачи

$$\int_0^1 x^2 dt \rightarrow \inf, \quad x(0) = 1/2, \quad |\dot{x}| \leq 1.$$

### 1.5.2. Формализация задачи

Обозначим  $u := \dot{x}$ . Тогда исследуемая задача в обозначениях [1, 3] перепишется в следующем виде.

Минимизируемый функционал:

$$B_0 := \int_0^1 x^2 dt \rightarrow \inf.$$

Дифференциальная связь:

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u) = u.$$

Ограничение на управление:

$$u(t) \in U(t) \quad \forall t \in [0, 1], \quad U := [-1, 1] \quad (|u| \leq 1).$$

Дополнительное ограничение:

$$B_1 := x(0) = 1/2.$$

### 1.5.3. Система необходимых условий оптимальности

Основные конструкции:

$$\mathcal{L} := \int_0^1 L dt + l,$$

$$L := \lambda_0 x^2 + p(\dot{x} - u),$$

$$l := \lambda_1 x(0),$$

$$H := pu - \lambda_0 x^2.$$

Необходимые условия оптимальности:

а) уравнение Эйлера–Лагранжа (сопряженная система уравнений):

$$\dot{p} = 2\lambda_0 x;$$

б) условие оптимальности по управлению:

$$\hat{u} = \begin{cases} 1, & \text{при } p > 0, \\ -1, & \text{при } p < 0, \\ \forall u \in [-1, 1], & \text{при } p = 0; \end{cases}$$

в) условия трансверсальности:

$$p(0) = \lambda_1, \quad p(1) = 0.$$

Условий стационарности г) и дополняющей нежесткости д) нет, так как концы фиксированы ( $t_0 = 0, t_1 = 1$ ), и в постановке задачи отсутствуют условия типа “меньше или равно”.

е) Условие неотрицательности:  $\lambda_0 \geq 0$ ;

ж) множители Лагранжа Не Равны Одновременно Нулю (условие НЕРОН);

з) множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного сомножителя (условие нормировки).

#### 1.5.4. Краевая задача и ее анализ

Для формирования краевой задачи принципа максимума необходимо выбрать условие нормировки. Проведем анализ возможности аномального случая  $\lambda_0 = 0$ . При этом  $\dot{p} = 0$ , то есть  $p \equiv \text{const}$ . Так как  $p(1) = 0$ , то  $p \equiv 0$  и в силу условия трансверсальности  $p(0) = \lambda_1 = 0$ . То есть при  $\lambda_0 = 0$  все множители Лагранжа равны нулю, что противоречит теореме — принципу максимума Понтрягина. Значит  $\lambda_0 > 0$ .

В качестве условия нормировки используется условие  $\lambda_0 = 1/2$ . В этом случае решение рассматриваемой задачи оптимального управления на основе принципа максимума сводится к решению следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u, \quad \dot{p} = x \quad \forall t \in [0, 1]; \\ u &= \begin{cases} 1, & \text{при } p > 0, \\ -1, & \text{при } p < 0, \\ \forall u \in [-1, 1], & \text{при } p = 0; \end{cases} \\ x(0) &= 1/2, \quad p(1) = 0.\end{aligned}$$

В задачах оптимального управления, в которых в функцию Понтрягина управление  $u$  (или какая-то из компонент  $u$ ) входит линейно, соответствующий  $u$  множитель называется функцией переключения. В рассматриваемом примере функция переключения совпадает с  $p(t)$ . Обращение в ноль функции переключения в конечном числе точек (на множестве нулевой меры) и неопределенность величины  $u$  в этих точках на решение краевой задачи влияния не оказывает и значение управления  $u$  в этих точках может выбираться любым (при теоретическом решении задачи, а не при численной реализации этого решения). Изолированные моменты обращения в ноль функции переключения называются моментами переключения. Обращение функции переключения в ноль и, следовательно, неопределенность величины  $u$  на отрезке (на множестве ненулевой меры) называется особым управлением и требует отдельного исследования. Глубиной особого управления называется половина числа необходимых дифференцирований функции переключения в силу системы дифференциальных уравнений для появления управления. В рассматриваемом примере для появления управления

требуется два дифференцирования — глубина особого управления равна одному: пусть на временном интервале  $t \in [\tau_1, \tau_2]$   $p \equiv 0$ , тогда  $\dot{p} = x \equiv 0$  и  $\dot{x} = u \equiv 0$ . То есть в данной задаче совокупность возможных особых экстремалей состоит из одной траектории:  $x \equiv 0$ ,  $p \equiv 0$ ,  $u \equiv 0$ .

Для решения задачи проведем анализ возможных решений системы дифференциальных уравнений краевой задачи:

- а) если в некоторый момент  $t^* \in [0, 1]$  выполняются условия  $x(t^*) \geq 0$ ,  $p(t^*) \geq 0$ ,  $x(t^*) + p(t^*) > 0$ , то  $\dot{x} = 1$ ,  $\dot{p} = x > 0$   $\forall t \in (t^*, 1]$ ;
- б) если в некоторый момент  $t^* \in [0, 1]$  выполняются условия  $x(t^*) \leq 0$ ,  $p(t^*) \leq 0$ ,  $x(t^*) + p(t^*) < 0$ , то  $\dot{x} = -1$ ,  $\dot{p} = x < 0$   $\forall t \in (t^*, 1]$ ;
- в) если в некоторый момент  $t^* \in [0, 1]$  выполняются условия  $x(t^*) \geq 0$ ,  $p(t^*) \leq 0$ ,  $x(t^*) - p(t^*) > 0$ , то  $\dot{x} = -1$ ,  $\dot{p} = x > 0$   $\forall t \in [0, t^{**}]$ , где момент  $t^{**}$  либо совпадает с 1, либо с моментом первого обращения в ноль функций  $x(t)$  или  $p(t)$ ; если первой обращается в ноль функция  $p(t^{**}) = 0$ , то момент  $t^{**}$  называется моментом переключения и за этим моментом следует участок а); если первой обращается в ноль функция  $x(t^{**}) = 0$ , то за моментом  $t^{**}$  следует участок б) и момент переключения отсутствует; если в момент  $t^{**}$  в ноль обращаются обе функции  $x(t^{**}) = 0$  и  $p(t^{**}) = 0$ , то далее траектория может быть продолжена тремя способами — см. п. д);
- г) если в некоторый момент  $t^* \in [0, 1]$  выполняются условия  $x(t^*) \leq 0$ ,  $p(t^*) \geq 0$ ,  $-x(t^*) + p(t^*) > 0$ , то  $\dot{x} = 1$ ,  $\dot{p} = x < 0$   $\forall t \in [0, t^{**}]$ , где момент  $t^{**}$  либо совпадает с 1, либо с моментом первого обращения в ноль функций  $x(t)$  или  $p(t)$ ; если первой обращается в ноль функция  $p(t^{**}) = 0$ , то момент  $t^{**}$  называется моментом переключения и за этим моментом следует участок б); если первой обращается в ноль функция  $x(t^{**}) = 0$ , то за моментом  $t^{**}$  следует участок а) и момент переключения отсутствует; если в момент  $t^{**}$  в ноль обращаются обе функции  $x(t^{**}) = 0$  и  $p(t^{**}) = 0$ , то далее траектория может быть продолжена тремя способами — см. п. д);
- д) если в некоторый момент  $t^* \in [0, 1]$  выполняются условия  $x(t^*) = 0$ ,  $p(t^*) = 0$ , то из этой точки экстремаль может быть продолжена вправо тремя способами: во-первых, участком осо-

бого управления, во–вторых, участком а), в–третьих, участком б); влево экстремаль также может быть продолжена тремя способами: во–первых, участком особого управления, во–вторых, участком в), в–третьих, участком г).

На основе проведенного анализа возможных решений системы дифференциальных уравнений легко находится единственное решение краевой задачи принципа максимума. Так как  $p(1) = 0$ , то: при  $x(1) > 0$  вся траектория представляет собой участок в),  $x(t) = -t + 1 + x(1)$  и  $x(0) = 1 + x(1) > 1/2$ ; при  $x(1) < 0$  вся траектория представляет собой участок г),  $x(t) = t - 1 + x(1)$  и  $x(0) = -1 + x(1) < 1/2$ ; при  $x(1) = 0$  и продолжении влево экстремали участками в) или г) условие  $x(0) = 1/2$  также не удовлетворяется, и потому экстремаль (если она существует) должна заканчиваться участком особого управления. Так как  $x(0) = 1/2$ , то при  $p(0) \geq 0$  вся траектория представляет собой участок а) и  $p(t) > 0 \forall t \in (0, 1]$ , что невозможно по условиям задачи. Следовательно  $p(0) < 0$  и экстремаль (если она существует) должна начинаться участком в). Если в момент  $t^{**}$  окончания участка в) в ноль обращается только одна из функций  $x(t)$ ,  $p(t)$ , то выполнение условий  $x(t) = 0$  и  $p(t) = 0$  в последующие моменты невозможно. Поэтому в момент  $t^{**}$  должна осуществлятьсястыковка начального участка в) и конечного участка особого управления. Таким образом, вычисляя константы интегрирования, получаем исковую экстремаль ( $t^{**} = 1/2$ ):

$$x(t) = \begin{cases} 1/2 - t, & \text{при } t \leq 1/2; \\ 0, & \text{при } t \geq 1/2; \end{cases}$$

$$p(t) = \begin{cases} -t^2/2 + t/2 - 1/8, & \text{при } t \leq 1/2; \\ 0, & \text{при } t \geq 1/2. \end{cases}$$

Оптимальность построенной экстремали достаточно очевидна: величина  $x^2(t)$  на полученной экстремали в каждый момент времени минимальна (при условии выполнения остальных ограничений задачи), из поточечного минимума подынтегральной функции следует и минимум интеграла.

Попытки решить краевую задачу методом стрельбы по “классической” схеме (при выборе в качестве параметра пристрелки значения  $p(0)$  и в качестве функции невязок величины

$p(1)$ ) к успеху не приводят. Это связано тем, что экстремали в окрестности оптимальной траектории имеют следующий вид (см. рис. 1.6):

$$x(t) = \begin{cases} 1/2 - t, & \text{при } t \leq t^{**}, \\ t + 1/2 - 2t^{**}, & \text{при } t \geq t^{**}; \end{cases}$$

$$p(t) = \begin{cases} -t^2/2 + t/2 - 1/8 + \varepsilon, & \text{при } t \leq t^{**}, \\ t^2/2 + (\sqrt{2\varepsilon} - t^{**})t + t^{**}(t^{**}/2 - \sqrt{2\varepsilon}), & \text{при } t \geq t^{**}, \end{cases}$$

$$t^{**} = 1/2 - \sqrt{2\varepsilon}, \text{ при } \varepsilon > 0 \text{ и}$$

$$x(t) = 1/2 - t, \quad p(t) = -t^2/2 + t/2 - 1/8 + \varepsilon, \text{ при } t \in [0, 1],$$

при  $\varepsilon < 0$ . Здесь  $\varepsilon$  — погрешность выбора параметра пристрелки  $p(0)$ .

В случае вычисления значений  $x(1/2)$ ,  $p(1/2)$  с любой сколь угодно малой ненулевой погрешностью траектория и вычисленное значение функции невязки сильно изменяются. Так что получить оптимальную траекторию можно только в результате “счастливой” случайности при условии, что решение задачи Коши запрограммировано с точки зрения обеспечения точности неправильно: в качестве правой части используется разрывная функция  $\text{sign}(p(t))$ , а в качестве метода численного решения задачи Коши выбран метод без контроля точности на шаге (например, метод 4-го порядка с постоянным шагом интегрирования), так как метод с контролем точности на шаге “зависает”, пытаясь точно проинтегрировать разрыв правой части (см. п. 2.4).

Для численного построения экстремали необходимо выбрать схему метода стрельбы, учитывающую структуру траектории (см. замечание о возможности выбора вычислительных схем в методе стрельбы п. 2.2). В данном случае в этой схеме необходимо каким-либо образом учесть момент  $t^{**}$ . Например, в качестве параметров пристрелки можно выбрать две величины —  $p(0)$  и  $t^{**}$ , а в качестве компонент вектор-функции невязок — условия  $x(t^{**}) = 0$  и  $p(t^{**}) = 0$ ; интегрирование задачи Коши ведется на двух участках — от  $t = 0$  до  $t = t^{**}$  и от  $t = t^{**}$  до  $t = 1$  по участку особого управления (при этом

условие  $p(1) = 0$  выполнится автоматически). В качестве другой вычислительной схемы можно рассмотреть следующую: в качестве параметра пристрелки выбирается величина  $t^{**}$ , а в качестве функции невязки условие  $x(0) - 1/2 = 0$ ; интегрирование задачи Коши ведется на двух участках: от  $t = 1$  при выполнении условий  $x(1) = 0$ ,  $p(1) = 0$  до  $t = t^{**}$  по участку особого управления и от  $t = t^{**}$  до  $t = 0$ .

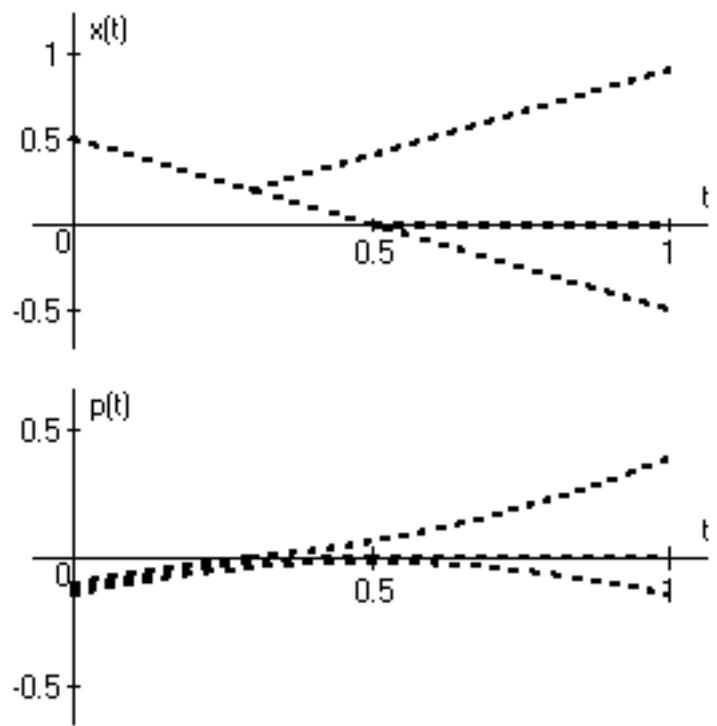


Рис. 1.6 Графики  $x(t)$ ,  $p(t)$  для трех разных близких значений  $p(0)$ .

## 1.6. Пример решения задачи оптимального управления с участком особого управления первого порядка (численное решение)

В отличие от примера предыдущего пункта 1.5 в зависимости от значения параметра  $\alpha$  данная задача имеет как неособые экстремали (для  $0 \leq \alpha \leq \alpha_*$ ), так и экстремали с участками особого управления первого порядка (для  $\alpha > \alpha_*$ ).

### 1.6.1. Постановка задачи

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x}{1 + \alpha \dot{x}^2} dt &\rightarrow \inf, \\ |\ddot{x}| &\leq 1, \\ \dot{x}(0) = 0, \quad x(2) = 0, \quad \dot{x}(2) = 0, \quad \text{при } \alpha \in [0, A]. \end{aligned}$$

### 1.6.2. Формализация задачи

Обозначим  $u := \ddot{x}$ . Тогда исследуемая задача в обозначениях [1, 3] перепишется в следующем виде.

Минимизируемый функционал:

$$B_0 := \int_0^2 \frac{x_1}{1 + \alpha x_2^2} dt \rightarrow \inf.$$

Система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varphi_1(t, x, u) = x_2, \\ \dot{x}_2 &= \varphi_2(t, x, u) = u. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Ограничение на управление:

$$u(t) \in U(t) \quad \forall t \in [0, 2], \quad U := [-1, 1] \quad (|u| \leq 1). \tag{1.43}$$

Дополнительные ограничения:

$$\begin{aligned} B_1 &:= x_2(0) = 0, \\ B_2 &:= x_1(2) = 0, \\ B_3 &:= x_2(2) = 0. \end{aligned}$$

Параметр задачи  $\alpha \in [0, A]$ .

### 1.6.3. Система необходимых условий оптимальности

Основные конструкции:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &:= \int_0^2 L dt + l, \\ L &:= \lambda_0 \frac{x_1}{1 + \alpha x_2^2} + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u), \\ l &:= \lambda_1 x_2(0) + \lambda_2 x_1(2) + \lambda_3 x_2(2), \\ H &:= p_1 x_2 + p_2 u - \lambda_0 \frac{x_1}{1 + \alpha x_2^2}.\end{aligned}$$

Необходимые условия оптимальности:

а) уравнения Эйлера–Лагранжа (сопряженная система уравнений):

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= \lambda_0 / (1 + \alpha x_2^2), \\ \dot{p}_2 &= -p_1 - 2\alpha \lambda_0 x_1 x_2 / (1 + \alpha x_2^2)^2;\end{aligned}$$

б) условие оптимальности по управлению:

$$\hat{u} = \begin{cases} 1, & \text{при } p_2 > 0, \\ -1, & \text{при } p_2 < 0, \\ \forall u \in [-1, 1], & \text{при } p_2 = 0; \end{cases}$$

в) условия трансверсальности:

$$\begin{aligned}p_1(0) &= 0, \quad p_1(2) = -\lambda_2, \\ p_2(0) &= \lambda_1, \quad p_2(2) = -\lambda_3.\end{aligned}$$

Условий стационарности г) и дополняющей нежесткости д) нет, так как концы фиксированы ( $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 2$ ) и в постановке задачи отсутствуют условия типа “меньше или равно”.

е) Условие неотрицательности:  $\lambda_0 \geq 0$ ;

ж) множители Лагранжа Не Равны Одновременно Нулю (условие НЕРОН);

з) множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного сомножителя (условие нормировки).

#### 1.6.4. Краевая задача

Для формирования краевой задачи принципа максимума необходимо выбрать условие нормировки. Проведем анализ возможности аномального случая  $\lambda_0 = 0$ . При  $\lambda_0 = 0$   $\dot{p}_1 = 0$ , то есть  $p_1 \equiv \text{const}$ . Так как  $p_1(0) = 0$ , то  $p_1 \equiv 0$  и в силу второго сопряженного уравнения  $\dot{p}_2 = 0$ ,  $p_2 \equiv \text{const}$ . Случай  $p_2 \equiv \text{const} = 0$  приводит к равенству нулю всех множителей Лагранжа, что противоречит условиям принципа максимума; случай  $p_2 \equiv \text{const} \neq 0$  приводит к противоречию с краевыми условиями:  $u \equiv \text{const} = \pm 1$ ,  $x_2(2) - x_2(0) = \int_0^2 u dt = \pm 2 \neq 0$ . Значит  $\lambda_0 > 0$ .

В качестве условия нормировки выбирается величина  $\lambda_0 = 1$ . В этом случае решение рассматриваемой задачи оптимального управления на основе принципа максимума сводится к решению следующей краевой задачи.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \varphi_1(t, x, u) = x_2, \\ \dot{x}_2 &= \varphi_2(t, x, u) = u, \\ \dot{p}_1 &= \lambda_0 / (1 + \alpha x_2^2), \\ \dot{p}_2 &= -p_1 - 2\alpha\lambda_0 x_1 x_2 / (1 + \alpha x_2^2)^2,\end{aligned}\quad \forall t \in [0, 2]; \quad (1.44)$$

$$u = \begin{cases} 1, & \text{при } p_2 > 0, \\ -1, & \text{при } p_2 < 0, \\ \forall u \in [-1; 1], & \text{при } p_2 = 0; \end{cases} \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned}p_1(0) &= 0, & x_1(2) &= 0, \\ x_2(0) &= 0, & x_2(2) &= 0.\end{aligned}$$

#### 1.6.5. Участки особого управления

Как отмечалось ранее, обращение функции переключения в ноль и, следовательно, неопределенность величины  $u$  на отрезке (на множестве ненулевой меры) называется особым управлением и требует отдельного исследования. В рассматриваемом примере функция переключения управления совпадает с  $p_2(t)$ ; поэтому участок  $[\tau_0, \tau_1]$  будет особым, если

$$p_2(t) = 0 \quad \forall t \in [\tau_0, \tau_1].$$

Так как функция  $p_2(t)$  на отрезке  $[\tau_0, \tau_1]$  равна нулю, то и все ее существующие производные в силу системы дифференциальных уравнений также будут нулевыми на отрезке  $[\tau_0, \tau_1]$ :

$$\begin{aligned}\dot{p}_2 &= -p_1 - 2\alpha x_1 x_2 / (1 + \alpha x_2^2)^2 = 0, \\ \ddot{p}_2 &= -\frac{1}{1 + \alpha x_2^2} - \frac{2\alpha(x_2^2 + x_1 u)}{(1 + \alpha x_2^2)^2} + \frac{8\alpha^2 x_1 x_2^2 u}{(1 + \alpha x_2^2)^3} = 0.\end{aligned}\quad (1.46)$$

Последнее уравнение представляет собой линейную по  $u$  функцию:

$$Au + B = 0,$$

где

$$\begin{aligned}A &:= [-2\alpha x_1(1 + \alpha x_2^2) + 8\alpha^2 x_1 x_2^2] / (1 + \alpha x_2^2)^3, \\ B &:= -1 / (1 + \alpha x_2^2) - 2\alpha x_2^2 / (1 + \alpha x_2^2)^2.\end{aligned}$$

Необходимое условие Келли [6, п. 2, §2, гл. 8; 13] оптимальности особого управления состоит в том, что

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \equiv A \geq 0.$$

Проверим, может ли коэффициент  $A$  обращаться в ноль на каком-либо временном интервале. Преобразуя выражение для  $A$ , получим:

$$A = 2\alpha x_1(3\alpha x_2^2 - 1) / (1 + \alpha x_2^2)^3.$$

Знаменатель этой дроби больше или равен 1 для всех допустимых  $\alpha$  и  $x_2$ ; числитель обращается в ноль в одном из трех случаев:  $\alpha = 0$ ,  $x_1(t) \equiv 0 \forall t \in [\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_1] \subseteq [\tau_0, \tau_1]$ ,  $x_2(t) \equiv \pm\sqrt{1/3\alpha} \forall t \in [\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_1] \subseteq [\tau_0, \tau_1]$ .

В случаях  $\alpha = 0$  и  $x_1(t) \equiv 0 \forall t \in [\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_1]$  из (1.46) следует, что  $p_1(t) \equiv 0 \forall t \in [\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_1]$ . Вследствие единственности нулевого решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений  $p_1(t) \equiv 0$ ,  $p_2(t) \equiv 0 \forall t \in [0, 2]$  в первом случае и  $x_1(t) \equiv 0$ ,  $x_2(t) \equiv 0$ ,  $p_1(t) \equiv 0$ ,  $p_2(t) \equiv 0 \forall t \in [0, 2]$  во втором случае, что приводит к равенству нулю всех множителей Лагранжа, и, следовательно, эти два случая невозможны.

В последнем случае для  $t \in [\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_1]$  получаем:

$$x_2(t) = \pm\sqrt{1/3\alpha},$$

$$x_1(t) = (\pm\sqrt{1/3\alpha})t + C_1,$$

$$p_2(t) = 0,$$

$$\begin{aligned} p_1(t) &= -2\alpha[(\pm\sqrt{1/3\alpha})t + C_1](\pm\sqrt{1/3\alpha})/[1 + \alpha/(3\alpha)]^2 = \\ &= -2\alpha[(1/3\alpha)t + C_2]\frac{9}{16} = -\frac{3}{8}t + C_3. \end{aligned}$$

В то же время из уравнения Эйлера для  $p_1$  получаем:

$$p_1(t) = t/(1 + \alpha/(3\alpha)) + C_4 = \frac{3}{4}t + C_4.$$

Так как  $-\frac{3}{8}t + C_3 \neq \frac{3}{4}t + C_4$  ни при каком выборе констант  $C_3$  и  $C_4$ , то этот случай также невозможен.

Величина  $B$  не может обращаться в ноль, поэтому в силу (1.43) на отрезке особого управления величина  $A$  не может менять знак. В связи с этим условие Келли на участке особого управления достаточно проверить в одной точке этого участка.

Так как управление  $u$  явно появилось в выражении для второй производной функции переключения, и коэффициент  $A$  не может обращаться в ноль на отрезке особого управления, то в рассматриваемом примере, как и в примере предыдущего пункта, глубина особого управления равна 1.

**Выход.** Для существования участка особого управления необходимо выполнение условий  $p_2 \equiv 0$ ,  $\dot{p}_2 \equiv 0$ ; выбор величины  $u$  на этом участке осуществляется из условия  $\ddot{p}_2 \equiv 0$ :

$$u = u_{os} = -B/A = \frac{(1 + \alpha x_2^2)(1 + 3\alpha x_2^2)}{2\alpha x_1(3\alpha x_2^2 - 1)}, \quad (1.47)$$

причем выбранное таким способом  $u$  должно быть допустимым:  $u \in [-1, 1]$ ,  $A > 0$ .

Заметим, что на участке особого управления решение задачи Коши упрощается (такое упрощение характерно для всех участков особого управления): на нем вместо полной системы четырех дифференциальных уравнений необходимо интегрировать

систему двух дифференциальных уравнений основной задачи, так как  $u = u_{os}(x_1, x_2, \alpha)$ ; значения  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  на участке особого управления при этом определяются явно соотношениями

$$p_1 = -2\alpha x_1 x_2 / (1 + \alpha x_2^2)^2, \quad p_2 = 0. \quad (1.48)$$

Учитывая наличие первого интеграла  $H(t) = \text{const}$  решение системы двух дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{(1 + \alpha x_2^2)(1 + 3\alpha x_2^2)}{2\alpha x_1(3\alpha x_2^2 - 1)},$$

можно свести к решению задачи Коши для одного дифференциального уравнения в зависимости от константы первого интеграла  $H(t)$ . Например, при  $\text{const} \neq 0$  к дифференциальному уравнению

$$\dot{x}_2 = \frac{x_2^2(1 + 3\alpha x_2^2)}{\text{const}(1 + \alpha x_2^2)(3\alpha x_2^2 - 1)}.$$

**Примечание.** Описанные упрощения решения задачи Коши при решении задачи не применяются. Упомянутые два первых интеграла используются для дополнительного контроля точности решения задачи Коши на участке особого управления (см. ниже п. 1.6.10).

### 1.6.6. Аналитическое решение при $\alpha = 0$

При  $\alpha = 0$  задача упрощается и может быть решена в аналитическом виде.

$$\int_0^2 x_1 dt \rightarrow \inf,$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u,$$

$$|u| \leq 1,$$

$$\dot{x}(0) = 0, \quad x(2) = 0, \quad \dot{x}(2) = 0.$$

Основное упрощение связано с видом функции Понtryгина

$$H := p_1 x_2 + p_2 u - \lambda_0 x_1,$$

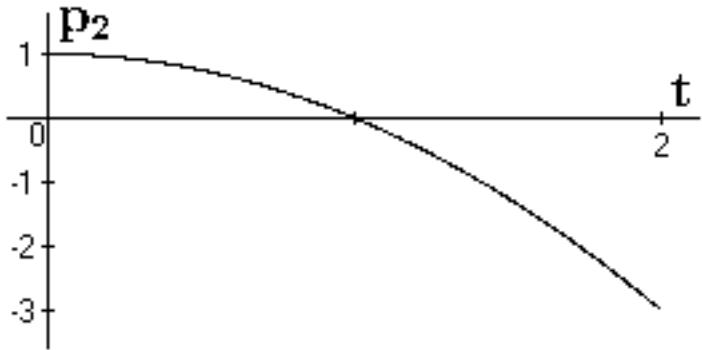


Рис. 1.7 Вид функции  $p_2(t)$  при  $\alpha = 0$ .

и, следовательно, с системой уравнений Эйлера (сопряженной системой уравнений):

$$\dot{p}_1 = \lambda_0 = 1, \quad \dot{p}_2 = -p_1.$$

Остальные условия принципа максимума и нормировка задачи ( $\lambda_0 = 1$ ) останутся неизменными.

Интегрирование первого из уравнений Эйлера  $\dot{p}_1 = 1$  с учетом условия трансверсальности  $p_1(0) = 0$  дает  $p_1(t) = t$   $\forall t \in [0, 2]$ . Подстановка вычисленной функции  $p_1$  во второе уравнение Эйлера и его интегрирование дает  $p_2(t) = -t^2/2 + c$   $\forall t \in [0, 2]$ , где  $c$  — некоторая требующая определения константа. При  $c < 0$  и при  $c > 4$  функция  $p_2(t)$  не меняет знак на отрезке (откуда  $u \equiv \text{const} = \pm 1$ ), и потому при таких  $c$  краевые условия  $x_2(2) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$  не могут быть удовлетворены. Вид функции  $p_2(t)$  представлен на рисунке 1.7. Так как  $0 = x_2(2) - x_2(0) = \int_0^2 u dt$  и так как  $u(t) = 1$  при  $t \in [0, \tau]$ ,  $u(t) = -1$  при  $t \in [\tau, 2]$ , то  $\tau = 1$ . Из этого условия определяется константа  $c = 1/2$  и функция

$$x_2(t) = \begin{cases} t, & \text{при } t \in [0, 1], \\ -t + 2, & \text{при } t \in [1, 2]. \end{cases} \quad (1.49)$$

Интегрирование дифференциального уравнения для  $x_1$  с уч-

том условия  $x_1(2) = 0$  дает решение задачи:

$$x_1(t) = \begin{cases} t^2/2 - 1, & \text{при } t \in [0, 1], \\ -(t-2)^2/2, & \text{при } t \in [1, 2]. \end{cases} \quad (1.50)$$

### 1.6.7. Численное решение краевой задачи при $\alpha < \alpha_*$

Аналитическое решение краевой задачи при  $\alpha = 0$  позволяет предположить, что в некотором диапазоне значений параметра  $\alpha$  решение краевой задачи не требует учета возможности существования на экстремали участков особого управления.

Сформируем “обычную” схему метода стрельбы решения краевой задачи. Для определения всех необходимых для решения задачи Коши условий при  $t = 0$  необходимо задать два параметра:  $\beta_1 = x_1(0)$  и  $\beta_2 = p_2(0)$  — эти два параметра и образуют вектор параметров пристрелки. В результате решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений краевой задачи (1.44) при выборе величины управления из условия оптимальности (1.45) от  $t = 0$  до  $t = 2$  определяется соответствующая выбранному вектору параметров траектория и, в частности, значения  $x_1(2)[\beta_1, \beta_2]$ ,  $x_2(2)[\beta_1, \beta_2]$ , условия обращения в ноль которых определяют две компоненты вектор–функции невязок  $\vec{X}(\vec{\beta})$ .

Проведенный в предыдущем пункте анализ позволяет определить величины параметров пристрелки на экстремали при  $\alpha = 0$ :  $\beta_1 = -1$ ,  $\beta_2 = 1/2$ . Кроме этого, проведенный анализ дает представление о поведении метода Ньютона при поиске вектора параметров пристрелки — корня вектор–функции невязок. Так, например, при  $\beta_2 \notin (0, 2)$  величина  $p_2(t)$  знакопостоянна при  $t \in [0, 2]$ , и потому матрица Якоби  $(\partial \vec{X} / \partial \vec{\beta})$  вырождена, что приводит к невозможности использовать при этом ньютоновские итерации.

### 1.6.8. Результаты при $\alpha < \alpha_*$

Метод продолжения решения по параметру позволяет построить семейство экстремалей при  $\alpha < \alpha_*$ ,  $\alpha_* \approx 1.13956527$ . На-

бор параметров пристрелки, позволяющих восстановить траектории интегрированием, представлен в таблице 1.12.

Функции  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  при всех  $\alpha < \alpha_*$  в точности совпадают с функциями  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  при  $\alpha = 0$  (1.50), (1.49); функции  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$  при различных  $\alpha < \alpha_*$  различаются, но точка переключения совпадает: при  $t = 1$   $p_2(1) = 0$ . Учтем это при обосновании точности определения неособых экстремалей.

Так как момент переключения  $t = 1$  и функции  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  вычисляются аналитически (из предположения о наличии одной точки переключения), то для оценки точности вычисления экстремалей необходимо обосновать точность вычисления функций  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ , точнее то, что функция  $p_2(t)$  не может иметь других нулей при  $t \in [0; 2]$ .

При известных функциях  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  решение задачи Коши для функции  $p_1(t)$  сводится к интегрированию известной функции времени. Вычисление оценки глобальной ошибки  $p_1(t)$  при этом сводится к сложению оценок локальных ошибок, а вычисление оценки глобальной погрешности  $p_2(t)$  сводится к сумме локальных ошибок интегрирования плюс интеграл от оценки глобальной ошибки  $p_1(t)$ . Для обоснования отсутствия других (кроме момента  $t = 1$ ) моментов обращения в ноль функции  $p_2(t)$  проводится интегрирование задачи Коши для сопряженных переменных и проверяется, что модуль вычисленного таким образом значения  $p_2(t)$  превосходит вычисленное значение глобальной погрешности для всех  $t \in [0; 2]$ , кроме некоторой окрестности  $t = 1$ , в которой проверяется условие, что производная  $\dot{p}_2(t)$  с учетом вычислительной погрешности отделена от нуля.

**Примечание.** На всех приведенных в таблице 1.15 экстремалах с одной точкой переключения эта проверка оказалась положительной.

Обоснование оптимальности построенных экстремалей не проводится. Любознательным студентам для дальнейшего ознакомления с проблемой можно рекомендовать последние работы Н. П. Осмоловского и М. И. Зеликина [25].

При  $\alpha > \alpha_*$  построить решение краевой задачи принципа максимума с использованием “обычной” вычислительной схемы не удается из-за отсутствия сходимости модифицирован-

ногого метода Ньютона с нормировкой Федоренко (обладающей самой хорошей сходимостью среди испробованных). Проведенные вычисления показывают, что при  $\alpha = 1.13956527$   $p_2(0) = 1.93197135 \cdot 10^{-9}$ ,  $\dot{p}_2(0) = 0$  (так как  $p_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$ ), и при выборе допустимого  $u = 0.438763810343$  (1.47)  $\ddot{p}_2(0) = 0$ . Поэтому можно предположить, что при  $\alpha > \alpha_*$  экстремаль краевой задачи принципа максимума начинается с участка особого управления.

### 1.6.9. Численное решение краевой задачи при $\alpha > \alpha_*$

Модифицируем вычислительную схему с учетом сделанного в предыдущем пункте предположения о структуре траектории (см. замечание в п. 2.2).

Предполагая, что экстремаль начинается с участка особого управления, определим  $p_2(t) \equiv 0$  и функцию  $u$  по формуле (1.47). Величина  $p_2(0) = 0$  из числа параметров пристрелки при этом исключается, и в качестве параметра пристрелки используется величина  $0 \leq \tau \leq 2$ , определяющая момент окончания участка особого управления:  $\beta_2 = \tau$ . По окончании участка особого управления (первого порядка) при выполнении условия Келли в виде строгого неравенства и  $u(\tau) = u_{os}(\tau)$ ,  $|u_{os}(\tau)| < 1$  траектория может быть продолжена двумя неособыми способами: 1)  $u = 1$  и 2)  $u = -1$  (см. пример 1.5) [13]. В каком из случаев удастся определить экстремаль и, если удастся построить две экстремали, на какой из них будет меньшее значение функционала, определится в результате численного эксперимента.

На траекториях, используемых на промежуточных этапах в процессе решения задачи, условие Келли и условие допустимости выбранного по формуле (1.47) управления  $u(t) = u_{os}(t) \in [-1, 1] \forall t \in [0, \tau]$  могут нарушаться. Если при этом на полученной в результате решения задачи экстремали на участке особого управления условие Келли и условие допустимости особого управления выполнены, то краевая задача решена. В противном случае краевая задача должна считаться не решенной, и используемая вычислительная схема требует модификации.

### 1.6.10. Результаты решения краевой задачи при $\alpha > \alpha_*$

Метод продолжения решения по параметру позволяет построить семейство экстремалей при  $\alpha > \alpha_*$  по предложенной в предыдущем пункте вычислительной схеме при продолжении экстремали в момент  $\tau$  первым способом:  $u(\tau_+) = 1$ . При продолжении экстремали в момент  $\tau$  вторым способом ( $u(\tau_+) = -1$ ) построить экстремали, удовлетворяющие краевым условиям, не удалось из-за отсутствия сходимости модифицированного метода Ньютона. Набор параметров пристрелки, позволяющих восстановить траектории интегрированием, и ряд характерных величин (вычисленных при оценке относительной погрешности на шаге  $\Delta_{лок} = 10^{-12}$  в методе DOPRI8) представлены в таблице 1.13. Заметим, что на всех представленных экстремалах на участках особого управления величина особого управления была допустимой и условие Келли выполнялось в виде строгого неравенства.

Для контроля точности решения задачи Коши на участке особого управления осуществлялось решение задачи Коши для четырех дифференциальных уравнений и вычисленные таким образом значения  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$  сравнивались со значениями, определяемыми условиями нахождения на участке особого управления (1.48). Погрешности вычисления сопряженных переменных  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$  на решение задачи Коши для фазовых переменных  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  на особом участке влияния не оказывают. Кроме того, на экстремалах вычислялось значение функции Понтрягина, и вычисленное в момент  $t$  значение сравнивалось со значением функции Понтрягина в начальный момент  $t = 0$ .

Для проверки точности решения задачи проводилась серия расчетов с различной оценкой относительной точности на шаге решения задачи Коши  $\Delta_{лок}$ . В качестве точек сравнения выбирались: момент окончания участка особого управления (являющийся одним из параметров пристрелки), момент переключения (выбираемый неявно как момент выполнения условия  $p_2(t_n) = 0$ ) и момент окончания управляемого процесса  $t = 2$ . Результаты этого сравнения представлены в табл. 1.14.

**Таблица 1.12.** Набор параметров пристрелки при  $\alpha < \alpha_*$  (“обычная” вычислительная схема).

$\alpha$	$\beta_1 = x_1(0)$	$\beta_2 = p_2(0)$
0.0000	-1	0.500000000
0.1000	-1	0.423079537
0.2000	-1	0.357010027
0.3000	-1	0.299481873
0.4000	-1	0.248814464
0.5000	-1	0.203753084
0.6000	-1	0.163340265
0.7000	-1	0.126831460
0.8000	-1	0.093638099
0.9000	-1	0.063288149
1.0000	-1	0.035398163
1.1000	-1	0.009653083
1.1395	-1	$1.5687059 \cdot 10^{-5}$
1.13956527	-1	$1.93197135 \cdot 10^{-9}$

**Таблица 1.13.** Результаты решения краевой задачи при  $\alpha > \alpha_*$ .

$\alpha$	$\beta_1 = x_1(0)$ $u(0)$	$\beta_2 = \tau$ $u(\tau_-)$	$t_{\pi}$
1.13956528	-0.999999998 0.438763807	$4.01945 \cdot 10^{-9}$ 0.438763807	1.000000001
1.15	-0.998042168 0.435635510	0.003473441 0.435644687	1.000980141
1.20	-0.988957935 0.421318897	0.019215544 0.421516755	1.005558987
1.50	-0.942874283 0.353528927	0.091394167 0.358019973	1.029473815
2.00	-0.887363149 0.281733584	0.166425229 0.292045045	1.059487346
3.00	-0.816791658 0.204050403	0.250308589 0.217779042	1.099060209
4.00	-0.772192867 0.161876657	0.299173779 0.175130047	1.124734318

Таблица 1.13. Продолжение.

$\alpha$	$\beta_1 = x_1(0)$ $u(0)$	$\beta_2 = \tau$ $u(\tau_-)$	$t_n$
5.00	-0.740666164 0.135013593	0.332499215 0.146967283	1.143165957
6.00	-0.716834138 0.116251904	0.357250296 0.126851238	1.157252771
7.00	-0.697990408 0.102334603	0.376650397 0.111715434	1.168486865
8.00	-0.682601219 0.091561512	0.392432596 0.099891692	1.177726482
9.00	-0.669722583 0.082953087	0.405626386 0.090388308	1.185505552
10.00	-0.658736954 0.075902831	0.416888646 0.082576448	1.192176319
20.00	-0.597912623 0.041812129	0.480066558 0.044715140	1.229771572
30.00	-0.570323907 0.029223160	0.509701278 0.030876794	1.247266028
40.00	-0.553719987 0.022574587	0.528028346 0.023655437	1.257961003
50.00	-0.542328927 0.018438994	0.540871468 0.019206399	1.265381236
60.00	-0.533891901 0.015608653	0.550547771 0.016184503	1.270925237
70.00	-0.527319109 0.013545606	0.558193090 0.013995197	1.275274789
80.00	-0.522011620 0.011972914	0.564440661 0.012334567	1.278807756
90.00	-0.517609369 0.010733105	0.569676077 0.011030883	1.281752914
100.00	-0.513881141 0.009729876	0.574149777 0.009979694	1.284258050

**Таблица 1.14.** Экстремаль при  $\alpha = 10.0$  и различной относительной точности на шаге.

$t$	$x_1(t)$	$x_2(t)$
$\int_0^t x/(1 + \alpha \dot{x}^2) ds$	$p_1(t)$	$p_2(t)$
	$u(t)$	$H(t)$
$\Delta_{\text{лок}} = 10^{-6}$		
0.00	-0.658736953000 0.00	0.00 0.00
0.00	0.0759028315814	0.658736953000
0.25	-0.656353454077 0.249697082485	0.019161477226 $6.98 \cdot 10^{-15}$
-0.164286890406	0.0781612781297	0.658736953000
$\tau$	-0.652049804524 0.415459387926	0.032536010404 $1.43 \cdot 10^{-14}$
-0.272760084875	0.0825764477416	0.658736953000
0.50	-0.645891944179 0.493907050969	0.115647363404 0.0319192411673
-0.323720205763	1.00	0.658736953046
1.00	-0.463068262478 0.729714104974	0.615647363404 0.112820804125
-0.464393313660	1.00	0.658736953090
1.192176317868	-0.326289550499 0.761776099382	0.807823681272 $1.58 \cdot 10^{-11}$
-0.477310584958	1.00 → -1.00	0.658736953058
1.50	-0.125000000057 0.822119645695	0.4999999999140 -0.211962845102
-0.489684591778	-1.00	0.658736953061
2.00	$-4.87 \cdot 10^{-10}$ 1.14051474734	$-8.60 \cdot 10^{-10}$ -0.658736970844
-0.498764836851	-1.00	0.658736970350
$\Delta_{\text{лок}} = 10^{-8}$		
0.00	-0.658736953321 0.00	0.00 0.00
0.00	0.0759028315444	0.658736953321
0.25	-0.656353454400 0.249697082485	0.0191614772167 $9.56 \cdot 10^{-17}$

Таблица 1.14. Продолжение.

$t$	$x_1(t)$	$x_2(t)$
$\int_0^t x/(1 + \alpha \dot{x}^2) ds$	$p_1(t)$	$p_2(t)$
	$u(t)$	$H(t)$
-0.164286890486	0.0781612780893	0.658736953321
$\tau$	-0.652049804854 0.415459387747	0.0325360103717 $1.98 \cdot 10^{-16}$
-0.272760084892	0.0825764476878	0.658736953321
0.50	-0.645891944491 0.493907050952	0.115647363554 0.0319192412697
-0.323720205911	1.00	0.658736953321
1.00	-0.463068262714 0.729714104836	0.615647363554 0.112820804318
-0.464393313800	1.00	0.658736953320
1.192176317780	-0.326289550420 0.761776099279	0.807823681777 $1.95 \cdot 10^{-16}$
-0.477310585116	1.00 $\rightarrow$ -1.00	0.658736953318
1.50	-0.125000000000 0.822119645488	0.500000000000 -0.211962844911
-0.489684591894	-1.00	0.658736953369
2.00	$1.067 \cdot 10^{-14}$ 1.14051473712	$1.29 \cdot 10^{-14}$ -0.658736953309
-0.498764837313	-1.00	0.658736953309
$\Delta_{\text{лок}} = 10^{-10}$		
0.00	-0.658736953319 0.00	0.00 0.00
0.00	0.0759028315446	0.658736953319
0.25	-0.656353454398 0.249697082485	0.0191614772168 $1.92 \cdot 10^{-18}$
-0.164286890486	0.0781612780895	0.658736953319
$\tau$	-0.652049804853 0.415459387749	0.0325360103720 $2.00 \cdot 10^{-17}$
-0.272760084893	0.0825764476882	0.658736953319
0.50	-0.645891944490 0.493907050952	0.115647363552 0.0319192412676
-0.323720205910	1.00	0.658736953319
1.00	-0.463068262714	0.615647363552

Таблица 1.14. Продолжение.

$t$	$x_1(t)$	$x_2(t)$
$\int_0^t x/(1 + \alpha \dot{x}^2) ds$	$p_1(t)$	$p_2(t)$
	$u(t)$	$H(t)$
-0.464393313800	0.729714104838 1.00	0.112820804317 0.658736953319
1.192176317784	-0.326289550419 0.761776099282 1.00 → -1.00	0.807823681776 $1.55 \cdot 10^{-13}$ 0.658736953319
-0.477310585116	1.50	0.500000000000 -0.211962844900
-0.489684591899	0.822119645411 -1.00	0.658736953319
2.00	$-3.77 \cdot 10^{-13}$ 1.14051473706 -1.00	$-4.66 \cdot 10^{-13}$ -0.658736953319 0.658736953319
$\Delta_{\text{лок}} = 10^{-12}$		
0.00	-0.658736953319 0.00	0.00 0.00
0.00	0.0759028315446	0.658736953319
0.25	-0.656353454398 0.249697082485 0.0781612780895	0.0191614772168 $2.21 \cdot 10^{-18}$ 0.658736953319
-0.164286890486	$\tau$	0.0325360103720 -6.65 · $10^{-18}$
-0.272760084893	-0.652049804853 0.415459387749 0.0825764476882	0.658736953319
0.50	-0.645891944490 0.493907050952 1.00	0.115647363552 0.0319192412676 0.658736953319
-0.323720205910	1.00	-0.463068262714 0.729714104838 1.00
-0.464393313800		0.615647363552 0.112820804317 0.658736953319
1.192176317784	-0.326289550419 0.761776099282 1.00 → -1.00	0.807823681776 $1.08 \cdot 10^{-16}$ 0.658736953319
-0.477310585116	1.50	0.500000000000 -0.211962844900
-0.489684591899		-1.00 0.658736953319

Таблица 1.14. Продолжение.

$t$	$x_1(t)$	$x_2(t)$
$\int_0^t x/(1 + \alpha \dot{x}^2) ds$	$p_1(t)$	$p_2(t)$
	$u(t)$	$H(t)$
2.00	$-3.50 \cdot 10^{-6}$ 1.14051473706	$-4.26 \cdot 10^{-6}$ -0.658736953319
-0.498764837316	-1.00	0.658736953319

При анализе чисел в табл. 1.14 следует обратить внимание на совпадение знаков. Все приведенные знаки при расчетах с  $\Delta_{лок} = 10^{-10}$  и  $\Delta_{лок} = 10^{-12}$  совпадают (поэтому можно предположить, что они точны), числа, полученные при расчетах с  $\Delta_{лок} = 10^{-8}$ , отличаются от чисел, вычисленных с  $\Delta_{лок} = 10^{-12}$ , в последнем знаке, а числа, рассчитанные с  $\Delta_{лок} = 10^{-6}$ , — в последних трех знаках.

Исследование оптимальности полученных экстремалей не проведено. Возможно проверить необходимые условия оптимальности особого участка и необходимые условия оптимальности неособого участка; конструктивно строящейся совокупности достаточных условий оптимальности для экстремалей, содержащих как неособые, так и особые участки в настоящее время, повидимому, нет.

На этом исследование задачи закончено.

Как указывалось в п. **Задание и задачи**, отчет по проведенному исследованию состоит из следующих пунктов:

- 1) постановка решаемой задачи и ее формализация — п. 1.6.1, 1.6.2;
- 2) сведение решения задачи оптимизации к решению краевой задачи — п. 1.6.3 и п. 1.6.4;
- 3) анализ полученной краевой задачи, формирование вычислительной схемы ее решения — п. 1.6.5, 1.6.6, 1.6.7, 1.6.9;
- 4) описание полученных при решении результатов и обоснование их точности — п. 1.6.8, п. 1.6.10.

## 1.7. Задача Фуллера

В отличие от предыдущих примеров, в которых участки особых управлений имели первый порядок, в данном пункте рассматривается задача Фуллера — одна из простейших задач, решение которой содержит участок особого управления второго порядка и выход на этот участок осуществляется посредством четвертинг-режима. Впервые пример задачи, оптимальная траектория в которой содержит бесконечное число переключений, был предложен в [37]. Подобные задачи рассматриваются в [6, гл. 8, §3; 13, гл. 2, §3, пример стр. 73].

### 1.7.1. Постановка задачи

$$\int_0^1 x^2 dt \rightarrow \inf, \quad x(0) = 1/2, \quad |\ddot{x}| \leq 1.$$

### 1.7.2. Формализация задачи

$$\int_0^1 x_1^2 dt \rightarrow \inf,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$$

$$|u| \leq 1,$$

$$x(0) = 1/2.$$

### 1.7.3. Система необходимых условий оптимальности

Основные конструкции:

$$\mathcal{L} := \int_0^1 L dt + l,$$

$$L := \lambda_0(x_1^2) + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u),$$

$$l := \lambda_1 x_1(0),$$

$$H := p_1 x_2 + p_2 u - \lambda_0 x_1^2.$$

Необходимые условия оптимальности:

а) уравнения Эйлера–Лагранжа (сопряженная система уравнений):

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = 2\lambda_0 x_1, \\ \dot{p}_2 = -p_1; \end{cases}$$

б) условие оптимальности по управлению:

$$\hat{u} = \begin{cases} 1, & p_2 > 0, \\ -1, & p_2 < 0, \\ \forall u \in [-1; 1], & p_2 = 0; \end{cases}$$

в) условия трансверсальности:

$$p_1(0) = \lambda_1, \quad p_2(0) = 0, \quad p_1(1) = 0, \quad p_2(1) = 0.$$

Условий стационарности г) и дополняющей нежесткости д) нет, так как концы фиксированы ( $t_0 = 0, t_1 = 1$ ) и в постановке задачи отсутствуют условия типа “меньше или равно”.

е) Условие неотрицательности:  $\lambda_0 \geq 0$ ;

ж) множители Лагранжа Не Равны Одновременно Нулю (условие НЕРОН);

з) множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного сомножителя (условие нормировки).

#### 1.7.4. Краевая задача и ее анализ

Для формирования краевой задачи принципа максимума необходимо выбрать условие нормировки. Проведем анализ возможности аномального случая  $\lambda_0 = 0$ . В этом случае  $\dot{p}_1 \equiv 0$ . Так как  $p_1(1) = 0$ , то  $p_1 \equiv 0$  и, следовательно,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\dot{p}_2 \equiv 0$ . Так как  $p_2(0) = p_2(1) = 0$ , то  $p_2 \equiv 0$ . То есть все множители Лагранжа равны нулю, что недопустимо. Полученное противоречие доказывает невозможность аномального случая.

В качестве условия нормировки используется  $\lambda_0 = 1/2$ .

На основе принципа максимума решение задачи оптимального управления сведено к решению краевой задачи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \\ \dot{p}_1 = x_1, \\ \dot{p}_2 = -p_1, \end{cases}$$

$$\hat{u} = \begin{cases} 1, & p_2 > 0, \\ -1, & p_2 < 0, \\ \forall u \in [-1; 1], & p_2 = 0, \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1/2, \quad p_2(0) = 0, \quad p_1(1) = 0, \quad p_2(1) = 0.$$

Обращение в ноль функции переключения  $p_2(t) = 0$  на каком-либо временном интервале  $[\tau_1, \tau_2]$  соответствует участку особого управления. На этом участке выполняется следующая цепочка равенств: так как  $p_2(t) = 0$ , то и  $\dot{p}_2 = -p_1 = 0$ , откуда следует  $\dot{p}_1 = x_1 = 0$ ,  $\dot{x}_1 = x_2 = 0$ ,  $\dot{x}_1 = u = 0$ . Так как для появления управления требуется четыре дифференцирования функции переключения, участок особого управления имеет второй (четыре пополам) порядок. На участке особого управления выполняется необходимое условие Коппа–Мойера оптимальности участка особого управления [6, гл. 8, §2, п. 2, условие (2.14); 13, гл. 2, §5, п. 4 и §9, п. 3]. Впрочем, оптимальность участка особого управления достаточно очевидна (функционал задачи в каждый момент времени на участке особого управления получает минимальное (нулевое) приращение).

Вследствие  $p_1(1) = 0$ ,  $p_2(1) = 0$  экстремаль задачи может заканчиваться участком особого управления; поскольку  $x_1(0) = 1/2 \neq 0$  экстремаль задачи не может начинаться участком особого управления. Аналитическое решение эквивалентной задачи приведено, например, в [6, гл. 8, §3]. Экстремаль задачи состоит из начального неособого и конечного особого участков, стыкующихся в некоторой промежуточной точке.

О возможных стыковках особого и неособого участков имеется ряд утверждений (см., например, [13, гл. 8, §2]; впервые эти утверждения были сформулированы в работе Kelley H. J., Kopp R. E. and Moyer H. G. — см. литературный обзор в любой работе, посвященной режимам особого управления).

В рассматриваемом нами случае используется следующее утверждение.

*Если участок особого управления имеет второй (или любой четный) порядок и условие оптимальности*

$$(-1)^q \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \Big| H_1 \leq 0$$

выполняется в виде строгого неравенства, то он не может сопрягаться с неособой кусочно-гладкой траекторией системы дифференциальных уравнений краевой задачи принципа максимума при условии, что управление разрывно в точке сопряжения неособого и особого участков.

Так как на участке особого управления  $u(t) = 0$ , а на неособом участке  $u(t) = \pm 1$ , то сопряжение особого и неособого участков не может быть кусочно-непрерывной функцией (стыковка осуществляется посредством четтеринг-режима, содержащего *бесконечное* число переключений в окрестности точки стыковки). На основе используемых в практикуме методов (без проведения дополнительных исследований) численно построить экстремаль с четтеринг-режимом не удается. Любознательным студентам для дальнейшего ознакомления с проблемой кроме цитированной выше литературы можно рекомендовать [23].

## 1.8. Пример задачи оптимального управления, решение которой при некоторых значениях параметра $\alpha$ содержит четтеринг–режимы

Как и в случае с участками особого управления первого порядка, после примера, рассматриваемого аналитически, следует пример, решаемый численно. В отличие от задачи Фуллера (пункт 1.7) в зависимости от значения параметра  $\alpha$  данная задача имеет как неособые экстремали (для  $0 \leq \alpha < \alpha_*$ ), так и экстремали с участками особого управления второго порядка (для  $\alpha > \alpha_*$ ). Причем стыковка особого и неособого участков возможна лишь посредством четтеринг–режима.

### 1.8.1. Постановка задачи

$$\int_0^2 \frac{x}{1 + \alpha x^2} dt \rightarrow \inf,$$

$$|\ddot{x}| \leq 1,$$

$$\dot{x}(0) = 0, \quad x(2) = 0, \quad \dot{x}(2) = 0, \quad \text{при } \alpha \in [0, A].$$

### 1.8.2. Формализация задачи

Обозначим  $u := \ddot{x}$ . Тогда исследуемая задача в обозначениях [1, 3] перепишется в следующем виде.

Минимизируемый функционал:

$$B_0 := \int_0^2 \frac{x_1}{1 + \alpha x_1^2} dt \rightarrow \inf.$$

Система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \varphi_1(t, x, u) = x_2, \\ \dot{x}_2 &= \varphi_2(t, x, u) = u.\end{aligned}$$

Ограничение на управление:

$$u(t) \in U(t) \quad \forall t \in [0, 2], \quad U := [-1, 1] \quad (|u| \leq 1).$$

Дополнительные ограничения:

$$\begin{aligned} B_1 &:= x_2(0) = 0, \\ B_2 &:= x_1(2) = 0, \\ B_3 &:= x_2(2) = 0. \end{aligned}$$

Параметр задачи  $\alpha \in [0, A]$ .

### 1.8.3. Система необходимых условий оптимальности

Основные конструкции:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &:= \int_0^2 L dt + l, \\ L &:= \lambda_0 \frac{x_1}{1 + \alpha x_1^2} + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u), \\ l &:= \lambda_1 x_2(0) + \lambda_2 x_1(2) + \lambda_3 x_2(2), \\ H &:= p_1 x_2 + p_2 u - \lambda_0 \frac{x_1}{1 + \alpha x_1^2}. \end{aligned}$$

Необходимые условия оптимальности:

а) уравнения Эйлера–Лагранжа (сопряженная система уравнений):

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \lambda_0(1 - \alpha x_1^2)/(1 + \alpha x_1^2)^2, \\ \dot{p}_2 &= -p_1; \end{aligned}$$

б) условие оптимальности по управлению:

$$\hat{u} = \begin{cases} 1, & \text{при } p_2 > 0, \\ -1, & \text{при } p_2 < 0, \\ \forall u \in [-1, 1], & \text{при } p_2 = 0; \end{cases}$$

в) условия трансверсальности:

$$\begin{aligned} p_1(0) &= 0, & p_1(2) &= -\lambda_2, \\ p_2(0) &= \lambda_1, & p_2(2) &= -\lambda_3. \end{aligned}$$

Условий стационарности г) и дополняющей нежесткости д) нет, так как концы фиксированы ( $t_0 = 0, t_1 = 2$ ), и в постановке задачи отсутствуют условия типа “меньше или равно”.

- е) условие неотрицательности:  $\lambda_0 \geq 0$ ;
- ж) множители Лагранжа Не Равны Одновременно Нулю (условие НЕРОН);
- з) множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного сомножителя (условие нормировки).

#### 1.8.4. Краевая задача

Для формирования краевой задачи принципа максимума необходимо выбрать условие нормировки. Проведем анализ возможности аномального случая  $\lambda_0 = 0$ . При  $\lambda_0 = 0$   $\dot{p}_1 = 0$ , то есть  $p_1 \equiv \text{const}$ . Так как  $p_1(0) = 0$ , то  $p_1 \equiv 0$  и из второго сопряженного уравнения следует  $\dot{p}_2 = 0$ ,  $p_2 \equiv \text{const}$ . Случай  $p_2 \equiv \text{const} = 0$  приводит к равенству нулю всех множителей Лагранжа, что противоречит условиям принципа максимума; случай  $p_2 \equiv \text{const} \neq 0$  приводит к противоречию с краевыми условиями:  $u \equiv \text{const} = \pm 1$ ,  $x_2(2) - x_2(0) = \int_0^2 u dt = \pm 2 \neq 0$ . Значит  $\lambda_0 > 0$ .

В качестве условия нормировки выбирается величина  $\lambda_0 = 1$ . В этом случае решение рассматриваемой задачи оптимального управления на основе принципа максимума сводится к решению следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \varphi_1(t, x, u) = x_2, \\ \dot{x}_2 &= \varphi_2(t, x, u) = u, \\ \dot{p}_1 &= (1 - \alpha x_1^2)/(1 + \alpha x_1^2)^2, \\ \dot{p}_2 &= -p_1,\end{aligned}\quad \forall t \in [0, 2]; \quad (1.51)$$

$$u = \begin{cases} 1, & \text{при } p_2 > 0, \\ -1, & \text{при } p_2 < 0, \\ \forall u \in [-1; 1], & \text{при } p_2 = 0; \end{cases} \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned}p_1(0) &= 0, \quad x_1(2) = 0, \\ x_2(0) &= 0, \quad x_2(2) = 0.\end{aligned}$$

#### 1.8.5. Участки особого управления

Функция переключения управления совпадает с функцией  $p_2(t)$ . Участок  $[\tau_0, \tau_1]$  будет особым, если на нем функция пе-

реключения обращается в ноль:

$$p_2(t) = 0 \quad \forall t \in [\tau_0, \tau_1].$$

Так как функция  $p_2(t)$  на отрезке  $[\tau_0, \tau_1]$  равна нулю, то и все ее существующие производные в силу системы дифференциальных уравнений также будут нулевыми на отрезке  $[\tau_0, \tau_1]$ :

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 &= -p_1 = 0, \\ \ddot{p}_2 &= -\dot{p}_1 = -(1 - \alpha x_1^2)/(1 + \alpha x_1^2)^2 = 0, \\ x_1 &= \pm\sqrt{1/\alpha}, \\ \dot{x}_1 &= x_2 = 0, \\ \dot{x}_2 &= u_{os} = 0. \end{aligned}$$

Второе и третье уравнения системы эквивалентны; третье условие приведено для упрощения записи последних двух соотношений; последнее условие позволяет определить величину управления на особом участке. Так как для явного появления управления требуется четыре дифференцирования функции переключения, участок особого управления имеет второй (четыре пополам) порядок. Как и в задаче Фуллера, оптимальность участка особого управления достаточно очевидна: минимизируемый функционал задачи в каждый момент времени на участке особого управления получает минимальное (нулевое) приращение. На участке особого управления выполняется необходимое условие Коппа–Мойера оптимальности участка особого управления (это условие не выписывается явно только из–за его громоздкости)

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^4 p_2(t)}{dt^4} \leq 0.$$

Причем условие выполняется в усиленной форме (то есть стоящая в левой части производная строго меньше нуля).

Как и в задаче Фуллера, согласно условиюстыковки особого и неособого участков (см. п. 1.7.4), так как  $u_{os} = 0 \neq \pm 1$ , такаястыковка не может осуществиться посредством кусочно–непрерывного управляющего воздействия (осуществляется посредством четтеринг–режима). В силу краевых условий экстремаль задачи может начинаться, но не может заканчиваться участком особого управления. Поэтому в данном примере решается *только* задача определения неособых экстремалей.

### 1.8.6. Аналитическое решение задачи при $\alpha = 0$

При  $\alpha = 0$  рассматриваемая задача оптимального управления значительно упрощается и полностью совпадает с задачей, аналитически решаемой в п. 1.6.6.

### 1.8.7. Вычислительная схема построения неособых экстремалей

Как и в п. 1.6.8 аналитическое решение краевой задачи при  $\alpha = 0$  позволяет предположить, что в некотором диапазоне значений параметра  $\alpha$  решение краевой задачи не требует учета возможности существования на экстремали участков особого управления.

Сформируем “обычную” схему метода стрельбы решения краевой задачи. Для определения всех необходимых для решения задачи Коши условий при  $t = 0$  необходимо задать два параметра:  $\beta_1 = x_1(0)$  и  $\beta_2 = p_2(0)$ . Эти два параметра и образуют вектор параметров пристрелки. В результате решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений краевой задачи (1.51) при выборе величины управления из условия оптимальности (1.52) от  $t = 0$  до  $t = 2$  определяется траектория, соответствующая выбранному вектору параметров пристрелки. Условия обращения в ноль значений  $x_1(2)[\beta_1, \beta_2]$ ,  $x_2(2)[\beta_1, \beta_2]$  определяют две компоненты вектор–функции невязок  $\vec{X}(\vec{\beta})$ .

Проведенный в п. 1.6.6 анализ позволяет определить величины параметров пристрелки на экстремали при  $\alpha = 0$ :  $\beta_1(0) = -1$ ,  $\beta_2(0) = 1/2$ .

### 1.8.8. Результаты

Метод продолжения решения по параметру позволяет построить семейство экстремалей при  $\alpha < \alpha_2$ ,  $\alpha_2 \approx 3$ . Набор параметров пристрелки, позволяющих восстановить траектории интегрированием, и моменты переключения представлены в таблице 1.15.

Функции  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  при всех  $\alpha < \alpha_1 \approx 1.24$  в точности совпадают с функциями  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  при  $\alpha = 0$  (1.50), (1.49); функции  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$  при различных  $\alpha < \alpha_1$  различаются, но точки

переключения совпадают: при  $t = 1$   $p_2(1) = 0$ . При  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$  на траектории имеется две точки переключения.

В данном случае при оценке точности решения краевой задачи следует учесть, что при заданном (неособом) управлении функция  $x_2(t)$  является непрерывной кусочно-линейной, а функция  $x_1(t)$  — непрерывно-дифференцируемой кусочно-квадратичной.

Наиболее просто это свойство учитывается при оценке точности экстремалей с одной точкой переключения. В этом случае момент переключения  $t = 1$ , и функции  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  вычисляются аналитически из предположения о наличии одной точки переключения. Для оценки точности вычисления экстремалей необходимо обосновать точность вычисления функций  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ , точнее то, что функция  $p_2(t)$  не может иметь других нулей.

При известной функции  $x_1(t)$  (1.50) решение задачи Коши для функции  $p_1(t)$  сводится к интегрированию известной функции времени. Оценка глобальной ошибки  $p_1(t)$  при этом сводится к сложению оценок локальных ошибок, а оценка глобальной погрешности  $p_2(t)$  сводится к сложению локальных ошибок интегрирования и интеграла от оценки глобальной ошибки  $p_1(t)$ . Для обоснования отсутствия других (кроме  $t = 1$ ) моментов обращения в ноль функции  $p_2(t)$  проводится интегрирование задачи Коши для сопряженных переменных и проверяется, что модуль вычисленного таким образом значения  $p_2(t)$  превосходит вычисленное значение глобальной погрешности.

**Примечание.** На всех приведенных в таблице 1.15 экстремалах с одной точкой переключения эта проверка оказалась положительной.

Обоснование точности вычисления экстремалей с двумя точками переключения несколько (но незначительно) сложнее.

Результаты численного эксперимента — решение задачи Коши при  $\alpha = 2$  и соответствующих этому  $\alpha$  параметрах пристрелки (строка 23 табл. 1.15) для четырех различных ограничений локальной погрешности приведены в табл. 1.16.

В связи с простотой дифференциальных уравнений для  $x_1$ ,  $x_2$  используемый численный метод мог бы их проинтегрировать на участке постоянного управления любой длины за один

шаг (метод *любого* порядка выше третьего в данном случае точен на участках постоянного управления). Увеличение числа шагов приводит к ухудшению точности решения задачи Коши для этих переменных за счет накопления ошибок округления. Уточнение значений этих переменных в таблице происходит за счет более точного определения моментов переключения. Если бы моменты переключения определялись точно (например, случайно) то при менее строгой оценке локальной погрешности и, следовательно, при меньшем числе промежуточных шагов значения  $x_1$ ,  $x_2$  определялись бы точнее, чем при более жестких ограничениях локальной погрешности и большем числе промежуточных шагов (Это поясняет большую точность определения фазовых переменных при  $\delta_{лок} = 10^{-6}$  по сравнению с  $\delta_{лок} = 10^{-8}$  в табл. 1.16).

**Таблица 1.15.** Неособые экстремали задачи ( $t_1$ ,  $t_2$  — точки переключения).

$\alpha$	$\beta_1 = x_1(0)$	$\beta_2 = p_2(0)$	$t_1$	$t_2$
0.0	-1.0	0.50000000	—	1.0
0.1	-1.0	0.38913131	—	1.0
0.2	-1.0	0.30467303	—	1.0
0.3	-1.0	0.23909031	—	1.0
0.4	-1.0	0.18734104	—	1.0
0.5	-1.0	0.14594825	—	1.0
0.6	-1.0	0.11245206	—	1.0
0.7	-1.0	$8.5073163 \cdot 10^{-2}$	—	1.0
0.8	-1.0	$6.2499486 \cdot 10^{-2}$	—	1.0
0.9	-1.0	$4.3746924 \cdot 10^{-2}$	—	1.0
0.1	-1.0	$2.8066163 \cdot 10^{-2}$	—	1.0
1.1	-1.0	$1.4878951 \cdot 10^{-2}$	—	1.0
1.2	-1.0	$3.7336296 \cdot 10^{-3}$	—	1.0
1.237	-1.0	$5.3497672 \cdot 10^{-5}$	—	1.0
1.244	-0.99676383	$-6.1794768 \cdot 10^{-8}$	0.001618	1.001618
1.3	-0.96978484	$-5.1437518 \cdot 10^{-6}$	0.015108	1.015108
1.4	-0.92611021	$-2.8321611 \cdot 10^{-5}$	0.036945	1.036945
1.5	-0.88726227	$-6.0607481 \cdot 10^{-5}$	0.056369	1.056369
1.6	-0.85239051	$-9.5258049 \cdot 10^{-5}$	0.073805	1.073805
1.7	-0.82084764	$-1.2817164 \cdot 10^{-4}$	0.089576	1.089576

Таблица 1.15. Продолжение.

$\alpha$	$\beta_1 = x_1(0)$	$\beta_2 = p_2(0)$	$t_1$	$t_2$
1.8	-0.79212914	$-1.5685971 \cdot 10^{-4}$	0.103935	1.103935
1.9	-0.76583400	$-1.7984664 \cdot 10^{-4}$	0.117083	1.117083
2.0	-0.74163827	$-1.9630551 \cdot 10^{-4}$	0.129181	1.129181
2.1	-0.71927659	$-2.0583026 \cdot 10^{-4}$	0.140362	1.140362
2.2	-0.69852902	$-2.0828956 \cdot 10^{-4}$	0.150735	1.150735
2.3	-0.67921130	$-2.0373117 \cdot 10^{-4}$	0.160394	1.160394
2.4	-0.66116767	$-1.9231852 \cdot 10^{-4}$	0.169416	1.169416
2.5	-0.64426533	$-1.7428805 \cdot 10^{-4}$	0.177867	1.177867
2.6	-0.62839027	$-1.4992027 \cdot 10^{-4}$	0.185805	1.185805
2.7	-0.61344389	$-1.1952013 \cdot 10^{-4}$	0.193278	1.193278
2.8	-0.59934042	$-8.3403592 \cdot 10^{-5}$	0.200330	1.200330
2.9	-0.58600486	$-4.1888547 \cdot 10^{-5}$	0.206998	1.206998
2.97	-0.57709123	$-9.7842123 \cdot 10^{-6}$	0.211454	1.211454

Таблица 1.16. Экстремаль задачи при  $\alpha = 2$  ( $x_1(0) = -0.741638271$ ,  $p_2(0) = -1.96305513 \cdot 10^{-4}$ ,  $H(0) = 0.353348196580$ ): решение задачи при различной точности на шаге.

	$\delta_{\text{лок}} = 10^{-6}$ $\delta_{\text{лок}} = 10^{-10}$	$\delta_{\text{лок}} = 10^{-8}$ $\delta_{\text{лок}} = 10^{-12}$
$t_1$	0.129180864763 0.129180864762	0.129180862946 0.129180864765
$x_1(t_1)$	-0.749982118911 -0.749982118910	-0.749982118676 -0.749982118911
$x_2(t_1)$	-0.129180864764 -0.129180864762	-0.129180862946 -0.129180864765
$p_1(t_1)$	$-3.14694614902 \cdot 10^{-3}$ $-3.14694614896 \cdot 10^{-3}$	$-3.14694609872 \cdot 10^{-3}$ $-3.14694614906 \cdot 10^{-3}$
$p_2(t_1)$	$-1.18779784541 \cdot 10^{-14}$ $-1.86198011680 \cdot 10^{-14}$	$-5.73219556171 \cdot 10^{-12}$ $-6.93980657387 \cdot 10^{-15}$
$H(t_1)$	0.353348196580 0.353348196580	0.353348196569 0.353348196580
$x_1(0.5)$	-0.729131439943 -0.729131439941	-0.729131438595 -0.729131439944
$x_2(0.5)$	0.241638270472 0.241638270477	0.241638274108 0.241638270469

Таблица 1.16. Продолжение.

	$\delta_{\text{лок}} = 10^{-6}$ $\delta_{\text{лок}} = 10^{-10}$	$\delta_{\text{лок}} = 10^{-8}$ $\delta_{\text{лок}} = 10^{-12}$
$p_1(0.5)$	$-1.36013346089 \cdot 10^{-2}$ $-1.36013346088 \cdot 10^{-2}$	$-1.36013344608 \cdot 10^{-2}$ $-1.36013346091 \cdot 10^{-2}$
$p_2(0.5)$	$3.24765384653 \cdot 10^{-3}$ $3.24765384650 \cdot 10^{-3}$	$3.24765382867 \cdot 10^{-3}$ $3.24765384654 \cdot 10^{-3}$
$H(0.5)$	$0.353348196580$ $0.353348196580$	$0.353348196569$ $0.353348196580$
$x_1(1.0)$	$-0.483312304706$ $-0.483312304703$	$-0.483312301541$ $-0.483312304709$
$x_2(1.0)$	$0.741638270472$ $0.741638270477$	$0.741638274108$ $0.741638270469$
$p_1(1.0)$	$2.45840332736 \cdot 10^{-2}$ $2.45840332566 \cdot 10^{-2}$	$2.45840345907 \cdot 10^{-2}$ $2.45840332538 \cdot 10^{-2}$
$p_2(1.0)$	$5.70026739359 \cdot 10^{-3}$ $5.70026736561 \cdot 10^{-3}$	$5.70026705929 \cdot 10^{-3}$ $5.70026736623 \cdot 10^{-3}$
$H(1.0)$	$0.353348196621$ $0.353348196580$	$0.353348196570$ $0.353348196580$
$t_2$	$1.129180865757$ $1.129180865374$	$1.129180857603$ $1.129180865389$
$x_1(t_2)$	$-0.379162982809$ $-0.379162983138$	$-0.379162986275$ $-0.379162983133$
$x_2(t_2)$	$0.870819136230$ $0.870819135852$	$0.870819131711$ $0.870819135858$
$p_1(t_2)$	$6.75907746909 \cdot 10^{-2}$ $6.75907745104 \cdot 10^{-2}$	$6.75907732717 \cdot 10^{-2}$ $6.75907745122 \cdot 10^{-2}$
$p_2(t_2)$	$2.70753127436 \cdot 10^{-16}$ $6.30083241849 \cdot 10^{-17}$	$4.10503117939 \cdot 10^{-15}$ $1.11363515035 \cdot 10^{-13}$
$H(t_2)$	$0.353348196621$ $0.353348196580$	$0.353348196570$ $0.353348196580$
$x_1(1.5)$	$-0.124999999791$ $-0.125000000069$	$-0.125000000855$ $-0.125000000068$
$x_2(1.5)$	$0.500000001987$ $0.500000001226$	$0.499999989313$ $0.500000001247$
$p_1(1.5)$	$0.328593661033$ $0.328593660661$	$0.328593663832$ $0.328593660654$
$p_2(1.5)$	$-6.78392449017 \cdot 10^{-2}$	$-6.78392461765 \cdot 10^{-2}$

Таблица 1.16. Продолжение.

	$\delta_{\text{лок}} = 10^{-6}$ $\delta_{\text{лок}} = 10^{-10}$	$\delta_{\text{лок}} = 10^{-8}$ $\delta_{\text{лок}} = 10^{-12}$
$H(1.5)$	$-6.78392445718 \cdot 10^{-2}$ 0.353348197093 0.353348196580	$-6.78392445685 \cdot 10^{-2}$ 0.353348196572 0.353348196580
$x_1(2.0)$	$1.20254531497 \cdot 10^{-9}$ $5.44720408029 \cdot 10^{-10}$	$-6.19822253675 \cdot 10^{-9}$ $5.55608989561 \cdot 10^{-10}$
$x_2(2.0)$	$1.98678920554 \cdot 10^{-9}$ $1.22645992753 \cdot 10^{-9}$	$-1.06865705029 \cdot 10^{-8}$ $1.24748727374 \cdot 10^{-9}$
$p_1(2.0)$	0.819481956970 0.819481956645	0.819481959256 0.819481956639
$p_2(2.0)$	-0.353348196747 -0.353348196120	-0.353348199127 -0.353348196113
$H(2.0)$	0.353348197172 0.353348196580	0.353348196567 0.353348196580

При  $\alpha > \alpha_2$  построить решение краевой задачи принципа максимума не удается из-за отсутствия сходимости, связанной с использованием классической вычислительной схемы метода стрельбы, необходимостью учета появления на экстремали участка особого управления (экстремаль начинается участком особого управления), стыкующегося с неособым участком посредством четтеринг-режима (режима с бесконечным числом точек переключения в окрестности точки стыковки).

То, что при  $\alpha > \alpha_2$  построить решение краевой задачи принципа максимума не удалось не означает, что такое построение невозможно. Для построения экстремалей с тремя и более точками переключения необходимо учесть специфику задачи и выбрать другую (не классическую) вычислительную схему метода стрельбы. (Вот что в подобном случае написано у Р. П. Федоренко [35, с. 313]: “... по численным результатам угадана структура решения, после чего уже более точными расчетами находится траектория, имеющая данную структуру”).

На этом исследование задачи закончено.

Обоснование оптимальности полученных экстремалей не проведено. Любознательным студентам для дальнейшего ознакомления с проблемой можно рекомендовать работы

Н. П. Осмоловского и М. И. Зеликина [25].

Как указывалось в п. **Задание и задачи**, отчет по проведенному исследованию состоит из следующих пунктов:

- 1) постановка решаемой задачи и ее формализация — п. 1.8.1, 1.8.2;
- 2) сведение решения задачи оптимизации к решению краевой задачи — п. 1.8.3 и п. 1.8.4;
- 3) анализ полученной краевой задачи, формирование вычислительной схемы ее решения — п. 1.8.5, 1.8.6, 1.8.7;
- 4) описание полученных при решении результатов и обоснование их точности в простейшем случае — п. 1.8.8.

## **Глава 2.**

# **Теоретические основы численного решения задач оптимального управления**

### **2.1. Условия оптимальности**

В настоящем пособии все рассматриваемые задачи оптимизации формализуются как задачи оптимального управления. Решение задач оптимального управления на основе принципа максимума Л.С. Понtryгина сводится к решению краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (краевых задач принципа максимума). В случаях, если исходная задача оптимизации является задачей Лагранжа или относится к классу задач классического вариационного исчисления, краевая задача принципа максимума может быть получена на основе соответствующей системы необходимых условий оптимальности (на основе принципа Лагранжа для задачи Лагранжа, уравнения Эйлера–Лагранжа и условий трансверсальности для задачи Больца и т.д.).

Классическому вариационному исчислению и оптимальному управлению посвящено множество монографий и учебников. Отметить их все, тем более в методическом пособии по численным методам, невозможно. Поэтому ограничимся только тремя основными ссылками на монографии [3, 10, 34]: монография [10] во многом подводит итог развития классической теории вариационного исчисления; монография [34] на десятилетия определила развитие теории оптимального управления; монография [3] сформировала методический подход рассмотрения задач оптимизации на основе функционального анализа, уже долгие годы она является основным учебником по курсу “Классическое вариационное исчисление и оптимальное управление”, читаемом на механико–математическом факультете.

В пособии рассматриваются только “классические” задачи оптимального управления; не удалось (пока) рассмотреть задачи с промежуточными условиями, смешанными и фазовыми ограничениями. Зато в пособии удалось рассмотреть и частично решить несколько задач, экстремали в которых содержат участки особого управления.

Кроме того, следует отметить, что в теоретической части и при решении примеров (пока) не учтены результаты работы М. И. Зеликина [25] (критерий, дающий необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче оптимального управления с разделенными условиями для концов).

### 2.1.1. Гладкие задачи

В гладких задачах, после построения решения краевой задачи, удается провести дополнительное, основанное на анализе второй вариации, исследование оптимальности полученных экстремалей. Следя [3], кратко опишем условия второго порядка в общем случае для гладких задач в банаховых пространствах.

В [3, п. 3.2] гладкие задачи в банаховых пространствах рассматриваются в двух видах. Во-первых, это гладкая задача с ограничениями типа равенств:

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad F(x) = 0. \quad (2.1)$$

Во-вторых, это гладкая задача с ограничениями типа равенств и неравенств:

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad F(x) = 0, \quad f_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.2)$$

Первый случай является частным случаем второго и его исследование проще.

В рассматриваемых задачах  $X$  и  $Y$  — банаховы пространства,  $f_i$  — гладкие функции на  $X$ ,  $F$  — гладкое отображение из  $X$  в  $Y$ . Требуется найти элемент  $x$  банахова пространства  $X$ , удовлетворяющий ограничению  $F(x) = 0$  в задаче (2.1) или ограничениям  $F(x) = 0$ ,  $f_i(x) \leq 0$   $i = \overline{1, m}$  в задаче (2.2), доставляющий минимальное значение минимизируемому функционалу  $f_0(x)$  (целевой функции).

**Определение.** Функцией Лагранжа рассматриваемых задач называется функция

$$\mathcal{L}(\hat{x}, y^*, \vec{\lambda}, \lambda_0) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, F(x) \rangle,$$

где  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in R^{m*}$ ,  $\lambda_0 \in R$ ,  $y^* \in Y^*$  — множители Лагранжа. Заметим, что в задаче (2.1) сумма в функции Лагранжа состоит из одного слагаемого  $\lambda_0 f_0(x)$ .

**Теорема 1** (*необходимые условия второго порядка в задаче (2.1)*) [3, п. 3.4.1].

Пусть  $X$  и  $Y$  банаховы пространства,  $U$  — открытое множество в  $X$ , функция  $f_0 : U \rightarrow R$  и отображение  $F : U \rightarrow Y$  строго дифференцируемы в точке  $\hat{x} \in U$  и имеют в этой точке  $\hat{x}$  вторую производную Фреше.

Если  $\hat{x}$  доставляет локальный минимум функционалу  $f_0$  в задаче (2.1) и если  $F$  регулярно в точке  $\hat{x}$  (т.е.  $\text{Im } F'(\hat{x}) = Y$ ), то существует множитель Лагранжа  $\hat{y}^* \in Y^*$  такой, что для функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, y^*, 1) = f_0(x) + \langle y^*, F(x) \rangle$$

выполняются условия:

$$\mathcal{L}_x(\hat{x}, \hat{y}^*, 1) = 0$$

$$\mathcal{L}_{xx}(\hat{x}, \hat{y}^*, 1)[h, h] \geq 0 \quad \forall h \in \text{Ker } F'(\hat{x}),$$

где  $\mathcal{L}_x$ ,  $\mathcal{L}_{xx}$  обозначают соответственно первую и вторую производные Фреше функции Лагранжа  $\mathcal{L}$ .

**Примечание.** Первое условие в теореме 1 является необходимым условием оптимальности и называется принципом Лагранжа для задачи (2.1).

**Теорема 2** (*достаточные условия второго порядка в задаче (2.1)*) [3, п. 3.4.1].

Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и, кроме того, для некоторого  $\alpha > 0$  выполнено неравенство

$$\mathcal{L}_{xx}(\hat{x}, \hat{y}^*, 1)[h, h] \geq \alpha \|h\|^2 \quad \forall h \in \text{Ker } F'(\hat{x}).$$

Тогда  $\hat{x}$  есть точка локального минимума в задаче (2.1).

**Теорема 3** (необходимые условия второго порядка в задаче (2.2)) [3, п. 3.4.2].

Пусть  $X$  и  $Y$  банаховы пространства,  $U$  — открытое множество в  $X$ , функции  $f_i : U \rightarrow R$  и отображение  $F : U \rightarrow Y$  строго дифференцируемы в точке  $\hat{x} \in U$ , имеют в этой точке  $\hat{x}$  вторую производную Фреше и, кроме того,  $f_i(\hat{x}) = 0$   $i = \overline{1, m}$ .

Если  $\hat{x}$  доставляет локальный минимум в задаче (2.2) и если  $F$  регулярно в точке  $\hat{x}$  (т.е.  $\text{Im } F'(\hat{x}) = Y$ ), то:

а) множество  $D$  множителей Лагранжа  $(y^*, \vec{\lambda}, \lambda_0)$ ,  $y^* \in Y^*$ ,  $\vec{\lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \in R^{m*}$ ,  $\lambda_0$  таких, что  $\lambda_i \geq 0$   $i = \overline{0, m}$ ,  $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ ,

$$\mathcal{L}_x(\hat{x}, y^*, \vec{\lambda}, \lambda_0) = 0$$

является непустым выпуклым компактом в  $Y^* \times R^{m*} \times R$ ;

б) для любого  $h_0$ , лежащего в подпространстве

$$L = \{h | \langle f'_i(\hat{x}), h \rangle = 0, i \geq 0, F'(\hat{x})[h] = 0\}$$

найдутся такие множители Лагранжа

$$\{y^*(h_0), \vec{\lambda}(h_0), \lambda_0(h_0)\} \in D,$$

что

$$\mathcal{L}_{xx}(\hat{x}, y^*(h_0), \vec{\lambda}(h_0), \lambda_0(h_0))[h_0, h_0] \geq 0$$

где

$$\mathcal{L}(x, y^*, \vec{\lambda}, \lambda_0) := \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, F(x) \rangle.$$

**Теорема 4** (достаточные условия второго порядка в задаче (2.2)) [3, п. 3.4.3].

Пусть  $X$  и  $Y$  банаховы пространства,  $U$  — открытое множество в  $X$ , функции  $f_i : U \rightarrow R$  и отображение  $F : U \rightarrow Y$  строго дифференцируемы в точке  $\hat{x} \in U$ , имеют в этой точке  $\hat{x}$  вторую производную Фреше и, кроме того,  $f_i(\hat{x}) = 0$   $i = \overline{1, m}$ .

Предположим, что существуют множители Лагранжа  $\hat{y}^* \in Y^*$ ,  $\hat{\vec{\lambda}} \in R^{m*}$  и число  $\alpha > 0$  такие, что  $\hat{\lambda}_i > 0$   $i = \overline{1, m}$

$$\mathcal{L}_x(\hat{x}, \hat{y}^*, \hat{\vec{\lambda}}, 1) = 0$$

$$\mathcal{L}_{xx}(\hat{x}, \hat{y}^*, \hat{\vec{\lambda}}, 1)[h, h] \geq \alpha \|h\|^2$$

для любого  $h$ , лежащего в подпространстве

$$L = \{h | \langle f'_i(\hat{x}), h \rangle = 0, i \geq 1, F'(\hat{x})[h] = 0\},$$

где

$$\mathcal{L}(x, y^*, \vec{\lambda}, \lambda_0) := \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, F(x) \rangle.$$

Тогда  $\hat{x}$  доставляет локальный минимум в задаче (2.2).

Подробное исследование критериев неотрицательной и положительной определенности полученной квадратичной формы  $\mathcal{L}_{xx}$  приводится в [10]. Кроме того эти условия в случае простейшей задачи классического вариационного исчисления приводятся практически в любом учебнике (см., например, [2, 3, 17, 29]), в случае изопериметрической задачи (с закрепленными концами) и в случае задачи со старшими производными (с закрепленными концами) в [2, §6 и §7], в случае задач Лагранжа без ограничений типа неравенств с фиксированными концами и с одним фиксированным и одним частично–свободным концом [24], в случае задачи Лагранжа более общего вида, чем рассматриваемые в Пособии (включая смешанные ограничения типа равенства, но на фиксированном временном интервале и с одним фиксированным концом), условие Якоби выводится в [20] для задачи без неравенств и в [21] для задачи с неравенствами.

### 2.1.2. Задача Лагранжа

Задачей Лагранжа в 2, 3 называется следующая экстремальная задача в пространстве  $\Xi = C^1(\Delta, R^n) \times C(\Delta, R^r) \times R^2$ :

$$B_0(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \rightarrow \inf, \quad (2.3)$$

$$\Phi(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = \dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0, \quad (2.4)$$

$$u(t) \in U \subseteq R^r, \quad U — \text{некоторое открытое множество},$$

$$B_i(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m', \quad (2.5)$$

$$B_i(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = 0, \quad i = m' + 1, \dots, m, \quad (2.6)$$

где

$$B_i(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x, u) dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

при  $i = 0, \dots, m$ .

Здесь  $\Delta$  — заданный конечный отрезок,  $t_0, t_1 \in \Delta$ ,  $f_i : R \times R^n \times R^r \rightarrow R$  — функции  $n+r+1$  переменных,  $\psi_i : R \times R^n \times R \times R^n \rightarrow R$  — функции  $2n+2$  переменных,  $\phi : R \times R^n \times R^r \rightarrow R^n$  — вектор-функция  $n+r+1$  переменных. Все функции предполагаются достаточно гладкими (см. ниже). В рассматриваемых примерах открытое множество  $U$  совпадает со всем пространством.

Заметим, что существуют и другие, аналогичные определения задачи Лагранжа [15, 16]. В [10] задача Лагранжа называется задачей Больца. Здесь и далее используются обозначения, принятые в [3]; использование одинаковых обозначений функционалов  $B_i$ , задающих ограничения типа равенств и типа неравенств, хотя и приводит к определенному сокращению записи необходимых условий оптимальности, все же не следует признать удачным из-за различности требований к оператору типа равенства и ограничениям типа неравенств общей постановки задачи.

Проверим применимость теорем 1–4.

Пространством  $X$  в этих теоремах для записанной задачи Лагранжа является пространство управляемых процессов  $\Xi$ , пространством  $Y$  — пространство  $C(\Delta, R^n) \times R^m$ . Пространства  $X$  и  $Y$  банаховы (см. [3, пп. 2.1.1 и 2.1.2]). Согласно предположению о достаточной гладкости всех входящих в постановку задачи функций (например, непрерывности функций  $f_i$  и  $\varphi$ , их частных производных  $f_{ix}, f_{iu}, \varphi_x, \varphi_u$ , их вторых производных  $f_{ixx}, f_{ixu}, f_{iuu}, \varphi_{xx}, \varphi_{xu}, \varphi_{uu}$ , дважды непрерывной дифференцируемости функций  $\psi_i$  по совокупности аргументов), функционал задачи (2.3) и оператор типа равенства (2.4), (2.6) дважды непрерывно дифференцируемы по Фреше (см. [3, п. 2.4]). Предполагается, что все присутствующие в задаче неравенства активны (на исследуемой экстремали выполняются в виде равенств), соответствующие им множители Лагранжа положительны, функции  $\psi_i$  таковы, что полученный с помощью

расширения за счет неравенств оператор типа равенства регулярен (см. теорему 4, доказательство принципа Лагранжа для задачи Лагранжа [3] и условие неособости точек краевого многообразия в [34]).

Таким образом, при выполнении этих предположений принцип Лагранжа и теоремы 1–4 заведомо применимы.

Функцией Лагранжа задачи будет [2, 3]:

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} L dt + l,$$

где

$$L = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, x, u) + \langle p(t), \dot{x} - \varphi(t, x, u) \rangle,$$

$$l = \sum_{i=0}^m \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad p(\cdot) \in C^1(\Delta, R^{n*})$$

— множители Лагранжа задачи. Кроме того вводится функция  $H$ , называемая в задачах оптимального управления функцией Понtryгина:

$$H(t, x, u, p, \lambda) = \langle p(t), \varphi(t, x, u) \rangle - \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, x, u).$$

Обозначим через  $\hat{\xi}$  — проверяемый на оптимальность допустимый управляемый процесс задачи Лагранжа,

$\delta\xi = \{\delta x, \delta u, \delta t_0, \delta t_1\}$  — элемент касательного пространства к многообразию, определяемому в точке  $\hat{\xi}$  пространства  $\Xi$  условиями (2.4), (2.6). Для задачи Лагранжа предполагается, что экстремаль не содержит разрывов управлений (угловых точек). В дальнейшем используются обозначения:  
 $\hat{L}(t) \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \langle p(t), \dot{\hat{x}}(t) - \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \rangle,$   
 $\hat{l} = \sum_{i=0}^m \lambda_i \psi_i(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)),$   
 $\hat{L}_x = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_{ix}(t, \hat{x}, \hat{u}) - \langle p(t), \varphi_x(t, \hat{x}, \hat{u}) \rangle,$   
 $\hat{L}_u = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_{iu}(t, \hat{x}, \hat{u}) - \langle p(t), \varphi_u(t, \hat{x}, \hat{u}) \rangle,$   
 $\hat{L}_{\dot{x}} = p(t),$

$$\begin{aligned}
\hat{l}_{t_0} &= \sum_{i=0}^m \lambda_i \psi_{it_0}(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)), \\
\hat{l}_{x(t_0)} &= \sum_{i=0}^m \lambda_i \psi_{ix(t_0)}(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)), \\
\hat{l}_{t_1} &= \sum_{i=0}^m \lambda_i \psi_{it_1}(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)), \\
\hat{l}_{x(t_1)} &= \sum_{i=0}^m \lambda_i \psi_{ix(t_1)}(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)), \\
\hat{L}_{xx} &= \sum_{i=0}^m \lambda_i f_{ixx}(t, \hat{x}, \hat{u}) - \langle p(t), \varphi_{xx}(t, \hat{x}, \hat{u}) \rangle, \\
\hat{L}_{xu} &= \sum_{i=0}^m \lambda_i f_{ixu}(t, \hat{x}, \hat{u}) - \langle p(t), \varphi_{xu}(t, \hat{x}, \hat{u}) \rangle, \\
\hat{L}_{uu} &= \sum_{i=0}^m \lambda_i f_{iuy}(t, \hat{x}, \hat{u}) - \langle p(t), \varphi_{uy}(t, \hat{x}, \hat{u}) \rangle, \\
\hat{l}_{t_0 t_0} &= \sum_{i=0}^m \lambda_i \psi_{it_0 t_0}(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)) \\
&\text{и т.д.}
\end{aligned}$$

Принадлежность элемента  $\delta\xi$  касательному пространству, совпадающему в силу теоремы Люстерника с ядром производной оператора типа равенства (2.4), (2.6), накладывает на  $\delta\xi \in \Xi$  условия:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{\varphi}_x \delta x + \dot{\varphi}_u \delta u, \\
B'_i(\hat{\xi})[\delta\xi] &= \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} (\hat{f}_{ix} \delta x + \hat{f}_{iu} \delta u) dt + \\
&+ \hat{\psi}_{ix(t_0)} \delta x(t_0) + \hat{\psi}_{ix(t_1)} \delta x(t_1) + \\
&+ (\hat{f}_i(\hat{t}_1) + \hat{\psi}_{it_1} + \hat{\psi}_{ix(t_1)} \dot{\hat{x}}(\hat{t}_1)) \delta t_1 + \\
&+ (-\hat{f}_i(\hat{t}_0) + \hat{\psi}_{it_0} + \hat{\psi}_{ix(t_0)} \dot{\hat{x}}(\hat{t}_0)) \delta t_0 = 0,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где  $i = \overline{1, m}$  (см. используемые выше предположения).

Первая вариация функции Лагранжа имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi(\hat{\xi})[\delta\xi] &= \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} (\hat{L}_x \delta x + \hat{L}_u \delta u) dt + \hat{l}_{x(t_0)} \delta x(t_0) + \hat{l}_{x(t_1)} \delta x(t_1) + \\
&+ (\hat{L}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)} \dot{\hat{x}}(\hat{t}_1)) \delta t_1 + \\
&+ (-\hat{L}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)} \dot{\hat{x}}(\hat{t}_0)) \delta t_0.
\end{aligned}$$

Принцип Лагранжа для задачи с равенствами состоит из условий обращения в ноль первой вариации функции Лагранжа на (2.7); при наличии в задаче Лагранжа неравенств к этим условиям добавляются условия дополняющей нежесткости и неотрицательности.

Вторая вариация функции Лагранжа имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\xi\xi}(\hat{\xi})[\delta\xi, \delta\xi] = & \\
= & \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \langle \hat{L}_{xx} \delta x, \delta x \rangle + 2 \langle \hat{L}_{xu} \delta x, \delta u \rangle + \langle \hat{L}_{uu} \delta u, \delta u \rangle dt - \\
& - \langle (\hat{L}_x(\hat{t}_0) \delta x(t_0) + \hat{L}_u(\hat{t}_0) \delta u(t_0) + \hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_0) \delta \dot{x}(t_0)), \delta t_0 \rangle + \\
& + \langle (\hat{L}_x(\hat{t}_1) \delta x(t_1) + \hat{L}_u(\hat{t}_1) \delta u(t_1) + \hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_1) \delta \dot{x}(t_1)), \delta t_1 \rangle + \\
& + \langle (\hat{l}_{t_0 t_0} + 2\hat{l}_{x(t_0) t_0} \dot{\hat{x}}(\hat{t}_0)) \delta t_0, \delta t_0 \rangle + \\
& + \langle (\hat{l}_{t_1 t_1} + 2\hat{l}_{x(t_1) t_1} \dot{\hat{x}}(\hat{t}_1)) \delta t_1, \delta t_1 \rangle + \\
& + \langle (\hat{l}_{t_0 t_1} + 2\hat{l}_{x(t_0) t_1} \dot{\hat{x}}(\hat{t}_0)) \delta t_0, \delta t_1 \rangle + \\
& + \langle (\hat{l}_{t_1 t_0} + 2\hat{l}_{x(t_1) t_0} \dot{\hat{x}}(\hat{t}_1)) \delta t_1, \delta t_0 \rangle + \\
& + \langle (\hat{l}_{x(t_0)x(t_0)} \delta x(t_0), \delta x(t_0)) + \\
& + 2 \langle \hat{l}_{x(t_0)x(t_1)} \delta x(t_0), \delta x(t_1) \rangle + \\
& + \langle \hat{l}_{x(t_1)x(t_1)} \delta x(t_1), \delta x(t_1) \rangle.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Сокращая запись, вторую вариацию функции Лагранжа можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\xi\xi}(\hat{\xi})[\delta\xi, \delta\xi] = & \\
= & \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} (\hat{L}_{xx} \delta x, \delta x) + 2(\hat{L}_{xu} \delta x, \delta u) + (\hat{L}_{uu} \delta u, \delta u) dt + \\
& + \langle \Omega[\hat{\xi}] (\delta t_0, \delta x(t_0), \delta t_1, \delta x(t_1)), (\delta t_0, \delta x(t_0), \delta t_1, \delta x(t_1)) \rangle,
\end{aligned}$$

где  $\Omega[\hat{\xi}]$  — определяемая внеинтегральными слагаемыми (2.8), вычисленная на исследуемой экстремали квадратная  $(2n + 2 \times 2n + 2)$ -матрица.

Для задачи Лагранжа на фиксированном временном интервале  $\|h\|^2$  в теоремах 2 и 4 можно заменить квадратичным положительно определенным функционалом

$$\varphi(\delta\xi) := \int_{t_0}^{t_1} (\delta u, \delta u) dt + (\delta x(\tau), \delta x(\tau)),$$

где  $\tau$  — некоторый выбранный момент из отрезка  $[t_0; t_1]$ . Заметим, что в случае фиксированности одного из концов экстремали последнее слагаемое в функционале  $\varphi(\delta\xi)$  можно опустить, выбрав в качестве момента  $\tau$  соответствующий конец отрезка:  $\delta x(\tau) = 0$ .

При проверке неотрицательной и положительной определенности второй вариации функции Лагранжа (2.8) используются следующие условия:

- единственность набора множителей Лагранжа (с учетом выбора нормировки задачи);

- условие Лежандра (Лежандра–Клебша):

$$(\hat{L}_{uu}v, v) \geq 0 \quad \forall v;$$

- усиленное условие Лежандра (Лежандра–Клебша):

$$(\hat{L}_{uu}v, v) > 0 \quad \forall v;$$

- условие Вейерштрасса (выполняется на экстремали):

$$H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), p(t), \lambda) \geq H(t, \hat{x}(t), u, p(t), \lambda) \quad \forall u;$$

- условие квазирегулярности: функция  $L$  является выпуклой функцией управления  $u$  ( $L_{uu}$  положительно определена в окрестности экстремали);

- условие Якоби (см. ниже);

- усиленное условие Якоби (см. ниже).

**Примечание.** Единственность (с учетом выбора нормировки задачи) набора множителей Лагранжа не является необходимым условием. В случае единственности такого набора исследование задачи технически проще.

Заметим, что условия Якоби, следуя литературе, вводятся в задаче Лагранжа на фиксированном временном интервале (величины  $t_0$  и  $t_1$  в постановке задачи заданы), с одним фиксированным концом (для определенности  $\delta x(t_1) = 0$ ) и другим свободным, частично–свободным или фиксированным концом. В более общих случаях сведение проверки неотрицательной и положительной определенности второй вариации функции Лагранжа (2.8) к проверке условия типа Якоби несколько сложнее и в Пособии не рассматривается.

С учетом сделанных предположений вид присоединенной линейно–квадратичной задачи (2.7), (2.8) упрощается:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}x - \hat{\varphi}_x \delta x + \hat{\varphi}_u \delta u &= 0, \\ \int_{t_0}^{t_1} (\hat{f}_{ix} \delta x + \hat{f}_{iu} \delta u) dt + \hat{\psi}_{ix(t_0)} \delta x(t_0) &= 0, \quad (2.9) \\ \delta x(t_1) &= 0, \\ \mathcal{L}_{\xi\xi}(\hat{\xi})[\delta\xi, \delta\xi] &\rightarrow \inf, \quad (2.10) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi\xi}(\hat{\xi})[\delta\xi, \delta\xi] = \int_{t_0}^{t_1} (\hat{L}_{xx} \delta x, \delta x) + 2(\hat{L}_{xu} \delta x, \delta u) + (\hat{L}_{uu} \delta u, \delta u) dt + \\ + \langle \Omega[\hat{\xi}] \delta x(t_0), \delta x(t_0) \rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что в задаче (2.9), (2.10) с двумя фиксированными концами  $\delta x(t_0) = 0$ , и внеинтегральные слагаемые отсутствуют.

Обозначим через  $\tau$  точную верхнюю грань таких  $t_*$ , что  $t_* > t_0$ ,  $\mathcal{L}_{\xi\xi}(\hat{\xi})[\delta\xi, \delta\xi] > 0 \forall \delta\xi$ ,  $\delta\xi$  удовлетворяют условиям (2.9) на отрезке  $[t_0; t_*]$  и  $\delta\xi \equiv 0$  на  $[t_*; t_1]$  (при  $t_* < t_1$ ). Такой точке  $\tau$ , называемой далее сопряженной точкой, соответствует нетривиальное решение присоединенной задачи (2.9), (2.10) (после замены в этой задаче  $t_1$  на  $\tau$ ). Сопряженная точка в задаче со свободным и частично–свободным начальным положением в литературе может называться фокальной. (см., например, [10, 24]).

Условие Якоби состоит в том, что на интервале  $(t_0, t_1)$  нет сопряженных точек; усиленное условие Якоби — на полуинтервале  $(t_0, t_1]$  нет сопряженных точек.

В рассматриваемом случае проверка наличия или отсутствия сопряженных точек сводится к исследованию решения матричной задачи Коши (построению фундаментальной системы линейно–независимых решений): сопряженная точка соответствует обращению в ноль определителя этой системы. Непосредственное вычисление определителя при его размерности больше двух в вычислительной практике не используется из–за потери точности (см., например, [12, §2.3, зад. 2.17]); численная проверка этого условия требует определенной аккуратности. Например, условие обращения в ноль определителя можно

заменить условием смены числа положительных собственных чисел.

#### **Сводка условий оптимальности**

Совокупность необходимых условий слабой локальной оптимальности:

- 1) на экстремали выполняется условие Лежандра;
- 2) если на экстремали выполняется усиленное условие Лежандра, то должно выполняться условие Якоби.

**Примечание.** В случае выполнения условия Лежандра и невыполнения усиленного условия Лежандра исследование экстремали в практикуме заканчивается (любознательные студенты могут его продолжить ознакомившись, например, с [4, гл. 3] и затем с [5]).

Совокупность необходимых условий сильной локальной оптимальности:

в дополнение к необходимым условиям слабой локальной оптимальности 1 и 2 на экстремали должно выполняться условие Вейерштрасса.

Совокупность достаточных условий слабой локальной оптимальности:

- 1') на экстремали выполняется усиленное условие Лежандра;
- 2') на экстремали выполняется усиленное условие Якоби.

Совокупность достаточных условий сильной локальной оптимальности:

в дополнение к достаточным условиям слабой локальной оптимальности 1' и 2' в окрестности экстремали должно выполняться условие квазирегулярности.

Сводка этих условий приведена, например, в монографии [10] (на самом деле приведенные в [10] условия отличаются от представленных выше, но это отличие “по форме”, а не “по содержанию”; это отличие связано с тем, что в [10] задача Лагранжа формализуется без введения управлений).

К сожалению, в Пособии не нашли своего отражения следующие темы:

сведение присоединенной задачи минимизации к задаче Штурма–Лиувилля [29, т. 1, ч. 2, §82];

связь отсутствия сопряженных точек с существованием решения уравнения Рикатти (возможность сведения второй вариа-

ции к полному квадрату) [24] и критерий, дающий необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче оптимального управления с разделенными условиями для концов: неотрицательная и положительная определенность разности решений двух матричных уравнений Рикатти [25];  
принцип Кротова и связанные с ним методы;  
задачи оптимального управления с промежуточными условиями, смешанными и фазовыми ограничениями.

## 2.2. Метод стрельбы

Краевые задачи в пособии решаются методом стрельбы (пристрелки). Метод стрельбы состоит в сведении решения краевой задачи к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Для этого вводится вектор параметров пристрелки — набор параметров, достаточный для возможности решить задачу Коши на требуемом интервале времени, и вектор-функция невязок, вычисляемая в результате решения сформированной задачи Коши. Для решения краевой задачи необходимо определить корень системы нелинейных алгебраических уравнений — вектор параметров пристрелки, обращающий в ноль вектор-функцию невязок.

Существует несколько способов выбора вычислительной схемы метода стрельбы (вектора параметров пристрелки и вектор-функции невязок):

- классический метод пристрелки (вектор параметров пристрелки выбирается так, чтобы определить все фазовые и сопряженные переменные в одном из концов; вектор-функция невязок определяется условиями исходной задачи и условиями принципа максимума в другом конце интервала интегрирования), эта вычислительная схема используется при решении примеров 1.1, 1.3, 1.4;
- метод многоточечной пристрелки (впервые, по-видимому, этот метод предложен в [8]: вектор параметров пристрелки классического метода пристрелки дополняется значениями фазовых и сопряженных переменных в некотором наборе точек отрезка; вектор-функция невязок дополняется условиями непрерывности фазовых и сопряженных переменных в этом наборе точек; решение одной задачи Коши на всем интервале времени заменяется решением серии задач Коши на наборе интервалов, на которые соответствующие точки отрезка делят исходный интервал времени), эта вычислительная схема используется при решении примеров 1.5, 1.6;
- метод встречной пристрелки (на временном интервале выбирается некоторая точка и решаются две задачи Коши: от начала к выбранной точке и от конца к выбранной точке; вектор параметров пристрелки выбирается так, чтобы имелась возмож-

ность решить эти задачи Коши; вектор-функция невязок определяется условиями непрерывности в соответствующий промежуточный момент времени);

— пристрелка из промежуточной точки (на временном интервале выбирается некоторая точка и решаются две задачи Коши: от выбранной точки к началу и к концу; вектор параметров пристрелки состоит из значений фазовых и сопряженных переменных в этой выбранной промежуточной точке; вектор-функция невязок определяется краевыми условиями).

**Замечание.** Возможность выбора вычислительной схемы с учетом структуры траектории — очень важная возможность, заложенная в методе стрельбы. Эту возможность можно отнести как к положительным, так и к отрицательным свойствам метода стрельбы.

**Положительные свойства:** при известной или правильно “угаданной” структуре оптимальной траектории зачастую удается выбрать очень эффективную вычислительную схему, позволяющую построить решение краевой задачи с высокой степенью точности при сравнительно небольших вычислительных затратах.

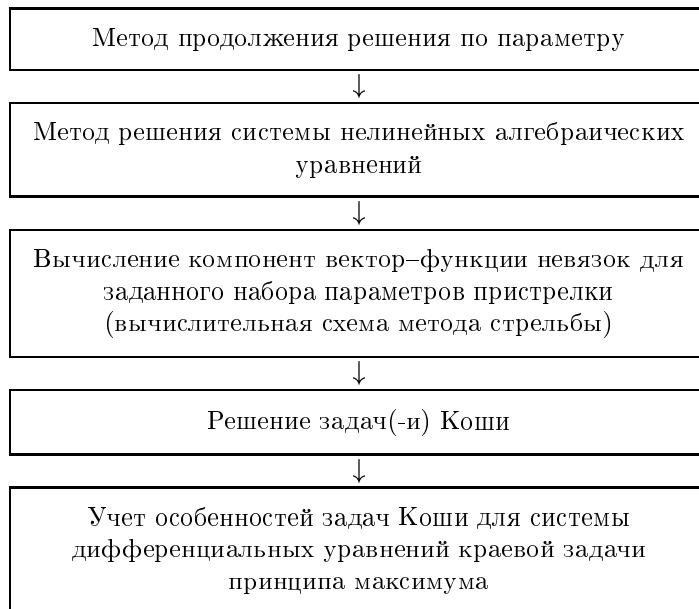
**Отрицательные свойства:** структура траектории может быть заранее не известна и при неправильном выборе структуры траектории решение задачи в лучшем случае не строится (например, из-за отсутствия сходимости используемого для решения системы нелинейных алгебраических уравнений итерационного метода). В худшем — удается построить экстремаль, на которой выполняется система необходимых условий оптимальности; достаточные условия либо не выполняются, либо их не удается проверить (например, не удается “угадать” функцию Кротова); при этом предложенное решение не оптимально, что выясняется через какое-то время<sup>1)</sup>.

Составными частями в метод стрельбы входят метод решения задач Коши и метод поиска корня системы нелинейных алгебраических уравнений. Для решения проблемы выбора хоро-

---

<sup>1)</sup> В качестве примеров таких неудачных решений отметим первые решения задач об оптимальной остановке атомного реактора и об оптимальной остановке вращения спутника.

шего начального приближения искомого корня может использоваться (и чаще всего используется) метод продолжения решения по параметру. Взаимодействие этих методов при решении краевой задачи принципа максимума отражено на следующей диаграмме.



К основным предпосылкам успешного решения краевых задач принципа максимума следует отнести эффективный алгоритм выбора хорошего начального приближения корня и выбор хорошо адаптированных к конкретному классу задач составляющих метода стрельбы:

метод решения задачи Коши должен обеспечивать необходимую точность и скорость вычислений;  
выбор вычислительной схемы метода стрельбы и метода решения системы нелинейных алгебраических уравнений должны осуществляться так, чтобы обеспечить по-возможности наилучшую сходимость и определение искомого корня.

Задача Коши для выбранных параметров пристрелки по каким-либо причинам может не иметь решения на требуе-

мом временном интервале. В таких случаях вектор-функция невязок для данного набора параметров пристрелки считается неопределенной. Разумеется, метод поиска корня программируется с учетом этого обстоятельства.

При численном решении краевых задач принципа максимума могут использоваться любые численные методы решения задач Коши и нахождения корня системы нелинейных алгебраических уравнений. При решении задач практикума автором для этих целей использовались метод, основанный на формулах Дормана–Принса 8(7) (см. п. 2.4), и модифицированный метод Ньютона с проверкой сходимости по нормировке Федоренко (см. п. 2.3).

**Дополнительное разъяснение** для студентов: использовать именно эти методы совершенно не обязательно. Необходимо использовать методы, которые позволяют *решить* задачу (требования смотри выше). Если выбранные методы не учитывают особенностей краевой задачи принципа максимума (например, метод решения задачи Коши запрограммирован без учета возможности разрыва правых частей системы дифференциальных уравнений), то такие методы задачу не решают.

Метод стрельбы в целом и/или его модификации описываются или упоминаются практически в любом учебнике, посвященном численному решению задач оптимального управления (см., например, [1; 9, гл. 9, §§ 6–7; 11; 32; 33, гл. 5; 38, гл. 1, §15, “Краевые задачи”]).

## 2.3. Решение систем нелинейных уравнений

Система трансцендентных (или алгебраических) уравнений метода стрельбы обычно нелинейна. Для ее решения можно использовать любой из известных методов. В Пособии для ее решения применяется модифицированный метод Ньютона (имеется ввиду не та модификация, при которой матрица Якоби вычисляется один раз и используется затем для всего процесса, а модификация, предназначенная для увеличения области сходимости метода Ньютона [1, 11, 26]) с использованием в условии сходимости нормировки Р.П. Федоренко [35, гл. IV, §43; 36, “Нормировка задачи”, §1].

Составной частью в метод Ньютона входят метод определения матрицы Якоби (матрицы частных производных вектор–функции невязок по вектору параметров пристрелки) и метод решения системы линейных алгебраических уравнений.

Так как размер системы линейных алгебраических уравнений мал<sup>1)</sup>, то особых проблем с определением решения не возникает (если, конечно, матрица Якоби не слишком плохо обусловлена). Для решения систем линейных алгебраических уравнений в практикуме автором использовался метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу и с повторным уточнением<sup>2)</sup> [7, Гл. 8, §3; 31, §8.4].

При построении матрицы Якоби  $A$  (матрицы производных вектор–функция невязок  $\vec{X}$  по вектору неизвестных параметров пристрелки  $\vec{\beta}$ ) в практикуме частные производные приближаются конечно–разностными соотношениями:

$$A_{ij} := \partial \vec{X} / \partial \vec{\beta} \approx \frac{X_i(\vec{y}(\cdot)[\vec{\beta} + \vec{\Delta}_j]) - X_i(\vec{y}(\cdot)[\vec{\beta}])}{\Delta_j}, \quad (2.11)$$

<sup>1)</sup> Обычный размер системы линейных алгебраических уравнений в задачах практикума не превосходит пяти; для сравнения обычный размер тестового задания при решении таких систем на третьем курсе равен тысяче.

<sup>2)</sup> Разумеется, использование именно этого метода не обязательно. Повторное уточнение используется потому, что, во–первых, для систем малой размерности не требует сколько–нибудь серьезных временных затрат и, во–вторых, “точность лишней не бывает”.

где  $\vec{\Delta}_j$  — вектор смещения с единственной ненулевой  $j$ -ой компонентой  $\Delta_j$ . Кроме численного дифференцирования “вперед” (2.11) может быть использовано численное дифференцирование “назад”:

$$A_{ij} := \partial \vec{X} / \partial \vec{\beta} \approx \frac{X_i(\vec{y}(\cdot)[\vec{\beta}]) - X_i(\vec{y}(\cdot)[\vec{\beta} - \vec{\Delta}_j])}{\Delta_j} \quad (2.12)$$

или “центральная разность”:

$$A_{ij} := \partial \vec{X} / \partial \vec{\beta} \approx \frac{X_i(\vec{y}(\cdot)[\vec{\beta} + \vec{\Delta}_j]) - X_i(\vec{y}(\cdot)[\vec{\beta} - \vec{\Delta}_j])}{2\Delta_j}. \quad (2.13)$$

Заметим, что использование таких формул требует решения серии задач Коши: по формулам (2.11), (2.13) — не более  $n$  решений задач Коши, по формулам (2.13) — не более  $2n$  (так как, во-первых, значение вектор-функции невязок  $\vec{X}$  в базовой точке  $\vec{\beta}$  известно до начала численного дифференцирования и, во-вторых, вычисление частных производных по некоторым компонентам вектора параметров пристрелки может не требовать решения задач Коши).

В случае задачи Лагранжа (или задачи оптимального управления при непрерывном управлении) матрицу Якоби возможно получить в результате решения матричной системы линейных дифференциальных уравнений в вариациях.

В случае не всюду определенной функции невязок в стандартные алгоритмы модифицированного метода Ньютона и численного дифференцирования включаются следующие пункты:

- если неопределенной оказывается функция невязок для стартового набора параметров пристрелки, то метод Ньютона заканчивает свою работу (метод Ньютона, состоящий в последовательном улучшении приближения корня, не может улучшить то, что не определено);
- если неопределенной оказывается функция невязок, вычисляемая для очередного приближения, то приближение считается неприемлемым (условие сходимости невыполненным) и шаг смещения  $\vec{h}_k$  в итерационной процедуре  $\vec{\beta}_{k+1} = \vec{\beta}_k + \vec{h}_k$  делится на два ( $k$  — номер итерации);

- если неопределенной оказывается функция невязок, вычисляемая в процессе численного дифференцирования, то шаг смещения  $\Delta_j$  меняется на обратный (формула дифференцирования “вперед” заменяется формулой дифференцирования “назад”);
- если и для такого изменения функция невязок не вычисляется, то величина смещения уменьшается в несколько раз (для данного направления) и процедура вычисления частной производной повторяется;
- если в процессе вычисления производной величина смещения по одному из направлений становится меньше некоторой заданной величины (связанной с точностью вычисления функций невязок см., например, [27, п. 9.2.1]), то метод Ньютона также прекращает свою работу.

Основная трудность решения нелинейных систем уравнений, по–видимому, состоит в необходимости выбора начального приближения корня этой системы. Очень хорошо эта трудность описывается в [32, §1, п. 4].

*“Несмотря ни на какие модификации, применение метода Ньютона (или другого метода отыскания корней) невозможно без удовлетворительного первого приближения. Если рассмотреть все задачи, которые были решены с его помощью, то мы увидим, что успех их решения определяется в первую очередь удачным первым приближением. Заметим, что вопрос о первом приближении обычно бывает достаточно труден . . .”*

В практике для решения этой проблемы используются приемы: метод случайного поиска, метод декомпозиции задачи (см., например, [9, гл. 7, §4]) и метод продолжения решения по параметру (метод инвариантного погружения) [11, Гл. 3, §2.3; 22; 27, Гл. 8, §8.21, задача 8.12; 33, гл. 10 и 11; 36, §1; 39; 18]. Кроме того необходимо упомянуть специальный прием, предложенный в работе Исаева и Сонина [26], учитывающий специфику краевых задач принципа максимума: на первом этапе решения краевой задачи решается задача минимизации исходного функционала задачи оптимального управления по параметрам пристрелки (в общем случае этот прием кратко описан в [9, гл. 7, §3, с. 339 (изд–е 2)]).

При использовании метода случайного поиска вектор параметров пристрелки считается векторной случайной величиной

с каким–либо распределением (о чем собственно и говорит название метода). Выбор обычно обеспечивается программной реализацией счетчика псевдослучайных чисел. После выбора начального приближения осуществляется попытка решения задачи за некоторое ограниченное число итераций. В случае успеха найденное решение запоминается; после окончания попытки, как неуспешной, так и успешной, осуществляется новый выбор начального приближения (краевая задача может иметь более одного решения и какое из них требуется найти — заранее не известно). Построение решения задачи обычно обеспечивается большим числом попыток. К недостаткам этого метода относят большой объем вычислительной работы и отсутствие каких–либо гарантий, к достоинствам — сравнительно несложную программную реализацию (“...путь компьютер пока посчитает, а мы в это время обдумаем...”).

Метод продолжения решения по параметру, по мнению автора, — самый эффективный метод преодоления трудностей выбора хорошего начального приближения при численном решении систем нелинейных уравнений в краевых задачах. Простейший вариант этого метода может быть описан следующим образом.

Пусть требуется решить систему нелинейных уравнений

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (2.14)$$

(в рассматриваемом случае  $\vec{x} \in R^m$ ,  $\vec{f}: R^m \rightarrow R^m$ ; в общем случае это функциональное уравнение).

Вместо одной задачи рассматривается семейство задач

$$\vec{F}(\vec{x}, \alpha) = \vec{0},$$

где  $\alpha$  некоторый параметр (в простейшем случае скалярный, в некоторых случаях — векторный). Рассматриваемое семейство таково, что для некоторого  $\alpha_1$

$$\vec{F}(\vec{x}, \alpha_1) = \vec{f}(\vec{x}) \quad \forall x \in R^m$$

(так как вектор–функция  $\vec{f}(\vec{x})$  может быть для некоторых значений аргумента не определена, то равенство функций для таких  $\vec{x}$  означает их одновременную неопределенность), а для

некоторого  $\alpha_0$  решение системы уравнений

$$\vec{F}(\vec{x}, \alpha_0) = \vec{0}$$

известно.

В практикуме, как и в [36], в отличие от [33], метод инвариантного погружения считается частным случаем метода продолжения решения по параметру.

В качестве примеров построения таких семейств приведем следующие:

$$\vec{F}(\vec{x}, \alpha) = (1 - \alpha)\vec{x} + \alpha\vec{f}(\vec{x})$$

— [36, (5), §1];

$$\vec{F}(\vec{x}, \alpha) = \vec{f}(\vec{x}) - (1 - \alpha)\vec{f}(\vec{k}),$$

где  $\vec{k}$  — некоторое начальное приближение корня системы (выбор различных  $\vec{k}$  может привести к определению различных корней системы (2.14)) [11, Гл. 3, §2.3, с. 278; 33, §10.2].

Выбор подходящего семейства продолжения — важная, требующая отдельного исследования задача; этот выбор делается из соображений скорости сходимости применяемого метода.

Алгоритм метода продолжения решения по параметру состоит в решении серии задач

$$\vec{F}(\vec{x}, \alpha) = \vec{0}, \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]. \quad (2.15)$$

Один шаг этого алгоритма таков. Пусть для некоторого  $\alpha$  задача (2.15) решена — значение корня  $\vec{x}(\alpha)$  найдено. Тогда величина  $\alpha$  меняется на  $\alpha + \Delta\alpha$  и решается система уравнений  $\vec{F}(\vec{x}, \alpha + \Delta\alpha) = \vec{0}$ ; в качестве начального приближения корня  $\vec{x}(\alpha + \Delta\alpha)$  используется вычисленное значение  $\vec{x}(\alpha)$ .

Базис для этого алгоритма имеется — по предположению при  $\alpha_0$  решение системы уравнений известно. При удачном выборе семейства за конечное (сравнительно малое) число шагов вычисляется решение исходной задачи (соответствующее  $\alpha_1$ ). Основным критерием качества параметрического семейства является число необходимых промежуточных шагов метода. Для ускорения вычислительного процесса при вычислении корня

$\vec{x}(\alpha + \Delta\alpha)$  может использоваться несколько вычисленных ранее значений (экстраполяция).

При векторном  $\alpha$  под  $[\alpha_0, \alpha_1]$  в (2.15) понимается некоторая непрерывная кривая с началом в  $\alpha_0$  и концом в  $\alpha_1$ , не обязательно совпадающая с отрезком. Если такая кривая фиксирована, то векторный случай метода продолжения решения по параметру сводится к скалярному; для не всюду определенных функций  $\vec{F}(\vec{x}, \alpha)$  случай векторного параметра проще анализировать. О случае S-образности (одной из возможных трудностей в применении метода продолжения решения по параметру), называемой в [39, 18] предельными особыми точками, и о преодолении этой трудности (смене параметра продолжения) см. [36, §1, “Метод продолжения по параметру”] и работы, представленные в литературном обзоре в [18].

## 2.4. Решение задач Коши

При численном решении задач оптимального управления на основе принципа максимума возникает необходимость решить серию задач Коши

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(x, \vec{y}(x)), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0.$$

При решении всех задач из Пособия автором для этого использовался явный метод Рунге–Кутты 8–го порядка, основанный на формулах Дормана–Принса 8(7) [38, табл. 6.4, раздел II.6] с автоматическим управлением длиной шага. Содержащаяся в [38, прил. 2] программа DOPRI8<sup>1)</sup> была модернизирована с учетом того, что:

- правые части могут быть разрывны;
- моменты разрывов производных и момент окончания процесса могут быть неизвестны; они могут зависеть от вычисляемого решения неявным образом;
- предполагалось не только вычислить решение, но и оценить его точность.

Учет возможности разрывов осуществлялся по способу [38, способ 1, п. “Уравнения с разрывными производными”, раздел II.5], состоящему в том, что на поверхности разрыва вычисление решения останавливалось и возобновлялось далее с новыми значениями правых частей.

Учет неизвестности моментов разрывов производных и момента окончания процесса, неявно зависящего от вычисляемого решения, алгоритмически одинаковы. В этих случаях необходимо определить момент  $x$ , который удовлетворяет уравнению

$$F(x, \vec{y}(x)) = 0. \quad (2.16)$$

---

<sup>1)</sup>Этот метод обеспечивает необходимую точность и скорость решения задачи Коши, входящей составной частью в метод стрельбы. То, что использовалась именно эта программа, в дальнейшем не существенно. Описанные ниже особенности относятся к задаче Коши в целом и должны учитываться при реализации *любого* численного метода ее решения.

При этом в моменты переключения (моменты разрыва правых частей системы дифференциальных уравнений или каких-либо их производных) функции  $F(x, \vec{y}(x))$  соответствует функция переключения, а в момент окончания — условие остановки. Определение этих моментов осуществляется по несколько отличному от предложенного в [38, п. “Неявная выдача”, раздел II.5] следующему алгоритму. Последовательно, шаг за шагом, вычисляется решение системы дифференциальных уравнений, пока знак  $F(x_{i+1}, \vec{y}_{i+1})$  не станет отличным от знака  $F(x_i, \vec{y}_i)$ . Как только такая пара находилась, значение  $x$  определялось методом хорд, сочетающим в себе надежность метода деления отрезка пополам и высокую скорость сходимости метода Ньютона. Обычно для достижения высокой точности требовалось 3–4 итерации метода хорд.

Среди других возможных способов определения  $x$  можно отметить использование метода повышенного порядка (например, не линейной, а кубической интерполяции — см. [38, пример 5.2 раздела II.5]), использование “непрерывного метода Рунге–Кутты” и предложенный в [38, п. “Неявная выдача”, раздел II.5] способ вычисления  $x$  по методу Ньютона (см. алгоритм 5.4). Кроме того, в окрестности искомого  $x$  можно обратить систему дифференциальных уравнений, выбрав в качестве независимого аргумента значение  $F(x, \vec{y}(x))$  и отыскав  $x$  за один шаг метода (при других правых частях).

В отличие от [38] для устранения ситуации, когда функция  $F(x, \vec{y}(x))$  на интервале  $[x_i, x_{i+1}]$  дважды меняет знак, и потому этот интервал “проскаакивает”, кроме нулей функции  $F(x, \vec{y}(x))$  определялись также нули ее производной:  $dF(x, \vec{y}(x))/dx = 0$  (см. [31, §5.5]).

**Примечание.** Если точки переключения при решении краевой задачи принципа максимума студентом не определялись (определялись с точностью до *одного шага* решения задачи Коши методом *с постоянным шагом*), полученные им в результате работы программы числа *не следует* считать решением исходной краевой задачи (так как любой используемый на практике метод численного решения задачи Коши предполагает наличие у правых частей системы дифференциальных уравнений нескольких непрерывных производных, что в данном случае не

выполняется).

Если момент окончания решения задачи Коши требует своего определения в процессе решения задачи, то это можно сделать двумя способами: во-первых, включить его в число параметров пристрелки и, во-вторых, определять его отдельно из специально сформированного условия остановки счета.

Первый способ на первый взгляд кажется более универсальным и привлекательным: если точек переключения на экстремали нет, то все особенности, описанные выше в данном пункте, можно не учитывать. Кроме того, производные по этому параметру пристрелки могут вычисляться в аналитическом виде.

Второй способ при своем применении требует определенной аккуратности, ведь от выбора условия остановки счета и от способа его программирования зависит структура выбираемой экстремали. Чтобы наглядно пояснить эту мысль, отметим, что соответствующее условие может выполняться на экстремали несколько раз и искомым может оказаться, например, второй момент выполнения условия остановки счета, а не запрограммированный “по умолчанию” первый. Таким образом, реализация второго способа требует дополнительных исследований и усилий. Так стоит ли игра свеч? В некоторых случаях стоит. Примерами таких задач могут служить задачи оптимизации межпланетных траекторий космического аппарата, управляемого реактивным двигателем большой тяги. Характерной особенностью многих таких задач является наличие коротких участков управляемого перелета и длительных участков пассивного полета. Причем специфика задач такова, что искомая траектория должна оканчиваться активным участком. Имеющийся у автора опыт решения таких задач показывает, что удачный выбор условия остановки счета позволяет серьезно увеличить окрестность эффективной сходимости метода Ньютона и скорость его сходимости, уменьшив число обусловленности якобиана на несколько порядков и, в конечном счете, решить задачу.

*Замораживание всей последовательности длин шагов интегрирования* [38, раздел II.5] при вычислении производных по параметрам пристрелки при решении приведенных примеров автором не производилось, так как погрешности вычисления

Якобиана на сходимость метода Ньютона серьезного влияния не оказывали. Кстати, вместо сохранения выбранных методом шагов интегрирования можно запрограммировать одновременное интегрирование нескольких систем — при базовом значении параметров и при всех требуемых значениях смещений, увеличивая при этом размерность системы в  $n+1$  раз, где  $n$  — число пристреливаемых параметров.

Для решения задачи Коши, кроме явных методов Рунге–Кутты, можно воспользоваться каким–либо многозначным методом. Написание эффективной программы, осуществляющей как смену шага, так и автоматический выбор порядка многозначного метода, сложнее программирования метода Рунге–Кутты. Студентам для первого ознакомления можно рекомендовать соответствующий раздел в [27], а для практического использования — программу **ODEX** [38, прил. 2]. Разумеется, стандартную программу необходимо модифицировать для учета описанных выше особенностей.

## 2.5. Практические оценки точности решения краевой задачи

Оценки точности решения краевой задачи проводятся апостериорно, после построения экстремали. Основная цель этих оценок состоит в обосновании того факта, что краевую задачу *действительно* удалось решить, что полученный набор чисел, являющийся приближенным решением вспомогательной дискретной краевой задачи, имеет какое-то отношение к решению исходной дифференциальной краевой задачи принципа максимума.

Представленные в этом параграфе оценки не могут быть строго доказаны. Более того, можно привести специально сконструированные примеры, в которых эти оценки будут ошибочны. Однако, в большинстве рассмотренных автором задач (кроме специально сконструированных) они оказываются правильными. Автор надеется, что их, по аналогии с правилом Рунге практической оценки погрешности, можно считать правилом практической оценки погрешности решения краевых задач методом стрельбы.

Обозначим:

$\delta_K$  — оценка точности решения задачи Коши при точно заданных начальных условиях  $\delta_K(x_0) = 0$ ;

$\delta_3$  — оценка точности решения краевой задачи как задачи Коши при неточно заданных начальных условиях  $\delta_3(x_0) \neq 0$ ;

$\delta$  — оценка точности решения задачи Коши ( $\delta_K$  или  $\delta_3$ ).

Для оценки точности решения краевой задачи, во-первых, оценивается  $\delta_K(\cdot)$ , во-вторых, оценивается  $\delta_3(x_0)$  и, наконец, оценивается  $\delta_3(\cdot)$ .

В [38] для оценок точности решения задач Коши имеется ряд теорем. Ввиду их исключительной важности некоторые из них (связанные с оценками точности одношаговых методов) приводятся ниже. Студентам рекомендуется перед изучением технически более сложного случая оценок точности решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений ознакомиться с оценками точности решения задачи Коши для одного дифференциального уравнения в [9, гл. 8, §4] и с более простыми вариантами оценок в [36, §7].

**Определение.** Пусть  $A$  является квадратной матрицей.

Назовем выражение

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

матричной нормой матрицы  $\|A\|$ , подчиненной норме вектора  $\|x\|$ .

**Теорема.** Матричная норма, подчиненная евклидовой норме вектора, равна корню из максимального собственного числа матрицы  $(A^T A)$  (максимальному сингулярному числу):

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

[9, гл. 6; 38, I.9, Подчиненные матричные нормы].

**Определение.** Пусть  $A$  является квадратной матрицей.

Назовем выражение

$$\mu(A) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{\|I + hA\| - 1}{h}$$

логарифмической нормой матрицы  $A$ .

**Теорема I.10.5** [38, стр. 65].

Логарифмическая норма матрицы  $A$ , подчиненная евклидовой норме вектора, равна максимальному собственному значению матрицы  $\frac{1}{2}(A^T + A)$ :

$$\mu(A) = \lambda_{\max} \left( \frac{1}{2}(A^T + A) \right).$$

При решении задачи Коши каким-либо явным методом Рунге–Кутты численное решение в точке  $x_{end} > x_0$  получается с помощью пошаговой процедуры

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + h_i \Phi(x_i, \vec{y}_i, h_i), \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad x_N = x_{end}. \quad (2.17)$$

Задача состоит в оценке глобальной погрешности

$$E = \|\vec{y}(x_N) - \vec{y}_N\| \leq \delta(x_N). \quad (2.18)$$

Эту погрешность можно оценить сверху следующим простым способом: локальные погрешности переносятся в конечную точку  $x_N$  и затем складываются. Этот “перенос погрешности” выполняется способом переноса погрешности вдоль кривых

точных решений [38, Способ (а), стр. 170] (для одного дифференциального уравнения см. также [9]).

Для оценки глобальной погрешности сначала оцениваются локальные погрешности

$$||\vec{y}(x_i + h_i) - \hat{\vec{y}}(x_i + h_i)|| \leq C_i h_i^{p+1} = r_i. \quad (2.19)$$

Здесь  $\vec{y}(x_i + h_i)$  и  $\hat{\vec{y}}(x_i + h_i)$  обозначают соответственно приближенное, построенное с помощью одного шага метода (2.17), и точное решения задачи Коши, совпадающие в момент  $x = x_i$ :  $\vec{y}(x_i) = \hat{\vec{y}}(x_i)$ .

**Теорема II.3.4** [38, стр. 171].

Обозначим  $U$  окрестность точки  $\{(x, y(x)) | x_0 \leq x \leq x_{end}\}$ , где  $y(x)$  — точное решение системы дифференциальных уравнений.

Пусть в  $U$  справедливы оценки локальных погрешностей (2.19) и выполнено одно из условий:

$$\left| \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}} \right| \leq L \quad \text{или} \quad \mu \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}} \right) \leq L.$$

Тогда имеет место следующая оценка глобальной погрешности (2.18):

$$E \leq h^p \frac{C'}{L} (\exp(L(x_N - x_0)) - 1),$$

где  $h = \max h_i$ ,

$$C' = \begin{cases} C & \text{при } L \geq 0, \\ C \exp(-Lh) & \text{при } L < 0, \end{cases}$$

и  $h$  достаточно мало для того, чтобы численное решение оставалось в  $U$ .

**Замечание.** При  $L \rightarrow 0$  оценка переходит в  $h^p C(x_N - x_0)$ .

Доказательство основано на использовании теорем I.10.2 и I.10.6.

**Теорема I.10.2** [38, стр. 63].

Предположим, что  $\vec{v}(x)$  — приближенное решение системы дифференциальных уравнений  $\dot{\vec{y}} = \vec{f}(x, \vec{y})$ ,  $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$ , которое удовлетворяет следующим условиям:

a)  $||\vec{v}(x_0) - \vec{y}(x_0)|| \leq \delta(x_0)$ ,

- б)  $\|\dot{\vec{v}}(x) - \vec{f}(x, \vec{v}(x))\| \leq \rho(x)$ ,  
 в)  $\|\vec{f}(x, \vec{v}(x)) - \vec{f}(x, \vec{y}(x))\| \leq l(x)\|\vec{v} - \vec{y}\|$ .

Тогда при  $x \geq x_0$  справедлива оценка погрешности

$$\|\vec{y}(x) - \vec{v}(x)\| \leq \delta(x) = e^{L(x)} \left[ \delta(x_0) + \int_{x_0}^x e^{-L(s)} \rho(s) ds \right],$$

где  $L(x) = \int_{x_0}^x l(s) ds$ .

**Теорема I.10.6** [38, стр. 66].

Предположим, что справедливы оценки:

- а)  $\|\vec{v}(x_0) - \vec{y}(x_0)\| \leq \delta(x_0)$ ,  
 б)  $\|\dot{\vec{v}}(x) - \vec{f}(x, \vec{v}(x))\| \leq \rho(x)$ ,  
 в)  $\mu \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}(x, \vec{\eta}) \right) \leq l(x)$  при  $\vec{\eta} \in [\vec{y}(x), \vec{v}(x)]$ .

Тогда при  $x \geq x_0$  выполняется соотношение

$$\|\vec{y}(x) - \vec{v}(x)\| \leq \delta(x) = e^{L(x)} \left[ \delta(x_0) + \int_{x_0}^x e^{-L(s)} \rho(s) ds \right],$$

где  $L(x) = \int_{x_0}^x l(s) ds$ .

Кроме теоремы II.3.4 для оценки глобальной погрешности можно воспользоваться одной из теорем I.10.2, I.10.6 при помощи соотношений:

$$\delta(x_0) = \|\vec{v}(x_0) - \vec{y}(x_0)\|, \quad \delta(x_{i+1}) = r_i + \delta(x_i) \cdot \exp(L_i), \quad (2.20)$$

где  $r_i$  — оценка локальной погрешности (2.19) на  $i$ -ом шаге,  $L_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} l(s) ds$  и  $\|E\| \leq \delta(x_N)$  (см. использование теоремы I.10.1 при доказательстве теорем I.10.2, I.10.6). В отличие от оценок Теоремы II.3.4, эта величина вычисляется в процессе решения задачи Коши: на каждом  $i$ -ом шаге оценка погрешности  $\delta(x_i)$  переносится вдоль точного решения ( $\rho(s) \equiv 0$ ) и ее изменение зависит от поведения интегральных кривых в окрестности  $U$  искомой траектории; кроме того к перенесенной ошибке добавляется ошибка метода на шаге  $r_i$  (главный член погрешности).

**Примечание.** Это основной способ оценки погрешности при решении задач в практикуме.

Если ошибка метода сравнима с ошибками, связанными с неточностью машинной арифметики, последние в этих способах необходимо тоже учитывать (см. [9]).

Итак, во всех описанных выше способах необходимо знать оценки *абсолютных* величин локальных ошибок и оценки нормы или логарифмической нормы матрицы производных правых частей системы в *окрестности* экстремали.

При использовании какого-либо явного метода Рунге–Кутты оценки величин локальных ошибок могут быть сделаны по правилу Рунге или по разности значений, вычисленных с помощью двух разных методов Рунге–Кутты (реализуемых, например, в виде “вложенных” формул) [9, гл. 8, §3; 38, II.4]<sup>1)</sup>. Отметим, что в используемой программе DOPRI8 [38, прил. 2] для автоматического выбора шага используется смешанное масштабирование оценок *относительных* локальных ошибок.

Основная вычислительная трудность всех упомянутых выше способов состоит именно в необходимости вычисления оценок нормы матрицы производных в окрестности экстремали. Эта окрестность оценивается с помощью оценки глобальной погрешности. Непосредственное вычисление максимума нормы в окрестности и самой соответствующей окрестности — задача трудоемкая. Одним из возможных выходов является построение оценки с учетом максимума нормы по всему пространству (см. [9, гл. 8, §4]). Однако такая оценка может оказаться сильно завышенной.

Другой способ состоит в приближенной замене максимума нормы по окрестности  $U$  (см. теорему II.3.4) на какую-либо сравнительно просто вычисляемую близкую величину, например, на максимум нормы по двум точкам  $(x_i, \vec{y}_i)$ ,  $(x_{i+1}, \vec{y}_{i+1})$ . В дополнение к возможной ошибке вычисления оценки глобальной погрешности, связанной с неправильной оценкой локальных ошибок, при этом добавляется возможная ошибка, связанная с большой разницей производных на рассчитываемой траектории и в ее окрестности.

Отдельной проблемой является учет погрешности вычисления точек переключения и погрешности вычисления момента

---

<sup>1)</sup> Впервые, по-видимому, использование двух разных методов Рунге–Кутты для оценки локальных ошибок было предложено Всеволодом Александровичем Егоровым в одном из препринтов ИПМ им. М.В. Келдыша. Установить это точно, по мнению автора, — хорошая тема для исследования по истории математики.

остановки  $x_{end}$  из условия остановки счета, определяемых неявно (2.16). В этих случаях на некотором временном интервале решается задача Коши для других правых частей (на этом интервале в пунктах “б” теорем I.10.2 и I.10.6  $\rho(x) > 0$ ). Поэтому при оценке точности требуется определить интервал возможных положений нулей функции  $F(x, \vec{y}(x)) = 0$  (2.16), при текущей оценке глобальной погрешности оценить величину  $\rho(x)$  на этом интервале и увеличить оценку глобальной погрешности в соответствии с используемой теоремой I.10.2 или I.10.6. Разумеется, такие оценки получаются завышенными, что при наличии нескольких точек переключения может привести (и приводит) к неудовлетворительным результатам.

Для того чтобы избежать указанных трудностей и получить более приемлемую оценку погрешности, можно поменять вычислительную схему, введя все моменты переключений и момент окончания процесса  $x_{end}$  (в случае его нефиксированности) в число параметров пристрелки, и оценивать точность решения задач Коши на каждом из участков непрерывности (и непрерывной дифференцируемости требуемое для применения используемого метода Рунге–Кутты число раз) правых частей системы дифференциальных уравнений. Так как при этом увеличивается размерность вектора параметров пристрелки, то соответственно увеличивается и размерность вектор–функции невязок за счет включения в нее условий вида (2.16). Дополнительное включение в число параметров пристрелки значений фазовых и сопряженных переменных в точках переключения и условий непрерывности в число компонент вектор–функции невязок приводит к вычислительной схеме, аналогичной методу многоточечной пристрелки (multiple shooting) [8; 9, гл. 9, конец §7; 33, §5.3; 38, гл. 1, §15, “Краевые задачи”].

Из–за сравнительной сложности построения таких оценок в данном варианте практикума точность решения задач с разрывными управлениями оценивается на основе совпадения знаков при решении задачи с различной точностью на шаге (см. конец этого пункта).

После того, как оценка точности решения задачи Коши  $\delta_K(\cdot)$  определена, можно перейти к оцениванию точности решения краевой задачи. Она отличается от оценки точности решения

задачи Коши тем, что  $\delta_3(x_0) > 0$  (2.20). Погрешность задания начальных условий  $\delta_3(x_0)$  является функцией погрешности  $\Delta\beta$  определения искомых параметров пристрелки  $\beta$ . В общем случае о связи  $\delta_3(x_0)$  и  $\Delta\beta$  ничего сказать нельзя; в простейшем случае, когда в качестве параметров пристрелки непосредственно используются недостающие для решения задачи Коши значения фазовых и сопряженных переменных,  $\delta_3(x_0) = \Delta\beta$ .

Использование известных теорем о скорости сходимости метода Ньютона и оценок отличия вычисленного приближения корня от его точного значения [7, Гл. 2, §1, п. 13; 9, Гл. 7, §2; 30, §33; 31, §5.6; 36, §1]) в рассматриваемых в практикуме задачах затруднено отсутствием соответствующих констант (см. [9, Гл. 1, §5]). Поэтому в качестве оценки  $\Delta\beta$  в практикуме используется одна из возможных оценок линейного члена разложения в ряд вектор-функции невязок (см. [9, Гл. 1, §5, задачи 2.4, 2.5]):

$$\Delta\beta = \frac{\|A^{-1}\| \max_{|\vec{Y}_n - \vec{y}_n| < \delta_K(x_n)} \|\vec{X}(\vec{Y}(\cdot))\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|}, \quad (2.21)$$

где  $A := \partial\vec{X}/\partial\vec{\beta}$ . Следует заметить, что в (2.21) используется не вычисленная на последней итерации норма вектор-функции невязок, а максимум нормы вектор-функции невязок, вычисленный с учетом оценки погрешности решения задачи Коши в моменты, соответствующие моментам вычисления компонент вектор-функции невязок. При этом  $\vec{y}_n$  обозначает вычисленное приближенное решение задачи Коши на шаге  $n$  (в момент  $x_n$ ),  $\vec{Y}_n$  — неизвестное точное решение задачи Коши в момент  $t_n$  и  $n$  пробегает совокупность номеров, соответствующих моментам вычисления компонент вектор-функции невязок  $X(\vec{Y}(\cdot)[\vec{\beta}])$ . Для двухточечной краевой задачи эта совокупность состоит из одного номера  $N$ , соответствующего моменту окончания процесса.

Во многих задачах используемый в (2.21) максимум нормы вычисляется сравнительно просто. Например, если все компоненты вектор-функции невязок имеют вид  $y_i(x_{end}) - y_{iend} = 0$ , где  $y_{iend}$  — некоторые константы, то  $\max_{|\vec{Y} - \vec{y}_N| < \delta_K(x_N)} \|X(\vec{Y})\| = \|X(\vec{\beta})\| + \delta_K(x_N)$ .

Остановимся на оценке величины  $\|\Delta A\|$ . Так как ма-

трица частных производных определяется численно конечно–разностными соотношениями, то каждый элемент матрицы  $\Delta A$  представляет собой сумму двух погрешностей: погрешности вычислений и погрешности аппроксимации (погрешности метода). Погрешность вычислений возникает при неточном определении величин  $X_i(\vec{y}(\cdot)[\vec{\beta}])$ , входящих в используемые формулы численного дифференцирования (2.11)–(2.13). Главный член погрешности аппроксимации для элемента  $A_{ij}$  может быть записан в виде:

$$\partial^2 X_i / \partial \beta_j^2 \cdot \Delta_j / 2, \quad (2.22)$$

для формул (2.11), (2.12) и

$$\partial^3 X_i / \partial \beta_j^3 \cdot \Delta_j^2 / 6,$$

для формулы (2.13).

Значения второй и, тем более, третьей производной вектор–функции невязок по параметрам пристрелки неизвестны и заменяются разностными оценками.

При решении задач практикума использовался следующий алгоритм. Для отыскания производных использовались формулы численного дифференцирования первого порядка — (2.11) или (2.12). При оценке точности использовалась формула численного дифференцирования второго порядка (2.13), главный член погрешности метода при этом “загрублялся” и брался в виде приближения (2.22):

$$\partial^2 X_i / \partial \beta_j^2 \cdot \Delta_j / 2 \approx$$

$$\approx \frac{X_i(\vec{y}(\cdot)[\vec{\beta} + \vec{\Delta}_j]) - 2X_i(\vec{y}(\cdot)[\vec{\beta}]) + X_i(\vec{y}(\cdot)[\vec{\beta} - \vec{\Delta}_j])}{2\Delta_j}.$$

Так как это приближение вычислялось неточно, то в дополнение к главному члену погрешности метода добавлялась погрешность его вычисления. Считая, что при малых  $\Delta_j$  оценки погрешности  $\delta_{ni}$  вычисления компонент  $X_i(\vec{y}(\cdot)[\vec{\beta} + \vec{\Delta}_j])$ ,  $X_i(\vec{y}(\cdot)[\vec{\beta}])$ ,  $X_i(\vec{y}(\cdot)[\vec{\beta} - \vec{\Delta}_j])$  равны, элементы матрицы  $\Delta A$  оценивались величинами:

$$|\Delta a_{ij}| \leq \varepsilon_{ij} = \frac{3\delta_{ni}[\vec{\beta}]}{\Delta_j} + \\ + \left| \frac{X_i(\vec{y}(\cdot)[\vec{\beta} + \vec{\Delta}_j]) - 2X_i(\vec{y}(\cdot)[\vec{\beta}]) + X_i(\vec{y}(\cdot)[\vec{\beta} - \vec{\Delta}_j])}{2\Delta_j} \right|.$$

После получения оценок элементов матрицы  $\Delta A$  ее норма  $\|\Delta A\|$  оценивается каким–либо способом. Например, можно оценить норму матрицы  $\Delta A$  суммой оценок ее элементов:

$$\|\Delta A\| \leq \sum_{i,j=1}^k \varepsilon_{ij},$$

где  $k$  — размерность вектор–функции невязок и вектора параметров пристрелки. Разумеется, при решении конкретных задач желательно вычислять оценку  $\|\Delta A\|$ , по возможности, близкую к минимально допустимой. Если оценку  $\|\Delta A\|$  неоправданно завысить, это может привести к дискредитации верных расчетов.

Формула (2.21) фактически является оценкой разности между решениями систем линейных алгебраических уравнений с мало различающимися матрицами и правыми частями. Если матрица Якоби (матрица частных производных вектор–функции невязок по компонентам вектора пристрелки) вычисляется точно ( $\|\Delta A\| = 0$ ), то формула (2.21) принимает вид:

$$\Delta\beta = \|A^{-1}\| \max_{|\vec{Y}_n - \vec{y}_n| < \delta_K(x_n)} \|X(\vec{Y}(\cdot))\|. \quad (2.23)$$

Если точно вычисляется вектор–функция невязок, то в формулах (2.21), (2.23) величина  $\max_{|\vec{Y}_n - \vec{y}_n| < \delta_K(x_n)} \|X(\vec{Y})\|$  заменяется на  $\|X(\vec{\beta})\|$ .

После определения величины  $\Delta\beta$  по ней определяется оценка величины погрешности начальных условий  $\delta_3(x_0) = \delta_3(x_0)(\Delta\beta)$ , необходимая для оценки погрешности решения краевой задачи как погрешности решения задачи Коши с неточно заданными начальными условиями.

В каком случае использование (2.21) оказывается приемлемым? Вообще говоря в случае, когда нелинейная вектор-функция невязок хорошо приближается линейной функцией. В качестве признака такой “хорошей” ситуации в практикуме выбирается выполнение следующего набора условий:

- 1) используемый модифицированный метод Ньютона несколько последних итераций работает по схеме обычного;
- 2) нормы последовательных смещений (разностей между очередным и предыдущим приближениями корня) убывают в соответствии с теоремой о сходимости метода Ньютона;
- 3) вычисляемые на этих итерациях матрицы Якоби близки ( $\|A_{i+1} - A_i\|/\|A_{i+1}\| \ll 1$ ).

В сложных случаях попытки оценить точность решения задачи Коши и краевой задачи могут привести к неудовлетворительному результату: получающиеся оценки оказываются сильно завышенными. В таких случаях для контроля точности решения задачи проводится серия расчетов, по которым проверяются необходимые признаки корректности вычислений.

К числу таких признаков относят:

- решение задачи Коши при одинаковых начальных условиях с различной точностью на шаге и/или различными методами: проверяется совпадение решений в некотором наборе совпадающих по времени характерных точек (середина траектории, конец траектории и т.п.) и могущих не совпадать по времени характерных точек (точки переключения, не заданный заранее конец траектории и т.п.), сохранение на экстремалах значений первых интегралов системы дифференциальных уравнений;
- решение задачи Коши при различных начальных условиях с различной точностью на шаге и/или различными методами: аналогично контролю точности решения задачи Коши проверяется совпадение решений в некотором наборе характерных точек и совпадение констант первых интегралов;
- решение задачи Коши “вперед–назад”: задаются некоторые начальные условия, решается задача Коши на требуемом интервале, полученные в конце интервала значения выбираются в качестве начальных, и решается задача Коши “в обратном времени” от конца к началу, вычисленные таким образом начальные значения сравниваются с исходными.

Все эти способы контроля идейно восходят к правилу Рунге: “те десятичные знаки, которые не изменились, считаются правильными”. В качестве примера, показывающего, что из совпадения знаков в вычисленных при различных точностях решениях *не следует* правильность решения задачи, приведем следующий: метод решения задачи Коши запрограммирован правильно, при написании программы вычисления правых частей системы дифференциальных уравнений допущена ошибка та-кая, что контролируемые первые интегралы остаются первыми интегралами новой, “запрограммированной” системы. Разумеется, этим случаем возможные причины неправильности решения задачи не исчерпываются (“если какая–то ошибка может быть допущена, то обязательно найдется человек, который ее допустит; если какая–то ошибка не может быть допущена, то все равно найдется человек, который сможет ее допустить”).

Тем не менее проверка совпадения знаков в численном решении во многих случаях оказывается *единственным* реальным способом проверки правильности решения. Хотя численный эксперимент *ничего не доказывает*, он практических всех *убеждает*, что задача решена верно (для студентов важнее всего, что он убеждает в правильности решения задачи преподавателя, принимающего зачет).

## Литература

1. Александров В. В., Бахвалов Н. С., Григорьев К. Г. и др. Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. М.: Изд–во Московского гос. ун–та, 1988.
2. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984.
3. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
4. Арутюнов А. В. Условия экстремума. Аномальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
5. Арутюнов А. В., Измаилов А. Ф. О проверке знакопредeterminedности форм. // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. 2002. Т. 42. № 6.
6. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1998.
7. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
8. Бахвалов Н. С. О решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. // Сборник работ ВЦ МГУ. 5. 1966. С. 9–16.
9. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987 (изд–е 1); М.: Изд–во “Лаборатория Базовых Знаний”, 2000 (изд–е 2).
10. Блесс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ, 1950.
11. Будак Б. М., Васильев Ф. П. Приближенные методы решения задач оптимального управления. М.: МГУ, 1968.
12. Валединский В. Д., Корнеев А. А. Методы программирования в примерах и задачах. М.: Изд–во ЦПИ при механико–математическом ф–те МГУ, 2000.
13. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управлени.я. М.: Наука, 1973.
14. Галеев Э. М. Курс лекций по вариационному исчислению и оптимальному управлению М.: Изд–во мех.–мат. ф–та Московского гос. ун–та, 1996.
15. Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Краткий курс теории экс–

- тремальных задач. М.: Изд-во Московского гос. ун-та, 1989.
16. Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
  17. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: Наука, 1961.
  18. Григорьев Э. И., Шалашилов В. И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела. М.: Наука, 1988.
  19. Гурман В. И. Вырожденные задачи оптимального управления. М.: Наука, 1977.
  20. Дмитрук А. В. Об уравнении Эйлера–Лагранжа в вариационном исчислении // Мат. заметки. 1976. Т. 20. № 6. С. 847–858.
  21. Дмитрук А. В. Условия типа Якоби для задачи Больца с неравенствами. // Мат. заметки. 1984. Т. 35. № 6. С. 813–827.
  22. Дородницын А. А. Применение метода малого параметра к численному решению дифференциальных уравнений. // В сб. статей: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982. С. 145–155.
  23. Зеликин М.И., Борисов В.Ф. Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления // Тр. Мат. института АН СССР. 1991. Т. 197. С. 85.
  24. Зеликин М. И. Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении. М.: Факториал, 1998.
  25. Зеликин М. И. Гессиан решения уравнения Гамильтона–Якоби в теории экстремальных задач // Математический сборник. 2004. Т. 195. № 6. С. 57–70.
  26. Исаев В. К., Соинин В. В.  
Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. 1963. Т. 3. № 6. С. 1114–1116.  
Вычислительные аспекты задачи об оптимальном перелете как краевой задачи // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. 1965. Т. 5. № 2. С. 252–261.
  27. Каханер Д., Моулер К., Неш С. Численные методы и программное обеспечение. Пер. с англ. М.: Мир, 1998.

28. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
29. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Основы вариационного исчисления. Т. 1,2. М.: ОНТИ, 1935.
30. Локтиевский О. В., Гавриков М. Б. Начала численного анализа. М.: Янус, 1995.
31. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. Пер. с англ. М.: Мир, 1977.
32. Моисеев Н. Н.  
Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971;  
Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
33. На Цунг-Йен (Ц. На) Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982. (Пер. с англ.: T. Y. Na Computational methods in engineering boundary value problems. Academic Press, 1979.)
34. Понtryгин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
35. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
36. Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во Московского физ.-тех. ин-та, 1994.
37. Фуллер А. Т. (Fuller A. T.) Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества // Тр. I конгр. ИФАК. М.: 1961. Т. 2. С. 584–605.
38. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
39. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

# Оглавление

От автора . . . . .	3
Задание и задачи . . . . .	5
<b>Глава 1. Примеры решения задач</b>	<b>13</b>
1.1 Простейшая задача классического вариационного исчисления . . . . .	13
1.1.1 Постановка задачи . . . . .	14
1.1.2 Формализация задачи как задачи оптимального управления . . . . .	14
1.1.3 Система необходимых условий оптимальности . . . . .	15
1.1.4 Краевая задача . . . . .	16
1.1.5 Численное решение краевой задачи . . . . .	16
1.1.6 Результаты решения краевой задачи и оценки точности этого решения . . . . .	17
1.1.7 Исследование оптимальности полученных экстремалей . . . . .	23
1.2 Простейшая задача классического вариационного исчисления, краевая задача в которой не может быть решена методом стрельбы . . . . .	25
1.2.1 Постановка задачи . . . . .	25
1.2.2 Формализация задачи как задачи оптимального управления . . . . .	25
1.2.3 Система необходимых условий оптимальности . . . . .	25
1.2.4 Краевая задача . . . . .	26
1.2.5 Численное решение краевой задачи . . . . .	26
1.2.6 Результаты решения краевой задачи и оценки точности этого решения . . . . .	27
1.3 Задача Лагранжа: фиксированный временной отрезок, без ограничений вида “меньше или равно” . . . . .	29
1.3.1 Постановка задачи . . . . .	30
1.3.2 Формализация задачи . . . . .	31
1.3.3 Система необходимых условий оптимальности . . . . .	31
1.3.4 Краевая задача и ее анализ . . . . .	32
1.3.5 Численное решение краевой задачи . . . . .	33

1.3.6	Оценки точности решения краевой задачи	33
1.3.7	Исследование оптимальности экстремалей .	39
1.3.8	Аналитическое решение при $\alpha = 0$ . . . . .	41
1.3.9	Результаты решения задачи и их анализ . . .	43
1.4	Задача Лагранжа с нефиксированным временем и ограничениями вида “меньше или равно” . . . . .	55
1.4.1	Постановка задачи . . . . .	55
1.4.2	Система необходимых условий оптимальности . . . . .	55
1.4.3	Краевая задача и ее анализ . . . . .	56
1.4.4	Вычислительная схема решения задачи и оценка точности этого решения . . . . .	59
1.4.5	Решение краевой задачи и результаты . . .	63
1.4.6	Исследование оптимальности экстремалей .	68
1.5	Пример решения задачи оптимального управления с участком особого управления первого порядка (аналитическое решение) . . . . .	76
1.5.1	Постановка задачи . . . . .	76
1.5.2	Формализация задачи . . . . .	76
1.5.3	Система необходимых условий оптимальности . . . . .	77
1.5.4	Краевая задача и ее анализ . . . . .	78
1.6	Пример решения задачи оптимального управления с участком особого управления первого порядка (численное решение) . . . . .	84
1.6.1	Постановка задачи . . . . .	84
1.6.2	Формализация задачи . . . . .	84
1.6.3	Система необходимых условий оптимальности . . . . .	85
1.6.4	Краевая задача . . . . .	86
1.6.5	Участки особого управления . . . . .	86
1.6.6	Аналитическое решение при $\alpha = 0$ . . . . .	89
1.6.7	Численное решение краевой задачи при $\alpha < \alpha_*$ . . . . .	91
1.6.8	Результаты при $\alpha < \alpha_*$ . . . . .	91
1.6.9	Численное решение краевой задачи при $\alpha > \alpha_*$ . . . . .	93

1.6.10 Результаты решения краевой задачи при $\alpha > \alpha_*$	94
1.7 Задача Фуллера	101
1.7.1 Постановка задачи	101
1.7.2 Формализация задачи	101
1.7.3 Система необходимых условий оптималь- ности	101
1.7.4 Краевая задача и ее анализ	102
1.8 Пример задачи оптимального управления, реше- ние которой при некоторых значениях параметра $\alpha$ содержит четтеринг–режимы	105
1.8.1 Постановка задачи	105
1.8.2 Формализация задачи	105
1.8.3 Система необходимых условий оптималь- ности	106
1.8.4 Краевая задача	107
1.8.5 Участки особого управления	107
1.8.6 Аналитическое решение задачи при $\alpha = 0$	109
1.8.7 Вычислительная схема построения неосо- бых экстремалей	109
1.8.8 Результаты	109
<b>Глава 2. Теоретические основы численного реше- ния задач оптимального управления</b>	<b>116</b>
2.1 Условия оптимальности	116
2.1.1 Гладкие задачи	117
2.1.2 Задача Лагранжа	120
2.2 Метод стрельбы	129
2.3 Решение систем нелинейных уравнений	133
2.4 Решение задач Коши	139
2.5 Практические оценки точности решения краевой задачи	143
<b>Литература</b>	<b>154</b>

И. С. Григорьев

Методическое пособие по численным методам решения  
краевых задач принципа максимума в задачах оптимального  
управления.

М., Издательство Центра прикладных исследований при  
механико-математическом факультете МГУ, 2005. — 160 с.

---

Подписано в печать 1.04.2005 г.

Формат 60×90 1/16. Объем 10 п.л.

Заказ 23 Тираж 250 экз.

---

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете  
МГУ

г. Москва, Воробьевы горы.

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 04059 от  
20.02.2001 г.

---

Отпечатано на типографском оборудовании механико-матема-  
тического факультета.