Решение задачи 13

13. Докажите, что если $\hat{x}(\cdot)$— непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая уравнению Эйлера для задачи

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{x}(t))dt \to \min; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,$$

и всюду выполнено условие

$$\mathcal{E}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) \geq 0,$$

то $\hat{x}(\cdot)$ доставляет абсолютный минимум в указанной задаче.

Для любой допустимой функции $x(\cdot)$ мы имеем

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{x}(t))dt - \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\hat{x}}(t))dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \dot{x}(t))dt - \int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t))\hat{L}_{\dot{x}}(t)dt. \end{aligned} \tag{1}$$

В силу предположения задачи первый интеграл в правой части (1) неотрицателен. Далее уравнение Эйлера для $\hat{x}(\cdot)$ влечет

$$L_{\dot{x}}(t) \equiv const := C.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t))\hat{L}_{\dot{x}}(t)dt = C\int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t))dt \\ &= C\int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\hat{x}}(t)dt = C(x_1 - x_0) - C(x_1 - x_0) = 0, \end{aligned}$$

то есть второй интеграл в правой части (1) равен нулю. Значит, в силу (1)

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{x}(t))dt - \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\hat{x}}(t))dt \geq 0.$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX