УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ЛЕКТОР А. А. КОНЬКОВ

1. Основные определения и обозначения

Всюду ниже, если не оговорено противное, под Ω мы будем подразумевать непустое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Через $C^\infty(\Omega)$ обозначаем пространство функций, бесконечно дифференцируемых в Ω, а через $C^\infty(\overline{\Omega})$ — сужения на Ω функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. При этом под $C_0^\infty(\Omega)$ мы будем подразумевать множество функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с компактными носителями[1], принадлежащими Ω. Вместо $C_0^\infty(\Omega)$ часто используется обозначение $\mathcal{D}(\Omega)$.

Аналогично определяются классы $C^s(\Omega)$, $C^s(\overline{\Omega})$, $C_0^s(\Omega)$ функций, имеющих непрерывные производными порядка s.

Пространство измеримых функций на измеримом по Лебегу множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, для которых

$$\|f\|_{L_p(E)} = \left(\int_E |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad p \geq 1,$$

будем обозначать $L_p(E)$. В свою очередь, под $L_{p,loc}(\Omega)$ мы будем понимать пространство функций, суммируемых со степенью p на всяком компакте, принадлежащем открытому множеству Ω.

Как это принято, полагаем $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!$ и $\partial^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1}(\partial/\partial x_2)^{\alpha_2}\ldots(\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс.

Под B_r^x мы подразумеваем открытый шар $B_r^x = \{y : |y - x| < r\}$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$, а под S_r^x — сферу $S_r^x = \{y : |y - x| = r\}$. Если $x = 0$, то вместо B_r^0 и S_r^0 пишем для краткости B_r и S_r.

2. Обобщенные функции. Пространство $\mathcal{D}'(\Omega)$

Определение 2.1. Говорим, что последовательность функций $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots$, сходится к $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, если найдется компакт $K \subset \Omega$ такой, что, во-первых, $\operatorname{supp} \varphi_i \subset K$, $i = 1, 2, \ldots$, а, во-вторых, $\|\varphi_i - \varphi\|_{C^s(\Omega)} \to 0$ при $i \to \infty$ для всякого целого неотрицательного числа s, где

$$\|\psi\|_{C^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \sup_\Omega |\partial^\alpha \psi|, \qquad \psi \in C^s(\Omega).$$

В $\mathcal{D}(\Omega)$ можно ввести топологию, сходимость в которой будет совпадать с определенном выше [2, раздел 6.2]. Таким образом, $\mathcal{D}(\Omega)$ наделяется структурой топологического векторного пространства. Множество $\mathcal{D}(\Omega)$ будем также называть пространством основных (или пробных) функций.

[1] Напоминаем, что носителем непрерывной функции называется замыкание множества точек, в которых эта функция отлична от нуля.

Определение 2.2. Линейный функционал $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ будем называть (секвенциально) непрерывным, если для любой последовательности $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots$, сходящейся к функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\lim_{i\to\infty} f(\varphi_i) = f(\varphi).$$

Множество линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(\Omega)$, очевидно, образует линейное пространство над $\mathbb{C}$. Это пространство называется пространством обобщенных функций на Ω и обозначается через $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Заметим, что в упомянутой выше топологии в $\mathcal{D}(\Omega)$ любая обобщенная функция является непрерывной "в обычном смысле", т.е. прообраз всякого открытого множества в $\mathbb{C}$ открыт в $\mathcal{D}(\Omega)$.

Говорим, что последовательность функционалов $f_i : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots$, слабо сходится к функционалу $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$, если

$$\lim_{i\to\infty} f_i(\varphi) = f(\varphi)$$

для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Пространство $\mathcal{D}'(\Omega)$ замкнуто относительно слабой сходимости, а именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Предположим, что последовательность $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots$, слабо сходится к функционалу $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$, тогда $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

Мы приводим теорему 2.1 без доказательства, желающие могут найти его в монографии [4, глава 2, §9].

Действие функционала $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ на основную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ принято обозначать (f, φ).

Пространство $L_{loc}(\Omega)$ естественным образом вкладывается в $\mathcal{D}'(\Omega)$, если всякую функцию $f \in L_{loc}(\Omega)$ отождествить с функционалом, действующий по правилу

$$(f, \varphi) = \int_\Omega f\varphi\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.1}$$

В частности, $\mathcal{D}'(\Omega)$ содержит в себе $C^\infty(\Omega)$, поскольку $C^\infty(\Omega) \subset L_{loc}(\Omega)$. Функции из $L_{loc}(\Omega)$, понимаемые как обобщенные, будем называть регулярными. Очевидно, $\mathcal{D}'(\Omega)$ не исчерпывается одними регулярными функциями. В качестве примера, подтверждающего это, достаточно рассмотреть так называемую дельта-функцию Дирака

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Упражнение 2.1. Покажите, что различным функциям из $L_{loc}(\Omega)$ соответствуют различные функционалы из $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Пусть $f \in C^\infty(\Omega)$. Как связаны между собой обобщенные функции, отождествляемые с f и производной $\partial f/\partial x_i$? Интегрируя по частям, имеем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\right) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\, dx = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Последняя формула наводит на мысль для всякого $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ определить $\partial f/\partial x_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ равенством

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.2}$$

Согласно (2.2) любая функция $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ в обобщенном смысле дифференцируема бесконечное число раз, причем

$$(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, \partial^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

для всякого мультииндекса α.

Упражнение 2.2. Найдите производную от θ-функции Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $\theta'(x) = \delta(x)$.

Обобщенные функции можно умножать на бесконечно гладкие, если для любых $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $\psi \in C^\infty(\Omega)$ положить

$$(\psi f, \varphi) = (f\psi, \varphi) = (f, \psi\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Упражнение 2.3. Покажите, что приведенное выше определение является естественным. Именно, пусть $\iota : L_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ — вложение пространства $L_{loc}(\Omega)$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$, заданное соотношением (2.1). Тогда $\iota(\psi f) = \psi\iota(f)$ для любых $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $\psi \in C^\infty(\Omega)$.

Упражнение 2.4. Докажите, что

$$\frac{\partial(\psi f)}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} f + \psi \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{2.3}$$

для всех $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $\psi \in C^\infty(\Omega)$.

Решение. Для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ согласно определению производной от обобщенной функции имеем

$$\left(\frac{\partial(\psi f)}{\partial x_i}, \varphi\right) = -\left(\psi f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right).$$

При этом

$$\left(\psi f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = \left(f, \psi\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)$$

согласно определению умножения обобщенной функции на бесконечно гладкую. Таким образом,

$$\left(\frac{\partial(\psi f)}{\partial x_i}, \varphi\right) = -\left(f, \psi\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right). \tag{2.4}$$

Аналогично, получим

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} f, \varphi\right) = \left(f, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\varphi\right)$$

и

$$\left(\psi\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial(\psi\varphi)}{\partial x_i}\right).$$

Складывая два последних равенства, будем иметь

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}f+\psi\frac{\partial f}{\partial x_i},\varphi\right)=\left(f,\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\varphi-\frac{\partial(\psi\varphi)}{\partial x_i}\right)=-\left(f,\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right),$$

откуда ввиду (2.4) немедленно следует (2.3).

Далее мы хотим выяснить, каким образом у обобщенных функций осуществляется замена переменной. Пусть имеется диффеоморфизм открытого множества $G\subset\mathbb{R}^n$ на Ω, реализующий замену переменной $x=x(y)$, $y\in G$. Обратную замену будем обозначать $y=y(x)$, $x\in\Omega$.

Предположим сначала, что $f\in C^\infty(\Omega)$. Рассматривая суперпозицию $f(x(y))$ как обобщенную функцию, очевидно, получим

$$\begin{aligned}(f(x(y)),\varphi(y)) &= \int_G f(x(y))\varphi(y)\,dy\\ &= \int_\Omega f(x)\varphi(y(x))\left|\det\|\partial y/\partial x\|\right|\,dx\\ &= (f(x),\varphi(y(x))\left|\det\|\partial y/\partial x\|\right|),\quad \varphi\in\mathcal{D}(G),\end{aligned}$$

где $\|\partial y/\partial x\|$ — матрица Якоби.

Пусть теперь $f(x)\in\mathcal{D}'(\Omega)$, определим функцию $f(x(y))\in\mathcal{D}'(G)$, полагая

$$(f(x(y)),\varphi(y))=(f(x),\varphi(y(x))\left|\det\|\partial y/\partial x\|\right|),\quad \varphi\in\mathcal{D}(G).$$

Упражнение 2.5. Докажите правило дифференцирования суперпозиции

$$\frac{\partial f(x(y))}{\partial y_i}=\sum_{j=1}^n\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right|_{x=x(y)}\frac{\partial x_j(y)}{\partial y_i},$$

где $f(x)\in\mathcal{D}'(\Omega)$.

Теорема 2.2 (о первообразной от обобщенной функции)**.** *Для любого $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ найдется $F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ такое, что $F'=f$.*

Доказательство. Пусть $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Определим $F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ соотношением

$$(F(x),\varphi(x))=-\left(f(t),\int_{-\infty}^t\varphi(x)\,dx-\eta(t)\int_{-\infty}^\infty\varphi(x)\,dx\right),\tag{2.5}$$

где $\eta\in C^\infty(\mathbb{R})$ — некоторая функция такая, что $\eta|_{[1,\infty)}=1$ и $\eta|_{(-\infty,0]}=0$. Имеем, очевидно,

$$\begin{aligned}(F'(x),\varphi(x))=-(F(x),\varphi'(x))&=\left(f(t),\int_{-\infty}^t\varphi'(x)\,dx-\eta(t)\int_{-\infty}^\infty\varphi'(x)\,dx\right)\\&=(f(t),\varphi(t))\end{aligned}$$

для любого $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ или, другими словами, $F'=f$.

Теорема полностью доказана. □

Упражнение 2.6. Покажите, что (2.5) определяет обобщенную функцию.

Теорема 2.3. *Пусть $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и при этом $f'=0$, тогда f — постоянная функция.*

Доказательство. Согласно определению производной от обобщенной функции

$$(f, \psi') = 0 \tag{2.6}$$

для любого $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Положим

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\, dx - \eta(t) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx,$$

где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, а функция η такая же, как в теореме 2.2. Из соотношения (2.6) немедленно получим

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} C\varphi(x)\, dx = (C, \varphi),$$

где

$$C = (f, \eta')$$

— некоторая постоянная, что и завершает доказательство. □

3. Носитель обобщенных функций

Ограничением $f|_\omega$ обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ на открытое множество $\omega \subset \Omega$ будем называть ограничение функционала $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ на пространство $\mathcal{D}(\omega)$. Тем самым,

$$(f|_\omega, \varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\omega).$$

В частности, $f|_\omega = 0$, если $(f, \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$.

Лемма 3.1. *Пусть $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и при этом $f|_{\omega_1} = 0$ и $f|_{\omega_2} = 0$ для некоторых открытых множеств $\omega_1, \omega_2 \subset \Omega$, тогда $f|_{\omega_1 \cup \omega_2} = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $\varphi \in \mathcal{D}(\omega_1 \cup \omega_2)$. Таким образом, $\operatorname{supp} \varphi$ является компактным множеством, принадлежащим $\omega_1 \cup \omega_2$. Как это принято, через $\operatorname{supp} \varphi$ мы обозначаем носитель функции φ, т.е. замыкание множества точек в которых эта функция отлична от нуля.

Поскольку $\operatorname{supp} \varphi \setminus \omega_2$ — компакт, принадлежащий ω_1, найдется открытое множество V_1 с компактным замыканием, принадлежащим ω_1, такое, что

$$\operatorname{supp} \varphi \setminus \omega_2 \subset V_1,$$

откуда, в свою очередь, будем иметь

$$\operatorname{supp} \varphi \subset V_1 \cup \omega_2.$$

Повторяя предыдущее рассуждение в отношении разности $\operatorname{supp} \varphi \setminus V_1$, получим, что существует открытое множество V_2 с компактным замыканием, принадлежащим ω_2, такое, что

$$\operatorname{supp} \varphi \subset V_1 \cup V_2.$$

Возьмем, далее, неотрицательные функции $\psi_1 \in \mathcal{D}(\omega_1)$ и $\psi_2 \in \mathcal{D}(\omega_2)$, равные, соответственно, единице на V_1 и V_2. Обозначим

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{\psi_i(x)\varphi(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)}, & x \in V_1 \cup V_2, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus (V_1 \cup V_2), \end{cases} \qquad i = 1, 2.$$

Получим, очевидно, $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ для всех $x \in \omega_1 \cup \omega_2$, причем $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\omega_1)$ и $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\omega_2)$. Для завершения доказательства остается заметить, что

$$(f, \varphi) = (f, \varphi_1) + (f, \varphi_2) = 0.$$

□

Следствие 3.1. *Пусть* $f|_{\omega_i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, *где* $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, ω_i *— открытые подмножества* Ω, *а* $k \geq 2$ *— некоторое целое число, тогда* $f|_{\cup_{i=1}^k \omega_i} = 0$.

Доказательство. Будем пользоваться индукцией по целому числу k. В случае $k = 2$, наше утверждение непосредственно вытекает из леммы 3.1. Предположим, что $k > 2$ и при этом для $k - 1$ утверждение доказано. Обозначим $\tilde{\omega}_1 = \cup_{i=1}^{k-1}$ и $\tilde{\omega}_2 = \omega_k$. Несложно увидеть, что $\tilde{\omega}_1 \cup \tilde{\omega}_2 = \cup_{i=1}^k \omega_i$. Согласно предположению индукции справедливо равенство $f|_{\tilde{\omega}_1} = 0$. Таким образом, применяя лемму 3.1, получим $f|_{\tilde{\omega}_1 \cup \tilde{\omega}_2} = 0$.

Доказательство завершено. □

Теорема 3.1. *Пусть* $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *и при этом*

$$\omega_{max} = \bigcup_{f|_\omega = 0} \omega, \tag{3.1}$$

тогда $f|_{\omega_{max}} = 0$.

Доказательство. Предположим, что $\varphi \in \mathcal{D}(\omega_{max})$. Множества ω в правой части (3.1) образуют открытое покрытие носителя функции φ. Поскольку носитель φ является компактом, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, которое будем обозначать $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$. В частности, $\varphi \in \mathcal{D}(\cup_{i=1}^k \omega_i)$. Ввиду следствия 3.1, имеем $f|_{\cup_{i=1}^k \omega_i} = 0$, поэтому $(f, \varphi) = 0$.

Теорема полностью доказана. □

Определение 3.1. Носителем обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ называется множество

$$\operatorname{supp} f = \Omega \setminus \omega_{max},$$

где ω_{max} определено с помощью (3.1).

Заметим, что $\operatorname{supp} f$ замкнут в топологии Ω, индуцированной из $\mathbb{R}^n$, поскольку ω_{max} является открытым множеством. При этом ω_{max} может быть и пустым, например, если $f = const \neq 0$. В этом случае носитель f, очевидно, совпадает с Ω.

Пример 3.1. Носителем δ-функции Дирака $\delta(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ является множество состоящее из одного нуля: $\operatorname{supp} \delta(x) = \{0\}$.

Упражнение 3.1. Найдите носитель обобщенной функции, тождественно равной нулю (функционала, переводящего пространство основных функций $\mathcal{D}(\Omega)$ в нуль). Покажите, что носитель непрерывной функции, если ее понимать как обобщенную, совпадает с замыканием множества точек, в которых эта непрерывная функция отлична от нуля.

Свойства носителя обобщенных функций:

$$\operatorname{supp}(f + g) \subset \operatorname{supp} f \cup \operatorname{sup} g, \tag{3.2}$$

$$\operatorname{supp}(\psi f) \subset \operatorname{supp} \psi \cap \operatorname{supp} f, \tag{3.3}$$

$$\operatorname{supp} \frac{\partial f}{\partial x_i} \subset \operatorname{supp} f, \tag{3.4}$$

где $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\psi \in C^\infty(\Omega)$, Ω — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 3.2. Докажите соотношения (3.2)–(3.4).

Предложение 3.1. *Пусть $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, тогда $\psi f = f$ для любого $\psi \in C^\infty(\Omega)$ такого, что $\psi = 1$ в окрестности* $\operatorname{supp} f$.

Доказательство. Для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ имеем $(\psi - 1)\varphi \in\in \mathcal{D}(\Omega \setminus \operatorname{supp} f)$, поэтому

$$((\psi - 1)f, \varphi) = (f, (\psi - 1)\varphi) = 0,$$

откуда немедленно следует, что

$$(\psi f, \varphi) = (f, \varphi) + ((\psi - 1)f, \varphi) = (f, \varphi).$$

Доказательство завершено. □

Упражнение 3.3. Останется ли предложение 3.1 в силе, если в его условиях потребовать, чтобы функция ψ была равна единице на $\operatorname{supp} f$, а не в окрестности этого множества?

Теорема 3.2. *Пусть обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ имеет компактный носитель, тогда найдутся постоянная $A > 0$ и целое число $m \geq 0$ такие, что*

$$|(f, \varphi)| \leq A\|\varphi\|_{C^m(\Omega)}$$

для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что утверждение теоремы не верно. Тогда для всякой последовательности вещественных чисел $A_m > 0$ найдется последовательность функций $\varphi_m \in \mathcal{D}(\Omega)$, $m = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условию

$$|(f, \varphi_m)| > A_m\|\varphi_m\|_{C^m(\Omega)}. \tag{3.5}$$

Возьмем последовательность $A_m > 0$, $m = 1, 2, \ldots$, такую, что

$$\lim_{m\to\infty} A_m = \infty.$$

Обозначим

$$\psi_m = \frac{\eta\varphi_m}{A_m\|\varphi_m\|_{C^m(\Omega)}},$$

где $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ — некоторая функция, равная единице в окрестности $\operatorname{supp} f$. Очевидно,

$$(f, \psi_m) = \frac{(f, \eta\varphi_m)}{A_m\|\varphi_m\|_{C^m(\Omega)}},$$

откуда ввиду (3.5) и того обстоятельства, что

$$(f, \eta\varphi_m) = (\eta f, \varphi_m) = (f, \varphi_m),$$

вытекает неравенство

$$|(f, \psi_m)| > 1, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{3.6}$$

Несложно увидеть, что $\operatorname{supp}\psi_m \subset \operatorname{supp}\eta$ для всех $m = 1, 2, \ldots$. В то же время,

$$\lim_{m\to\infty} \|\psi_m\|_{C^k(\Omega)} = 0 \tag{3.7}$$

для любого целого числа $k \geq 0$. В самом деле, имеем

$$\|\eta\varphi_m\|_{C^k(\Omega)} \leq B_k\|\eta\|_{C^k(\Omega)}\|\varphi_m\|_{C^k(\Omega)},$$

где постоянная $B_k > 0$ зависит только от k. Таким образом,

$$\|\psi_m\|_{C^k(\Omega)} = \frac{\|\eta\varphi_m\|_{C^k(\Omega)}}{A_m\|\varphi_m\|_{C^m(\Omega)}} \le \frac{B_k\|\eta\|_{C^k(\Omega)}}{A_m}$$

для всех $m \ge k$, откуда немедленно следует (3.7).

В силу сказанного мы можем утверждать, что $\psi_m \to 0$ в $\mathcal{D}(\Omega)$ при $m \to \infty$, поэтому

$$\lim_{m\to\infty}(f, \psi_m) = 0,$$

что противоречит (3.6).

Теорема полностью доказана. □

Обобщенную функцию $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ с компактным носителем можно продолжить на множество $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. В самом деле, возьмем $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ такое, что $\eta = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} f$. Положим по определению

$$(f, \psi) = (f, \eta\psi)$$

для всех $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Поскольку $\eta f = f$, на множестве $\mathcal{D}(\Omega)$ обобщенная функция f остается без изменений. Несложно также увидеть, что определенное выше продолжение не зависит от выбора η. Действительно, если $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ — две функции, равные единице в окрестности $\operatorname{supp} f$, то $\operatorname{supp}(\eta_1 - \eta_2)\psi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \operatorname{supp} f)$ для любого $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, поэтому

$$(f, \eta_1\psi) - (f, \eta_2\psi) = (f, (\eta_1 - \eta_2)\psi) = 0.$$

4. Прямое произведение обобщенных функций

В этом разделе мы будем по умолчанию предполагать, что $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^m$ — непустые открытые множества, где $n \ge 1$ и $m \ge 1$ — целые числа.

Теорема 4.1. *Пусть $g(y) \in \mathcal{D}'(Y)$, тогда $(g(y), \varphi(\cdot, y)) \in \mathcal{D}(X)$ для любого $\varphi \in \mathcal{D}(X \times Y)$, причем*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g(y), \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y)) = \left(g(y), \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y)\right), \quad (4.1)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{(g(y), \varphi(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n, y)) - (g(y), \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y))}{h}$$
$$= \left(g(y), \frac{\varphi(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n, y) - \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y)}{h}\right)$$

для любого достаточно малого вещественного числа $h \ne 0$.

Считая $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y$ фиксированными, обозначим

$$\psi(h) = \partial_y^\alpha \varphi(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n, y),$$

где

$$\partial_y^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \dots \partial y_n^{\alpha_n}},$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — некоторый мультииндекс, а $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Интегрирую по частям, получим

$$\psi(h) - \psi(0) = \int_0^1 \frac{d\psi(th)}{dt}\, dt = \left.\frac{d\psi(ht)}{dt}\right|_{t=0} + \int_0^1 (1-t)\frac{d^2\psi(th)}{dt^2}\, dt$$
$$= h\psi'(0) + h^2 \int_0^1 (1-t)\psi''(th)\, dt,$$

откуда следует, что

$$\frac{\psi(h) - \psi(0)}{h} - \psi'(0) = h\int_0^1 (1-t)\psi''(th)\, dt$$

или, другими словами,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial_y^\alpha \varphi(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n, y) - \partial_y^\alpha \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y)}{h}\\ &\quad - \partial_{x_i}\partial_y^\alpha \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y)\\ &\quad = h\int_0^1 (1-t)\; \partial_\xi^2 \partial_y^\alpha \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n, y)\big|_{\xi = x_i + th}\, dt. \qquad (4.2)\end{aligned}$$

Допустим, далее, что $h_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, — некоторая последовательность, сходящаяся к нулю. Положим

$$\begin{aligned}\lambda_k(y) = &\frac{\varphi(x_1, \dots, x_i + h_k, \dots, x_n, y) - \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y)}{h_k}\\ &- \partial_{x_i}\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y).\end{aligned}$$

Согласно (4.2) будем иметь

$$\|\partial^\alpha \lambda_k\|_{C(Y)} \le h_k \|\varphi\|_{C^{|\alpha|+2}(X\times Y)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

откуда ввиду произвольности α следует, что

$$\|\lambda_k\|_{C^s(Y)} \to 0 \quad \text{при } k \to \infty$$

для любого целого числа $s \ge 0$. Несложно также увидеть, что для всех достаточно больших k носители функций λ_k принадлежат некоторому компактному подмножеству Y. Тем самым, $\lambda_k \to 0$ в $\mathcal{D}(Y)$ при $k \to \infty$, поэтому

$$\lim_{k\to\infty} (g(y), \lambda_k(y)) = 0$$

в силу непрерывности обобщенной функции $g(y)$. Последнее соотношение влечет за собой (4.1). Остается заметить, что $\operatorname{supp}(g(y), \varphi(\cdot, y))$ является компактным множеством, поскольку принадлежит проекции $\operatorname{supp}\varphi$ на X. Тем самым, $(g(y), \varphi(\cdot, y)) \in \mathcal{D}(X)$.

Доказательство завершено. □

Пусть $f \in C^\infty(X)$ и $g \in C^\infty(Y)$. Прямым произведением f и g принято называть отображение, действующее по правилу

$$(x, y) \mapsto f(x)g(y), \quad (x, y) \in X \times Y.$$

Прямое произведение бесконечно гладких функций, очевидно, также является бесконечно гладкой функцией. Для прямого произведения f и g приняты следующие обозначения: $f \cdot g$, $f \otimes g$, $f(x)g(y)$. Мы в основном будем пользоваться последним.

Попытаемся выяснить, как действует на основную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(X \times Y)$ прямое произведение бесконечно гладких функций $f(x)g(y)$, если его понимать как обобщенную функцию. Имеем

$$\begin{aligned}(f(x)g(y), \varphi(x,y)) &= \int_{X\times Y} f(x)g(y)\varphi(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_X f(x)\int_Y g(y)\varphi(x,y)\,dy\,dx = (f(x),(g(y),\varphi(x,y))).\end{aligned}$$

Приведенное выше соотношение позволяет ввести прямое произведение обобщенных функций $f(x) \in \mathcal{D}'(X)$ и $g(y) \in \mathcal{D}'(Y)$.

Определение 4.1. Прямым произведением $f(x) \in \mathcal{D}'(X)$ и $g(y) \in \mathcal{D}'(Y)$ называется обобщенная функция $f(x)g(y) \in \mathcal{D}'(X \times Y)$, действующая по правилу

$$(f(x)g(y), \varphi(x,y)) = (f(x),(g(y),\varphi(x,y))), \quad \varphi \in \mathcal{D}(X \times Y). \tag{4.3}$$

Из теореме 4.1 вытекает, что $(g(y), \varphi(\cdot, y)) \in \mathcal{D}(X)$. Таким образом, правая часть (4.3) корректна. Несложно увидеть, что отображение, определенное с помощью (4.1), является линейным функционалом на $\mathcal{D}(X \times Y)$. Докажем его непрерывность. Именно, пусть последовательность $\varphi_i \in \mathcal{D}(X \times Y)$, $i = 1, 2, \ldots$, сходится в пространстве $\mathcal{D}(X \times Y)$ к функции $\varphi \in \mathcal{D}(X \times Y)$. Покажем, что

$$\lim_{i\to\infty}(f(x),(g(y),\varphi_i(x,y))) = (f(x),(g(y),\varphi(x,y))). \tag{4.4}$$

Предположим, что $H \subset X \times Y$ — компакт, которому принадлежат носители функций φ_i, $i = 1, 2, \ldots$, а H_X и H_Y — его проекции на множества X и Y, соответственно. Обозначим

$$\lambda_i(x) = (g(y), \varphi_i(x,y) - \varphi(x,y)).$$

Не представляет труда убедиться, что

$$\operatorname{supp}\lambda_i \subset H_X, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

В то же время, согласно теореме 4.1 будем иметь

$$\partial^\alpha \lambda_i(x) = (g(y), \partial_x^\alpha(\varphi_i(x,y) - \varphi(x,y))), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{4.5}$$

для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Возьмем функцию $\eta \in \mathcal{D}(Y)$, равную единице в окрестности H_Y. Так как $\eta(y)\varphi(x,y) = \varphi(x,y)$ и $\eta(y)\varphi_i(x,y) = \varphi_i(x,y)$ для всех $(x,y) \in X \times Y$, $i = 1, 2, \ldots$, формула (4.5) позволяет утверждать, что

$$\partial^\alpha \lambda_i(x) = (\eta(y)g(y), \partial_x^\alpha(\varphi_i(x,y) - \varphi(x,y))), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

откуда ввиду теоремы 3.2 вытекает оценка

$$\|\partial^\alpha \lambda_i\|_{C(X)} \le A\|\varphi_i - \varphi\|_{C^k(X\times Y)}$$

для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где постоянная $A > 0$ и целое число $k \ge 0$ не зависят от i. Таким образом,

$$\lim_{i\to\infty}\|\lambda_i\|_{C^k(X)} = 0$$

для любого целого числа $k \ge 0$ и мы приходим к заключению, что $\lambda_i \to 0$ в пространстве $\mathcal{D}(X)$ при $i \to \infty$. В силу непрерывности обобщенной функции f получим

$$\lim_{i\to\infty}(f, \lambda_i) = 0,$$

откуда немедленно следует (4.4).

Теорема 4.2. *Пусть $f(x) \in \mathcal{D}'(X)$ и $g(y) \in \mathcal{D}'(Y)$, тогда*

$$(f(x),(g(y),\varphi(x,y))) = (g(y),(f(x),\varphi(x,y)))$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}(X \times Y)$.

Доказательство опирается на следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Любая функция $\varphi \in \mathcal{D}(X \times Y)$ представима в виде ряда*

$$\varphi(x,y) = \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(x)\psi_p(y), \tag{4.6}$$

сходящегося в $\mathcal{D}(X \times Y)$, где $\varphi_p \in \mathcal{D}(X)$ и $\psi_p \in \mathcal{D}(X)$, $p = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Мы можем считать без ограничения, что $\operatorname{supp}\varphi$ принадлежит открытому кубу $(-\pi,\pi)^{n+m}$ в $\mathbb{R}^{n+m}$ с центром в нуле и длиной ребра 2π. В противном случае воспользуемся заменой координат. Раскладывая φ в ряд Фурье, получим

$$\varphi(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n, l\in\mathbb{Z}^m} c_{k,l} e^{i(kx+ly)}, \tag{4.7}$$

где $i = \sqrt{-1}$, а

$$c_{k,l} = \frac{1}{(2\pi)^{n+m}} \int_{(-\pi,\pi)^{n+m}} e^{-i(kx+ly)}\varphi(x,y)\,dxdy.$$

Поскольку φ может быть продолжена на все множество $\mathbb{R}^{n+m}$ до бесконечно гладкой периодической функции с периодом 2π, ряд (4.7) сходится в норме пространства $C^s((-\pi,\pi)^{n+m})$ для любого целого числа $s \geq 0$.

Возьмем $\eta \in \mathcal{D}((-\pi,\pi)^n)$ и $\sigma \in \mathcal{D}((-\pi,\pi)^m)$ равные единице в окрестностях проекций $\operatorname{supp}\varphi$ на множества $(-\pi,\pi)^n$ и $(-\pi,\pi)^m$, соответственно. Несложно убедиться, что

$$\eta(x)\sigma(y)\varphi(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in (-\pi,\pi)^{n+m},$$

поэтому, домножая (4.7) на $\eta(x)\sigma(y)$, будем иметь

$$\varphi(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n, l\in\mathbb{Z}^m} c_{k,l}\eta(x)\sigma(y) e^{i(kx+ly)}. \tag{4.8}$$

При этом (4.8) сходится в пространстве $\mathcal{D}(X \times Y)$.

Для завершения доказательства занумеруем множество $\mathbb{Z}^{n+m}$ натуральными числами. Последнее, очевидно, можно сделать, т.к. $\mathbb{Z}^{n+m}$ счетно. Обозначим $\varphi_p(x) = c_{k,l}\eta(x)e^{ikx}$ и $\psi_p(y) = \sigma(y)e^{ily}$, где (k,l) — элемент множества $\mathbb{Z}^{n+m}$, соответствующий натуральному числу p. $\square$

Доказательство теоремы 4.2. Согласно лемме 4.1 функцию $\varphi \in \mathcal{D}(X \times Y)$ можно представить в виде ряда (4.6), сходящегося в пространстве $\mathcal{D}(X \times Y)$.

В силу непрерывности прямого произведения $f(x)g(y)$ имеем

$$(f(x),(g(y),\varphi(x,y))) = \sum_{p=1}^{\infty}(f(x),(g(y),\varphi_p(x)\psi_p(y))).$$

Аналогично,

$$(g(y),(f(x),\varphi(x,y))) = \sum_{p=1}^{\infty}(g(y),(f(x),\varphi_p(x)\psi_p(y))).$$

Тем самым, осталось лишь заметить, что

$$\begin{aligned}(f(x), (g(y), \varphi_p(x)\psi_p(y)))\\ = (f(x), \varphi_p(x))(g(y), \psi_p(y))\\ = (g(y), (f(x), \varphi_p(x)\psi_p(y))), \quad p = 1, 2, \dots .\end{aligned}$$

Теорема полностью доказана. □

Упражнение 4.1. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(X)$ и $g \in \mathcal{D}'(Y)$. Покажите, что

$$(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))g(y) = \lambda_1 f_1(x)g(y) + \lambda_2 f_2(x)g(y).$$

Аналогично, если $f \in \mathcal{D}'(X)$ и $g_1, g_2 \in \mathcal{D}'(Y)$, то

$$f(x)(\lambda_1 g_1(y) + \lambda_2 g_2(y)) = \lambda_1 f(x)g_1(y) + \lambda_2 f(x)g_2(y).$$

Упражнение 4.2. Пусть $f \in \mathcal{D}'(X)$ и $g \in \mathcal{D}'(Y)$. Покажите, что

$$\frac{\partial(f(x)g(y))}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(y), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{4.9}$$

и

$$\frac{\partial(f(x)g(y))}{\partial y_j} = f(x)\frac{\partial g(y)}{\partial y_j} \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь, как и выше, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$.

5. Свертка обобщенных функций

Напомним классическое определение. Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Сверткой f с g называется функция

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)\, dy. \tag{5.1}$$

Несложно увидеть, что интеграл стоящий в правой части последнего равенства определен для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ и при этом сверка $f * g$ также принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^n)$. В самом деле,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)\, dy \right| dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)||g(y)|\, dy\, dx.$$

Поменяв местами интегралы в правой части последнего неравенстве, получим

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)||g(y)|\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\, dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx.$$

Таким образом, теорема Фубини позволяет утверждать, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|\, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\, dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Попробуем теперь выяснить, как действует свертка двух функций из $L_1(\mathbb{R}^n)$ на $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, если ее понимать как обобщенную функцию. Имеем

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f * g(x)\varphi(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)\varphi(x)\, dy\, dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)g(y)\varphi(\xi + y)\, dy\, d\xi. \qquad (5.2)\end{aligned}$$

Формулу (5.2) можно было бы записать в виде

$$(f * g(x), \varphi(x)) = (f(x) * g(\xi), \varphi(\xi + y)),$$

если бы носитель функции

$$(\xi, y) \mapsto \varphi(\xi + y), \quad (\xi, y) \in \mathbb{R}^{2n},$$

был компактным множеством. К сожалению, это не так, поэтому для того, чтобы ввести определение сверки обобщенных функций из пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, нам потребуются дополнительные рассуждения.

Определение 5.1. Последовательность $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, $k = 1, 2, \ldots$, называется компактным исчерпанием единицы в $\mathbb{R}^m$, где m — некоторое натуральное число, если выполнены следующие условия:

1) для любого компакта $H \subset \mathbb{R}^m$ существует k_0 такое, что

$$\eta_k\big|_H = 1$$

для всех $k \geq k_0$;

2) для любого целого числа $s \geq 0$ существует постоянная $A > 0$ такая, что

$$\|\eta_k\|_{C^s(\mathbb{R}^m)} \leq A$$

для всех $k \geq 1$.

Пример 5.1. Предположим, что $\eta \in \mathcal{D}(B_1)$ — некоторая функция, равная единице на шаре $B_{1/2}$. В качестве компактного разбиения единицы достаточно взять

$$\eta_k(x) = \eta\left(\frac{x}{k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Определение 5.2. Говорим, что обобщенные функции $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ допускают свертку $f * g$, если для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и любого компактного исчерпания единицы $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, $k = 1, 2, \ldots$, существует предел

$$(f * g, \varphi) = \lim_{k \to \infty} (f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)). \tag{5.3}$$

Несложно увидеть, что предел в (5.3) не зависит от выбора компактного исчерпания единицы. В самом деле, пусть η_k и λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, — два компактных исчерпания единицы. Построим третье компактное исчерпание единицы, полагая

$$\sigma_k(x, y) = \begin{cases} \eta_k(x, y), & k \text{ нечетно}, \\ \lambda_k(x, y), & k \text{ четно}, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Согласно определению (5.2) для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ последовательность

$$(f(x)g(y), \sigma_k(x, y)\varphi(x + y)), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

имеет предел, совпадающий, очевидно, с пределом всякой ее подпоследовательности. В частности,

$$\lim_{k \to \infty} (f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) = \lim_{k \to \infty} (f(x)g(y), \lambda_k(x, y)\varphi(x + y)).$$

Понятно также, что (5.3) определяет линейный функционал на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, непрерывность которого следует из теоремы 2.1, поскольку каждый из функционалов

$$\varphi \mapsto (f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5.4}$$

является непрерывным.

Упражнение 5.1. Приведите подробное доказательство непрерывности функционалов (5.4).

Пример 5.2. Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\eta_k \in (\mathbb{R}^{2n})$, $k = 1, 2, \ldots,$ — компактное разбиение единицы. Применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости, получим

$$(f * g, \varphi) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)\eta_k(x,y)\varphi(x+y)\,dx\,dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)\varphi(x+y)\,dx\,dy,$$

что полностью согласуется с (5.2).

Упражнение 5.2. Пусть для обобщенных функций $f, g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^m)$ существует сверка $|f| * |g| \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^m)$ в классическом смысле. Покажите, что существует сверка $f * g$ в обобщенном смысле (5.3) и эта свертка совпадает с классической сверткой (5.1).

Решение. Возьмем $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. По теореме Фубини $\varphi(x)f(x-y)g(y) \in L_1(\mathbb{R}^{2m})$ и при этом

$$(f * g, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^{2m}} \varphi(x)f(x-y)g(y)\,dxdy.$$

Совершая в последнем интеграле замену переменных $x \rightleftharpoons x - y$, будем иметь

$$(f * g, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^{2m}} \varphi(x+y)f(x)g(y)\,dxdy.$$

В частности, $\varphi(x+y)f(x)g(y) \in L_1(\mathbb{R}^{2m})$ и, применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости, мы можем утверждать, что

$$\lim_{k\to\infty} (f(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2m}} \varphi(x+y)f(x)g(y)\eta_k(x,y)\,dxdy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{2m}} \varphi(x+y)f(x)g(y)\,dxdy$$

для любого компактного исчерпания единицы $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2m})$. Последнее, очевидно, доказывает существование сверки в обобщенном смысле и совпадение ее с классической.

Упражнение 5.3. Пусть $f_1, f_2, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ такие, что существуют свертки $f_1 * g$ и $f_2 * g$. Покажите, что

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) * g = \lambda_1 f_1 * g + \lambda_2 f_2 * g$$

для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, причем свертка в левой части последнего равенства также существует. Аналогично,

$$g * (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 g * f_1 + \lambda_2 g * f_2$$

для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Теорема 5.1 (о коммутативности свертки)**.** *Предположим, что существует сверка $f * g$, где $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует свертка $g * f$ и при этом $f * g = g * f$.*

Доказательство. По определению прямого произведения, имеем

$$(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = (f(x), (g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)))$$

и

$$(g(x)f(y), \eta_k(y,x)\varphi(y+x)) = (g(x), (f(y), \eta_k(y,x)\varphi(y+x))).$$

В то же время, из теоремы 4.2 вытекает, что

$$(f(x),(g(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y)))=(g(x),(f(y),\eta_k(y,x)\varphi(y+x))),$$

поэтому

$$\lim_{k\to\infty}(f(x)g(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y))=\lim_{k\to\infty}(g(x)f(y),\eta_k(y,x)\varphi(y+x)) \tag{5.5}$$

для произвольной функции $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и компактного исчерпания единицы $\eta_k\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, $k=1,2,\ldots$. Причем существование одного из пределов в формуле (5.5) влечет за собой существование второго.

Теорема полностью доказана. □

Теорема 5.2. *Пусть $f,g\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда если носитель хотя бы одной из этих двух функций — компактное множество, то сверка $f*g$ существует и при этом*

$$(f*g,\varphi)=(f(x),(g(y),\varphi(x+y))) \tag{5.6}$$

для всех $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что выражение в правой части формулы (5.6) корректно определено. Действительно, если $\operatorname{supp} f$ — компакт, то f можно продолжить на все пространство $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (см. с. 8), в котором ввиду теоремы 4.1 содержится функция

$$x\mapsto(g(y),\varphi(x+y)),\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{5.7}$$

В свою очередь, если компактом является $\operatorname{supp} g$, то функция (5.7) является элементом $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. В самом деле, взяв $\tau\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, равное единице в окрестности $\operatorname{supp} g$, получим $\tau g=g$. Тем самым,

$$(g(y),\varphi(x+y))=(\tau(y)g(y),\varphi(x+y))=(g(y),\tau(y)\varphi(x+y))=0$$

для всех x, не принадлежащих проекции носителя функции

$$(x,y)\mapsto\tau(y)\varphi(x+y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^{2n}, \tag{5.8}$$

на первые n координат.

Докажем формулу (5.6) в случае, когда $\operatorname{supp} g$ — компакт. Для любого $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и компактного исчерпания единицы $\eta_k\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, $k=1,2,\ldots$, имеем

$$\eta_k(x,y)\tau(y)\varphi(x+y)=\tau(y)\varphi(x+y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^{2n},$$

для всех достаточно больших k, т.к. носитель (5.8) — компактное множество. Таким образом,

$$\begin{aligned}(f*g,\varphi)&=\lim_{k\to\infty}(f(x)g(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y))\\&=\lim_{k\to\infty}(f(x),(g(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y)))\\&=\lim_{k\to\infty}(f(x),(g(y),\eta_k(x,y)\tau(y)\varphi(x+y)))\\&=(f(x),(g(y),\tau(y)\varphi(x+y)))=(f(x),(g(y),\varphi(x+y))).\end{aligned}$$

Предположим теперь, что компактом является $\operatorname{supp} f$. Возьмем $\sigma\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, равное единице в окрестности $\operatorname{supp} f$. Как и выше, для любой функции $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и компактного исчерпания единицы $\eta_k\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, $k=1,2,\ldots$, получим

$$\eta_k(x,y)\sigma(x)\varphi(x+y)=\sigma(x)\varphi(x+y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^{2n},$$

для всех достаточно больших k, поэтому

$$\begin{aligned}(f*g,\varphi) &= \lim_{k\to\infty}(f(x)g(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y))\\ &= \lim_{k\to\infty}(f(x),(g(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y)))\\ &= \lim_{k\to\infty}(f(x),(g(y),\eta_k(x,y)\sigma(x)\varphi(x+y)))\\ &= (f(x),(g(y),\sigma(x)\varphi(x+y))) = (f(x),(g(y),\varphi(x+y)))\end{aligned}$$

и мы снова приходим к (5.6).

Доказательство завершено. □

Упражнение 5.4. Покажите, что

$$f*\delta = f$$

для любой обобщенной функции $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, где δ — дельта-функция Дирака.

Решение. Применяя теорему 5.2, находим

$$(f*\delta,\varphi) = (f(x),(\delta(y),\varphi(x+y))) = (f(x),\varphi(x))$$

для всех $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 5.3. *Пусть $f,g\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ такие, что существует свертка $f*g$, тогда существуют свертки $(\partial f/\partial x_i)*g$, $f*(\partial g/\partial x_i)$ и при этом*

$$\frac{\partial(f*g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}*g = f*\frac{\partial g}{\partial x_i},\quad i=1,2,\dots,n. \tag{5.9}$$

Доказательство. Достаточно показать справедливость первого равенства в формуле (5.9), второе будет следовать из него в силу коммутативности свертки. Предположим, что $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\eta_k\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $k=1,2,\dots$, — некоторое разбиение единицы. Имеем

$$\left(\frac{\partial(f*g)}{\partial x_i},\varphi\right) = -\left(f*g,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = -\lim_{k\to\infty}\left(f(x)g(y),\eta_k(x,y)\frac{\partial\varphi(x+y)}{\partial x_i}\right). \tag{5.10}$$

Докажем, что существует предел

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}*g,\varphi\right) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}g(y),\varphi\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}g(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right)$$

и этот предел равен правой части (5.10). Принимая во внимание (4.9), получим

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}g(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right) &= -\left(f(x)g(y),\frac{\partial(\eta_k(x,y)\varphi(x+y))}{\partial x_i}\right)\\ &= -\left(f(x)g(y),\frac{\partial\eta_k(x,y)}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right) - \left(f(x)g(y),\eta_k(x,y)\frac{\partial\varphi(x+y)}{\partial x_i}\right).\end{aligned}$$

Таким образом, нужно доказать, что

$$\lim_{k\to\infty}\left(f(x)g(y),\frac{\partial\eta_k(x,y)}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right) = 0,\quad i=1,2,\dots,n. \tag{5.11}$$

Рассмотрим компактное разбиение единицы

$$\lambda_k = \eta_k + \frac{\partial\eta_k}{\partial x_i},\quad k=1,2,\dots.$$

Поскольку предел в определении свертки не зависит от выбора компактного исчерпания единицы, будем иметь

$$\lim_{k\to\infty}(f(x)g(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = \lim_{k\to\infty}(f(x)g(y),\lambda_k(x,y)\varphi(x+y))$$

или, другими словами,

$$\lim_{k\to\infty}(f(x)g(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = \lim_{k\to\infty}(f(x)g(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y)) \\ + \lim_{k\to\infty}\left(f(x)g(y),\frac{\partial\eta_k(x,y)}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right),$$

откуда немедленно следует (5.11).

Теорема полностью доказана. □

6. Теоремы существования и единственности решения уравнения $\mathcal{L}u = f(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

В этом разделе под $\mathcal{L}$ мы будем подразумевать линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{L} = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha\partial^\alpha, \quad c_\alpha\in\mathbb{C},\ |\alpha|\le m.$$

Определение 6.1. Фундаментальным решением дифференциального оператора $\mathcal{L}$ называется обобщенная функция $\mathcal{E}\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\mathcal{L}\mathcal{E}(x) = \delta(x),$$

где $\delta\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ — дельта-функция Дирака.

Пример 6.1. Фундаментальным решением обыкновенного дифференциального оператора

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dx}$$

является θ-функция Хевисайда (см. упражнение 2.2).

Упражнение 6.1. Можно ли утверждать, что фундаментальное решение дифференциального оператора единственно?

Теорема 6.1 (о существовании решения)**.** *Пусть $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ — некоторая обобщенная функция такая, что существует свертка*

$$u = f * \mathcal{E}, \tag{6.1}$$

где $\mathcal{E}$ — фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$, тогда

$$\mathcal{L}u = f. \tag{6.2}$$

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\mathcal{L}u = f*(\mathcal{L}\mathcal{E}) = f*\delta = f.$$

Теорема полностью доказана. □

Теорема 6.2 (о единственности решения)**.** *Пусть $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет уравнению* (6.2) *и при этом существует свертка $u*\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$, тогда для функции u справедливо равенство* (6.1).

Доказательство. Имеем, очевидно,

$$\mathcal{L}(u * \mathcal{E}) = u * (\mathcal{L}\mathcal{E}) = u * \delta = u$$

и

$$\mathcal{L}(u * \mathcal{E}) = (\mathcal{L}u) * \mathcal{E} = f * \mathcal{E},$$

что немедленно доказывает теорему. □

7. Задача Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения

В этом разделе под $\mathcal{L}$ мы будем понимать обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{L} = \left(\frac{d}{dx}\right)^m + a_{m-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} + \ldots + a_1\frac{d}{dx} + a_0, \quad a_s \in \mathbb{C},\ s = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Предположим, что $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $w_p \in \mathbb{C}$, $p = 0, 1, \ldots, m-1$. Известно, что задача Коши

$$\mathcal{L}w = f(x), \quad w^{(p)}(0) = w_p,\ p = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{7.1}$$

имеет единственное решение, определенное на всей вещественной прямой [3].

Лемма 7.1. *Пусть w — решение задачи* (7.1). *Обозначим*

$$\tilde{w}(x) = \theta(x)w(x) \tag{7.2}$$

и

$$\tilde{f}(x) = \theta(x)f(x). \tag{7.3}$$

Тогда

$$\mathcal{L}\tilde{w} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \delta^{(s-p-1)}(x) + \tilde{f}(x). \tag{7.4}$$

Доказательство. Рассматривая $\tilde{w}$ как обобщенную функцию из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, получим

$$(\mathcal{L}\tilde{w}, \varphi) = (\tilde{w}, \mathcal{L}^*\varphi) \tag{7.5}$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, где

$$\mathcal{L}^* = (-1)^m\left(\frac{d}{dx}\right)^m + (-1)^{m-1}a_{m-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} + \ldots + a_2\left(\frac{d}{dx}\right)^2 - a_1\frac{d}{dx} + a_0$$

— дифференциальный оператор, формально сопряженный к $\mathcal{L}$. Ввиду того, что $\tilde{w} \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, справедливо соотношение

$$(\tilde{w}, \mathcal{L}^*\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{w}\mathcal{L}^*\varphi\, dx,$$

откуда, полагая $a_m = 1$, будем иметь

$$(\tilde{w}, \mathcal{L}^*\varphi) = \sum_{s=0}^{m}(-1)^s a_s \int_0^\infty w\varphi^{(s)}\, dx. \tag{7.6}$$

Интегрируя по частям, несложно убедиться, что

$$\int_0^\infty w\varphi^{(s)}\, dx = \sum_{p=0}^{s-1}(-1)^{p+1}w^{(p)}(0)\varphi^{(s-p-1)}(0) + (-1)^s\int_0^\infty w^{(s)}\varphi\, dx, \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, (7.6) влечет за собой равенство

$$(\tilde{w}, \mathcal{L}^*\varphi) = \sum_{s=1}^{m} \sum_{p=0}^{s-1} (-1)^{s+p+1} a_s w^{(p)}(0) \varphi^{(s-p-1)}(0) + \int_0^\infty \mathcal{L}w\varphi \, dx,$$

объединяя которое с (7.1) и (7.5), завершает доказательство. □

Теорема 7.1. *Пусть функция $\mathcal{W} \in C^\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяет задаче Коши*

$$\mathcal{L}\mathcal{W} = 0, \quad \mathcal{W}^{(p)}(0) = 0, \ p = 0, 1, \dots, m-2, \quad \mathcal{W}^{(m-1)}(0) = 1, \tag{7.7}$$

тогда $\mathcal{E}(x) = \theta(x)\mathcal{W}(x)$ — фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$.

Доказательство. Согласно лемме 7.1, имеем

$$\mathcal{L}\mathcal{E}(x) = \delta(x).$$

Теорема полностью доказана. □

Лемма 7.2. *Множество $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} f \in [0, \infty)\}$ является коммутативной алгеброй с единицей относительно операций свертки, сложения и умножения на скаляр.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любых $f, g \in \mathcal{A}$ существует свертка $f * g$ и эта сверка содержится в $\mathcal{A}$. Возьмем некоторое вещественное число $\varepsilon > 0$ и функцию $\tau \in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющую условиям $\tau|_{(-\infty,-1]} = 0$ и $\tau|_{[-1/2,\infty)} = 1$. Обозначим

$$\tau_\varepsilon(x) = \tau\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пусть также $f, g \in \mathcal{A}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $k = 1, 2, \dots$, — компактное исчерпание единицы. Поскольку $\tau_\varepsilon f = f$ и $\tau_\varepsilon g = g$, получим

$$(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = (f(x)g(y), \eta_k(x,y)\tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

откуда ввиду того, что носитель функции

$$(x, y) \mapsto \tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

— компактное множество, будем иметь

$$(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = (f(x)g(y), \tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y))$$

для всех достаточно больших k. Таким образом, сверка $f * g$ существует, причем

$$(f * g, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (f(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = (f(x)g(y), \tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y)).$$

Несложно увидеть, $\operatorname{supp} f * g \subset [0, \infty)$. В самом деле, для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителем, принадлежащим промежутку $(-\infty, 0)$, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y) = 0$ для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, что, очевидно, влечет за собой равенство $(f * g, \varphi) = 0$.

Для завершения доказательства остается заметить, что единицей в $\mathcal{A}$ является δ-функция Дирака. □

Упражнение 7.1. Докажите, что $\mathcal{A}$ — ассоциативная алгебра, т.е.

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

для любых $f, g, h \in \mathcal{A}$.

Теорема 7.2. *Пусть w — решение задачи Коши* (7.1), *тогда*

$$w(x) = \sum_{s=1}^{m} \sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \mathcal{W}^{(s-p-1)}(x) + \int_0^x \mathcal{W}(x-\xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{7.8}$$

где $\mathcal{W}$ — решение задачи (7.7).

Доказательство. Используя лемму 7.1 и теорему 6.2, получим

$$\tilde{w}(x) = \sum_{s=1}^{m} \sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \delta^{(s-p-1)} * \mathcal{E}(x) + \tilde{f} * \mathcal{E}(x), \tag{7.9}$$

где $\mathcal{E}(x) = \theta(x)\mathcal{W}(x)$ — фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$, а функции $\tilde{w}$ и $\tilde{f}$ определены с помощью (7.2) и (7.3), соответственно. Согласно теореме 5.3

$$\delta^{(s-p-1)} * \mathcal{E}(x) = \delta * \mathcal{E}^{(s-p-1)}(x),$$

откуда, учитывая, что

$$\mathcal{E}^{(s-p-1)}(x) = \theta(x)\mathcal{W}^{(s-p-1)}(x), \quad 1 \le s \le m,\ 0 \le p \le s-1,$$

будем иметь

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \delta^{(s-p-1)} * \mathcal{E}(x) = \theta(x) \sum_{s=1}^{m} \sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \mathcal{W}^{(s-p-1)}(x).$$

Так как $\tilde{f}, \mathcal{E} \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, для второго слагаемого в правой части (7.9) справедливо равенство

$$\tilde{f} * \mathcal{E}(x) = \theta(x) \int_0^x \mathcal{W}(x-\xi) f(\xi)\, d\xi$$

(см. упражнение 5.2). Тем самым, (7.9) принимает вид

$$\tilde{w}(x) = \theta(x) \sum_{s=1}^{m} \sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \mathcal{W}^{(s-p-1)}(x) + \theta(x) \int_0^x \mathcal{W}(x-\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

и мы доказали формулу (7.8) для всех $x > 0$. Покажем, что формула (7.8) также справедлива и для всех $x < 0$. Справедливость (7.8) в точке $x = 0$, очевидно, следует из непрерывности правой части этой формулы.

Несложно увидеть, что функция

$$v(x) = (-1)^m w(-x)$$

удовлетворяет задаче Коши

$$(-1)^m \mathcal{L}^* v = f(-x), \quad v^{(p)}(0) = (-1)^{p+m} w_p,\ p = 0, 1, \ldots, m-1,$$

где $\mathcal{L}^*$ — дифференциальный оператор, формально сопряженный к $\mathcal{L}$ (см. с. 18). Полагая, далее,

$$\mathcal{V}(x) = (-1)^{m-1}\mathcal{W}(-x),$$

получим ввиду теоремы 7.1, что $\theta(x)\mathcal{V}(x)$ — фундаментальное решение оператора $(-1)^m \mathcal{L}^*$. Тем самым, заменяя в рассуждениях, приведенных выше, функцию $\tilde{w}$ на $\tilde{v}(x) = \theta(x)v(x)$, будем иметь

$$\tilde{v}(x) = \theta(x) \sum_{s=1}^{m} \sum_{p=0}^{s-1} (-1)^{s+p} a_s w_p \mathcal{V}^{(s-p-1)}(x) + \theta(x) \int_0^x \mathcal{V}(x-\xi) f(-\xi)\, d\xi,$$

откуда, в свою очередь, следует справедливость (7.8) для всех $x < 0$.

Теорема полностью доказана. □

8. Фундаментальное решение оператора Лапласа

Нам будут полезны следующие два утверждения.

Теорема 8.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, — ограниченная область с кусочно гладкой границей и $h \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, тогда*

$$\int_\Omega \frac{\partial h}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} h \cos(x_i, \nu)\, dS, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8.1}$$

где $\cos(x_i, \nu)$ — косинус угла между i-ым координатным ортом и вектором внешней нормали ν к границе области Ω, а dS — элемент $(n-1)$-мерного объема $\partial\Omega$.

Доказательство. В общей формуле Стокса[1]

$$\int_{\partial\omega} \omega = \int_\Omega d\omega$$

возьмем $\omega = (-1)^{i-1} h(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$ [1]. □

Теорема 8.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, — ограниченная область с кусочно гладкой границей и при этом $f, g \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, тогда*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g\, dx = \int_{\partial\Omega} fg \cos(x_i, \nu)\, dS - \int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8.2}$$

где $\cos(x_i, \nu)$ — косинус угла между i-ым координатным ортом и вектором внешней нормали ν к границе области Ω, а dS — элемент $(n-1)$-мерного объема $\partial\Omega$.

Доказательство. Полагаем $h = fg$ в теореме 8.1. □

Формула (8.1) является многомерным аналогом хорошо известной формулы Ньютона-Лейбница, в то время как (8.2) представляет из себя правило интегрирования по частям. Выражения (8.1) и (8.2) принято также называть формулами Грина.

Теорема 8.3. *Пусть*

$$\mathcal{E}_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln |x|, & n = 2, \\ -\dfrac{1}{(n-2)|S_1|} |x|^{2-n}, & n \geq 3, \end{cases} \tag{8.3}$$

где $|S_1|$ — $(n-1)$-мерный объем единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, тогда

$$\Delta \mathcal{E}_n = \delta(x)$$

или, другими словами, $\mathcal{E}_n$ является фундаментальный решением оператора Лапласа.

[1]Считаем, что ориентация $\partial\Omega$ согласована с нормалью ν, внешней по отношению к Ω.

Доказательство. Для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ получим

$$(\Delta\mathcal{E}_n, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}_n \Delta\varphi\, dx = \lim_{r\to+0} \int_{B_R\setminus B_r} \mathcal{E}_n \Delta\varphi\, dx, \tag{8.4}$$

где $R > 0$ — некоторое вещественное число такое, что $\operatorname{supp}\varphi \subset B_R$. При этом, интегрируя по частям, будем, очевидно, иметь

$$\int_{B_R\setminus B_r} \mathcal{E}_n \Delta\varphi\, dx = \int_{\partial(B_R\setminus B_r)} \mathcal{E}_n \sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \cos(x_i, \nu)\, dS - \int_{B_R\setminus B_r} \sum_{i=1}^n \frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\, dx,$$

где $\nu = (\cos(x_1, \nu), \cos(x_2, \nu), \dots, \cos(x_n, \nu))$ — вектор единичной нормали к $\partial(B_R \setminus B_r)$, внешней по отношению к области $B_R \setminus \overline{B}_r$, откуда ввиду того, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \cos(x_i, \nu),$$

следует равенство

$$\int_{B_R\setminus B_r} \mathcal{E}_n \Delta\varphi\, dx = \int_{\partial(B_R\setminus B_r)} \mathcal{E}_n \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, dS - \int_{B_R\setminus B_r} \sum_{i=1}^n \frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\, dx.$$

Аналогично, интегрируя по частям, находим

$$\int_{B_R\setminus B_r} \sum_{i=1}^n \frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial(B_R\setminus B_r)} \frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\nu} \varphi\, dS - \int_{B_R\setminus B_r} \Delta\mathcal{E}_n \varphi\, dx.$$

Таким образом, объединяя последние две формулы, приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} \int_{B_R\setminus B_r} \mathcal{E}_n \Delta\varphi\, dx = \int_{\partial(B_R\setminus B_r)} \mathcal{E}_n \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, dS - \int_{\partial(B_R\setminus B_r)} \frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\nu} \varphi\, dS \\ + \int_{B_R\setminus B_r} \Delta\mathcal{E}_n \varphi\, dx. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Имеем

$$\left| \int_{\partial(B_R\setminus B_r)} \mathcal{E}_n \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, dS \right| \le \int_{S_r} \mathcal{E}_n \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \right| dS \le const\, r^{n-1}\, \mathcal{E}_n|_{S_r},$$

где $const > 0$ не зависит от r. Таким образом, первый интеграл в правой части (8.5) стремится к нулю при $r \to \infty$.

Далее, из определения $\mathcal{E}_n$ следует, что

$$\left. \frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\nu} \right|_{S_r} = -\frac{1}{|S_r|},$$

где $|S_r|$ — $(n-1)$-мерный объем сферы радиуса r в $\mathbb{R}^n$, поэтому

$$\int_{\partial(B_R\setminus B_r)} \frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\nu} \varphi\, dS = \int_{S_r} \frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\nu} \varphi\, dS = -\frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} \varphi\, dS.$$

Имеем также

$$\frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} \varphi\, dS = \varphi(0) + \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} (\varphi(x) - \varphi(0))\, dS,$$

где

$$\left| \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} (\varphi(x) - \varphi(0))\, dS \right| \le \sup_{x\in S_r} |\varphi(x) - \varphi(0)| \to 0 \quad \text{при } r \to +0.$$

Тем самым, для второго интеграла в правой части (8.5) справедливо соотношение

$$\lim_{r\to+0}\int_{\partial(B_R\setminus B_r)}\frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\nu}\varphi\,dS=-\varphi(0).$$

Наконец, третий интеграл в правой части (8.5) равен нулю. В самом деле, переходя к многомерным полярным координатам $(r,\vartheta_1,\vartheta_2,\dots,\vartheta_{n-1})$, получим

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_{S_1},$$

где Δ_{S_1} — оператор Лапласа-Бельтрами на единичной сфере, зависящий только от угловых переменных $\vartheta_1,\vartheta_2,\dots,\vartheta_{n-1}$, поэтому

$$\Delta\mathcal{E}_n=E_n''+\frac{n-1}{r}E_n'=0,\quad r=|x|>0,$$

где

$$E_n(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ln r, & n=2,\\ -\dfrac{1}{(n-2)|S_1|}r^{2-n}, & n\geq 3.\end{cases}$$

Таким образом, формула (8.5) позволяет утверждать, что

$$\lim_{r\to+0}\int_{B_R\setminus B_r}\mathcal{E}_n\Delta\varphi\,dx=\varphi(0).$$

Объединяя последнее равенство и (8.4), завершаем доказательство. □

9. Фундаментальное решение оператора теплопроводности

Теорема 9.1. *Функция*

$$\mathcal{E}_n(x,t)=\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}},\quad (x,t)\in\mathbb{R}^{n+1},\quad a>0,\tag{9.1}$$

является фундаментальным решением оператора теплопроводности $\partial_t-a^2\Delta$, *т.е.*

$$\partial_t\mathcal{E}_n-a^2\Delta\mathcal{E}_n=\delta(x,t).$$

Доказательство. Предположим, что $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и при этом $R>0$ — некоторое вещественное число такое, что $\operatorname{supp}\varphi\subset B_R\times\mathbb{R}$. Поскольку $\mathcal{E}_n\in L_{1,loc}(\mathbb{R}^{n+1})$, справедливо соотношение

$$\begin{aligned}(\mathcal{E}_n,\varphi)&=-\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{E}_n(\varphi_t+a^2\Delta\varphi)\,dx\,dt\\ &=-\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{r\to+0}\int_\varepsilon^\infty\int_{B_R\setminus B_r}\mathcal{E}_n(\varphi_t+a^2\Delta\varphi)\,dx\,dt.\end{aligned}\tag{9.2}$$

Для первого слагаемого в правой части очевидного равенства

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^\infty\int_{B_R\setminus B_r}\mathcal{E}_n(\varphi_t+a^2\Delta\varphi)\,dx\,dt&=\int_\varepsilon^\infty\int_{B_R\setminus B_r}\mathcal{E}_n\varphi_t\,dx\,dt\\ &+a^2\int_\varepsilon^\infty\int_{B_R\setminus B_r}\mathcal{E}_n\Delta\varphi\,dx\,dt\end{aligned}\tag{9.3}$$

будем иметь

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{B_R\setminus B_r}\mathcal{E}_n\varphi_t\,dx\,dt=\int_{B_R\setminus B_r}\int_{\varepsilon}^{\infty}\mathcal{E}_n\varphi_t\,dt\,dx$$
$$=-\int_{B_R\setminus B_r}\mathcal{E}_n(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\,dx-\int_{B_R\setminus B_r}\int_{\varepsilon}^{\infty}\partial_t\mathcal{E}_n\varphi\,dt\,dx.$$

В свою очередь, для второго слагаемого, интегрируя по частям, получим

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{B_R\setminus B_r}\mathcal{E}_n\Delta\varphi\,dx=\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\partial(B_R\setminus B_r)}\mathcal{E}_n\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,dS-\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\partial(B_R\setminus B_r)}\frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\nu}\varphi\,dS$$
$$+\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{B_R\setminus B_r}\Delta\mathcal{E}_n\varphi\,dx,$$

где ν — вектор единичной нормали к границе шарового слоя $B_R\setminus\overline{B}_r$, внешней по отношению к этому слою[1].

Тем самым, (9.3) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{B_R\setminus B_r}\mathcal{E}_n(\varphi_t+a^2\Delta\varphi)\,dx\,dt=&-\int_{B_R\setminus B_r}\mathcal{E}_n(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\,dx\\&+a^2\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\partial(B_R\setminus B_r)}\mathcal{E}_n\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,dS\\&-a^2\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\partial(B_R\setminus B_r)}\frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\nu}\varphi\,dS\\&-\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{B_R\setminus B_r}(\partial_t\mathcal{E}_n-a^2\Delta\mathcal{E}_n)\varphi\,dx\,dt.\end{aligned}\tag{9.4}$$

Последний интеграл в правой части (9.4) равен нулю, т.к.

$$\partial_t\mathcal{E}_n-a^2\Delta\mathcal{E}_n=0\quad\text{в }\mathbb{R}^n\times(0,\infty).\tag{9.5}$$

Ввиду того, что функция $\mathcal{E}_n$ и ее производные равномерно ограничены на множестве $\mathbb{R}^n\times(\varepsilon,\infty)$, будем также иметь

$$\lim_{r\to+0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\partial(B_R\setminus B_r)}\mathcal{E}_n\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,dS=\lim_{r\to+0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{S_r}\mathcal{E}_n\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,dS=0$$

и

$$\lim_{r\to+0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\partial(B_R\setminus B_r)}\frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\nu}\varphi\,dS=\lim_{r\to+0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{S_r}\frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\nu}\varphi\,dS=0.$$

Таким образом, (9.4) влечет за собой соотношение

$$\begin{aligned}\lim_{r\to+0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{B_R\setminus B_r}\mathcal{E}_n(\varphi_t+a^2\Delta\varphi)\,dx\,dt&=-\int_{B_R}\mathcal{E}_n(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\,dx\\&=-\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{E}_n(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\,dx.\end{aligned}\tag{9.6}$$

Переходя в правой части (9.6) к новым переменным $\xi=x/(2a\sqrt{\varepsilon})$, получим

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{E}_n(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\,dx=\frac{1}{\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|\xi|^2}\varphi(2a\sqrt{\varepsilon}\xi,\varepsilon)\,d\xi,$$

[1]Сравните с формулой (8.5), с. 22.

откуда согласно теореме Лебега об ограниченной сходимости следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{E}_n(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\,dx=\frac{1}{\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|\xi|^2}\varphi(0)\,d\xi=\varphi(0).$$

Тем самым, справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{r\to+0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{B_R\setminus B_r}\mathcal{E}_n(\varphi_t+a^2\Delta\varphi)\,dx\,dt=-\varphi(0),$$

объединяя которое с (9.2), завершаем доказательство. □

10. Фундаментальное решение одномерного волнового оператора

Теорема 10.1. *Функция*

$$\mathcal{E}_1(x,t)=\frac{1}{2a}\theta(at-|x|),\quad (x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad a>0, \tag{10.1}$$

является фундаментальным решением волнового оператора $\Box_a=\partial_t^2-a^2\partial_x^2$, *т.е.*

$$\Box_a\mathcal{E}_1=\delta(x,t). \tag{10.2}$$

Доказательство. Несложно увидеть, что

$$\Box_a=(\partial_t+a\partial_x)(\partial_t-a\partial_x).$$

Совершая, далее, замену переменных

$$\begin{cases}x=a\xi-a\eta,\\ t=\ \ \xi+\ \ \eta,\end{cases}$$

будем иметь

$$\begin{cases}\partial_\xi=\partial_t+a\partial_x,\\ \partial_\eta=\partial_t-a\partial_x.\end{cases}$$

Таким образом, уравнение (10.2) может быть преобразовано к виду

$$\partial_\xi\partial_\eta\tilde{\mathcal{E}}_1=\tilde{\delta}(\xi,\eta), \tag{10.3}$$

где

$$\tilde{\mathcal{E}}_1(\xi,\eta)=\mathcal{E}_1(a\xi-a\eta,\xi+\eta)$$

и

$$\tilde{\delta}(\xi,\eta)=\delta(a\xi-a\eta,\xi+\eta).$$

Из определения замены переменных у обобщенных функций следует, что

$$\tilde{\delta}(\xi,\eta)=\frac{1}{2a}\delta(\xi)\delta(\eta), \tag{10.4}$$

поэтому функция

$$\tilde{\mathcal{E}}_1(\xi,\eta)=\frac{1}{2a}\theta(\xi)\theta(\eta)$$

является решением уравнения (10.3). Возвращаясь в последнем выражении к переменным x и t, получим

$$\mathcal{E}_1(x,t)=\frac{1}{2a}\theta\left(\frac{at+x}{2a}\right)\theta\left(\frac{at-x}{2a}\right)=\frac{1}{2a}\theta(at-|x|).$$

Теорема полностью доказана. □

Упражнение 10.1. Приведите доказательство формулы (10.4).

Решение. Для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ из определения замены переменной у обобщенных функций, с. 4, находим

$$(\tilde{\delta}(\xi,\eta),\varphi(\xi,\eta)) = \left(\delta(x,t),\varphi\left(\frac{at+x}{2a},\frac{at-x}{2a}\right)\left|\det\left\|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,t)}\right\|\right|\right) = \frac{1}{2a}\varphi(0,0).$$

Тем самым, остается заметить, что

$$\left(\frac{1}{2a}\delta(\xi)\delta(\eta),\varphi(\xi,\eta)\right) = \frac{1}{2a}(\delta(\xi),((\delta(\eta),\varphi(\xi,\eta)))) = \frac{1}{2a}(\delta(\xi),\varphi(\xi,0)) = \frac{1}{2a}\varphi(0,0)$$

согласно определению прямого произведения.

Фундаментальными решениями волнового оператора в многомерном случае являются следующие функции:

$$\mathcal{E}_2(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}, \quad n=2, \tag{10.5}$$

и

$$\mathcal{E}_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x), \quad n=3. \tag{10.6}$$

11. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Задачей Коши для уравнения теплопроводности называется задача о нахождении функции u, удовлетворяющей соотношениям

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(x,t), & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x). \end{cases} \tag{11.1}$$

Мы будем говорить об обобщенной и классической постановках этой задачи.

Определение 11.1. Классическим решением задачи Коши для уравнения теплопроводности называется функция $u \in C(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ такая, что $u(\cdot,t)\in C^2(\mathbb{R}^n)$ для всех $t\in(0,\infty)$, $u(x,\cdot)\in C^1(0,\infty)$ для всех $x\in\mathbb{R}^n$ и при этом выполнены соотношения (11.1).

Из существования классического решения (11.1), в частности, следует, что функции f и u_0 должны удовлетворять условиям $f\in C(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$ и $u_0\in C(\mathbb{R}^n)$. Однако, как будет показано в теореме 11.2 эти условия придется значительно усилить.

Лемма 11.1. *Пусть $u\in C(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ — некоторая функция такая, что $u(\cdot,t)\in C^2(\mathbb{R}^n)$ для всех $t\in(0,\infty)$, $u(x,\cdot)\in C^1(0,\infty)$ для всех $x\in\mathbb{R}^n$ и при этом $u_t-\Delta u\in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Обозначим*

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & t\ge 0,\\ 0, & t<0, \end{cases} \tag{11.2}$$

и

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} u_t-\Delta u, & t>0,\\ 0, & t\le 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\tilde{u}_t = \Delta\tilde{u} + \tilde{f}(x,t) + u(x,0)\delta(t)$$

в смысле обобщенных функций из пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

Доказательство. Для всякого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ имеем

$$(\tilde{u}_t - \Delta\tilde{u}, \varphi) = (\tilde{u}, -\varphi_t - \Delta\varphi) = -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi_t \, dtdx - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\varphi \, dxdt. \quad (11.3)$$

Предположим, что $\varepsilon > 0$ — некоторое вещественное число. Интегрируя по частям, несложно увидеть, что

$$\int_\varepsilon^\infty u(x,t)\varphi_t(x,t)\, dt = -u(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon) - \int_\varepsilon^\infty u_t(x,t)\varphi(x,t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\Delta\varphi(x,t)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u(x,t)\varphi(x,t)\, dx, \quad t \in (\varepsilon, \infty). \quad (11.4)$$

Таким образом,

$$\int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi_t \, dtdx + \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\varphi \, dxdt$$
$$= \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u - u_t)\varphi \, dxdt - \int_{\mathbb{R}^n} u(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\, dx,$$

откуда, переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi_t \, dtdx + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\varphi \, dxdt$$
$$= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u - u_t)\varphi \, dxdt - \int_{\mathbb{R}^n} u(x,0)\varphi(x,0)\, dx.$$

Объединяя последнее соотношение с формулой (11.3), будем иметь

$$(\tilde{u}_t - \Delta\tilde{u}, \varphi) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (u_t - \Delta u)\varphi \, dxdt + \int_{\mathbb{R}^n} u(x,0)\varphi(x,0)\, dx$$

или, другими словами,

$$(\tilde{u}_t - \Delta\tilde{u}, \varphi) = (\tilde{f}(x,t) + u(x,0)\delta(t), \varphi).$$

Лемма полностью доказана. □

Определение 11.2. Под $\mathcal{M}$ будем понимать множество измеримых функций, равных нулю п.в. на $\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0)$ и принадлежащих $L_\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ для всех вещественных чисел $T > 0$.

Лемма 11.2. *Для любой функции $f \in \mathcal{M}$ существует свертка $\mathcal{E}_n * f \in \mathcal{M}$, где $\mathcal{E}_n$ — фундаментальное решение оператора теплопроводности, определенное равенством* (9.1).

Доказательство. Если мы покажем, что существует сверка $\mathcal{E}_n * f \in \mathcal{M}$ в классическом смысле, то будет существовать и обобщенная сверка и обе сверки будут совпадать (см. упражнение 5.2).

Согласно определению классической сверки

$$\mathcal{E}_n * f\,(x,t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{E}_n(x-y, t-\tau) f(y,\tau)\, dyd\tau$$
$$= \theta(t) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} f(y,\tau)\, dyd\tau, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (11.5)$$

Совершая в последнем интеграле замену переменной $\xi = (x-y)/(2a\sqrt{t-\tau})$, получим

$$\mathcal{E}_n * f\,(x,t) = \frac{\theta(t)}{\pi^{n/2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} f(x - 2a\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)\, d\xi d\tau, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

откуда немедленно следует, что

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_n * f\,(x,t)| &\le \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n \times (0,t))} \frac{\theta(t)t}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2}\, d\xi \\ &= \theta(t)t\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n \times (0,t))}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned}$$

Доказательство завершено. □

Определение 11.3. Предположим, что $f \in \mathcal{M}$ и $u_0 \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Обобщенным решением задачи Коши (11.1) для уравнения теплопроводности называется функция $u \in \mathcal{M}$ такая, что

$$u_t = \Delta u + f(x,t) + u_0(x)\delta(t), \tag{11.6}$$

где дифференцирование понимается в обобщенном смысле как от функции из пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

Теорема 11.1. *Обобщенное решение задачи Коши* (11.1) *для уравнения теплопроводности, где* $f \in \mathcal{M}$ *и* $u_0 \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, *существует, единственно и определяется формулой Пуассона*

$$\begin{aligned} u(x,t) = \theta(t) &\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} f(y,\tau)\, dy d\tau \\ &+ \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} u_0(y)\, dy, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned} \tag{11.7}$$

Доказательство. Единственность следует из теоремы 6.2 и леммы 11.2. Для доказательства существования согласно теореме 6.1 достаточно показать, что у правой части (11.6) существует сверка с фундаментальным решением оператора теплопроводности (9.1). Ввиду леммы 11.2 у первого слагаемого в правой части (11.6) такая сверка существует и для нее справедливо равенство (11.5). Можно также увидеть, что правая часть (11.5) совпадает с первым слагаемым в правой части формулы Пуассона (11.7).

Покажем, что существует свертка $\mathcal{E}_n(x,t) * (u_0(x)\delta(t)) \in \mathcal{M}$, причем

$$\mathcal{E}_n(x,t) * (u_0(x)\delta(t)) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} u_0(y)\, dy, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{11.8}$$

В самом деле, пусть $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n+2})$, $k = 1, 2, \ldots$, — компактное исчерпание единицы. Для всякого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ имеем

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} (\mathcal{E}_n(\xi,t)u_0(y)\delta(\tau), \eta_k(\xi,t,y,\tau)\varphi(\xi+y,t+\tau)) \\ &\quad = \lim_{k\to\infty} (\mathcal{E}_n(\xi,t), (u_0(y), (\delta(\tau), \eta_k(\xi,t,y,\tau)\varphi(\xi+y,t+\tau)))) \\ &\quad = \lim_{k\to\infty} (\mathcal{E}_n(\xi,t), (u_0(y), \eta_k(\xi,t,y,0)\varphi(\xi+y,t))) \\ &\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a^2 t}} u_0(y)\eta_k(\xi,t,y,0)\varphi(\xi+y,t)\, dy d\xi dt. \end{aligned}$$

Совершая, далее, замену переменных $x = \xi + y$, приходим к выводу, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}(\mathcal{E}_n(\xi,t)u_0(y)\delta(\tau),\eta_k(\xi,t,y,\tau)\varphi(\xi+y,t+\tau))\\
&\quad=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}u_0(y)\eta_k(x-y,t,y,0)\varphi(x,t)\,dydxdt\\
&\quad=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x,t)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}u_0(y)\eta_k(x-y,t,y,0)\,dydxdt.
\end{aligned}$$

Согласно теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}u_0(y)\eta_k(x-y,t,y,0)\,dy\to\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}u_0(y)\,dy$$

при $k\to\infty$ для п.в. $(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Несложно также увидеть, что

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}u_0(y)\eta_k(x-y,t,y,0)\,dy\right|\\
&\quad\le\|\eta_k\|_{C(\mathbb{R}^{2n+2})}\|u_0\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\,dy\\
&\quad=\theta(t)\|\eta_k\|_{C(\mathbb{R}^{2n+2})}\|u_0\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Согласно определению компактного исчерпания единицы норма $\|\eta_k\|_{C(\mathbb{R}^{2n+2})}$ ограниченная сверху некоторой константой, не зависящей от k. Таким образом, применяя еще раз теорему Лебега об ограниченной сходимости, получим

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x,t)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}u_0(y)\eta_k(x-y,t,y,0)\,dydxdt\\
&\quad\to\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x,t)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}u_0(y)\,dydxdt
\end{aligned}$$

при $k\to\infty$, откуда немедленно следует, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}(\mathcal{E}_n(\xi,t)u_0(y)\delta(\tau),\eta_k(\xi,t,y,\tau)\varphi(\xi+y,t+\tau))\\
&\quad=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x,t)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}u_0(y)\,dydxdt\\
&\quad=\left(\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}u_0(y)\,dy,\varphi(x,t)\right).
\end{aligned}$$

Последнее соотношение, очевидно, равносильно формуле (11.8). Имеем также

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}u_0(y)\,dy\right|\\
&\quad\le\|u_0\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\,dy=\theta(t)\|u_0\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

для всех $(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}$, поэтому $\mathcal{E}_n(x,t)*(u_0(x)\delta(t))\in\mathcal{M}$.

Для завершения доказательства остается заметить, что правая часть (11.8) совпадает со вторым слагаемым в правой части формулы Пуассона (11.7). □

Нам потребуется одно утверждение, представляющее из себя правило дифференцирования интеграла по параметру.

Лемма 11.3. *Предположим, что $a < \lambda_0 < b$ — вещественные числа, M — множество с мерой Лебега μ, а $f : (a,b) \times M \to \mathbb{R}$ — некоторая функция такая, что*

$$\int_M |f(\lambda_0, y)|\, d\mu(y) < \infty,$$

$f(\cdot, y)$ — абсолютно непрерывна на (a,b) почти для всех $y \in M$, и

$$\int_{(a,b)\times M} \left| \frac{\partial f(\lambda, y)}{\partial \lambda} \right| d\lambda\, d\mu(y) < \infty.$$

Тогда интеграл

$$\varphi(\lambda) = \int_M f(\lambda, y)\, d\mu(y)$$

сходится для любого $\lambda \in (a,b)$, функция φ абсолютно непрерывна на интервале (a,b) и при этом

$$\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} = \int_M \frac{\partial f(\lambda, y)}{\partial \lambda}\, d\mu(y) \tag{11.9}$$

для почти всех $\lambda \in (a,b)$.

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница

$$f(\lambda, y) = f(\lambda_0, y) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\partial f(\theta, y)}{\partial \theta}\, d\theta$$

для всех $\lambda \in (a,b)$ и почти всех $y \in M$, откуда согласно теореме Фубини находим

$$\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_0) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\theta \int_M \frac{\partial f(\theta, y)}{\partial \theta}\, d\mu(y)$$

для всех $\lambda \in (a,b)$.

Лемма полностью доказана. □

Замечание 11.1. Если в условиях леммы 11.3 потребовать, чтобы

$$\int_M \frac{\partial f(\lambda, y)}{\partial \lambda}\, d\mu(y) \in C(a,b)$$

как функция аргумента λ, то будем, очевидно, иметь $\varphi \in C^1(a,b)$ и формула (11.9) будет выполнена для всех $\lambda \in (a,b)$.

Ничто также не мешает потребовать, чтобы λ_0 совпадало с одним из концов интервала (a,b), например, $\lambda_0 = a$. Тогда если

$$\int_M \frac{\partial f(\lambda, y)}{\partial \lambda}\, d\mu(y) \in C([a,b))$$

как функция аргумента λ, то $\varphi \in C^1([a,b))$ и формула (11.9) будет выполнена для всех $\lambda \in [a,b)$. При этом в точке a подразумевается односторонняя производная.

Теорема 11.2. *Пусть $u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $f(\cdot, t) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ для всех $t \in (0, \infty)$ и при этом $\partial_x^\alpha f \in \mathcal{M} \cap C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ для всех $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ таких, что*

$|\alpha| \le 2$. *Тогда классическое решение задачи Коши* (11.1) *для уравнения теплопроводности существует, единственно и определяется формулой Пуассона*

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} f(y,\tau)\,dyd\tau + \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} u_0(y)\,dy, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

Доказательство. Согласно теореме 11.1 существует обобщенное решение задачи (11.1), для которого справедливо (11.7). Обозначим

$$J_1(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} f(y,\tau)\,dyd\tau \tag{11.10}$$

и

$$J_2(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} u_0(y)\,dy. \tag{11.11}$$

Выполнив замену переменных $\xi = (x-y)/(2a\sqrt{t-\tau})$ получим

$$J_1(x,t) = \frac{1}{\pi^{n/2}}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} f(x - 2a\xi\sqrt{t-\tau},\tau)\,d\xi d\tau$$

для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

Покажем, что в каждой точке $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ существуют производные

$$\partial_x^\alpha J_1(x,t) = \frac{1}{\pi^{n/2}}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} \partial_x^\alpha f(x - 2a\xi\sqrt{t-\tau},\tau)\,d\xi d\tau, \quad |\alpha| \le 2,$$

и

$$\partial_t J_1(x,t) = \frac{1}{\pi^{n/2}}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} \partial_t f(x - 2a\xi\sqrt{t-\tau},\tau)\,d\xi dz + \frac{1}{\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} f(x,t)\,d\xi,$$

непрерывные в области $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Действительно, по условиям теоремы для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ имеем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi^{n/2}}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} |\partial_x^\alpha f(x - 2a\xi\sqrt{t-\tau},\tau)|\,d\xi d\tau \\ &\quad\le t\|\partial_x^\alpha f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n\times(0,t))} \frac{1}{\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2}\,d\xi \\ &\quad= t\|\partial_x^\alpha f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n\times(0,t))} < \infty, \quad |\alpha| \le 2,\end{aligned} \tag{11.12}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi^{n/2}}\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} |\partial_t f(x - 2a\xi\sqrt{t-\tau},\tau)|\,d\xi d\tau \\ &\quad\le \|\nabla f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n\times(0,t))} \frac{a}{\pi^{n/2}}\int_{t_0}^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{\mathbb{R}^n} |\xi| e^{-|\xi|^2}\,d\xi \\ &\quad= \|\nabla f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n\times(0,t))} \frac{2a\sqrt{t-t_0}}{\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} |\xi| e^{-|\xi|^2}\,d\xi < \infty, \quad 0 \le t_0 < t,\end{aligned} \tag{11.13}$$

и

$$\frac{1}{\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2}|f(x,t)|\,d\xi \le \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n\times(0,t))} \frac{1}{\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2}\,d\xi = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n\times(0,t))} < \infty.$$

Таким образом, принимая во внимание лемму 11.3 и замечание 11.1, достаточно установить непрерывность в $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ функций

$$F_\alpha(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} \partial_x^\alpha f(x - 2a\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)\, d\xi d\tau, \quad |\alpha| \le 2,$$

$$G(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} \partial_t f(x - 2a\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)\, d\xi d\tau$$

и

$$H(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} f(x,t)\, d\xi.$$

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ — некоторый компакт. Возьмем вещественное число $M > 0$ такое, что $K \subset \mathbb{R}^n \times (0, M)$. Если мы покажем, что

$$\|F_\alpha - F_{\alpha,m}\|_{C(K)} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty, \tag{11.14}$$

$$\|G - G_m\|_{C(K)} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty \tag{11.15}$$

и

$$\|H - H_m\|_{C(K)} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty, \tag{11.16}$$

где

$$F_{\alpha,m}(x,t) = \int_{1/m}^t \int_{B_m} e^{-|\xi|^2} \partial_x^\alpha f(x - 2a\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)\, d\xi d\tau, \quad |\alpha| \le 2,$$

$$G_m(x,t) = \int_{1/m}^{t-1/m} \int_{B_m} e^{-|\xi|^2} \partial_t f(x - 2a\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)\, d\xi d\tau$$

и

$$H_m(x,t) = \int_{B_m} e^{-|\xi|^2} f(x,t)\, d\xi,$$

то ввиду непрерывности функций $F_{\alpha,m}$, G_m и H_m на множестве K (см. упражнение 11.1), мы получим, что F_α, G и H также непрерывны на K.

Несложно увидеть, что

$$\begin{aligned}\|F_\alpha - F_{\alpha,m}\|_{C(K)} \le \int_0^{1/m} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} |\partial_x^\alpha f(x - 2a\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)|\, d\xi d\tau \\ + \int_0^M \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_m} e^{-|\xi|^2} |\partial_x^\alpha f(x - 2a\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)|\, d\xi d\tau.\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $m \to \infty$ согласно оценке (11.12). Для второго слагаемого имеем

$$\begin{aligned}&\int_0^M \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_m} e^{-|\xi|^2} |\partial_x^\alpha f(x - 2a\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)|\, d\xi d\tau \\ &\le M \|\partial_x^\alpha f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n \times (0,M))} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_m} e^{-|\xi|^2}\, d\xi \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.\end{aligned}$$

Тем самым, мы доказали (11.14).

Аналогично,

$$\begin{aligned}\|G - G_m\|_{C(K)} \le &\int_{t-1/m}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} |\partial_t f(x - 2a\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)|\, d\xi d\tau \\ &+ \int_0^{1/m} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} |\partial_t f(x - 2a\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)|\, d\xi d\tau \\ &+ \int_0^{M} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_m} e^{-|\xi|^2} |\partial_t f(x - 2a\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)|\, d\xi d\tau,\end{aligned}$$

где два первых слагаемых в правой части стремятся к нулю при $m \to \infty$ ввиду (11.13), а для третьего справедлива оценка

$$\begin{aligned}&\int_0^{M} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_m} e^{-|\xi|^2} |\partial_t f(x - 2a\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)|\, d\xi d\tau \\ &\le a\|\nabla f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n \times (0,M))} \int_0^{T} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_m} |\xi| e^{-|\xi|^2}\, d\xi \\ &= 2a\sqrt{T}\|\nabla f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n \times (0,M))} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_m} |\xi| e^{-|\xi|^2}\, d\xi \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.\end{aligned}$$

Таким образом, мы установили справедливость (11.15).

Для доказательства (11.16) остается заметить, что

$$\begin{aligned}\|H - H_m\|_{C(K)} &\le \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_m} e^{-|\xi|^2} |f(x,t)|\, d\xi \\ &\le \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n \times (0,M))} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_m} e^{-|\xi|^2}\, d\xi \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.\end{aligned}$$

Можно также увидеть, что $J_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, причем

$$\partial^\beta J_2(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\beta \left(\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \right) u_0(y)\, dy$$

для любого мультииндекса $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})$. Для этого согласно лемме 11.3 и замечанию 11.1 достаточно установить непрерывность в $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ функций

$$I_\beta(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\beta \left(\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \right) u_0(y)\, dy.$$

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ — некоторый компакт. Покажем, что

$$\|I_\beta(x,t) - I_{\beta,m}(x,t)\|_{C(K)} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty \tag{11.17}$$

для любого мультииндекса $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})$, где

$$I_{\beta,m}(x,t) = \int_{B_m} \partial^\beta \left(\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \right) u_0(y)\, dy, \quad m = 1, 2, \dots .$$

Так как $I_{\beta,m} \in C(K)$ для всех натуральных чисел m, отсюда будет следовать, что $I_\beta \in C(K)$. Для любого мультииндекса $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})$ имеем

$$\partial^\beta \left(\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \right) = A_\beta(x,t) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}},$$

где $A_\beta \in C(K)$, поэтому

$$\|I_\beta(x,t) - I_{\beta,m}(x,t)\|_{C(K)} \le \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_m} \left| A_\beta(x,t) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} u_0(y) \right| dy$$
$$\le \|A_\beta\|_{C(K)} \|u_0\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_m} e^{-\frac{(|y|-l)^2}{4a^2 \varepsilon}} \, dy,$$

где

$$l = \sup_{(x,t)\in K} |x| < \infty$$

и

$$\varepsilon = \inf_{(x,t)\in K} t > 0,$$

что немедленно влечет за собой (11.17).

Покажем теперь, что функции J_1 и J_2, а значит и правую часть (11.7) можно непрерывным образом продолжить на множество $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$[1]. Действительно, взяв $\alpha = 0$ в (11.12), получим, что $J_1(x,t) \to 0$ при $t \to +0$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, поэтому можно считать, что $J_1(x,0) = 0$. В свою очередь, выполнив в (11.11) замену переменных $\xi = (x-y)/(2a\sqrt{t})$, будем иметь

$$J_2(x,t) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} u_0(x - 2a\xi\sqrt{t}) \, d\xi.$$

В отличие от (11.11) правая часть последнего выражения определена на всем множестве $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$, в том числе и при $t = 0$. Покажем, что она непрерывна на $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$. Для этого достаточно убедиться, что

$$\|J_2 - J_{2,m}\|_{C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty, \tag{11.18}$$

где

$$J_{2,m}(x,t) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{B_m} e^{-|\xi|^2} u_0(x - 2a\xi\sqrt{t}) \, d\xi,$$

т.к. функции $J_{2,m}$ непрерывны на $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$. Имеем

$$\|J_2 - J_{2,m}\|_{C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))} \le \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_m} e^{-|\xi|^2} u_0(x - 2a\xi\sqrt{t}) \, d\xi$$
$$\le \|u_0\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_m} e^{-|\xi|^2} \, d\xi,$$

откуда немедленно следует (11.18).

Тем самым, можно считать, что в нашем случае решение (11.7) обобщенной задачи Коши удовлетворяет тем же условиям гладкости, что и классическое решение (см. определение 11.1). При этом (11.6) позволяет, очевидно, утверждать, что на множестве $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ уравнение теплопроводности

$$u_t = \Delta u + f(x,t)$$

справедливо в классическом смысле, т.е. в каждой точке этого множества. Чтобы доказать равенство

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{11.19}$$

[1]Заметим, что формально J_1 и J_2 не определены при $t = 0$. В случае решения (11.7) обобщенной задачи Коши это, очевидно, не является принципиальным, т.к. функцию из $L_{1,loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ достаточно задать на множестве полной меры, т.е. на дополнении множества меры нуль.

заметим, что в соответствии с леммой 11.1

$$u_t = \Delta u + f(x,t) + u(x,0)\delta(t).$$

Вычитая последнее уравнение из (11.6), получим

$$(u_0(x) - u(x,0))\delta(t) = 0,$$

откуда, в свою очередь, вытекает (11.19) (см. упражнение 11.2).

Остается заметить, что единственность классического решения следует из единственности обобщенного, т.к. по лемме 11.1 классическое решение, продолженное нулем при $t < 0$, является обобщенным.

Доказательство завершено. $\square$

Упражнение 11.1. Пусть $f \in C(X \times Y)$, где $X \subset \mathbb{R}^k$ и $Y \subset \mathbb{R}^l$, $k, l \geq 1$, — компактные множества. Докажите, что функция

$$F(x) = \int_Y f(x,y)\,dy$$

непрерывна на X.

Решение. Можно, очевидно, утверждать, что f равномерно непрерывна на компакте $X \times Y$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\varkappa > 0$ такое, что $|f(x_1,y) - f(x_2,y)| < \varepsilon$ для всех $x_1, x_2 \in X$ и $y \in Y$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \varkappa$. Таким образом,

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq \int_Y |f(x_1,y) - f(x_2,y)|\,dy \leq \varepsilon \operatorname{mes} Y$$

для всех $x_1, x_2 \in X$ таких, что $|x_1 - x_2| < \varkappa$.

Упражнение 11.2. Предположим, что

$$\sum_{k=0}^{m} u_k(x)\delta^{(k)}(t) = 0,$$

где $u_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что $u_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m$.

Решение. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $l \in \{0, \dots, m\}$ и пусть $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ — некоторая функция, равная единице в окрестности нуля. Имеем

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{m} u_k(x)\delta^{(k)}(t), \varphi(x)t^l\eta(t)\right) &= \sum_{k=0}^{m} (u_k(x), \varphi(x))(\delta^{(k)}(t), t^l\eta(t)) \\ &= (-1)^l l!(u_l(x), \varphi(x)) = 0.\end{aligned}$$

12. Задача Коши для волнового уравнения

Задачей Коши для волнового уравнения называется задача о нахождении функции u, удовлетворяющей соотношениям

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u_t(x,0) = u_1(x). \end{cases} \tag{12.1}$$

Как и в случае задачи Коши для уравнения теплопроводности, мы будем говорить об обобщенной и классической постановках задачи (12.1).

Определение 12.1. Решением классической задачи Коши (12.1) для волнового уравнения называется функция $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)) \cap C^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, удовлетворяющая соотношениям (12.1).

Лемма 12.1. *Пусть* $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)) \cap C^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ *— некоторая функция такая, что* $u_{tt} - \Delta u \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. *Тогда*

$$\tilde{u}_{tt} = \Delta \tilde{u} + \tilde{f}(x, t) + u(x, 0)\delta'(t) + u_t(x, 0)\delta(t) \tag{12.2}$$

в смысле обобщенных функций из пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, *где* $\tilde{u}$ *задано с помощью* (11.2), *а*

$$\tilde{f}(x, t) = \begin{cases} u_{tt} - \Delta u, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

Доказательство. Согласно определению производной от обобщенной функции для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$(\tilde{u}_{tt} - \Delta \tilde{u}, \varphi) = (\tilde{u}, \varphi_{tt} - \Delta \varphi) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u \varphi_{tt} \, dt dx - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u \Delta \varphi \, dx dt. \tag{12.3}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое вещественное число. Интегрируя по частям, получим

$$\int_\varepsilon^\infty u(x, t)\varphi_{tt}(x, t) \, dt = - u(x, \varepsilon)\varphi_t(x, \varepsilon) + u_t(x, \varepsilon)\varphi(x, \varepsilon) + \int_\varepsilon^\infty u_{tt}(x, t)\varphi(x, t) \, dt, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Последняя формула и (11.4) позволяют утверждать, что

$$\int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u \varphi_{tt} \, dt dx - \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u \Delta \varphi \, dx dt = \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (u_{tt} - \Delta u)\varphi \, dx dt - \int_{\mathbb{R}^n} u(x, \varepsilon)\varphi_t(x, \varepsilon) \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x, \varepsilon)\varphi(x, \varepsilon) \, dx.$$

Переходя в этом выражении к пределу при $\varepsilon \to +0$, будем иметь

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u \varphi_{tt} \, dt dx - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u \Delta \varphi \, dx dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (u_{tt} - \Delta u)\varphi \, dx dt - \int_{\mathbb{R}^n} u(x, 0)\varphi_t(x, 0) \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x, 0)\varphi(x, 0) \, dx,$$

откуда ввиду (12.3) следует, что

$$(\tilde{u}_t - \Delta \tilde{u}, \varphi) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (u_{tt} - \Delta u)\varphi \, dx dt - \int_{\mathbb{R}^n} u(x, 0)\varphi_t(x, 0) \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x, 0)\varphi(x, 0) \, dx$$

или, другими словами,

$$(\tilde{u}_t - \Delta \tilde{u}, \varphi) = (\tilde{f}(x, t) + u(x, 0)\delta'(t) + u_t(x, 0)\delta(t), \varphi).$$

Доказательство завершено. □

Определение 12.2. Пусть $u_0, u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ и при этом $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$. Решением обобщенной задачи Коши (12.1) называется функция $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ такая, что $\operatorname{supp} u \subset \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ и

$$u_{tt} = \Delta u + f(x, t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t). \tag{12.4}$$

Лемма 12.2. *Предположим, что $\mathcal{E}$ и f — обобщенные функции из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ такие, что $\operatorname{supp}\mathcal{E} \subset K_a$ и $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$, где $K_a = \{(x,t) : |x| \le at\}$ — конус в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда свертка $\mathcal{E} * f$ существует, $\operatorname{supp}\mathcal{E} * f \subset \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ и*

$$(\mathcal{E} * f, \varphi) = (\mathcal{E}(x,t)f(\xi,\tau), \eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2 - |x|^2)\varphi(x+\xi, t+\tau)) \tag{12.5}$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, где η — любая функция из $C^\infty(\mathbb{R})$, равная единице в окрестности замкнутого промежутка $[0,\infty)$ и нулю в окрестности $-\infty$.

Доказательство. Пусть $\lambda_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n+2})$, $k = 1, 2, \ldots,$ — компактное исчерпание единицы. Для любого $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ имеем

$$(\mathcal{E} * f, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (\mathcal{E}(x,t)f(\xi,\tau), \lambda_k(x,t,\xi,\tau)\varphi(x+\xi,t+\tau)).$$

Функция $\eta(t)\eta(a^2t^2 - |x|^2)$ равна единице в окрестности $\operatorname{supp}\mathcal{E}$, поэтому

$$\eta(t)\eta(a^2t^2 - |x|^2)\mathcal{E}(x,t) = \mathcal{E}(x,t).$$

Аналогично,

$$\eta(\tau)f(\xi,\tau) = f(\xi,\tau).$$

Таким образом, получим

$$\begin{aligned}(\mathcal{E} * f, \varphi) &= \lim_{k\to\infty} (\eta(t)\eta(a^2t^2 - |x|^2)\mathcal{E}(x,t)\eta(\tau)f(\xi,\tau), \lambda_k(x,t,\xi,\tau)\varphi(x+\xi,t+\tau)) \\ &= \lim_{k\to\infty} (\mathcal{E}(x,t)f(\xi,\tau), \eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2 - |x|^2)\lambda_k(x,t,\xi,\tau)\varphi(x+\xi,t+\tau)),\end{aligned}$$

откуда следует (12.5), поскольку носитель $\eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2-|x|^2)\varphi(x+\xi,t+\tau)$ — компактное множество.

Равенство (12.5), в свою очередь, позволяет утверждать, что $\operatorname{supp}\mathcal{E} * f \subset \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$. В самом деле, пусть $\sup\varphi \subset \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0)$. Возьмем функцию $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющую соотношениям

$$\eta|_{(-\infty,-\varepsilon/2]} = 0 \quad \text{и} \quad \eta|_{[-\varepsilon/4,\infty)} = 1,$$

где $\varepsilon > 0$ — вещественное число такое, что $\sup\varphi \subset \mathbb{R}^n \times (-\infty, -\varepsilon)$. Несложно увидеть, что $\eta(t)\eta(\tau)\varphi(x+\xi,t+\tau) = 0$ для всех $(x,t,\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{2n+2}$, поэтому

$$(\mathcal{E} * f, \varphi) = (\mathcal{E}(x,t)f(\xi,\tau), \eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2 - |x|^2)\varphi(x+\xi,t+\tau)) = 0.$$

Лемма полностью доказана. □

Теорема 12.1. *Пусть $u_0, u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ и при этом $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$. Тогда решение обобщенной задачи Коши (12.1) для волнового уравнения существует и единственно.*

Доказательство. Воспользуемся теоремами 6.1, 6.2 и леммой 12.2. □

Теорема 12.2. *Предположим, что $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ и $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда решение классической задачи Коши (12.1) для одномерного волнового уравнения ($n = 1$) существует, единственно и определяется формулой Даламбера*

$$\begin{aligned}u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x+at) + u_0(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi \\ + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau.\end{aligned} \tag{12.6}$$

Доказательство. Продолжим f нулем на множество $\mathbb{R} \times (-\infty, 0)$. По теореме 12.1 существует единственное решение

$$u(x,t) = \mathcal{E}_1(x,t) * (f(x,t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t)) \tag{12.7}$$

обобщенной задачи Коши (12.1), где $\mathcal{E}_1$ — фундаментальное решение одномерного волнового оператора, заданное с помощью (10.1). Вычислим сверку, стоящую в правой части (12.7). Покажем, что существует классическая свертка $\mathcal{E}_1 * f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^2)$, которая, очевидно, будет и обобщенной (см. упражнение 5.2). Имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 * f\,(x,t) &= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_1(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau \\
&= \frac{\theta(t)}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(a(t-\tau)-|x-\xi|)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau \\
&= \frac{\theta(t)}{2a}\int_{0}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Несложно увидеть, что при $t \geq 0$ выражение, стоящее в правой части последнего равенства совпадает с третьим слагаемым правой части формулы Даламбера (12.6). Непосредственно дифференцируя это выражение можно также убедиться, что $\mathcal{E}_1 * f \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.

Найдем теперь свертку $\mathcal{E}_1(x,t) * (u_1(x)\delta(t))$. Пусть функция η такая же, как в лемме 12.2. Для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, принимая во внимание (12.5), получим

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{E}_1(x,t) * (u_1(x)\delta(t)), \varphi(x,t)) \\
&\quad = (\mathcal{E}_1(x,t)u_1(\xi)\delta(\tau), \eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2 - |x|^2)\varphi(x+\xi,t+\tau)) \\
&\quad = (\mathcal{E}_1(x,t), (u_1(\xi), (\delta(\tau), \eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2 - |x|^2)\varphi(x+\xi,t+\tau)))) \\
&\quad = (\mathcal{E}_1(x,t), (u_1(\xi), \eta(t)\eta(a^2t^2 - |x|^2)\varphi(x+\xi,t))) \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_1(x,t)u_1(\xi)\eta(t)\eta(a^2t^2 - |x|^2)\varphi(x+\xi,t)\,d\xi dx dt.
\end{aligned}$$

Совершая замену $x \rightleftharpoons x + \xi$, будем иметь

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_1(x,t)u_1(\xi)\eta(t)\eta(a^2t^2 - |x|^2)\varphi(x+\xi,t)\,dx \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_1(x-\xi,t)u_1(\xi)\eta(t)\eta(a^2t^2 - |x-\xi|^2)\varphi(x,t)\,dx
\end{aligned}$$

для всех $\xi, t \in \mathbb{R}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{E}_1(x,t) * (u_1(x)\delta(t)), \varphi(x,t)) \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_1(x-\xi,t)u_1(\xi)\eta(t)\eta(a^2t^2 - |x-\xi|^2)\varphi(x,t)\,d\xi dx dt \\
&\quad = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(at - |x-\xi|)u_1(\xi)\eta(t)\eta(a^2t^2 - |x-\xi|^2)\varphi(x,t)\,d\xi dx dt \\
&\quad = \frac{\theta(t)}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x-at}^{x+at}u_1(\xi)\varphi(x,t)\,d\xi dx dt = \left(\frac{\theta(t)}{2a}\int_{x-at}^{x+at}u_1(\xi)\,d\xi, \varphi(x,t)\right)
\end{aligned}$$

или, другими словами,

$$\mathcal{E}_1(x,t) * (u_1(x)\delta(t)) = \frac{\theta(t)}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\, d\xi.$$

Правая часть последнего соотношения при $t \geq 0$ совпадает со вторым слагаемым в правой части формулы Даламбера (12.6). Можно также убедиться, что $\mathcal{E}_1(x,t) * (u_1(x)\delta(t)) \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.

Аналогично, получим

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1(x,t) * (u_0(x)\delta'(t)) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{E}_1(x,t) * (u_0(x)\delta(t))\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\theta(t)}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_0(\xi)\, d\xi\right) = \frac{1}{2}(u_0(x+at) + u_0(x-at)),\end{aligned}$$

где выражение в правой части последнего равенства совпадает с первым слагаемым в правой части формулы Даламбера (12.6). При этом, очевидно, $\mathcal{E}_1(x,t) * (u_0(x)\delta'(t)) \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.

Мы показали, что решение обобщенной задачи Коши (12.1) принадлежит $C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$. Тем самым, ввиду (12.4) уравнение

$$u_{tt} = \Delta u + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

имеет место в классическом смысле, т.е. в каждой точке множества $\mathbb{R} \times (0,\infty)$. Начальные условия также выполнены в классическом смысле. Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что согласно лемме 12.1 справедливо уравнение (12.2), вычитая которое из (12.4), находим

$$(u_0(x) - u(x,0))\delta'(t) + (u_1(x) - u_t(x,0))\delta(t) = 0, \tag{12.8}$$

откуда немедленно следует, что

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{и} \quad u_t(x,0) = u_1(x) \tag{12.9}$$

(см. упражнение 11.2).

Наконец, единственность классического решения следует из единственности обобщенного, т.к. по лемме 12.1 решение классической задачи Коши (12.1), продолженное нулем при $t < 0$, является решением соответствующей обобщенной задачи.

Доказательство завершено. □

Упражнение 12.1. Получите (12.9) непосредственно из (12.6).

Теорема 12.3. *Предположим, что $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$, $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ и $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Тогда решение классической задачи Коши* (12.1) *для двумерного волнового уравнения* ($n = 2$) *существует, единственно и определяется формулой Пуассона*

$$\begin{aligned}u(x,t) =& \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{B^x_{at}} \frac{u_0(\xi)\, d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}} + \frac{1}{2\pi a}\int_{B^x_{at}} \frac{u_1(\xi)\, d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}}\\ &+ \frac{1}{2\pi a}\int_0^t \int_{B^x_{a(t-\tau)}} \frac{f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}}.\end{aligned} \tag{12.10}$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 12.2, продолжим f нулем на множество $\mathbb{R} \times (-\infty, 0)$. По теореме 12.1 существует единственное решение

$$u(x,t) = \mathcal{E}_2(x,t) * (f(x,t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t)) \tag{12.11}$$

обобщенной задачи Коши (12.1), где $\mathcal{E}_2$ — фундаментальное решение двумерного волнового оператора, заданное с помощью (10.5). Покажем, что правая часть (12.11) принадлежит $C^2(\mathbb{R}^2\times[0,\infty))$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2(x,t)*f(x,t)&=\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\theta(a(t-\tau)-|x-\xi|)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-\xi|^2}}\\&=\frac{\theta(t)}{2\pi a}\int_0^t\int_{B^x_{a(t-\tau)}}\frac{f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-\xi|^2}}\end{aligned}$$

(см. упражнение 5.2). Таким образом, мы получили третье слагаемое в правой части формулы Пуассона (12.10). Не представляет труда убедиться, что это слагаемое принадлежит классу $C^2(\mathbb{R}^2\times[0,\infty))$. В самом деле, заменой переменных $\xi=a(t-\tau)y+x$ можно увидеть, что

$$\int_0^t\int_{B^x_{a(t-\tau)}}\frac{f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-\xi|^2}}=\int_0^t\int_{B_1}\frac{(t-\tau)f(a(t-\tau)y+x,\tau)}{\sqrt{1-|y|^2}}\,dyd\tau.$$

Найдем свертку $\mathcal{E}_2(x,t)*(u_1(x)\delta(t))$. Согласно формуле (12.5) леммы 12.2 будем иметь

$$\begin{aligned}&(\mathcal{E}_2(x,t)*(u_1(x)\delta(t)),\varphi(x,t))\\&\quad=(\mathcal{E}_2(x,t)u_1(\xi)\delta(\tau),\eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2-|x|^2)\varphi(x+\xi,t+\tau))\\&\quad=(\mathcal{E}_2(x,t),(u_1(\xi),(\delta(\tau),\eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2-|x|^2)\varphi(x+\xi,t+\tau))))\\&\quad=(\mathcal{E}_2(x,t),(u_1(\xi),\eta(t)\eta(a^2t^2-|x|^2)\varphi(x+\xi,t)))\\&\quad=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\mathcal{E}_2(x,t)u_1(\xi)\eta(t)\eta(a^2t^2-|x|^2)\varphi(x+\xi,t)\,d\xi dxdt\end{aligned}$$

любого $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, где $\eta\in C^\infty(\mathbb{R})$ — произвольная функция, равная единице в окрестности промежутка $[0,\infty)$ и нулю в окрестности $-\infty$. Тем самым, принимая во внимание (10.5), получим

$$\begin{aligned}&(\mathcal{E}_2(x,t)*(u_1(x)\delta(t)),\varphi(x,t))\\&\quad=\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\theta(at-|x|)u_1(\xi)\varphi(x+\xi,t)}{\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}\,d\xi dxdt,\end{aligned}$$

откуда заменой $x\rightleftharpoons x+\xi$ находим

$$\begin{aligned}&(\mathcal{E}_2(x,t)*(u_1(x)\delta(t)),\varphi(x,t))\\&\quad=\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\theta(at-|x-\xi|)u_1(\xi)\varphi(x,t)}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}}\,d\xi dxdt\\&\quad=\frac{1}{2\pi a}\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{B^x_{at}}\frac{u_1(\xi)\varphi(x,t)}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}}\,d\xi dxdt\\&\quad=\left(\frac{\theta(t)}{2\pi a}\int_{B^x_{at}}\frac{u_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}},\varphi(x,t)\right).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}_2(x,t)*(u_1(x)\delta(t))=\frac{\theta(t)}{2\pi a}\int_{B^x_{at}}\frac{u_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}}\tag{12.12}$$

и мы получили второе слагаемое в правой части формулы Пуассона. Несложно увидеть, что это слагаемое принадлежит классу $C^2(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$. Действительно, выполняя в правой части (12.12) замену переменных $y = (x-\xi)/(at)$, будем иметь

$$\int_{B^x_{at}} \frac{u_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}} = at\int_{B_1} \frac{u_1(x-aty)\,dy}{\sqrt{1-|y|^2}}.$$

Найдем теперь сверку $\mathcal{E}_2(x,t) * (u_0(x)\delta'(t))$. Согласно правилу дифференцирования сверки

$$\mathcal{E}_2(x,t) * (u_0(x)\delta'(t)) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{E}_2(x,t) * (u_0(x)\delta(t))).$$

В то же время, повторяя рассуждения, с помощью которых была получена формула (12.12), будем иметь

$$\mathcal{E}_2(x,t) * (u_0(x)\delta(t)) = \frac{\theta(t)}{2\pi a}\int_{B^x_{at}} \frac{u_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}},$$

откуда немедленно следует, что

$$\mathcal{E}_2(x,t) * (u_0(x)\delta'(t)) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{B^x_{at}} \frac{u_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}}.$$

Тем самым, мы получили первое слагаемое в правой части формулы Пуассона (12.10). Чтобы показать, что это слагаемое также принадлежит классу $C^2(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$ достаточно заметить, что

$$\int_{B^x_{at}} \frac{u_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}} = at\int_{B_1} \frac{u_0(x-aty)\,dy}{\sqrt{1-|y|^2}}.$$

Все сказанное выше, позволяет утверждать, что $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$. Так как классические производные, коль скоро они существуют, обязаны совпадать с обобщенными, то ввиду соотношения

$$u_{tt} = \Delta u + f(x,t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t) \tag{12.13}$$

мы получим, что функция u является решением первого уравнения системы (12.1) в классическом смысле.

Вычитая, далее, из (12.13) соотношение

$$u_{tt} = \Delta u + f(x,t) + u(x,0)\delta'(t) + u_t(x,0)\delta(t),$$

которое следует из леммы 12.1, будем иметь (12.8), откуда, в свою очередь, следует (12.9).

Таким образом, мы показали, что функция u является классическим решение задачи Коши (12.1). Единственность этого решения, очевидно, вытекает из единственности решения соответствующей обобщенной задачи.

Теорема полностью доказана. □

13. Гармонические функции

Определение 13.1. Обобщенная функция $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ называется гармонической в Ω, если

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Теорема 13.1. *Любая гармоническая в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функция является бесконечно гладкой.*

Для доказательства теоремы 13.1 нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 13.1. *$u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $K \in C_0^\infty(\Omega \times \Omega)$. Тогда*

$$\left(u(x), \int_\Omega K(x,y)\,dy\right) = \int_\Omega (u(x), K(x,y))\,dy$$

Доказательство. Для каждого натурального числа N рассмотрим разбиение области Ω на подобласти $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$. Позаботимся при этом чтобы диаметр разбиения

$$\lambda_N = \max_{1 \le i \le N} \operatorname{diam} \Omega_i$$

стремился к нулю при $N \to \infty$. Возьмем также $y_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Для любого $x \in \Omega$ и мультииндекса и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, очевидно, имеем

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha \int_\Omega K(x,y)\,dy &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \partial_x^\alpha K(x,y)\,dy \\
&= \sum_{i=1}^N \partial_x^\alpha K(x,y_i)|\Omega_i| + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (\partial_x^\alpha K(x,y) - \partial_x^\alpha K(x,y_i))\,dy,
\end{aligned}$$

где $|\Omega_i|$ — мера множества Ω_i. Поскольку всякая функция, непрерывная на компакте, является на этом компакте равномерно непрерывной, получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} |\partial_x^\alpha K(x,y) - \partial_x^\alpha K(x,y_i)|\,dy \\
&\qquad \le \sum_{i=1}^N |\Omega_i| \sup_{x\in\Omega,\, y\in\Omega_i} |\partial_x^\alpha K(x,y) - \partial_x^\alpha K(x,y_i)| \\
&\qquad \le |\Omega| \max_{1\le i\le N} \sup_{x\in\Omega,\, y\in\Omega_i} |\partial_x^\alpha K(x,y) - \partial_x^\alpha K(x,y_i)| \to 0 \quad \text{при } N \to \infty.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^N K(\cdot, y_i)|\Omega_i| \to \int_\Omega K(\cdot, y)\,dy \quad \text{при } N \to \infty$$

в пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$. Последнее позволяет утверждать, что

$$\sum_{i=1}^N (u(x), K(x,y_i))|\Omega_i| \to \left(u(x), \int_\Omega K(x,y)\,dy\right) \quad \text{при } N \to \infty.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\sum_{i=1}^N (u(x), K(x,y_i))|\Omega_i| \to \int_\Omega (u(x), K(x,y))\,dy \quad \text{при } N \to \infty,$$

т.к. $(u(x), K(x,\cdot)) \in C^\infty(\Omega)$. □

Доказательство теоремы 13.1. Предположим, что $z \in \Omega$. Возьмем $\varepsilon > 0$ такое, что шар B_ε^z радиуса ε с центром в точке z целиком содержится в Ω. Пусть также $\eta \in C_0^\infty(B_\varepsilon^z)$ — некоторая функция такая, что $\eta \equiv 1$ в окрестности $\overline{B_{\varepsilon/2}^z}$.

Продолжая функцию $v = u\eta$ нулем за пределы шара B_ε^z, имеем

$$\Delta v = f \quad \text{в } \mathbb{R}^n,$$

где $f = 2\nabla u \nabla \eta + u \nabla \eta$, откуда ввиду того, что $\operatorname{supp} f$ — компактное множество, получим

$$v = \mathcal{E}_n * f, \tag{13.1}$$

где $\mathcal{E}_n$ — фундаментальное решение оператора Лапласа, определенное с помощью (8.3).

Покажем, что v — бесконечно гладкая функция. В самом деле, пусть $\varphi \in C_0^\infty(B^z_{\varepsilon/2})$. Согласно определению свертки и того обстоятельства, что

$$\operatorname{supp} f \subset B^z_\varepsilon \setminus \overline{B^z_{\varepsilon/2}},$$

имеем

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E}_n * f, \varphi) &= (f(x)\mathcal{E}_n(y), \varphi(x+y)) = (f(x), (\mathcal{E}_n(y), \varphi(x+y))) \\
&= \left(f(x), \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}_n(y)\varphi(x+y)\, dy \right) \\
&= \left(f(x), \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}_n(\xi - x)\varphi(\xi)\, d\xi \right) \\
&= \left(\lambda(x) f(x), \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(\xi)\mathcal{E}_n(\xi - x)\varphi(\xi)\, d\xi \right) \\
&= \left(f(x), \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(x)\sigma(\xi)\mathcal{E}_n(\xi - x)\varphi(\xi)\, d\xi \right),
\end{aligned} \tag{13.2}$$

где $\lambda, \sigma \in C_0^\infty(B^z_\varepsilon)$ — некоторые функции такие, что $\lambda \equiv 1$ в окрестности $\operatorname{supp} f$, $\sigma \equiv 1$ в окрестности $\overline{B^z_{\varepsilon/2}}$ и при этом $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\lambda, \operatorname{supp}\sigma) > 0$.

Поскольку $\lambda(x)\sigma(\xi)\mathcal{E}_n(\xi - x)\varphi(\xi)$, как функция аргументов x и ξ, принадлежит пространству $C_0^\infty(B^z_\varepsilon \times B^z_\varepsilon)$, применяя лемму 13.1, получим

$$\begin{aligned}
\left(f(x), \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(x)\sigma(\xi)\mathcal{E}_n(\xi - x)\varphi(\xi)\, d\xi \right) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x), \lambda(x)\sigma(\xi)\mathcal{E}_n(\xi - x)\varphi(\xi))\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x), \lambda(x)\sigma(\xi)\mathcal{E}_n(\xi - x))\varphi(\xi)\, d\xi.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание (13.1) и (13.2), можно, очевидно, утверждать, что

$$v(x) = (f(x), \lambda(x)\sigma(\xi)\mathcal{E}_n(\xi - x)).$$

Таким образом, $v \in C_0^\infty(B^z_\varepsilon)$ и для завершения доказательства достаточно заметить, что функция u совпадает с v на множестве $B^z_{\varepsilon/2}$. □

Теорема 13.2 (о среднем по сфере). *Пусть функция u является гармонической в открытом шаре B^z_r и непрерывной в замыкании этого шара. Тогда*

$$u(z) = \frac{1}{|S_r|} \int_{S^z_r} u\, dS,$$

где $|S_r|$ — $(n-1)$-мерный объем сферы S_r, а dS — элемент поверхности S^z_r.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $z = 0$. В противном случае сдвинем начало координат. Для любых $0 < \varepsilon < \rho < r$ согласно правилу интегрирования по частям (формуле Грина) имеем

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B_\rho \setminus B_\varepsilon} u \Delta \mathcal{E}_n \, dx \\
&= \int_{\partial(B_\rho \setminus B_\varepsilon)} u \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial \nu} \, dS - \int_{B_\rho \setminus B_\varepsilon} \nabla u \nabla \mathcal{E}_n \, dx \\
&= \int_{\partial(B_\rho \setminus B_\varepsilon)} u \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial \nu} \, dS - \int_{\partial(B_\rho \setminus B_\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathcal{E}_n \, dS + \int_{B_\rho \setminus B_\varepsilon} \Delta u \mathcal{E}_n \, dx,
\end{aligned}$$

где ν — вектор внешней нормали к $\partial(B_\rho \setminus B_\varepsilon)$, а $\mathcal{E}_n$ — фундаментальное решение оператора Лапласа, определенное с помощью (8.3), откуда немедленно получим

$$0 = \int_{S_\rho} u \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial \nu} \, dS + \int_{S_\varepsilon} u \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial \nu} \, dS - \int_{S_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathcal{E}_n \, dS - \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathcal{E}_n \, dS. \tag{13.3}$$

Заметим, что $\mathcal{E}_n$ является сферически симметричной функцией, для которой справедливы равенства

$$\left. \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial \nu} \right|_{S_\rho} = \frac{1}{|S_\rho|}, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial \nu} \right|_{S_\varepsilon} = -\frac{1}{|S_\varepsilon|}.$$

Таким образом, (13.3) влечет за собой соотношение

$$0 = \frac{1}{|S_\rho|} \int_{S_\rho} u \, dS - \frac{1}{|S_\varepsilon|} \int_{S_\varepsilon} u \, dS - \mathcal{E}_n|_{S_\rho} \int_{S_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS - \mathcal{E}_n|_{S_\varepsilon} \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS. \tag{13.4}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{|S_\varepsilon|} \int_{S_\varepsilon} u \, dS - u(0) \right| &\le \frac{1}{|S_\varepsilon|} \int_{S_\varepsilon} |u(x) - u(0)| \, dS \\
&\le \sup_{x \in S_\varepsilon} |u(x) - u(0)| \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to +0,
\end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{1}{|S_\varepsilon|} \int_{S_\varepsilon} u \, dS \to u(0) \quad \text{при } \varepsilon \to +0.$$

В то же время, применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_{S_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS = \int_{B_\rho} \Delta u \, dx = 0$$

и

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS = -\int_{B_\varepsilon} \Delta u \, dx = 0.$$

Тем самым, переходя в (13.4) к пределу при $\varepsilon \to +0$, будем иметь

$$u(0) = \frac{1}{|S_\rho|} \int_{S_\rho} u \, dS,$$

откуда, переходя к пределу при $\rho \to r - 0$, в свою очередь, получим

$$u(0) = \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} u \, dS.$$

Теорема полностью доказана. □

Упражнение 13.1. Предположим, что функция $u \in C^2(B_r^z) \cap C(\overline{B_r^z})$ является решением неравенства

$$\Delta u \geq 0 \quad \text{в } B_r^z. \tag{13.5}$$

Докажите, что

$$u(z) \leq \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r^z} u\, dS.$$

Теорема 13.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 13.2 *и пусть* $\eta : (0, r) \to \mathbb{R}$ *— измеримая функция такая, что*

$$\int_{B_r} \eta(|x|)\, dx = 1. \tag{13.6}$$

Тогда

$$u(z) = \int_{B_r^z} \eta(|x - z|) u(x)\, dx.$$

Доказательство. Согласно теореме 13.2 имеем

$$u(z) = \frac{1}{|S_\rho|} \int_{S_\rho^z} u\, dS$$

для всех $0 < \rho < r$. Умножая последнее равенство на $|S_\rho|\eta(\rho)$ и интегрируя по ρ от нуля до r, получим

$$u(z) \int_0^\rho |S_\rho| \eta(\rho)\, d\rho = \int_0^\rho \int_{S_\rho^z} \eta(\rho) u\, dS\, d\rho.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\int_0^\rho |S_\rho| \eta(\rho)\, d\rho = \int_{B_r} \eta(|x|)\, dx = 1$$

и

$$\int_0^\rho \int_{S_\rho^z} \eta(\rho) u\, dS\, d\rho = \int_{S_r^z} \eta(|x - z|) u(x)\, dx.$$

□

Упражнение 13.2. Предположим, что функция $u \in C^2(B_r^z) \cap C(\overline{B_r^z})$ является решением неравенства (13.5). Докажите, что

$$u(z) \leq \int_{B_r^z} \eta(|x - z|) u(x)\, dx$$

для любой измеримой функции $\eta : (0, r) \to [0, \infty)$, удовлетворяющей условию (13.6).

Теорема 13.4 (о среднем по шару)**.** *Пусть выполнены условия теоремы* 13.2*, тогда*

$$u(z) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r^z} u\, dx, \tag{13.7}$$

где $|B_r|$ *— объем шара радиуса* r *в* $\mathbb{R}^n$*.*

Доказательство. Возьмем $\eta \equiv 1/|B_r|$ в теореме 13.3. □

Упражнение 13.3. Предположим, что $u \in C^2(B_r^z) \cap C(\overline{B_r^z})$ — решение неравенства (13.5). Докажите, что

$$u(z) \le \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r^z} u\,dx.$$

Теорема 13.5. *Пусть функция u является гармонической в области Ω и при этом*

$$u(x_0) = \sup_{\Omega} u$$

для некоторого $x_0 \in \Omega$. Тогда u — постоянная функция.

Доказательство. Обозначим $\omega = \{z \in \Omega : u(z) = u(x_0)\}$. В силу непрерывности функции u множество ω замкнуто в топологии, индуцированной из Ω. Покажем, что ω также является открытым множеством. В самом деле, для любого $z \in \omega$ найдется $r > 0$ такое, что $B_r^z \Subset \Omega$. При этом по теореме о среднем будет, очевидно, выполнено соотношение (13.7) или, другими словами,

$$u(x_0) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r^z} u\,dx. \tag{13.8}$$

Предположим от противного, что $u(y_0) < u(x_0)$ для некоторого $y_0 \in B_r^z$. Тогда существует $\lambda < u(x_0)$ такое, что $\operatorname{mes} \omega_\lambda > 0$, где $\omega_\lambda = \{y \in B_r^z : u(y) < \lambda\}$, поэтому

$$\begin{aligned}\int_{B_r^z} u\,dx = \int_{\omega_\lambda} u\,dx + \int_{B_r^z \setminus \omega_\lambda} u\,dx \\ \le \lambda \operatorname{mes} \omega_\lambda + u(x_0)(\operatorname{mes} B_r - \operatorname{mes} \omega_\lambda) < u(x_0) \operatorname{mes} B_r,\end{aligned}$$

что противоречит соотношению (13.8). Таким образом, $B_r^z \subset \omega$.

Ввиду связности Ω любое его подмножество, являющееся одновременно открытым и связным, должно быть пустым или совпадать с Ω. Множество ω не пустое, т.к. $x_0 \in \omega$. Тем самым, $\omega = \Omega$.

Теорема полностью доказана. □

Упражнение 13.4. Докажите, что теорема 13.5 остается в силе для всех функций $u \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющих неравенству

$$\Delta u \ge 0 \quad \text{в } \Omega. \tag{13.9}$$

Следствие 13.1. *Пусть функция u является гармонической в области Ω и при этом*

$$u(x_0) = \inf_{\Omega} u$$

для некоторого $x_0 \in \Omega$. Тогда u — постоянная функция.

Доказательство. Применяем теорему 13.5 к функции $-u$. □

Теорема 13.6 (принцип максимума)**.** *Пусть u — гармоническая функция в ограниченной области Ω, непрерывная в замыкании этой области, тогда*

$$\sup_{\partial\Omega} u = \sup_{\overline{\Omega}} u. \tag{13.10}$$

Доказательство. Поскольку Ω — компактное множество, найдется $x_0 \in \overline{\Omega}$ такое, что

$$u(x_0) = \sup_{\overline{\Omega}} u.$$

Если $x_0 \in \partial\Omega$, то соотношение (13.10) очевидно. В свою очередь, если $x_0 \in \Omega$, то по теореме 13.5 функция u является постоянной на множестве Ω и ввиду того, что $u \in C(\overline{\Omega})$, мы снова имеем (13.10). □

Упражнение 13.5. Докажите, что теорема 13.6 остается в силе для всех функций $u \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющих неравенству (13.9).

Следствие 13.2 (принцип минимума)**.** *Пусть u — гармоническая функция в ограниченной области Ω, непрерывная в замыкании этой области, тогда*

$$\inf_{\partial\Omega} u = \inf_{\overline{\Omega}} u.$$

Доказательство. Применяем теорему 13.6 к функции $-u$. □

Замечание 13.1. Теорему 13.5 также принято называть строгим принципом максимума, а следствие 13.1 — строгим принципом минимума.

Теорема 13.7 (неравенство Харнака)**.** *Пусть u — неотрицательная гармоническая функция в открытом шаре B_r^x радиуса $r > 0$ с центром в точке x, тогда*

$$\inf_{B_{\lambda r}^x} u \ge C \sup_{B_{\lambda r}^x} u \tag{13.11}$$

для любого вещественного числа $0 < \lambda < 1$, где постоянная $C > 0$ зависит только от λ и от размерности основного пространства n.

Доказательство. Сначала докажем неравенство (13.11) в случае $\lambda = 1/4$. Для любых двух точек $y, z \in B_{r/4}$, согласно теореме о среднем имеем

$$u(y) = \frac{1}{|B_{r/4}|} \int_{B_{r/4}^y} u \, d\xi$$

и

$$u(z) = \frac{1}{|B_{3r/4}|} \int_{B_{3r/4}^z} u \, d\xi.$$

Несложно увидеть, что $B_{r/4}^y \subset B_{3r/4}^z$ и при этом $|B_{3r/4}| = 3^n |B_{r/4}|$. Таким образом, принимая во внимание неотрицательность функции u на множестве $B_{3r/4}^z$, получим

$$\frac{1}{|B_{3r/4}|} \int_{B_{3r/4}^z} u \, d\xi \ge \frac{1}{|B_{3r/4}|} \int_{B_{r/4}^y} u \, d\xi = \frac{1}{3^n |B_{r/4}|} \int_{B_{r/4}^y} u \, d\xi,$$

откуда немедленно следует, что

$$u(z) \ge \frac{1}{3^n} u(y).$$

Ввиду произвольности выбора $y, z \in B_{r/4}$ последнее неравенство, очевидно, влечет за собой оценку

$$\inf_{B_{r/4}^x} u \ge \frac{1}{3^n} \sup_{B_{r/4}^x} u.$$

Предположим теперь, что λ — произвольное вещественное число из интервала $(0, 1)$. Для любых двух точек $y, z \in B_{\lambda r}^x$ найдется последовательность шаров $B_{(1-\lambda)r}^{x_i}$, $i = 1, \dots, k$, такая, что $y \in \overline{B_{(1-\lambda)r/4}^{x_1}}$, $z \in \overline{B_{(1-\lambda)r/4}^{x_k}}$ и при этом

$\overline{B^{x_i}_{(1-\lambda)r/4}} \cap \overline{B^{x_{i+1}}_{(1-\lambda)r/4}} \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, k-1$. Очевидно, эту последовательность можно выбрать так, что[2]

$$k \le \left[\frac{4\lambda}{1-\lambda}\right] + 1.$$

Для этого центры шаров надо разместить на отрезке, соединяющим точки y и z, на подходящем расстоянии друг от друга. Как было показано выше,

$$\inf_{B^{x_i}_{(1-\lambda)r/4}} u \ge \frac{1}{3^n} \sup_{B^{x_i}_{(1-\lambda)r/4}} u, \quad i = 1, \dots, k.$$

Тем самым, получим

$$u(z) \ge \frac{1}{3^{kn}} u(y),$$

откуда ввиду произвольности выбора $y, z \in B^x_{\lambda r}$ следует (13.11).

Теорема полностью доказана. □

Теорема 13.8 (теорема Лиувилля)**.** *Пусть u — гармоническая функция в $\mathbb{R}^n$ такая, что*

$$\inf_{\mathbb{R}^n} u > -\infty, \tag{13.12}$$

тогда u — постоянная функция.

Доказательство. Положим

$$v = u - \inf_{\mathbb{R}^n} u.$$

Поскольку v является неотрицательной гармонической функцией в шаре B_{2r} для любого $r > 0$, согласно неравенству Харнака будем иметь

$$\inf_{B_r} v \ge C \sup_{B_r} v,$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от n. Таким образом, устремляя r к бесконечности, получим

$$\inf_{\mathbb{R}^n} v \ge C \sup_{\mathbb{R}^n} v,$$

откуда ввиду очевидного равенства

$$\inf_{\mathbb{R}^n} v = 0$$

немедленно следует, что $v \equiv 0$.

Доказательство завершено. □

14. Принцип максимума для уравнения теплопроводности

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \ge 1$. Под $C^{2,1}(\Omega)$ мы будем подразумевать множество функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, которые в любой точке $(x_1, \dots, x_n, t) \in \Omega$ непрерывно дифференцируемы по t и дважды непрерывно дифференцируемы по каждой из переменных x_i, $i = 1, \dots, n$.

Далее для краткости мы будем считать, что $x = (x_1, \dots, x_n)$. Обозначим также $Q^{t_1,t_2}_{x,r} = \{(\xi, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |\xi - x| < r, t_1 < t < t_2\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $t_1 < t_2$.

---

[2] Как это принято, квадратными скобками мы обозначаем целую часть вещественного числа.

Определение 14.1. Говорим, что точка $(x,t) \in \partial\Omega$ принадлежит верхней крышке множества Ω, если найдутся вещественные числа $r > 0$ и $h > 0$ такие, что $Q_{x,r}^{t-h,t} \subset \Omega$ и $Q_{x,r}^{t,t+h} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega$.

Множество точек, принадлежащих верхней крышке Ω, будем обозначать γ. При этом множество $\Gamma = \partial\Omega \setminus \gamma$ будем называть параболической (собственной) границей Ω.

Теорема 14.1 (принцип максимума)**.** *Пусть* $u \in C^{2,1}(\Omega \cup \gamma) \cap C(\overline{\Omega})$ *удовлетворяет неравенствам*

$$u_t - \Delta u \le 0 \quad \text{в } \Omega \cup \gamma,$$

где Ω *— ограниченная область в* $\mathbb{R}^{n+1}$*, тогда*

$$\sup_{\Gamma} u = \sup_{\overline{\Omega}} u.$$

Доказательство. Поскольку $\Gamma \subset \overline{\Omega}$, имеем

$$\sup_{\Gamma} u \le \sup_{\overline{\Omega}} u.$$

Таким образом, остается доказать неравенство

$$\sup_{\Gamma} u \ge \sup_{\overline{\Omega}} u.$$

Рассуждая от противного, допустим, что

$$\sup_{\Gamma} u < \sup_{\overline{\Omega}} u.$$

Тогда полагая

$$v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t,$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, получим

$$v_t - \Delta v < 0 \quad \text{в } \Omega \cup \gamma \tag{14.1}$$

и при этом

$$\sup_{\Gamma} v < \sup_{\overline{\Omega}} v. \tag{14.2}$$

Так как $v \in C(\overline{\Omega})$, существует точка $(x,t) \in \Omega$, для которой

$$v(x,t) = \sup_{\overline{\Omega}} v, \tag{14.3}$$

причем согласно (14.2) будем иметь $(x,t) \in \Omega \cap \gamma$, поэтому найдутся вещественные числа $r > 0$ и $h > 0$ такие, что $\overline{Q_{x,r}^{t-h,t}} \subset \overline{\Omega}$.

Из соотношения (14.1) следует, что должно быть выполнено хотя одно из двух неравенств

$$v_t(x,t) < 0 \tag{14.4}$$

или

$$\Delta v(x,t) > 0. \tag{14.5}$$

Предположим сначала, что имеет место (14.4). Выбрав $h > 0$ достаточно малым, можно считать, что $v_\xi(x,\xi) < 0$ для всех $\xi \in [t-h,t]$. Тем самым, применяя формулу Ньютона-Лейбница, будем иметь

$$v(x,t-h) = v(x,t) - \int_{t-h}^{t} v_\xi(x,\xi)\, d\xi > v(x,t),$$

что противоречит соотношению (14.3).

Пусть теперь выполнено (14.5). Тогда найдется $1 \le i \le n$, для которого

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} > 0.$$

Выбрав $r > 0$ достаточно малым, можно считать, что

$$\frac{\partial^2 u(x_1,\dots,x_{i-1},\xi,x_{i+1},\dots,x_n,t)}{\partial \xi^2} > 0$$

для всех $\xi \in (x_i, x_i + r)$. Согласно формуле Ньютона-Лейбница

$$\frac{\partial u(x_1,\dots,x_{i-1},\zeta,x_{i+1},\dots,x_n,t)}{\partial \zeta} = \frac{\partial u(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n,t)}{\partial x_i} + \int_{x_i}^{\zeta} \frac{\partial^2 u(x_1,\dots,x_{i-1},\xi,x_{i+1},\dots,x_n,t)}{\partial \xi^2}\, d\xi$$

для всех $\zeta \in (x_i, x_i+r)$. Первое слагаемое в правой части последнего равенства ввиду условия (14.3) равно нулю, а второе строго положительно, поэтому

$$\frac{\partial u(x_1,\dots,x_{i-1},\zeta,x_{i+1},\dots,x_n,t)}{\partial \zeta} > 0$$

для всех $\zeta \in (x_i, x_i + r)$, откуда немедленно следует, что

$$\begin{aligned} u(x_1,&\dots,x_{i-1},x_i+r,x_{i+1},\dots,x_n,t) \\ &= u(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n,t) \\ &\quad + \int_{x_i}^{x_i+r} \frac{\partial u(x_1,\dots,x_{i-1},\zeta,x_{i+1},\dots,x_n,t)}{\partial \zeta}\, d\xi \\ &> u(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n,t), \end{aligned}$$

и мы снова приходим к противоречию с условием (14.3).

Теорема полностью доказана. □

15. Пространства С.Л. Соболева

Всюду в этом разделе, если не оговорено противное, под Ω мы будем понимать непустое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$.

Определение 15.1. Множество обобщенных функции из $\mathcal{D}'(\Omega)$, принадлежащих $L_p(\Omega)$ вместе со всеми производными порядка m, называется пространством С.Л. Соболева $W_p^m(\Omega)$.

Пространство С.Л. Соболева $W_p^m(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}'(\Omega) : f \in L_p(\Omega), \partial^\alpha f \in L_p(\Omega), |\alpha| = m\}$ естественным образом наделяется структурой банахова пространства с нормой

$$\|f\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p\, dx + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |\partial^\alpha f|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

Определение 15.2. Под $\overset{o}{W}{}_p^m(\Omega)$ будем понимать замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в норме пространства $W_p^m(\Omega)$.

В случае $p = 2$ пространства $W_2^m(\Omega)$ и $\overset{o}{W}{}_2^m(\Omega)$ принято также обозначать $H^m(\Omega)$ и $\overset{o}{H}{}^m(\Omega)$, соответственно. В этом случае, норма в этих пространствах, очевидно, порождается скалярным произведением

$$(u, v)_m = \int_\Omega uv\,dx + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \partial^\alpha u\,\partial^\alpha v\,dx.$$

Теорема 15.1. *Пространство $W_p^m(\Omega)$ полное.*

Доказательство. Предположим, что f_i, $i = 1, 2, \ldots$, — фундаментальная последовательность в $W_p^m(\Omega)$. Тогда функции f_i и все их производные $\partial^\alpha f_i$ порядка $|\alpha| = m$, $i = 1, 2, \ldots$, образуют фундаментальные последовательности в $L_p(\Omega)$. Поскольку пространство $L_p(\Omega)$ полное, найдутся функции $f \in L_p(\Omega)$ и $f^\alpha \in L_p(\Omega)$, $|\alpha| = m$, такие, что

$$\|f_i - f\|_{L_p(\Omega)} \to 0 \quad \text{при } i \to \infty$$

и

$$\|\partial^\alpha f_i - f^\alpha\|_{L_p(\Omega)} \to 0 \quad \text{при } i \to \infty,\ |\alpha| = m.$$

Покажем, что $f \in W_p^m(\Omega)$, причем $\partial^\alpha f = f^\alpha$, $|\alpha| = m$. В самом деле, пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, тогда в соответствии с определением обобщенной производной будем иметь

$$\int_\Omega \partial^\alpha f_i\,\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_i\,\partial^\alpha \varphi\,dx, \quad |\alpha| = m,\ i = 1, 2, \ldots. \tag{15.1}$$

В то же время, применяя неравенство Гельдера, получим

$$\left| \int_\Omega (\partial^\alpha f_i - f^\alpha)\,\varphi\,dx \right| \le \left(\int_\Omega |\partial^\alpha f_i - f^\alpha|^p\,dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |\varphi|^{p/(p-1)}\,dx \right)^{(p-1)/p}$$

для всех $|\alpha| = m$, $i = 1, 2, \ldots$. Правая часть последнего выражения, очевидно, стремится к нулю при $i \to \infty$, Таким образом, имеем

$$\int_\Omega \partial^\alpha f_i\,\varphi\,dx \to \int_\Omega f^\alpha\,\varphi\,dx \quad \text{при } i \to \infty. \tag{15.2}$$

Аналогично,

$$\left| \int_\Omega (f_i - f)\,\partial^\alpha \varphi\,dx \right| \le \left(\int_\Omega |f_i - f|^p\,dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |\partial^\alpha \varphi|^{p/(p-1)}\,dx \right)^{(p-1)/p}$$

для всех $i = 1, 2, \ldots$, откуда немедленно следует соотношение

$$\int_\Omega f_i\,\partial^\alpha \varphi\,dx \to \int_\Omega f\,\partial^\alpha \varphi\,dx \quad \text{при } i \to \infty. \tag{15.3}$$

Тем самым, объединяя (15.1), (15.2) и (15.3), приходим к выводу, что

$$\int_\Omega f^\alpha\,\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f\,\partial^\alpha \varphi\,dx, \quad |\alpha| = m.$$

Доказательство завершено. □

Теорема 15.2. *Пространство $W_p^m(\Omega)$ сепарабельное.*

Доказательство. Обозначим

$$W = \underbrace{L_p(\Omega) \times \ldots \times L_p(\Omega)}_{N+1},$$

где N — общее количество мультииндексов α таких, что $|\alpha| = m$. Так как $L_p(\Omega)$ — сепарабельное банахово пространство, то W также будет таковым, если его наделить нормой

$$\|w\|_W = \left(\sum_{i=1}^{N+1} \|v_i\|^p \right)^{1/p}, \quad w = (w_1, \ldots, w_{N+1}) \in W.$$

Несложно увидеть, что пространство $W_p^m(\Omega)$ изометрически вкладывается в W, если каждой функции $f \in W_p^m(\Omega)$ поставить в соответствие упорядоченный набор $(f, \ldots, \partial^\alpha f, \ldots)$, где на первом месте стоит сама функция f, а на последующих местах — в лексикографической упорядоченности все ее производные порядка m.

Образ $W_p^m(\Omega)$ при этом вложении будет, очевидно, сепарабельным, т.к. является подмножеством сепарабельного метрического пространства. Таким образом, пространство $W_p^m(\Omega)$ является сепарабельным.

Теорема полностью доказана. $\square$

Упражнение 15.1. Докажите, что всякое подмножество сепарабельного метрического пространства является сепарабельным метрическим пространством.

Теорема 15.3 (неравенство Фридрихса)**.** *Пусть Ω — непустое ограниченное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Тогда для любой функции $u \in \overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\int_\Omega |u|^p \, dx \leq C \int_\Omega |Du|^p \, dx,$$

где $D = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$ — оператор градиента, а $C > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от p, n.

Доказательство. Поскольку Ω — ограниченное множество, существуют вещественные числа $a < b$ такие, что для всякой точки $(x', x_n) \in \Omega$ имеем $a < x_n < b$. Здесь и ниже мы обозначаем $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Пусть $u \in \overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)$. Рассмотрим последовательность функций $u_i \in \mathcal{D}(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots$, такую, что

$$\|u_i - u\|_{W_p^1(\Omega)} \to 0 \quad \text{при } i \to \infty. \tag{15.4}$$

Будем считать, что все функции u_i продолжены нулем за пределы множества Ω, тогда $|u_i(x', \cdot)|^p$, $i = 1, 2, \ldots$, будут, очевидно, абсолютно непрерывными функциями на промежутке $[a, b]$. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$|u_i(x', x_n)|^p = \int_a^{x_n} \frac{\partial |u_i(x', \xi)|^p}{\partial \xi} \, d\xi = \int_a^{x_n} |u_i(x', \xi)|^{p-1} \frac{\partial |u_i(x', \xi)|}{\partial \xi} \, d\xi, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

для всех $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \in [a, b]$, откуда немедленно будем иметь

$$|u_i(x', x_n)|^p \leq \int_a^b |u_i(x', \xi)|^{p-1} \left| \frac{\partial u_i(x', \xi)}{\partial \xi} \right| d\xi, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

Интегрируя последнее неравенство по x_n, приходим к выводу, что справедливы оценки

$$\int_a^b |u_i(x', x_n)|^p \, dx_n \le (b-a) \int_a^b |u_i(x', \xi)|^{p-1} \left| \frac{\partial u_i(x', \xi)}{\partial \xi} \right| d\xi, \quad i = 1, 2, \dots,$$

интегрируя которые по x', в свою очередь, получим

$$\int_\Omega |u_i|^p \, dx \le (b-a) \int_\Omega |u_i|^{p-1} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right| dx, \quad i = 1, 2, \dots. \tag{15.5}$$

В то же время, согласно неравенству Гельдера

$$\int_\Omega |u_i|^{p-1} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right| dx \le \left(\int_\Omega |u_i|^p \, dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right|^p dx \right)^{1/p}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

поэтому (15.5) позволяет утверждать, что

$$\left(\int_\Omega |u_i|^p \, dx \right)^{1/p} \le (b-a) \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right|^p dx \right)^{1/p}, \quad i = 1, 2, \dots. \tag{15.6}$$

По свойству полунормы имеем

$$\left| \left(\int_\Omega |u_i|^p \, dx \right)^{1/p} - \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p} \right| \le \left(\int_\Omega |u_i - u|^p \, dx \right)^{1/p}$$

и

$$\left| \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right|^p dx \right)^{1/p} - \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^p dx \right)^{1/p} \right| \le \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial (u_i - u)}{\partial x_n} \right|^p dx \right)^{1/p}$$

для всех $i = 1, 2, \dots$, откуда, принимая во внимание (15.4), находим

$$\left(\int_\Omega |u_i|^p \, dx \right)^{1/p} \to \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p} \quad \text{при } i \to \infty$$

и

$$\left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right|^p dx \right)^{1/p} \to \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{при } i \to \infty.$$

Тем самым, объединяя два последних соотношения с формулой (15.6) завершаем доказательство. □

Упражнение 15.2. Пусть V — линейное пространство с полунормой $\| \cdot \|$. Докажите, что $|\|v_1\| - \|v_2\|| \le \|v_1 - v_2\|$ для любых $v_1, v_2 \in V$.

16. Задача Дирихле для уравнения Пуассона

В этом разделе, если не оговорено противное, под Ω мы будем понимать непустое открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$.

Определение 16.1. Функция $u \in W_2^1(\Omega)$ называется обобщенным в смысле С.Л. Соболева решением уравнения

$$\Delta u = f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad \text{в } \Omega, \tag{16.1}$$

где $f_i \in L_2(\Omega)$, $i = 0, 1, \dots, n$, если для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ справедливо интегральное тождество

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega f_0 \varphi\, dx - \int_\Omega \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx.$$

Говорим также, что $u \in W_2^1(\Omega)$ в обобщенном смысле удовлетворяет краевому условию Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = u_0, \tag{16.2}$$

где $u_0 \in W_2^1(\Omega)$, если $u - u_0 \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Упражнение 16.1. Пусть Ω — бесконечно гладкая область, $f_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $u_0 \in C^\infty(\partial\Omega)$ и при этом $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ — классическое решение уравнения

$$\Delta u = f_0 \quad \text{в } \Omega,$$

удовлетворяющее условию (16.2). Докажите, что функция u является обобщенным в смысле С.Л. Соболева решением задачи (16.1), (16.2), где $f_i = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Теорема 16.1. *Обобщенная задача Дирихле* (16.1), (16.2) *имеет и притом единственное решение.*

Доказательство. Полагая $v = u - u_0$, будем, очевидно, иметь $v \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ и при этом

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega f_0 \varphi\, dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_i} - f_i \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \tag{16.3}$$

для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Таким образом, нам нужно доказать, что существует единственная функция $v \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющая для всякого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ интегральному тождеству (16.3).

Обозначим

$$[w_1, w_2] = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_1}{\partial x_i} \frac{\partial w_2}{\partial x_i}\, dx, \quad w_1, w_2 \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Согласно неравенству Фридрихса найдется постоянная $C > 0$ такая, что

$$[w, w] \ge C \|w\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

для любого $w \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тем самым, билинейная форма $[\cdot, \cdot]$ определяет скалярное произведение на пространстве $\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$, порождающее норму, эквивалентную соболевской. При этом несложно увидеть, что отображение

$$l(\varphi) = -\int_\Omega f_0 \varphi\, dx - \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_i} - f_i \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx$$

является линейным непрерывным функционалом в этой норме.

В самом деле, линейность l проверяется без труда в то время, как непрерывность следует из оценки

$$\begin{aligned}|l(\varphi)| &\le \left|\int_\Omega f_0\varphi\,dx\right| + \left|\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_i} - f_i\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx\right| \\ &\le \left(\int_\Omega |f_0|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\varphi|^2\,dx\right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u_0}{\partial x_i} - f_i\right|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^2\,dx\right)^{1/2} \\ &\le \left(\left(\int_\Omega |f_0|^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u_0}{\partial x_i} - f_i\right|^2\,dx\right)^{1/2}\right)\|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)}\end{aligned}$$

для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Таким образом, согласно теореме Рисса существует единственная функция $v \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ такая, что для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ имеет место соотношение

$$[v,\varphi] = l(\varphi),$$

которое, очевидно, эквивалентно (16.3).

Доказательство завершено. $\square$

Список литературы

[1] *А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко* Курс дифференциальной топологии и геометрии. Изд-во МГУ, 1980.

[2] *У. Рудин.* Функциональный анализ. М: Мир, 1975.

[3] *Л.С. Понтрягин.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.

[4] *Г.Е. Шилов.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.